数分分析 A3 第五次习题课

何展韬

2023 年 11 月 18 日

1 作业答案 (第 9,10 周)

练习 (习题 17.1.2). 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的可积且绝对可积函数，证明：
(1) 如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 $f(x+\pi)=f(x)$，那么：$a_{2n-1}=b_{2n-1}=0$
(2) 如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 $f(x+\pi)=-f(x)$，那么：$a_{2n}=b_{2n}=0$

解. (1) 直接由 Fourier 系数公式可得：

$$\begin{aligned}
a_{2n-1}&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(2n-1)x\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos(2n-1)x\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos(2n-1)x\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos(2n-1)x\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x+\pi)\cos[(2n-1)(x+\pi)]\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos(2n-1)x\mathrm{d}x-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos(2n-1)x\mathrm{d}x\\
&=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{2n-1}&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(2n-1)x\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin(2n-1)x\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin(2n-1)x\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin(2n-1)x\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x+\pi)\sin[(2n-1)(x+\pi)]\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin(2n-1)x\mathrm{d}x-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin(2n-1)x\mathrm{d}x\\
&=0
\end{aligned}$$

(2) 与 (1) 同理，对 a_n，这里 $n=0$ 的情况不需要单独讨论。 □

练习 (习题 17.1.4). 如果级数

$$\frac{|a_n|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)<+\infty$$

那么级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{1}$$

必为某周期为 2π 的函数的 Fourier 级数。

解. 首先由于:

$$|a_k\cos kx+b_k\sin kx|\leqslant |a_k|+|b_k| \quad (\forall k\in\mathbb{N}^*, x\in\mathbb{R})$$

故由函数项级数一致收敛的 Weierstrass 判别法可得式 (1) 级数在 $x\in\mathbb{R}$ 上一致收敛，记为 $f(x)$ ($x\in\mathbb{R}$)。易得 $f(x)$ 周期为 2π。更进一步，对每个给定的 $n\in\mathbb{N}$，都有:

$$|(a_k\cos kx+b_k\sin kx)g_n(x)|\leqslant |a_k|+|b_k| \quad (\forall k\in\mathbb{N}^*, x\in\mathbb{R})$$

其中 $g_n(x)=\cos nx$ 或 $\sin nx$。
因此对每个 $n\in\mathbb{N}$，级数

$$\frac{a_0}{2}g_n(x)+\sum_{k=1}^{\infty}g_n(x)(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{2}$$

在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛。由于式 (2) 级数通项在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积，由一致收敛的性质可知，其在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积，且可以逐项积分，故:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right)\mathrm{d}x\\
&=a_0+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\mathrm{d}x\\
&=a_0+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}a_k\cos kx\mathrm{d}x \quad (\sin kx\text{那项由于奇函数，积分为 }0)\\
&=a_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2}\cos nx+\sum_{k=1}^{\infty}\cos nx(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}a_k\cos kx\cos nx\mathrm{d}x \quad (\sin kx\text{那项由于奇函数，积分为 }0) \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}a_k\left(\frac{\cos(n+k)x+\cos(n-k)x}{2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_n}{2}\mathrm{d}x \quad (\text{只有}n-k\text{那项在}k=n\text{时积分有非 }0\text{ 值}) \\
&= a_n \quad (\forall n\geqslant 1)
\end{aligned}
$$

同理可得：

$$
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=b_n \quad (\forall n\geqslant 1)
$$

故式 (1) 级数为 $f(x)$ 的 Fourier 级数。 □

注 1.1. 注意三角级数和 Fourier 级数的区别：
(1) 三角级数就是形如 $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 的级数，三角级数不一定是 Fourier 级数；
(2)Fourier 级数是特殊的三角级数，要求存在可积且绝对可积的 $f(x)$ 使得 a_n, b_n 满足 Fourier 系数公式，并由此得到一个必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0, \lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$；
(3) 对本题而言，$f(x)$ 是一个三角级数，由于条件使其代入 Fourier 系数公式中可以逐项积分，才能通过计算证明 $f(x)$ 的 Fourier 级数是它自己，即三角级数的 Fourier 级数是它自己。因此计算 Fourier 系数的过程不可省略。

