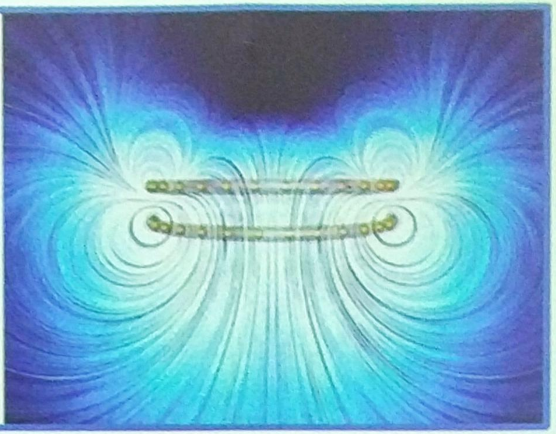
一、真空与介质中磁场

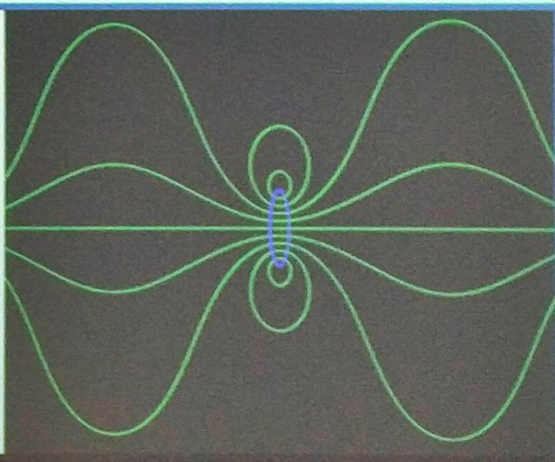
安培定律

$$d\vec{F}_{12} = k\frac{(I_2 d\vec{l}_2)\times(I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{e}_r)}{r_{12}^2}$$



毕奥-萨伐尔定律

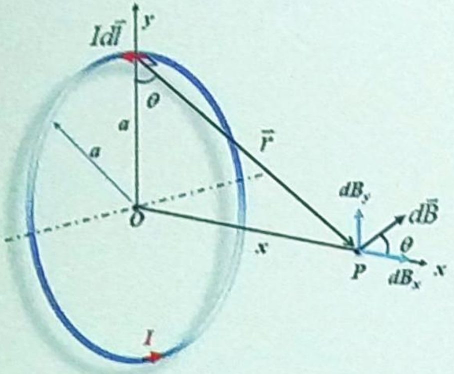
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l} \times \frac{\vec{R}}{R^3}$$



真空中稳恒磁场的基本性质

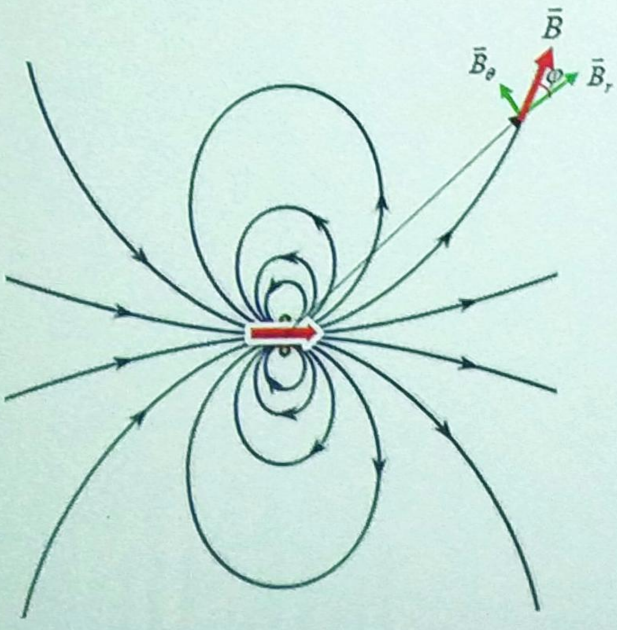
积分形式	微分形式
$\begin{cases} \oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_s \vec{j}\cdot d\vec{S} \end{cases}$	$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ \nabla\times\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$

圆环电流的磁场



$$B_x = \frac{\mu_0}{2}\frac{a^2 I}{(a^2+x^2)^{3/2}} \qquad B_0 = \frac{\mu_0}{2}\frac{I}{a}$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}$$

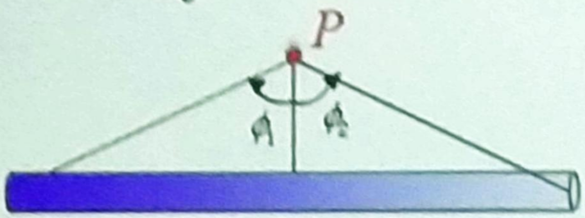


$$\vec{B}_r = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m\cos\theta}{r^3}\vec{e}_r$$

$$\vec{B}_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\sin\theta}{r^3}\vec{e}_\theta$$

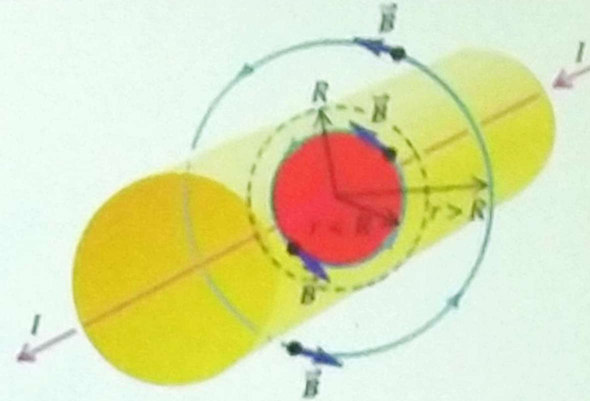
环路定理计算磁场

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\phi_1-\cos\phi_2)$$

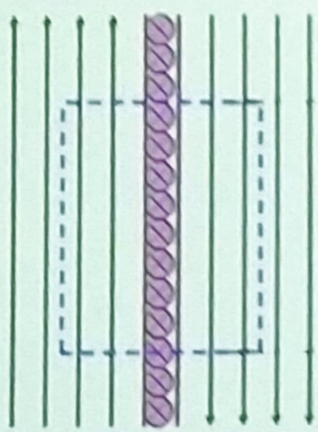


$$B_{内}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R^2}r$$

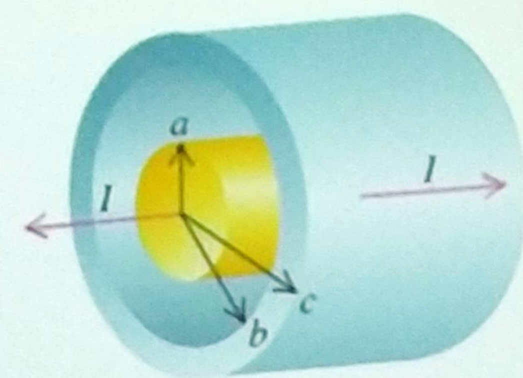
$$B_{外}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$$



$$B=\frac{1}{2}\mu_0 i$$

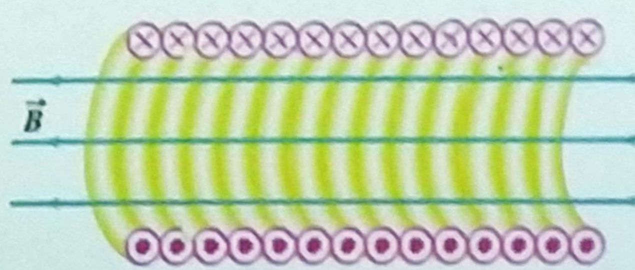


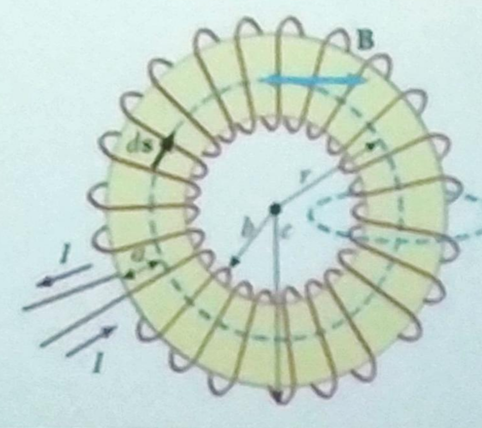
$$\begin{cases} r<a, & B=\dfrac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \\ a<r<b, & B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ b<r<c, & B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\left[1-\dfrac{r^2-b^2}{c^2-b^2}\right] \\ r>c, & B=0 \end{cases}$$



$$B=\frac{\mu_0 n I}{2}(\cos\beta_1-\cos\beta_2)$$

$$B=\mu_0 n I$$





磁介质磁场基本性质

$$\begin{cases} \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_{i0} \\ \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

