810,

中 国 科 学 技 术 大 学
2013–2014学年第一学期期终考试试题

考试科目：线性代数与解析几何　考试时间：2014.　　　　得分：__________

学生所在系：__________　　姓名：__________　　学号：__________

一、 填空题【每题4分，共20分】

1. 设三维欧氏空间$\mathbb{R}^3$（标准内积）中向量$(1,\lambda,\mu)$与向量$(1,2,3)$和$(1,-2,3)$都正交，则$\lambda=$________，$\mu=$________。

2. 设V为2阶复方阵构成的复线性空间，$M=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$，定义$V$上的线性变换$\mathscr{A}$为：$\mathscr{A}(X)=MX,\forall X\in V$，则$\mathscr{A}$的特征值及其重数为________________。

3. 三维实线性空间$\mathbb{R}^3$中从基$e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,1,1)$到基$f_1=(1,1,1)$, $f_2=(1,1,0)$, $f_3=(0,1,2)$的过渡矩阵是________________。

4. 若二次型$x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$正惯性指数是2，则$a$的取值范围是________。

5. 设$\mathscr{A},\mathscr{B}$均为n维欧氏空间V中的线性变换，且对V中任意两个向量α,β，都有$(\mathscr{A}(\alpha),\beta)=(\alpha,\mathscr{B}(\beta))$；如果$\mathscr{A}$在$V$的标准正交基$e_1,e_2,\cdots,e_n$下的矩阵为$A$，则$\mathscr{B}$在此标准正交基$e_1,e_2,\cdots,e_n$下的矩阵为________。

二、 判断题【判断下列命题是否正确，并简要说明理由。每题6分，共24分】

1. $\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{F}^3|x_1+x_2+x_3=0,\quad x_1-x_2+x_3=1\}$为线性空间$\mathbb{F}^3$的子空间。

2. 设$A=(a_{ij})$为n阶正定的实对称矩阵，则$a_{ii}>0,i=1,2,\cdots,n$。

3. 对任意常数λ,μ，向量组$\alpha_1+\lambda\alpha_3,\alpha_2+\mu\alpha_3$都线性无关的充分必要条件是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关。

4. 若φ是从实线性空间V到$\mathbb{R}^n$的一对一的线性映射(即映射$\varphi:V\to\mathbb{R}^n$满足：对$\forall\alpha,\beta\in V,\lambda\in\mathbb{R}$，有$\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta),\varphi(\lambda\alpha)=\lambda\varphi(\alpha)$；且当$\alpha\neq\beta$时，有$\varphi(\alpha)\neq\varphi(\beta)$)；则$(\alpha,\beta)=(\varphi(\alpha))^T\cdot(\varphi(\beta))$是$V$上的内积。

三、【15分】设$V=\{(a_2x^2+a_1x+a_0)e^x|a_2,a_1,a_0\in\mathbb{R}\}$，按函数通常的数乘与加法构成的实线性空间。定义$V$上的线性变换$\mathscr{A}$为：对任意$p(x)\in V$，$\mathscr{A}(p(x))=\frac{d}{dx}p(x)$。 1. 求$V$ 的一组基使$\mathscr{A}$在此基下的矩阵为$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$；

2. 求$(x^2-4x+2)e^x$在此基下的坐标。

四、【15分】设e_1，e_2，e_3为$\mathbb{R}^3$的标准正交基，且$\alpha_1=\frac{1}{3}(2e_1+2e_2-e_3)$，$\alpha_2=\frac{1}{3}(2e_1-e_2+2e_3)$, $\alpha_3=\frac{1}{3}(e_1-2e_2-2e_3)$，$\mathscr{A}$为把$e_1,e_2,e_3$变到$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性变换。

1. 求$\mathscr{A}$在基e_1,e_2,e_3下的矩阵A； 2. 证明$\mathscr{A}$是第一类正交变换。

五、【15分】用正交变换和平移将下面空间直角坐标系中的二次曲面方程化为标准形，并指出曲面类型：$x^2+y^2+z^2+4xy+4xz+4yz-6x+6y-6z-30=0$。

六、【11分】已知A为元素全是1的n阶矩阵，B为最后一行是$1,2,\cdots,n$，其余元素全是0的n阶矩阵。证明A与B相似，并求其相似标准形。

装订线 • 答题时不要超过此线

中 国 科 学 技 术 大 学

2013 - 2014学年第二学期期终考试试卷(A)

考试科目: 线性代数(B1)　　　　得分:______________

学生所在院系:____________　姓名:____________　学号:____________

一、(20分) 填空题:

(1) $\mathbb{R}^3$中三个向量$\{(1,2,1),(2,5,3),(1,4,3)\}$所生成的线性子空间的维数是________.

