学号：

姓名：

学生所在系：

答题时不要超过此线

中 国 科 学 技 术 大 学

2010 – 2011 学年第二学期《线性代数》期终考试试卷

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
复评人							

得分	评卷人

一、填空题（本大题共9小题，共42分）

(1) 给定空间直角坐标系中点$A(0,1,1)$，$B(1,2,3)$，$C(1,1,3)$及$D(1,3,5)$，则(a) 经过点A, B, C的平面的一般方程为________________；(b) 四面体$ABCD$的体积为________。

(2) 设三阶方阵$A=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3)$，$B=(2\mathbf{a}_3,3\mathbf{a}_2,4\mathbf{a}_1)$，其中$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$是三维列向量。若$\det(A)=2$，则$\det(B)=$________。

(3) 已知$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，则$A^{-1}=$____________。

(4) 设A为正交矩阵，A^*为A的伴随矩阵。则$\det(A^*)=$________。

(5) 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}x&1&2\\-10&6&7\\y&-2&-1\end{pmatrix}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$。则$x=$________，$y=$________。

(6) 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&t-1\\t-1&1\end{pmatrix}$是正定矩阵，则$t$必须满足的条件是________。

(7) 已知$\mathbb{R}$上四维列向量$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$，$\mathbf{b}_1$，$\mathbf{b}_2$，$\cdots$，$\mathbf{b}_9$。若$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$线性无关，$\mathbf{b}_i$ $(i=1,2,\cdots,9)$非零且与$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$均正交，则$\operatorname{rank}(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_9)$ =________。

(8) 设$\mathbb{P}_3[x]$为次数小于等于3的实系数多项式全体构成的线性空间。定义$\mathbb{P}_3[x]$上的线性变换$\mathcal{A}:\mathcal{A}(p(x))=(x+1)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x)$，则$\mathcal{A}$在基1，$x$，$x^2$，$x^3$下

的矩阵为______。

(9) 在线性空间$M_n(\mathbb{R})$中（运算为矩阵的加法和数乘），记V_1为所有对称矩阵构成的子空间，V_2为所有反对称矩阵构成的子空间。则$\dim V_1 =$______，$\dim V_2 =$______。

得分	评卷人

二、（本题15分）

已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = b \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$

(1) 当a，b为何值时，方程组有解。

(2) 当方程组有解时，求出对应的齐次方程组的一组基础解系。

(3) 当方程组有解时，求出方程组的全部解。

答题时不要超过此线

得分	评卷人

三、（本题12分）

在线性空间$M_2(\mathbb{R})$中，设$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 和$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 分别为$M_2(\mathbb{R})$的两组基。

(1) 求$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$到$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$的过渡矩阵$T$。

(2) 设$A \in M_2(\mathbb{R})$在$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$下的坐标为$(1, -2, 3, 0)^T$，求$A$在$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$下的坐标。

得分	评卷人

四、（本题8分）

考虑分块矩阵$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，其中$A$为$n$阶可逆方阵。

证明：$\mathrm{rank}(M)=n+\mathrm{rank}(D-CA^{-1}B)$。

得分	评卷人

五、（本题15分）

已知二次型$Q(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-2x_1x_3$。

(1) 写出二次型$Q(x_1,x_2,x_3)$对应的矩阵A，和$Q(x_1,x_2,x_3)$的矩阵式。

(2) 求正交变换P，使$\mathbf{x}=P\mathbf{y}$把$Q(x_1,x_2,x_3)$化为标准形。

(3) 二次型是正定的、负定的还是不定的，为什么？

(4) 指出$Q(x_1,x_2,x_3)=1$的几何意义。

答题时不要超过此线

得分	评卷人

六、（本题8分）

设V是欧氏空间，$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n$是$V$中一组两两正交的非零向量，$\beta_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\mathbf{b}_k \ (i = 1, 2, \cdots, m)$，$A = (a_{ij})_{n\times m}$。证明：

(1) $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n$线性无关。

(2) $\dim\langle \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m \rangle = \mathrm{rank}(A)$。

2010-2011学年第二学期《线性代数》期终考试答案

一、填空题（本大题共42分）

(1) (a) $2x-z+1=0$; (b) $\frac{1}{3}\left|(AB\times AC)\cdot AD\right|=\frac{1}{3}$.