介质本构方程:

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} \qquad \vec{H} = \vec{B} / \mu_0 - \vec{M}$$

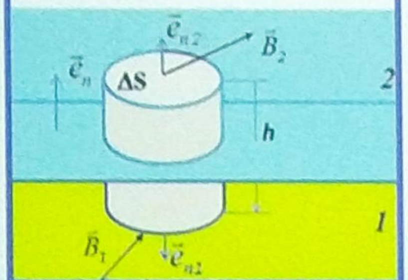
均匀各向同性

积分形式
边界突变时可适用

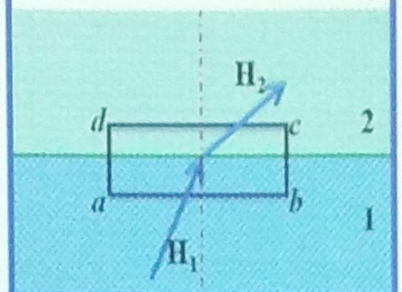
微分形式
边界突变时不适用

磁介质边值关系

$$B_{2n} = B_{1n}$$



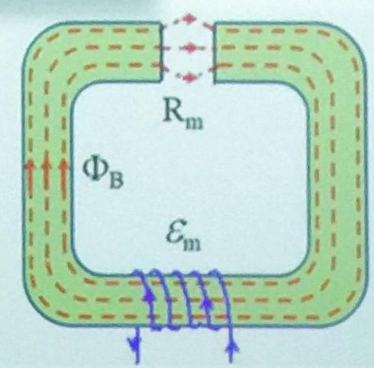
$$H_{1t} - H_{2t} = j_0$$



磁路定律

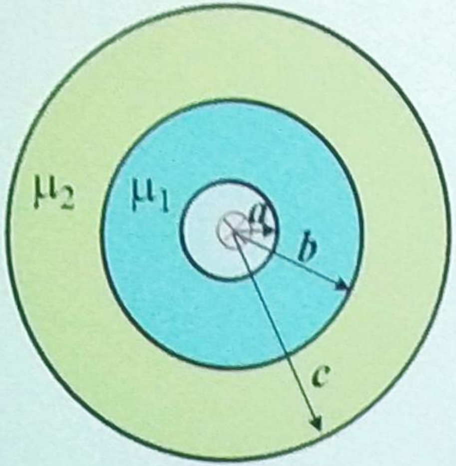
$$\Phi_m \left(R_m + r_m \right) = \varepsilon_m$$

$$R_{mi} = \int_i \frac{dl_i}{\mu_0 \mu_i S_i} \qquad \varepsilon_m = \sum N_i I_i$$



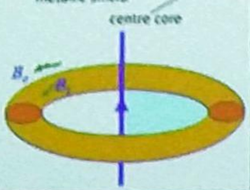
两种特殊的磁介质构形

介质分界面与B平行



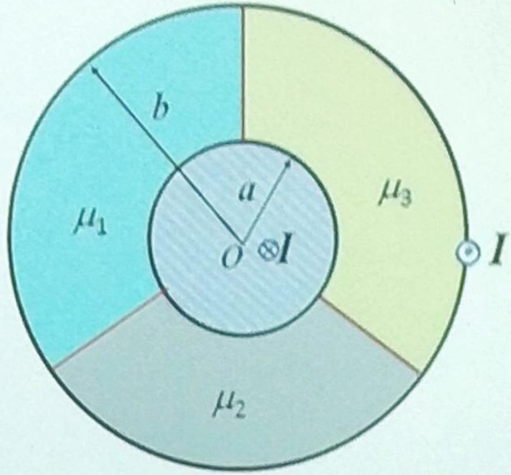
$$\vec{H}_1 = \vec{H}_2$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0$$



$$\vec{B} = \mu_r \vec{B}_0$$

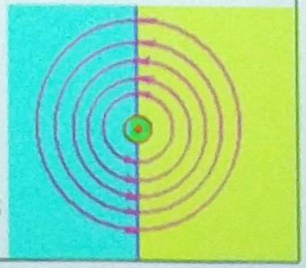
介质分界面与B垂直



$$\vec{B}_1 = \vec{B}_2 = \vec{B}_3$$

$$\vec{H}_i = \frac{1}{\mu_0 \mu_i} \vec{B}$$

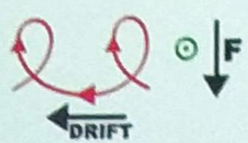
$$\vec{H}_1 \neq \vec{H}_2 \neq \vec{H}_3$$



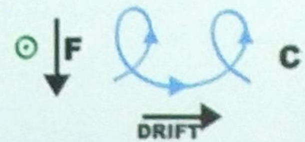
安培力与洛伦兹力

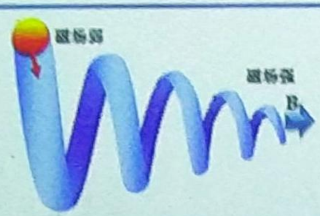
$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B} \quad \xleftrightarrow{Id\vec{l} = q\vec{v}} \quad \vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}，\quad \vec{B}' = \vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}$$



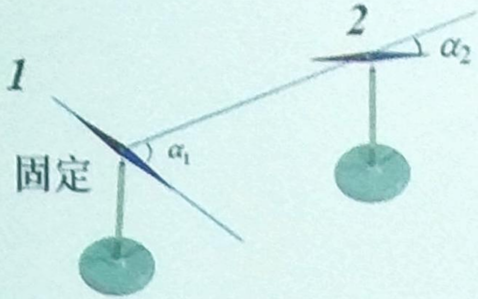
$$\vec{v} = \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{qB^2}$$

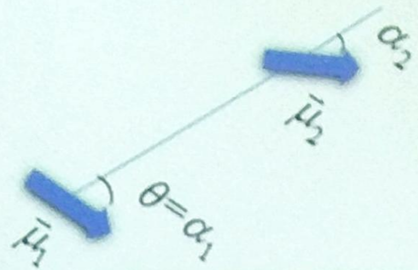




$$\mu = SI = \pi R^2 \frac{q}{T} = \frac{1}{2} m v_\perp^2 / B$$

【例】证明两个小磁针平衡时的角满足 $\tan\alpha_1 = -\frac{1}{2}\tan\alpha_2$





$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}$$

【解】

$$W = -\vec{\mu}_2\cdot\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0\mu_1\mu_2}{4\pi r^3}\left[2\cos\theta\cos\alpha_2 + \sin\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_2\right)\right]$$

$$= -\frac{\mu_0\mu_1\mu_2}{4\pi r^3}\left[2\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2\right]$$

$$\frac{dW}{d\alpha_2} = 0 \qquad -2\cos\alpha_1\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\cos\alpha_2 = 0$$

$$tan\,\varphi = \frac{B_\theta}{B_r} = \frac{1}{2}tan\,\theta$$

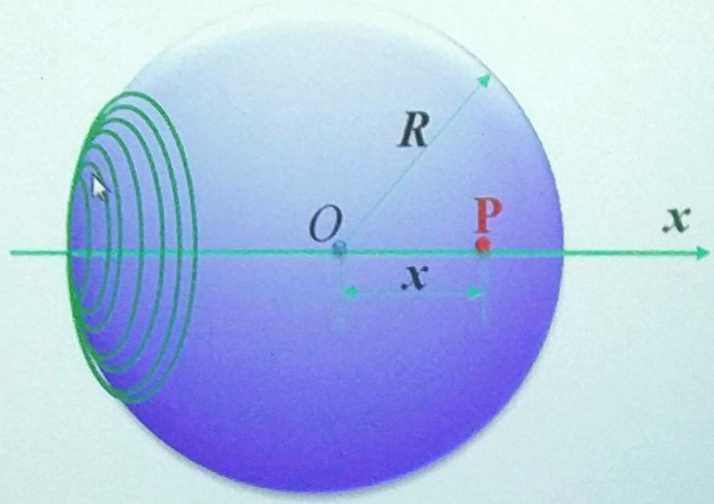
【例1】球形线圈由表面绝缘的细导线在半径为R的球面上密绕而成，线圈中心在同一直径上，沿这直径单位长度内的匝数为n, 并且各处n都相同，通过线圈的电流为I。设在该直径上一点P， 到球心的距离为x, 求下列各处的磁感应强度。