练习 (习题 17.1.6).
设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可导，f' 可积且绝对可积。如果 $f(-\pi)=f(\pi)$，证明：

$$
a_n=o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad b_n=o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n\to\infty)
$$

解. 为了让 Fourier 系数公式中出现 f'，不难想到需要运用分部积分公式，结合条件 $f(-\pi)=f(\pi)$ 可得：

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (\forall n \geqslant 1)$$

由于 f' 可积且绝对可积，因此对 f' 用 Riemann-Lebesgue 引理可得：

$$\lim_{n\to\infty} na_n = -\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0$$

此即

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n\to\infty)$$

对 b_n 同理。 □

练习 (**习题 17.2.2(1)**).
在区间 $(-\pi,\pi)$ 上把下列函数展开为 Fourier 级数：(1) $|x|$.

解. 首先将 $|x|$ 以 2π 为周期延拓为 $\mathbb{R}$ 上的函数。由于 $|x|$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上是偶函数，故 $b_n = 0\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)$。对 a_n，直接代入 Fourier 系数公式得：

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\mathrm{d}x = \pi$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{n\pi}\left(x\sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1) \quad (\forall n\geqslant 1)
\end{aligned}$$

由于延拓后的函数在 $\mathbb{R}$ 上连续且分段可微，因此它的 Fourier 级数在 $(-\pi,\pi)$ 上逐点收敛于 $|x|$，故：

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1)\cos nx \quad (x\in(-\pi,\pi))$$

□

练习 (**习题 17.2.4(1)**).
在区间 $(-l,l)$ 上把下列函数展开为 Fourier 级数：(1) x.

解. 首先将 x 以 $2l$ 为周期延拓为 $\mathbb{R}$ 上的函数 (可以补充定义 $x=l$ 上的值再周期延拓，这个补充定义的值对之后的计算没有任何影响)。由于 x 在 $(-l,l)$ 上是奇函数，故 $a_n=0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$。对 b_n，直接代入区间 $(-l,l)$ 的 Fourier 系数公式得：

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} x\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{l}\int_0^{l} x\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{t=\frac{\pi}{l}x} \frac{2l}{\pi^2}\int_0^{\pi} t\sin nt\mathrm{d}t \\
&= \frac{2l}{n\pi^2}\left(t\cos nt\Big|_{\pi}^{0}+\int_0^{\pi}\cos nt\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{2l}{n\pi^2}\left((-1)^{n-1}\pi+\frac{1}{n}\sin nt\Big|_0^{\pi}\right) \\
&= (-1)^{n-1}\frac{2l}{n\pi} \quad (\forall n\geqslant 1)
\end{aligned}$$

由于延拓后的函数在 $\mathbb{R}$ 上分段可微，且在 $(-l,l)$ 上连续，因此它的 Fourier 级数在 $(-l,l)$ 上逐点收敛于 x，故：

$$x=\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{n\pi}{l}x \quad (x\in(-l,l))$$

□

注 1.2. 注意习题 17.2.2 和 17.2.4，题目要求“将函数展开为 Fourier 级数”，因此我们需要建立类似于幂级数展开的等式，即“$f(x)=f(x)$ 的 Fourier 级数 $(x\in I)$”的等式，而不只是写“$f(x)\sim f(x)$ 的 Fourier 级数”的结果。

练习 (**问题 17.2.3**). 设 g 是区间 $[0,h](h>0)$ 上的增函数，证明：

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^h g(t)\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}g(0+0)$$

解. 首先，右式可以表达为：

$$\frac{\pi}{2}g(0+0)=g(0+0)\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=g(0+0)\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\lambda h}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\lambda t}g(0+0)\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^h\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t$$

因此要证命题成立，即证：

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^h (g(t)-g(0+0))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t=0 \tag{3}$$