(2) $\det(B)=-48$.

(3) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(4) $A^{*}=\pm 1$.

(5) $x=-1$, $y=4$.

(6) $0<t<2$.

(7) 1.

(8) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

(9) $\mathrm{dim}V_1=\frac{n(n+1)}{2}$, $\mathrm{dim}V_2=\frac{n(n-1)}{2}$.

二、（本题15分）

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a\\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & b\\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等变换}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-3a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-2a\end{pmatrix}=B$$

(1) $\begin{cases}b-3a=0\\ 2-2a=0\end{cases}$，即$a=1$, $b=3$时原方程有解.

(2) 当$a=1$, $b=3$时，

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等变换}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以同原方程组导出组同解的方程组为：

$$\begin{cases}x_1=x_3+x_4+5x_5\\ x_2=-2x_3-2x_4-6x_5\end{cases}$$

取$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}$分别为$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, 得基础解系：$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\xi_3=\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

(3) 由(2)知与原方程组同解的方程组为：

$$\begin{cases}x_1=x_3+x_4+5x_5-2\\x_2=-2x_3-2x_4-6x_5+3\end{cases}$$

令$x_3=x_4=x_5=0$, 得一特解：$\eta_0=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

故原方程的通解为：$\eta_0+c_1\xi_1+c_2\xi_2+c_3\xi_3$ (c_i为任意常数).

三、（本题12分）

(1) $\begin{array}{l}\beta_1=-\alpha_1+\alpha_4\\\beta_2=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4\\\beta_3=\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4\\\beta_4=\alpha_3\end{array}\Rightarrow(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$

所以过渡矩阵$T=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$.

(2) $A=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4)\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\0\end{pmatrix}=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)\,T\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\0\end{pmatrix}=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$.

由坐标的唯一性：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\5\\-3\\2\end{pmatrix}$.

四、（本题8分）

因为$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$, 注意相抵的方阵秩相同.

所以 $\mathrm{rank}(M) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix} = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(D-CA^{-1}B)$

$= n + \mathrm{rank}(D-CA^{-1}B)$.

五、（本题15分）

(1) $Q(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

(2) 因为$|\lambda I - A| = (\lambda-4)(\lambda-2)^2$, 所以$A$的特征值为$\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

相应的正交向量组：$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

令$P = (\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \mathbf{x}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$, P为正交矩阵.

则$Q(x_1, x_2, x_3)\Big|_{\mathbf{x}=P\mathbf{y}} = 4y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2$.

(3) Q是正定的，因为正惯性指数$r = n = 3$.

(4) $Q(x_1, x_2, x_3) = 1$表示椭球面.

五、（本题8分）

(1) 因为$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n$两两正交, 所以$\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle = \delta_{ij} \cdot |\mathbf{b}_i|^2 = \begin{cases} |\mathbf{b}_i|^2 \neq 0, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

设$\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{b}_n = 0$, 用$\mathbf{b}_i$作内积得：$\lambda_i\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i \rangle = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0,\ i = 1, 2, \cdots, n$.

即$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n$线性无关.

(2) 依题知：$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

设$\operatorname{rank}(A) = r$, 不妨设$A$的前$r$列线性无关, 则$A$的第$j$列$(j > r)$都可由前$r$列线性表示.

因为$\beta_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\mathbf{b}_k \Rightarrow \beta_j = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ $(j > r)$.

所以β_j $(j > r)$是β_1, β_2, $\cdots$, β_r的线性组合. 下面只要说明β_1, β_2, $\cdots$, β_r线性无关即可.

设$\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \cdots + \lambda_r\beta_r = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = 0$,

$\Rightarrow (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = 0.$

因为$\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\cdots$, $\mathbf{b}_n$线性无关, 所以$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = 0.$

又因为系数阵是列满秩的，所以$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$.

$\Rightarrow$ β_1, β_2, $\cdots$, β_r是线性无关的.

故$\dim\langle \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m \rangle = \operatorname{rank}(A) = r$.

(或者利用$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$(相抵标准形), 其中$P$, Q可逆, 也可以类似地证明.)