（1）$x=0$处； （球心处）

（2）$x=R$处（直径与球面交点处）

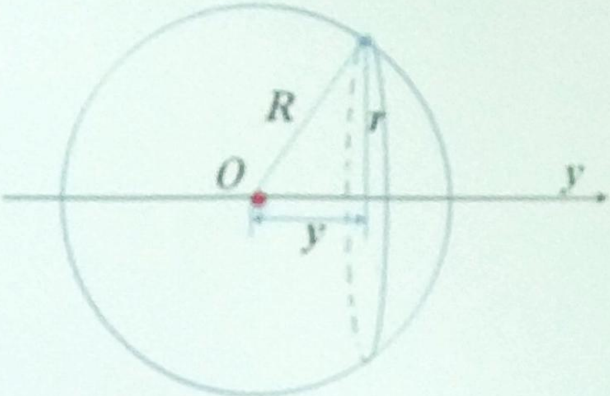
（3）$x<R$

（4）$x>R$



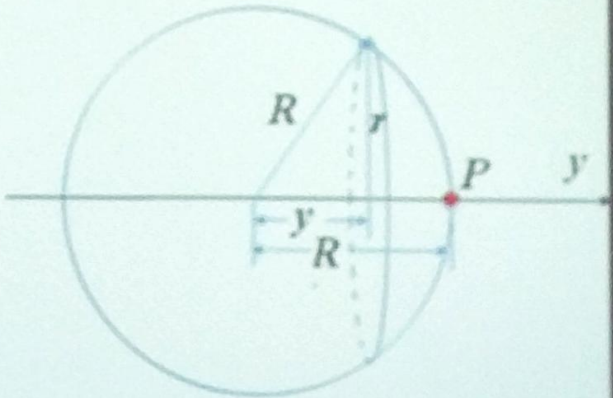
注：有很多人

【解】（1）球心,场点x=0到任一载流圆的距离为y



$$dB=\frac{\mu_0}{2}\frac{r^2 dI}{\left(r^2+y^2\right)^{3/2}}=\frac{\mu_0 nI}{2R^3}(R^2-y^2)dy$$

$$B=\frac{\mu_0 nI}{2R^3}\int_{-R}^{R}(R^2-y^2)dy=\frac{2}{3}\mu_0 nI$$



（2）x=R，场点P到任一载流圆的距离为(R-y)

$$dB=\frac{\mu_0 nI}{2}\frac{(R^2-y^2)dy}{\left(\left(R^2-y^2\right)+\left(R-y\right)^2\right)^{3/2}}=\frac{\mu_0 nI}{4R\sqrt{2R}}\frac{(R+y)}{(R-y)^{1/2}}dy$$

$$B = \frac{\mu_0 nI}{4R\sqrt{2R}}\left[\int_{-R}^{R}\frac{R}{(R-y)^{1/2}}dy + \int_{-R}^{R}\frac{y}{(R-y)^{1/2}}dy\right]$$

$$= \frac{\mu_0 nI}{4R\sqrt{2R}}\left[2R(R-y)^{1/2}\Big|_{-R}^{R} - 2\int_{-R}^{R} y\,d(R-y)^{1/2}\right]$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int y\,d(R-y)^{1/2} = y(R-y)^{1/2} - \int (R-y)^{1/2}dy = y(R-y)^{1/2} - \frac{2}{3}(R-y)^{3/2}$$

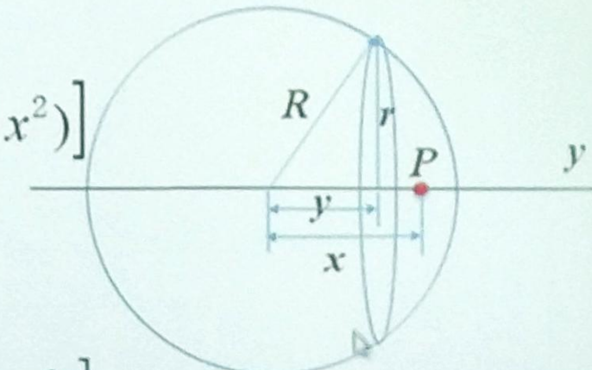
$$= \frac{\mu_0 nI}{4R\sqrt{2R}}\left[2R(2R)^{1/2} - 2\left[R(2R)^{1/2} - \frac{2}{3}(2R)^{3/2}\right]\right]$$

$$= \frac{\mu_0 nI}{4R\sqrt{2R}}\frac{2}{3}(2R)^{3/2} = \frac{2}{3}\mu_0 nI$$

（3）x<R, P点到任一圆电流的距离为(y-x)

$$dB=\frac{\mu_0 nI}{2}\frac{(R^2-y^2)dy}{\left(\left(R^2-y^2\right)+\left(y-x\right)^2\right)^{3/2}}=\frac{\mu_0 nI}{2}\frac{(R^2-y^2)}{(R^2+x^2-2xy)^{3/2}}dy$$

令 $t=R^2+x^2-2xy,\qquad y=-\frac{1}{2x}\left[t^2-(R^2+x^2)\right]$



$$y^2=\frac{1}{4x^2}\left[t^4+(R^2+x^2)^2-2t^2(R^2+x^2)\right]$$

$$dy=\frac{-tdt}{x}$$

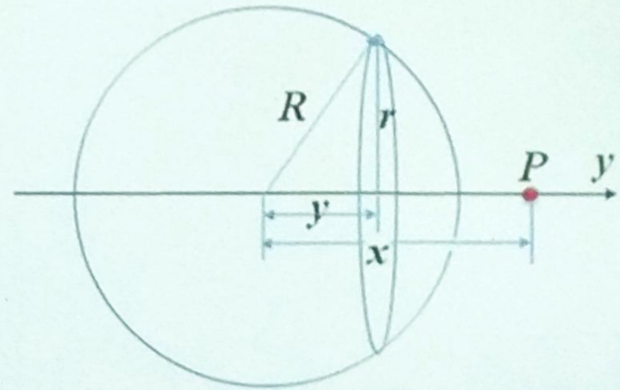
$$R^2-y^2=\frac{1}{4x^2}\left[-t^4-(R^2-x^2)^2+2t^2(R^2+x^2)\right]$$

$$dB=\frac{\mu_0 nI}{8x^3}\cdot\frac{1}{t^2}\left[t^4+(R^2-x^2)^2-2t^2(R^2+x^2)\right]dt$$

$$B=\frac{\mu_0 nI}{8x^3}\int_{R+x}^{R-x}\frac{1}{t^2}\left[t^4+(R^2-x^2)^2-2t^2(R^2+x^2)\right]dt$$

$$=\frac{\mu_0 nI}{8x^3}\left[\frac{-(R^2-x^2)}{t}+\frac{t^3}{3}-2t(R^2+x^2)\right]_{R+x}^{R-x}=\frac{2}{3}\mu_0 nI$$

（4）x>R, P点到任一圆电流的距离为（**x-y), **积分过程与（**3**）相同， 积分上下限改为从（**x+R)**到（**x-R)**

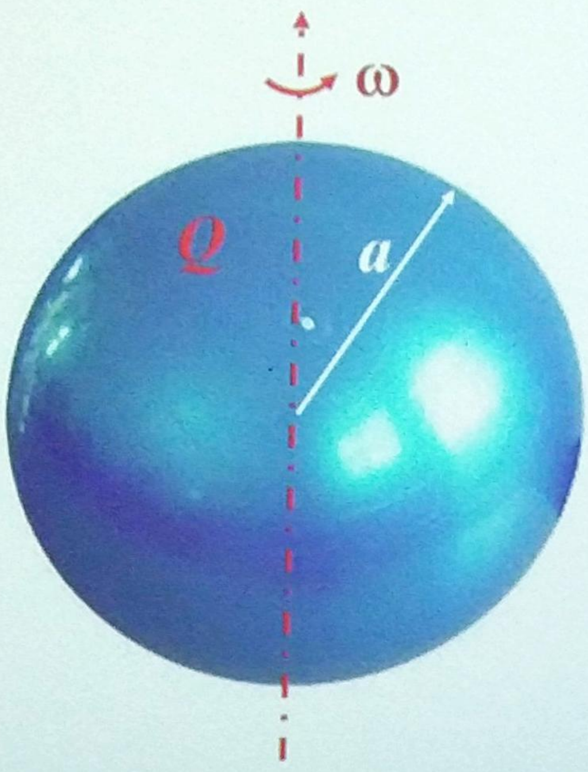


$$B=\frac{\mu_0 nI}{8x^3}\int_{R+x}^{x-R}\frac{1}{t^2}\left[t^4+(R^2-x^2)^2-2t^2(R^2+x^2)\right]dt$$

$$=\frac{2}{3}\mu_0 nI\cdot\frac{R^3}{x^3}$$

$$\boxed{\vec{B}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}}{r^3}+\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}}$$