(2) 设A为2×3矩阵且$\det \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=1$, 则$\det \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=$ __________.

(3) 三个平面$a_ix+b_iy+c_iz=d_i$, $i=1,2,3$相交于一条直线的充要条件是

________________________.

(4) 二次曲面$xy+yz+zx=1$表示的曲面类型是____________________.

(5) 实二次型$Q(x,y,z)=x^2+4y^2+z^2+xz+2txy+2tyz$为正定当且仅当参数$t$满足____________________.

二、(20分) 判断下列命题是否正确, 并简要说明理由.

(1) 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关, 则$\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1$也线性相关.

(2) 令V是n阶实方阵按矩阵的加法与数乘构成的线性空间, W是满足行列式为零的所有n阶实方阵全体. 则W是V的子空间.

(3) 矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$不相似于矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

(4) 若矩阵A的列向量均不为零且互相正交, 则线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$没有非零解.

(5) 若$\boldsymbol{A}$为一个$m \times n$实矩阵且$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A} = n$, 那么$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$为正定矩阵.

三、(14分) 给定矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 令$V$是与$\boldsymbol{A}$乘法可交换的所有三阶实方阵全体.

(1) 证明: V在矩阵的加法与数乘下构成实数域上的线性空间;

(2) 求V的维数与一组基.

四、(12分) 设V为n维向量空间. T为V上的线性变换且满足$T^n=0$但$T^{n-1}\neq 0$.

(1) 证明:若存在向量$x\in V$满足$T^{n-1}x\neq 0$, 则$\{x, Tx, \cdots, T^{n-1}x\}$为$V$的一组基;

(2) 求T在上述基下的表示矩阵.

五、(12分) 设$\boldsymbol{A}$为3阶实对称方阵, 其特征值分别为$5, -1, -1$, 且特征值5所对应的特征向量为$(1,1,1)$.

(1) 设V为特征值-1所对应的特征向量空间, 求V的一组标准正交基;

(2) 利用(1)确定矩阵$\boldsymbol{A}$.

六、(14分) 在$\mathbf{R}^2$上定义内积如下:

$$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>=2x_1y_1+2x_2y_2+x_1y_2+x_2y_1$$

其中$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^T,\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)^T$.

(1) 求度量矩阵$\boldsymbol{G}$使得

$$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{y}$$

(2) 用Schmidt正交化方法从基$\{(1,0)^T,(0,1)^T\}$构造一组标准正交基;

(3) 证明: $\mathbf{R}^2$上线性变换$\mathcal{A}$是正交变换，当且仅当$\mathcal{A}$在基$\{(1,0)^T,(0,1)^T\}$下的矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{G}$.

七、(8分) 设$\boldsymbol{A}$为n阶实对称正定方阵. 证明: 存在n阶实对称正定方阵$\boldsymbol{B}$使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

2012 - 2013学年第一学期期终考试试题

考试科目：线性代数B1　　　　得分：________

一、填空题：【共30分】

1. 设$A=\begin{pmatrix}2&2\\2&a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}4&b\\3&1\end{pmatrix}$。$A$与$B$相抵的充要条件是________；$A$与$B$相似的充要条件是________；$A$与$B$相合的充要条件是________；矩阵方程$AX=B$有解但矩阵方程$BY=A$无解的充要条件是________。

2. 设A为3阶可逆方阵。若$a_{ij}+A_{ij}=0(\forall i,j)$；则$det(A)=$____，$A^{-1}=$____。

3. 设$\mathbb{R}^3$的线性变换$\mathscr{A}$将$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$分别变为$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}$；则$\mathscr{A}$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为________，$\mathscr{A}$在自然基下的矩阵为________。