一方面，对 $\forall\epsilon>0$，$\exists\, 0<\delta=\delta(\varepsilon)<h$，使得：

$$0\leqslant g(\delta)-g(0+0)<\varepsilon \tag{4}$$

固定 δ，由于 $g(t)-g(0+0)$ 在 $[0,\delta]$ 非负且单调递增，$\dfrac{\sin\lambda t}{t}$ 在 $[0,\delta]$ 可积，因此由第二积分中值定理，$\exists\,\eta\in[0,\delta]$，使得：

$$\int_0^\delta (g(t)-g(0+0))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t=(g(\delta)-g(0+0))\int_\eta^\delta \frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t$$

故：

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left|\int_0^\delta (g(t)-g(0+0))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t\right|=(g(\delta)-g(0+0))\lim_{\lambda\to+\infty}\left|\int_\eta^\delta \frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t\right| \tag{5}$$

又有：

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left|\int_\eta^\delta \frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t\right|=\lim_{\lambda\to+\infty}\left|\int_{\lambda\eta}^{\lambda\delta} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right|=\begin{cases}0 & \eta>0\\ \dfrac{\pi}{2} & \eta=0\end{cases} \tag{6}$$

其中 $\eta=0$ 时的值即为 $\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的积分值，$\eta>0$ 时的值为 0 是由于 $\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上反常可积，利用无穷积分的 Cauchy 收敛。因此结合式 (4)(5)(6) 可得：

$$\varlimsup_{\lambda\to+\infty}\left|\int_0^\delta (g(t)-g(0+0))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{\pi}{2}\varepsilon \tag{7}$$

另一方面，$\dfrac{g(t)-g(0+0)}{t}$ 在 $t\in[\delta,h]$ 上 Riemann 可积，故由 Riemann-Lebesgue 定理：

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_\delta^h (g(t)-g(0+0))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t=0 \tag{8}$$

故结合式 (7)(8) 可得：

$$\begin{aligned}&\varlimsup_{\lambda\to+\infty}\left|\int_0^h (g(t)-g(0+0))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant\varlimsup_{\lambda\to+\infty}\left|\int_0^\delta (g(t)-g(0+0))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t\right|+\varlimsup_{\lambda\to+\infty}\left|\int_\delta^h (g(t)-g(0+0))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant\frac{\pi}{2}\varepsilon\end{aligned} \tag{9}$$

对式 (9) 令 $\varepsilon\to0$，得：

$$\varlimsup_{\lambda\to+\infty}\left|\int_0^h (g(t)-g(0+0))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t\right|=0$$

从而式 (3) 成立，即证。 □

2 期中考试延伸

本次期中考试第 8 题（详见群文件《2023 数分 A3 期中考试答案与答案指引》）对“闭区间上连续”的运用是：利用“一致连续”，将有限闭区间进行足够细的分割，从而让每一段小区间里函数值的变化都能得到很好的控制；同时还利用分割点的有限性，将区间上每一点的逐点收敛问题转化为有限个点上的逐点收敛问题，从而可以取到一个充分大但有限的 N。这种有限分割，考察分割点的思想其实在之前的某道补充作业里已经出现过（详见群文件《第三次习题课讲义》），它在某些重要定理的证明中也发挥着巨大作用。下面我们介绍这种思想在 Arzela-Ascoli 定理中的运用。

定理 1 (Arzela-Ascoli).
$[a,b]$ 是有限闭区间，$\mathscr{F}=\{f|f\in \mathrm{C}([a,b])\}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数族（可以不可数），则 $\mathscr{F}$ 是列紧集，当且仅当 $\mathscr{F}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界且等度连续。

注 2.1. 关于“列紧集”,“一致有界”,“等度连续”的概念：

(1) $\mathscr{F}$ 是列紧集：$\forall\{f_n\}\subset\mathscr{F}$，$\exists\{f_{n_k}\}\subset\{f_n\}$ 和某个 $f\in\mathscr{F}$，使得对 $\forall\varepsilon>0$，当 k 充分大时都有 $\max\limits_{x\in[a,b]}|f_{n_k}(x)-f(x)|<\varepsilon$；即 $\forall\{f_n\}\subset\mathscr{F}$ 都有一致收敛子列；