【例】电荷量为Q均匀地分布在半径为a的球面上，当该球以匀角速度ω绕它的一个固定直径旋转时，求球内轴线上任一点的磁感应强度。

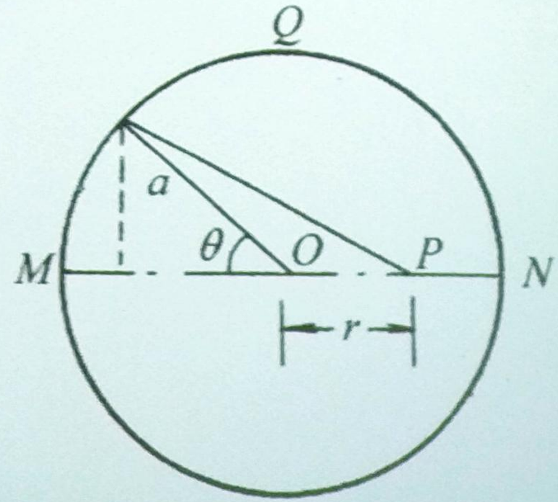


【解】球内轴线上任一点P, 距球心为r，球面上一个环带的电荷量为

$$dQ = \sigma \cdot 2\pi a^2 \sin\theta d\theta = \frac{1}{2} Q \sin\theta d\theta$$

该环带在旋转时，产生的圆电流为

$$dI = \frac{dQ}{T} = \frac{\omega dQ}{2\pi} = \frac{\omega Q}{4\pi} \sin\theta d\theta$$



该圆电流在距离圆心为r处P点产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 a^2 I}{2(r^2 + a^2)^{3/2}}$$

由此得 dI 在 P 点产生的磁感强度的大小为

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 (a\sin\theta)^2 \mathrm{d}I}{2[(a\sin\theta)^2 + (a\cos\theta + r)^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 Q a^2 \omega}{8\pi} \frac{\sin^3\theta \mathrm{d}\theta}{(r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta)^{3/2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 Q a^2 \omega}{8\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^3\theta \mathrm{d}\theta}{(r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 Q a^2 \omega}{8\pi} \frac{1}{4a^3 r^3} \left[\frac{1}{3}(r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta)^{3/2} \right.$$

$$\left. - 2(r^2 + a^2)\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta} - \frac{(a^2 - r^2)^2}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta}} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}$$

$$=\frac{\mu_0 Qa^2\omega}{8\pi}\frac{1}{4a^3r^3}\frac{16}{3}r^3=\frac{\mu_0 Q\omega}{6\pi a}$$

B 与 r 无关，故轴线 MN 上任一点的磁感强度都相同，

$$I_{tot}=\int_0^{\pi}\frac{\omega Q}{4\pi}\sin\theta d\theta=\frac{\omega Q}{2\pi}$$

$$B=\frac{\mu_0}{6\pi a}Q\omega=\frac{\mu_0}{6\pi a}2\pi I_{tot}=\frac{1}{3a}\mu_0 I_{tot}=\frac{2}{3}\mu_0 i$$

i为沿直径方向单位长度的电流密度。(平均)

求球外轴线上任一点的磁感应强度；并给出等效的电偶极矩。

而在球外则与位于中心的磁偶极子 $\vec{m} = m\hat{z}$

所产生的磁场相同。

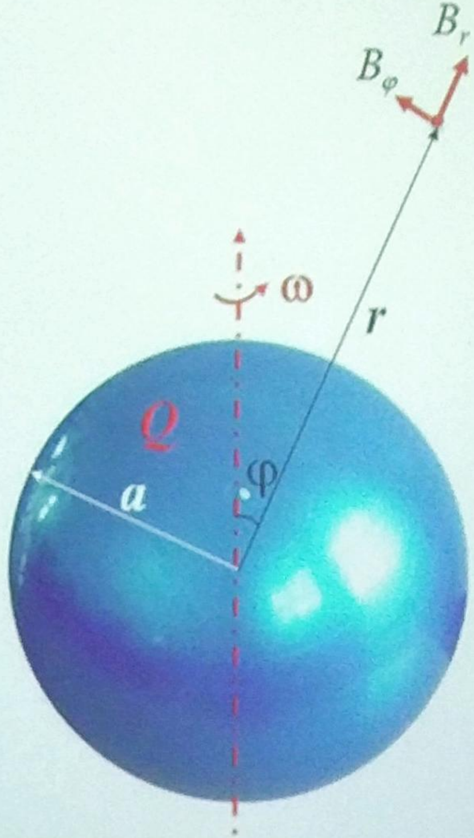
从解的观点来看

由于球面内外磁场的法向分量连续 $B_{1n} = B_{2n}$

$$\frac{\mu_0 Q\omega}{6\pi a}\cos\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m}{a^3}\cos\theta$$

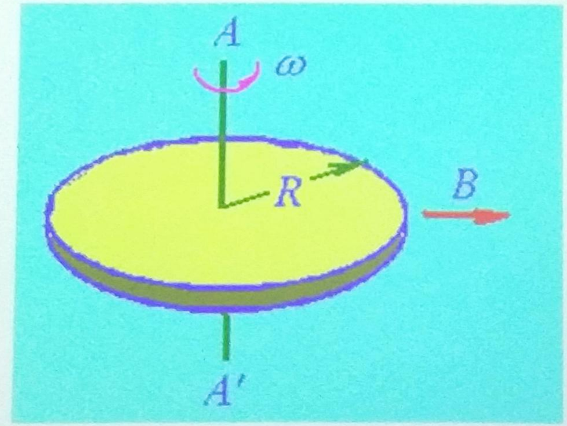
$$m = \frac{Q\omega a^2}{3}$$

$$\begin{cases} B_r = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{2m}{r^3}\cos\varphi = \dfrac{\mu_0}{6\pi}\dfrac{Q\omega a^2}{r^3}\cos\varphi \\ B_\varphi = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{m}{r^3}\sin\varphi = \dfrac{\mu_0}{12\pi}\dfrac{Q\omega a^2}{r^3}\sin\varphi \end{cases}$$



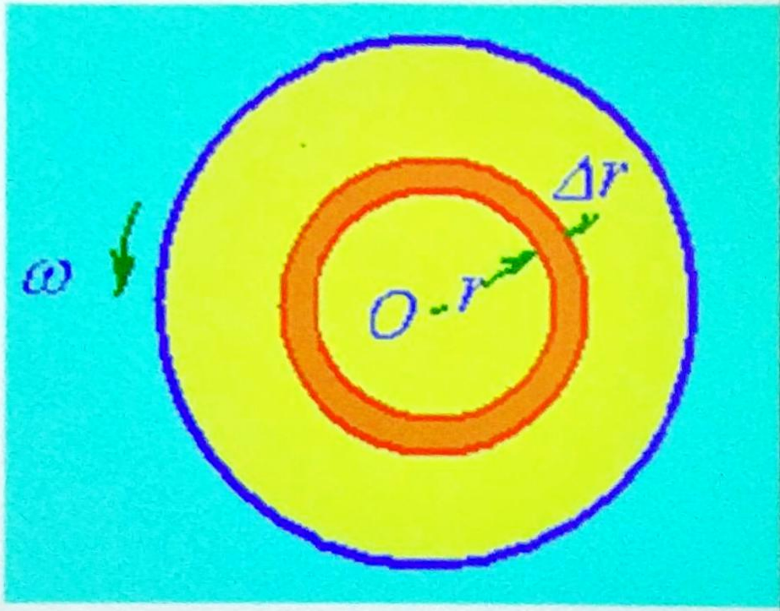
【例】如图所示，一平面塑料圆盘，半径为R，表面均匀带电，电荷面密度为σ。设圆盘绕其轴线AA' 以角速度ω转动，求：（1）在轴线上产生的磁场；（2）把圆盘放置在匀强磁场B的方向垂直于转轴AA'。求磁场作用于圆盘的力矩大小。

【解】当圆盘绕轴线AA'转动时，圆盘上电荷的运动可以看成半径各不相同的平面圆环电流，各电流环形成的磁矩方向相同，设法求出总磁矩，然后求得所受安培力矩。



【解】（1）在圆盘上取半径为**r**, 宽为**Δr**(小量)的圆环，如图所示。当圆环以角速度**ω**转动时，单位时间内通过的电量(即电流强度)为：

$$dI = 2\pi r dr \cdot \sigma \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \omega r dr \cdot \sigma$$



在轴线上**x**处产生的磁场为

$$dB' = \frac{\mu_0}{2} \frac{r^2 dI}{\left[r^2 + x^2\right]^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} \frac{r^2 \sigma \omega r dr}{\left[r^2 + x^2\right]^{3/2}}$$

$$B' = \frac{\sigma \omega \mu_0}{2} \int_0^R \frac{r^3 dr}{\left[r^2 + x^2\right]^{3/2}} = \frac{\sigma \omega \mu_0}{8} \int_0^R \frac{d(r^4)}{\left[r^2 + x^2\right]^{3/2}}$$

$u^2 = r^2 + x^2$，当$r = 0$时，$u = x$,当$r = R$时，$u = \sqrt{r^2 + x^2}$

$$B' = \frac{\sigma\omega\mu_0}{8}\int_x^{\sqrt{x^2+R^2}}\left(1 - x^2u^{-2}\right)du = \frac{\sigma\omega\mu_0}{2}\left[\frac{R^2 + 2x^2}{\sqrt{x^2 + R^2}} - 2x\right]$$

(2) 此电流环的磁矩大小为：

$$dm = dI \cdot S = \omega r \sigma dr \cdot \pi r^2$$

$$m = \int dm = \omega\sigma\pi\int_0^R r^3 dr = \frac{\omega\sigma\pi}{4}R^4$$

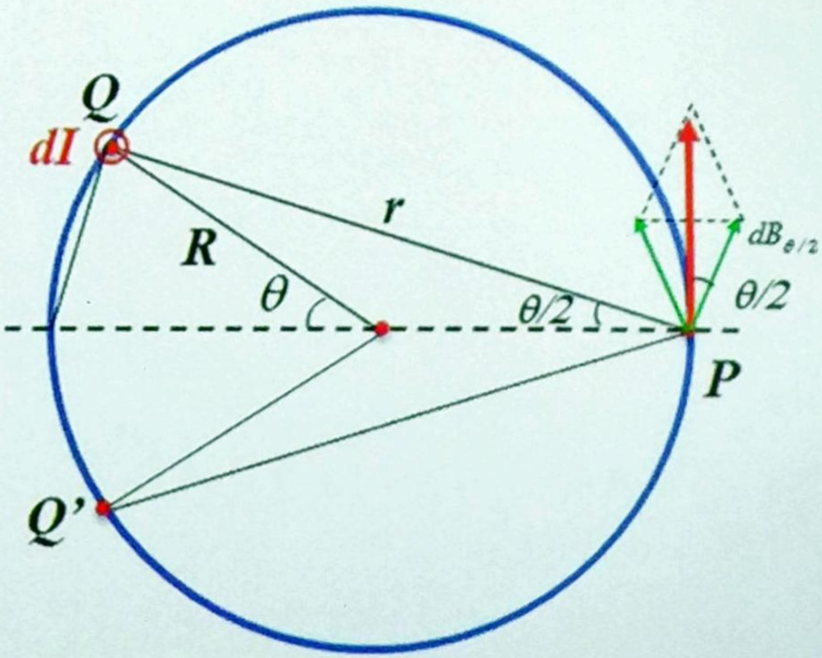
磁场对转动圆盘的作用力矩为：

$$M = \left|\vec{m} \times \vec{B}\right| = mB\sin\frac{\pi}{2} = mB = \frac{1}{4}\pi\omega\sigma R^4 B$$

【例】一条很长的绝缘圆柱，外面包一层很薄的金属膜、金属膜载有沿轴线方向流动的电流I，已知电流均匀地分布在金属膜里。试求由于电流引起的、金属膜对绝缘柱的压强。

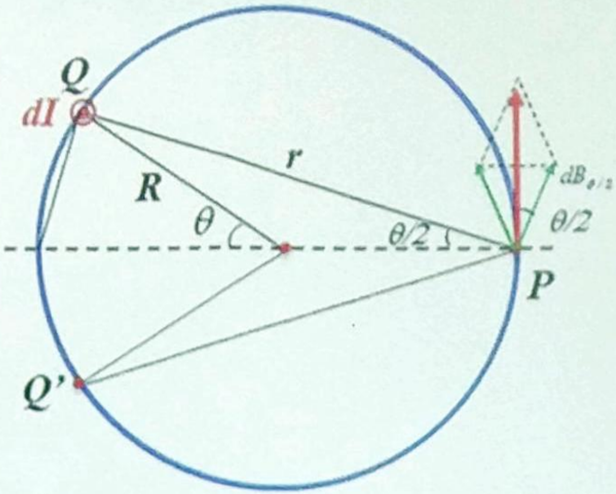
【解】先求圆柱面上任一点的磁感应强度。

如图所示，将圆柱面分成无数多条平行于轴线的直线电流。



Q处的一条电流值为：

$$dI = iRd\theta,\ \text{其中}\ k = \frac{i}{2\pi R}\ \text{为面电流密}$$



在P处的磁感应强度为：

$$dB_\theta = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} = \frac{\mu_0 iRd\theta}{2\pi(2R\cos\frac{\theta}{2})} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

由对称性，下面对称点上电流在*P*点产生相同大小的磁感应强度，方向如图，其合磁场为：

$$2dB_\theta\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}d\theta$$

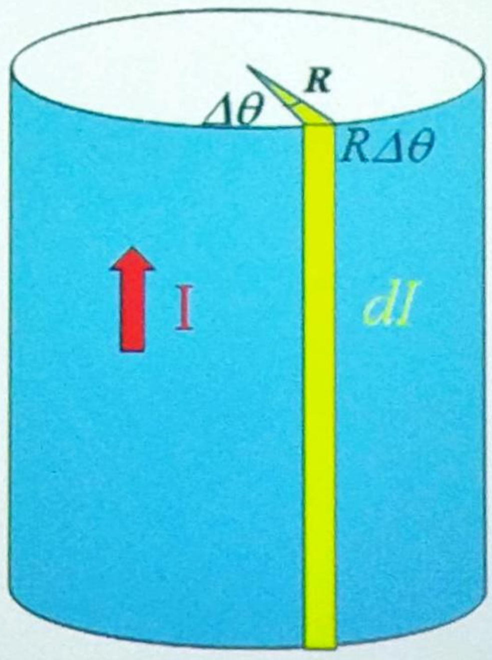
取如图所示的面元，根据安培力公式，有

$$\Delta\vec{F}=(\vec{I}\Delta l)\times\vec{B}=(\vec{i}\,\Delta S)\times\vec{B}=(\vec{i}\,\Delta S)\times(\frac{1}{2}\mu_0\vec{i}\times\vec{n})$$

$$=-\frac{\mu_0}{2}i^2 dS\vec{n}=-\frac{\mu_0}{2}(\frac{I}{2\pi R})^2\Delta S\vec{n}=-\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2R^2}\Delta S\vec{n}$$

负号表示力与方向方向相反，即指向轴线。
所以得到膜对绝缘柱的压强为：

$$p=\frac{\left|\Delta\vec{F}\right|}{\Delta S}=\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2R^2}$$