(2) $\mathscr{F}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界：$\exists M\geqslant 0$ 与 $f\in\mathscr{F}$ 无关，使得 $\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|\leqslant M\ (\forall f\in\mathscr{F})$；

(3) $\mathscr{F}$ 在 $[a,b]$ 上等度连续：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 与 f 无关，使得 $\forall|x-y|<\delta\ (\forall x,y\in[a,b])$，都有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon\ (\forall f\in\mathscr{F})$。

我们只证明定理 1 的“已知一致有界和等度连续”，推“列紧”这一方向。为证此，我们还需要关于 $\mathscr{F}$“列紧性”的一个刻画。

引理 1 ($\mathscr{F}$ 列紧性刻画).
对定理 1 中的函数族 $\mathscr{F}$，若其完全有界，则其为列紧集。

注 2.2.
$\mathscr{F}$ 完全有界是指：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\{f_n\}_{n=1}^N\subset\mathscr{F}$，$N=N(\varepsilon)<\infty$，使得 $\mathscr{F}\subset\bigcup\limits_{n=1}^N B(f_n,\varepsilon)$，其中

$$B(f_n,\varepsilon)=\left\{g\in\mathscr{F}\,\middle|\,\max_{x\in[a,b]}|g(x)-f_n(x)|<\varepsilon\right\}\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)。$$

证明. 对 $\forall\{f_n\}\subset\mathscr{F}$，由 $\mathscr{F}$ 完全有界，对 $\varepsilon=1$，$\mathscr{F}$ 会被有限个“球”覆盖，“球”即类似 $B(h_n,1)$ 的集合，且满足每个“球”的球心 $h_n\in\mathscr{F}$。故存在一个“球”，它包含 $\{f_n\}$ 中无穷多个元素，不妨设这个球为 $B(g_1,1)$，记 $\{f_n\}\cap B(g_1,1)=\{f_n^{(1)}\}$。对 $\{f_n^{(1)}\}$ 和 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，我们同理可以选出一个“球”$B(g_2,\dfrac{1}{2})$，它包含 $\{f_n^{(1)}\}$ 中无穷多个元素，记 $\{f_n^{(1)}\}\cap B(g_2,\dfrac{1}{2})=$

$\{f_n^{(2)}\}$。以此类推，我们可以得到一列"球"$\{B(g_n,\dfrac{1}{n})\}$，以及 $\{f_n^{(k+1)}\}\subset\{f_n^{(k)}\}\subset\{f_n\}$。现在我们取出所有的 $\{f_k^{(k)}\}(\forall k\in\mathbb{N}^*)$，即 $f_1^{(1)},f_2^{(2)},f_3^{(3)}\cdots$，则 $\{f_k^{(k)}\}$ 为 $\{f_n\}$ 的一个一致收敛子列。这是因为在给定 k 之后，$f_k^{(k)},f_{k+1}^{(k+1)},f_{k+2}^{(k+2)}\cdots$ 都会在 $\{f_n^{(k)}\}$ 中，从而在 $B(g_k,\dfrac{1}{k})$，从而：

$$\max_{x\in[a,b]}|f_m^{(m)}(x)-f_n^{(n)}(x)|\leqslant\max_{x\in[a,b]}|g_k(x)-f_m^{(m)}(x)|+\max_{x\in[a,b]}|g_k(x)-f_n^{(n)}(x)|<\frac{2}{k}\quad(\forall n,m\geqslant k)$$

不难发现这是函数列一致收敛的 Cauchy 收敛准则，即证。 □

下面进行定理 1"已知一致有界和等度连续"，推"列紧"这一方向的证明。

证明. 由引理 1，我们只需要证明 $\mathscr{F}$"一致有界和等度连续"可以推出"完全有界"即可。首先由等度连续，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 与 f 无关，使得：