【另解】

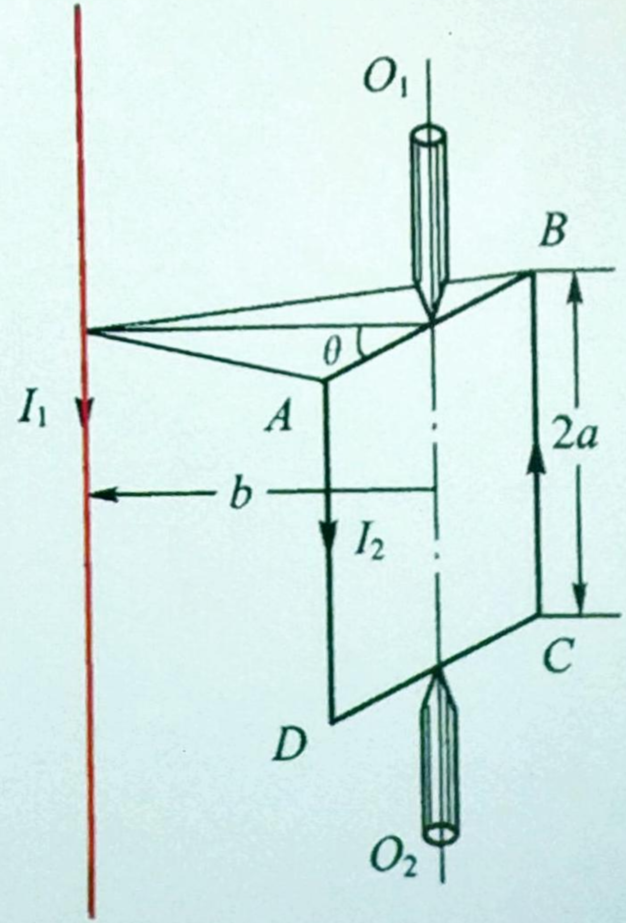
圆柱面内： $B = 0$

圆柱面外： $\oint B \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \mu_0 i$$

柱面上的**B**： $B = \frac{1}{2}(B_{内} + B_{外}) = \frac{1}{2}\mu_0 i$

【例】载有电流I_1的长直导线傍边有一正方形的线圈，边长为$2a$，线圈中心到导线的垂直距离为b，电流方向见图，线圈可以绕平行与导线的轴O_1O_2转动。求：



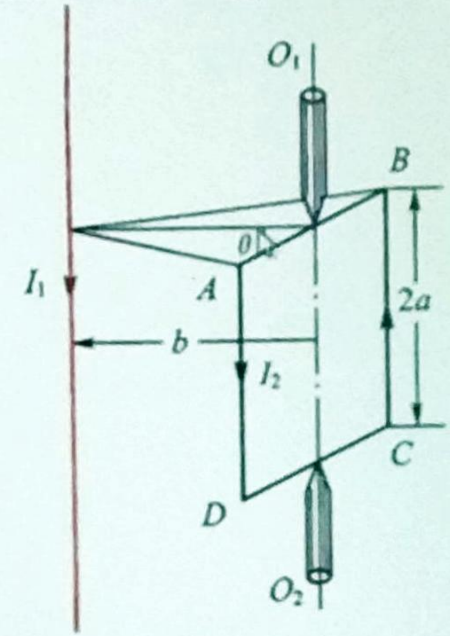
（1）线圈在角θ位置时的合力和合力矩；

（2）线圈平衡时的角度θ；

（3）线圈从平衡位置转到$\theta=\pi/2$时，I_1作用在线圈上的力做了多少功？

【解】（1）取x轴沿r过转轴方向，y轴垂直于电流I_1和x轴。

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{r_1}$$



AD受力为 $\vec{F}_1 = I_2 \cdot 2aB_1 = \dfrac{\mu_0 a I_1 I_2}{\pi r_1}$

BC受力为 $\vec{F}_2 = I_2 \cdot 2aB_2 = \dfrac{\mu_0 a I_1 I_2}{\pi r_2}$

AB与DC边受力等大，共线，反向。故相互抵消。

线圈的合力为

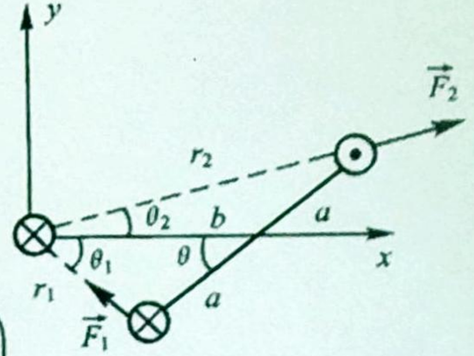
$$F_x = F_{2x} - F_{1x} = F_2\cos\theta_2 - F_1\cos\theta_1 = \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{\pi}\left(\frac{b + a\cos\theta}{r_2^2} - \frac{b - a\cos\theta}{r_1^2}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{\pi}\left(\frac{b + a\cos\theta}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta} - \frac{b - a\cos\theta}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}\right)$$

$$F_y = F_{2y} + F_{1y} = F_2 \sin\theta_2 + F_1 \sin\theta_1 = \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{\pi}\left(\frac{a\cos\theta}{r_2^2} + \frac{a\cos\theta}{r_1^2}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 a^2 I_1 I_2}{\pi}\left(\frac{\sin\theta}{a^2+b^2+2ab\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{a^2+b^2-2ab\cos\theta}\right)$$

设顺时针方向为正， 则：



$$M = (F_{1x} + F_{2x}) a \sin\theta + (F_{1y} - F_{2y}) a \cos\theta$$

$$= \frac{\mu_0 a^2 I_1 I_2 b \sin\theta}{\pi}\left(\frac{1}{a^2+b^2+2ab\cos\theta} + \frac{1}{a^2+b^2-2ab\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{2\mu_0 a^2 I_1 I_2 b (a^2+b^2)\sin\theta}{\pi\left[(a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2\cos^2\theta\right]}$$

平衡位置：

$M = 0,$ $\Rightarrow$ $\theta = \begin{cases} 0 & \text{稳定平衡} \quad \left.\dfrac{dM}{d\theta}\right|_{\theta=0} > 0 \\ \pi & \text{不稳定平衡} \quad \left.\dfrac{dM}{d\theta}\right|_{\theta=\pi} < 0 \end{cases}$

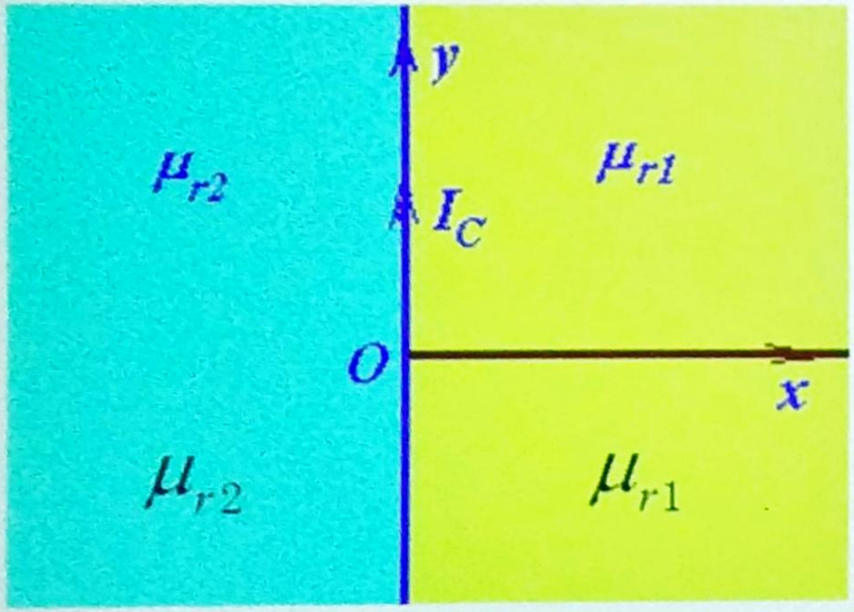
（3）I_1作用在线圈上的力所做的功为

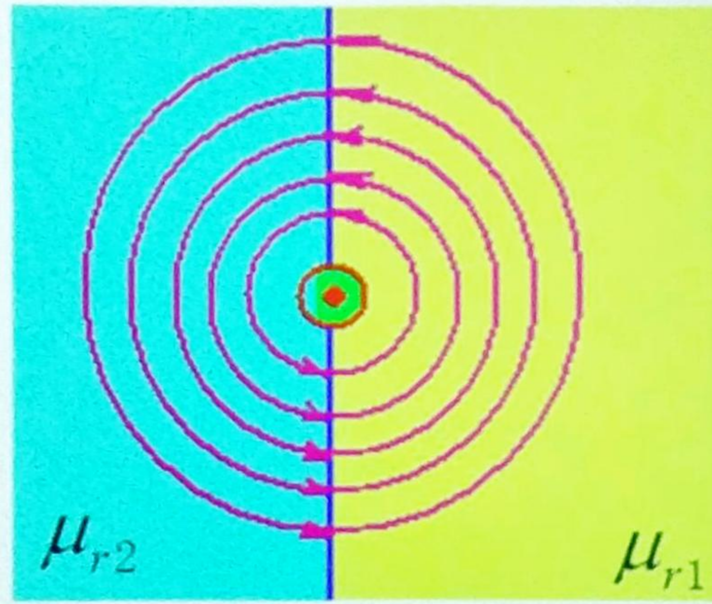
$$A=\int_0^{\pi/2} Md\theta=\frac{\mu_0 a^2 I_1 I_2 b}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta d\theta}{a^2+b^2+2ab\cos\theta}+\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta d\theta}{a^2+b^2-2ab\cos\theta}\right]$$

$$=-\frac{\mu_0 a^2 I_1 I_2}{\pi}\ln\frac{b-a}{b+a}$$

负号表示外力做正功。

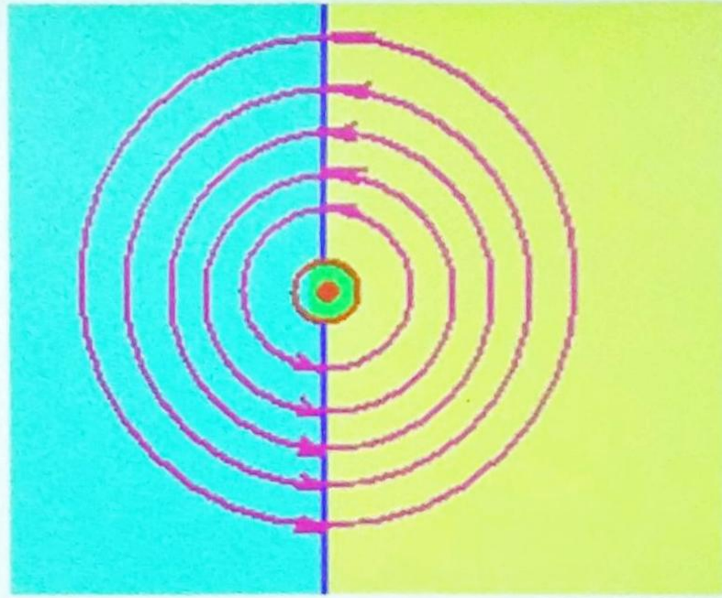
【例】相对磁导率为μ_{r1}和μ_{r2}的两种均匀磁介质，分别充满$x>0$和$x<0$的两个半空间，一细导线位于y轴上，通以电流I_C，求空间各点的B。





【解】由于导线很细，**B**与界面垂直，故磁化电流只分布在导线所在处，界面的其它地方无磁化电流。磁化电流分布也是一条几何线。

由圆柱形对称性，有：



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0(I_C + I_M)$$

$$2\pi r B = \mu_0(I_C + I_M)$$

由介质中的安培环路定理，有：

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \frac{\pi r}{\mu_0}\left(\frac{1}{\mu_{r1}}+\frac{1}{\mu_{r2}}\right)B = I_C$$

消去**B**，得：

$$I_C + I_M = \frac{2I_C}{\dfrac{1}{\mu_{r1}}+\dfrac{1}{\mu_{r2}}}$$

解出磁化电流密度：

$$I_m = \frac{2\mu_{r1}\mu_{r2} - \mu_{r1} - \mu_{r2}}{\mu_{r1} + \mu_{r2}} I_c$$

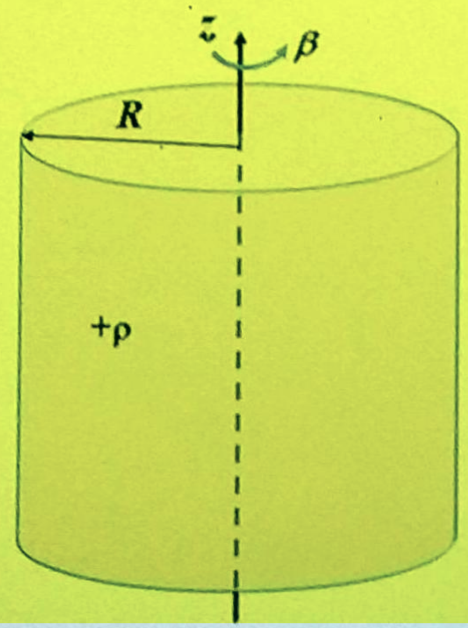
当$\mu_{r1}=\mu_{r2}$，有：

$$I_m = \frac{2\mu_r^2 - 2\mu_r}{2\mu_r} I_c$$

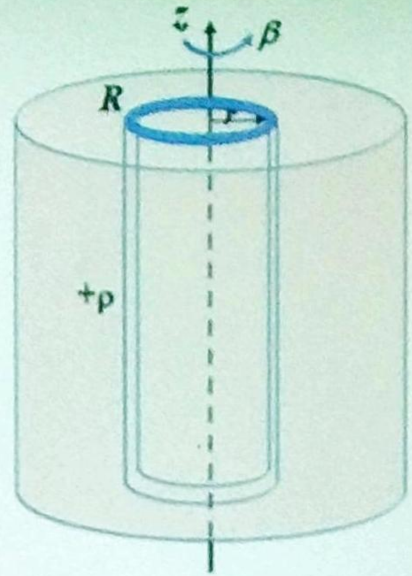
$$I_m = (\mu_r - 1) I_c$$

$$j_m = (\mu_r - 1) j_c, \quad i_m = (\mu_r - 1) i_c,$$

【例2】一个半径为R，长为l的长直圆柱体（$R<<l$），质量为m，均匀带电，体电荷密度为$+\rho$. 一个外力矩使圆柱体以恒定的角加速度β绕竖直轴（z轴）逆时针旋转。不计边界效应和电磁辐射。（1）求圆柱体内任一点的磁感应强度B，（2）求圆柱体内任一点的电场强度E，（3）为了保持圆柱体以恒定的角加速度β转动，外力矩多大？



【解】 圆柱体的角速度为



$$\omega = \omega_0 + \beta t$$

圆柱体的体电流密度为

$$\vec{j} = \rho\vec{v} = \rho(\omega_0 + \beta t)r\vec{e}_\theta$$

圆柱体内一薄壳的面电流密度为

$$d\vec{i} = \vec{j}dr = \rho(\omega_0 + \beta t)rdr\vec{e}_\theta$$

根据螺线管磁场公式， 该薄壳在外部的磁场为零， 在内部的磁场为

$$d\vec{B} = \mu_0 di\vec{e}_z$$

圆柱体内总的磁感应强度为

$$\vec{B}(r) = e_z\int_r^R \mu_0 di = e_z\int_r^R \mu_0\rho(\omega_0 + \beta t)rdr$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0\rho(\omega_0 + \beta t)(R^2 - r^2)\vec{e}_z$$

(2)电场有两部：一部分圆柱体内电荷产生E_e，另一部分是磁场变化产生的涡旋电场E_c。根据高斯定理，有

$$E_e \cdot 2\pi r L = \frac{1}{\varepsilon_0}\pi r^2 L\rho \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_e = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r\vec{e}_r$$

涡旋电场为：

$$2\pi r E_c = -\frac{1}{2}\mu_0\beta\rho\int_0^r (R^2 - r^2)2\pi r dr = -\pi\mu_0\beta\rho(2R^2r^2 - \frac{1}{4}r^4)$$

$$\vec{E}_c = -\frac{1}{8}\mu_0\beta\rho(2R^2 r - r^3)\vec{e}_\theta$$

总电场为：

$$\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_c = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r\vec{e}_r - \frac{1}{8}\mu_0\beta\rho(2R^2 r - r^3)\vec{e}_\theta$$

（3）圆柱体的转动惯量为 $I = \frac{1}{2} mR^2$

洛伦茨力的力矩为

$$\vec{M}_{em} = \iiint \vec{r} \times d\vec{F}_{em} = \iiint \vec{r} \times \left(\rho \vec{E} + \rho \vec{v} \times \vec{B}\right) dV$$

$$= \iiint \vec{r} \times \rho \vec{E}_c dV = \rho \iiint r \rho E_c dV \vec{e}_z$$

$$= -\frac{\rho^2}{8} \mu_0 \beta \iiint r(2R^2 r - r^3) 2\pi r l dr \vec{e}_z$$

$$= -\frac{1}{12} \pi \mu_0 \beta \rho^2 l R^6 \vec{e}_z$$

根据转动方程

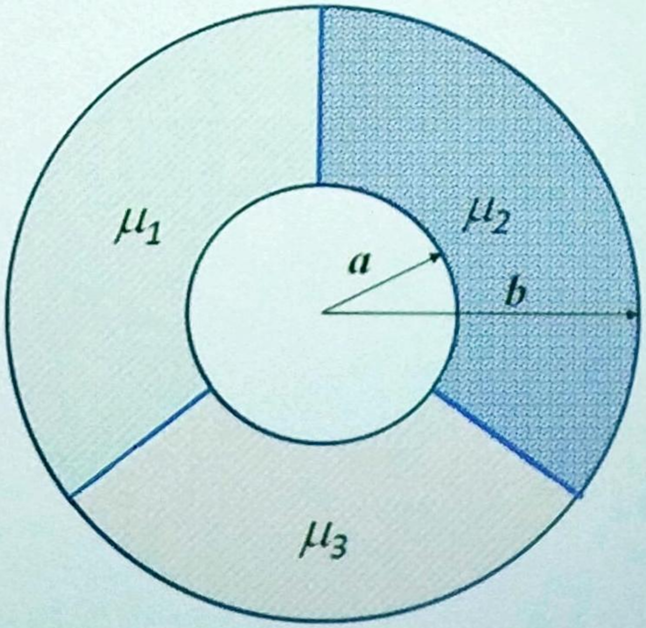
$$I\vec{\beta} = \vec{M}_{外力} + \vec{M}_{em}$$

$$\vec{M}_{外力} = I\vec{\beta} - \vec{M}_{em}$$

$$= (\frac{1}{2} mR^2 \beta + \frac{1}{12} \pi\mu_0 \beta\rho^2 lR^6)\vec{e}_z$$

【例】同轴电缆的内导体是半径为a的空心圆柱，外导体是半径为b的薄圆柱面，其厚度可以忽略不计，内、外导体间填充有绝对磁导率分别为μ_1、μ_2和μ_3的三种磁介质，每种磁介质均占三分之一的圆柱间体积，分界面正好沿半径方向，如图所示. 设内外圆柱面内沿轴线方向流有大小相等、方向相反的电流，电流强度均为I；求：