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon\quad(\forall f\in\mathscr{F},\,|x-y|<\delta)$$

对这个 δ，由于 $[a,b]$ 是有限闭区间，因此我们可以对其做分割，得到 $\{x_n\}_{n=1}^N$，满足 $x_0=a$ $x_N=b$ $|x_{i+1}-x_i|<\delta\,(\forall 0\leqslant i<N)$。
又由一致有界，$\exists M\geqslant 0$ 与 $f\in\mathscr{F}$ 无关，使得 $\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|\leqslant M\,(\forall f\in\mathscr{F})$。进一步我们可以对函数族 $\mathscr{F}$ 的"一致值域"做分割：把 $[-M,M]$ 等分为长度 $<\varepsilon$ 的区间并，并把分割点记为 $\{y_k\}_{k=1}^m$。由此我们把 $[a,b]$ 和 $[-M,M]$ 都做了分割，可以想象这两个分割构成了一个很密的"网"。
接着我们定义分割点之间的映射集合 $\mathscr{E}=\left\{g:\{x_n\}_{n=1}^N\mapsto\{y_k\}_{k=1}^m\right\}$，$\mathscr{E}$ 包含了所有从 x 轴分割点到 y 轴分割点的映射，由于两个分割有限，因此 $\mathscr{E}$ 是个有限集。
我们再定义一个映射 $\phi:\mathscr{F}\to\mathscr{E},f\mapsto g$，满足对 $\forall 0\leqslant n\leqslant N$ 都有：

$$\phi(f)(x_n)=g(x_n)\qquad|f(x_n)-g(x_n)|\text{最小}$$

其中若对某个 x_n，符合条件的 $g(x_n)$ 不止一个，那么取函数值较小的那个，以保证映射的良定义。换句话说，映射 ϕ 是任给一个 $f\in\mathscr{F}$，找到一个在分割点 $\{x_n\}_{n=1}^N$ 上跟 f 函数值靠得最近的 $g\in\mathscr{E}$。
此时若 $\exists\,f_1,f_2\in\mathscr{F}$ 满足 $\phi(f_1)=\phi(f_2)=g$，则对每个 $x\in[a,b]$，也可以找到一个分割点 x_n，使得 $|x-x_n|<\delta$，故有：

$$\begin{aligned}&|f_1(x)-f_2(x)|\\\leqslant&|f_1(x)-f_1(x_n)|+|f_1(x_n)-g(x_n)|+|g(x_n)-f_2(x_n)|+|f_2(x_n)-f_2(x)|\\<&\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon\end{aligned}\tag{10}$$

$$= 4\varepsilon$$

其中第 1,4 项放缩用的是等度连续，第 2,3 项放缩来自我们定义的映射 ϕ。因此若 $f_1, f_2 \in \mathscr{F}$ 在 ϕ 下的像是同一个函数，那么它们的差值会一致小。

注意到 $\mathscr{F} = \bigcup\limits_{g\in\mathscr{E}} \mathscr{F}_g$，其中 $\mathscr{F}_g = \{f \in \mathscr{F} | \phi(f) = g\}$，由于 ϕ 是映射，且 $\mathscr{E}$ 有限集，故这个并集是有限不交并，且在每一个 $\mathscr{F}_g$ 中都有：

$$\max_{x\in[a,b]} |f_1(x) - f_2(x)| < 4\varepsilon \quad (\forall f_1, f_2 \in \mathscr{F}_g)$$

因此我们只要在每个 $\mathscr{F}_g$ 中取出一个代表元，得到一个有限集 $\{h_n\}_{n=1}^{N_0} \subset \mathscr{F}$，$N_0$ 为集合 $\mathscr{E}$ 的大小，是个有限数，则必有 $\mathscr{F} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N_0} B(h_n, 4\varepsilon)$，故 $\mathscr{F}$ 完全有界。 $\square$