各区域的磁感应强度和磁场强度。



【解】（1）由安培环路定律， 得：

$$\begin{cases} \vec{H}_0 = 0 \quad (0 < r < a) \\ \vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \vec{H}_3 = \dfrac{3i2\pi a}{2\pi r}\vec{e}_\phi = \dfrac{3ia}{r}\vec{e}_\phi \quad (a < r < b) \\ \vec{H}_4 = 0 \qquad (r > b) \end{cases}$$

由于 $\vec{B} = \mu\vec{H}$，所以

$$\begin{cases} \vec{B}_0 = 0 \quad (0 < r < a) \\ \dfrac{\vec{B}_1}{\mu_1} + \dfrac{\vec{B}_2}{\mu_2} + \dfrac{\vec{B}_3}{\mu_3} = \dfrac{3ia}{r}\vec{e}_\phi \quad (a < r < b) \\ \vec{B}_4 = 0 \qquad (r > b) \end{cases}$$

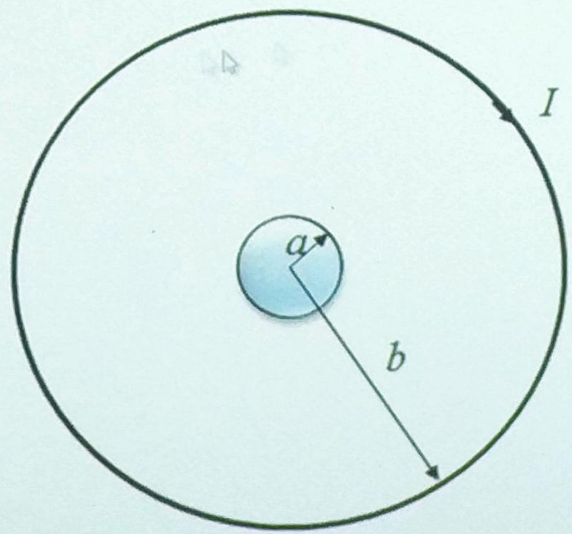
因为同轴电缆线内外导体间的磁场沿φ，即沿圆柱体的圆周方向，在三种介质分界面上只有法向分量，由边界条件知，$\mathbf{B_1=B_2=B_3}$，所以

$$\vec{B}_1=\vec{B}_2=\vec{B}_3=\frac{3ia}{r(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_3})}\vec{e}_\phi=\frac{3\mu' ia}{r}\vec{e}_\phi=\frac{3\mu' I}{2\pi r}\vec{e}_\phi,\quad (a<r<b)$$

$\vec{e}_\varphi$ 是沿圆周方向的单位矢量，按圆柱体内电流的右手螺线方向

式中： $$\frac{1}{\mu'}=\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_3}$$

【例】一个半径为b的圆形线圈，载有恒定电流I，在其中心放置一个相对磁导率为μ_r， 半径为a的顺磁介质小球， 若$a<<b$，求小球的磁化强度M (小球近似为均匀磁化)；

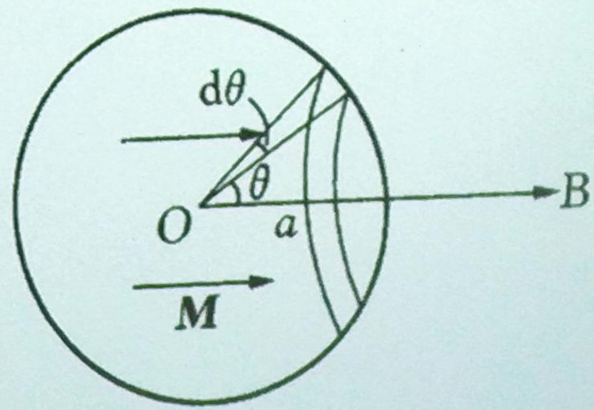


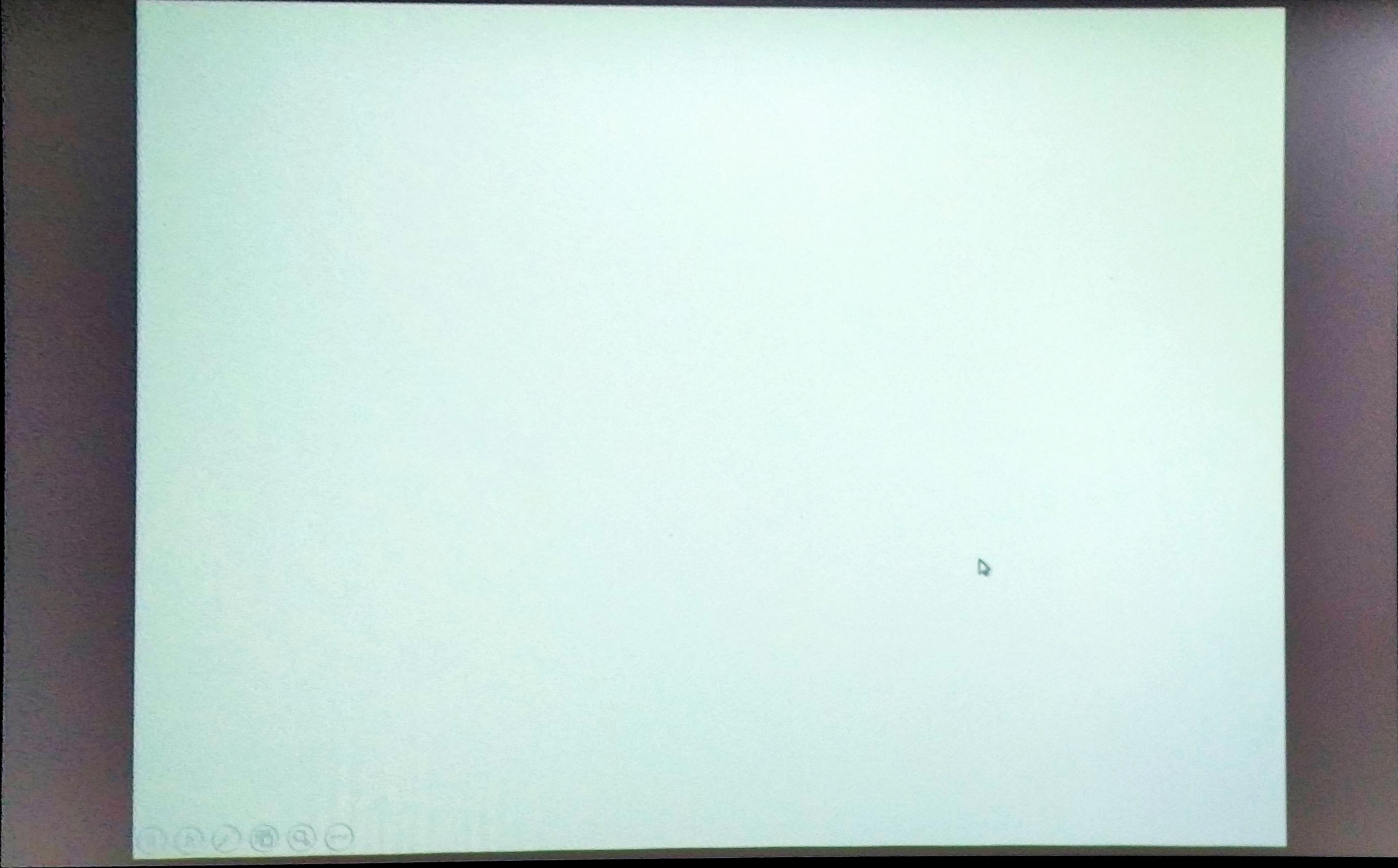
【解】由比奥-萨伐尔定律， 圆线圈在圆心处的磁感应强度为

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cdot 2\pi b}{b^2} = \frac{\mu_0 I}{2b}$$

由于介质球很小，可以认为介质球在此磁场作用下均匀磁化，设磁化强度为**M**，则表面的磁化电流为：

$$i_M = M\sin\theta$$





解之得：
$$B=\frac{3\mu_r}{\mu_r+2}B_0=\frac{3\mu_0\mu_r I}{2(\mu_r+2)b}$$

于是得到：

$$M=(\mu_r-1)\frac{B}{\mu_0\mu_r}=\frac{3(\mu_r-1)}{\mu_0(\mu_r+2)}B_0=\frac{3(\mu_r-1)I}{2(\mu_r+2)b}$$