4. 设n阶方阵A满足$A^m=O,m\geq 2$;则A的特征值为________，$det(A+I)=$____。

二、【共20分】判断题（判断对错并简述理由）

1. 设$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m\in\mathbb{F}^n$为一组列向量，$n\times m$矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)$经有限次初等行变换成为$B=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m)$，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$与向量组$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m$等价。

2. 设A为3阶实方阵；若A不实相似于上三角阵，则A不复相似于对角阵。

3. 若A,B为同阶正定实对称方阵，则AB也正定。

4. 秩为r的实对称矩阵可分解成r个秩为1的实对称矩阵之和。

5. 在$\mathbb{R}^n$中，若β_i与线性无关的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n-1}$中的每个向量都正交$(i=1,2)$，则$\beta_1,\beta_2$线性相关。

三、【12分】设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$。当$a,b$分别取何值时，存在$C$使得$AC-CA=B$，并求所有的$C$。

四、【12分】已知二次型$Q(X)=4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$。

1. 给出二次型$Q(X)$的矩阵A和矩阵表示；

2. 试用正交变换$X=PY$将$Q(X)$化为标准形；

3. 给出$Q(X)=6$的几何意义，并作示意图。

五、【16分】设$V = M_2(\mathbb{R})$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathscr{A}(\alpha) = C\alpha + \alpha C, \forall \alpha \in V$。

1. 给出V的一组基(B)及$dimV$；

2. 求$\mathscr{A}$在基(B)下的矩阵A，并求A和$\mathscr{A}$的全部特征值与特征向量；

3. A可否相似对角化？若能，试求P使$P^{-1}AP$为对角阵Λ，并求V的一组基(E)使$\mathscr{A}$在基(E)下的矩阵为对角阵Λ；

4. 给出从基(B)到基(E)的过渡矩阵和$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$在基$(E)$下的坐标。

六、【10分】已知三阶矩阵A和三维列向量X，使向量组X, AX, A^2X线性无关，且满足$A^3X = 3AX - 2A^2X$，记$P = (X \quad AX \quad A^2X)$。求：

1. $B = P^{-1}AP$；

2. $det(A - I)$。

一、 1. 设$A=\begin{pmatrix}2&2\\2&a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}4&b\\3&1\end{pmatrix}$。$A$与$B$相抵的充要条件是$\underline{a=2,b=4/3}$或$\underline{a\neq 2,b\neq 4/3}$；$A$与$B$相似的充要条件是$\underline{a=3,b=2/3}$；$A$与$B$相合的充要条件是$\underline{a<2,b=3}$；矩阵方程$AX=B$有解但矩阵方程$BY=A$无解的充要条件是$\underline{a\neq 2,b=4/3}$。

2. 设A为3阶可逆方阵。若$a_{ij}+A_{ij}=0(\forall i,j)$；则$det(A)=\underline{-1}$，$A^{-1}=\underline{A^T}$。

3. 设$\mathbb{R}^3$的线性变换$\mathscr{A}$将$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$分别变为$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}$；则$\mathscr{A}$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为$\underline{\begin{pmatrix}4&9&-5\\-10&-23&15\\-7&-16&13\end{pmatrix}}$，$\mathscr{A}$在自然基下的矩阵为$\underline{\begin{pmatrix}3&-26&11\\0&-16&10\\5&-15&7\end{pmatrix}}$。

4. 如果正交矩阵A的每个元素都是$\frac{1}{3}$或$-\frac{1}{3}$，那么A的阶是$\underline{9}$。

5. 设A是n阶实对称矩阵，且$A^2=-A$，则A的规范形为$\underline{A=\begin{pmatrix}-I&\\&O\end{pmatrix}}$。

二、 1. 设$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m\in\mathbb{F}^n$为一组列向量，$n\times m$矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)$经有限次初等行变换成为$B=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m)$，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$与$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m$等价。

答：错。反例：$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$。

2. 设A为3阶实方阵；若A不实相似于上三角阵，则A不复相似于对角阵。

答：错。反例：$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$不实相似于上三角阵，但$A$复相似于对角阵$\begin{pmatrix}1&&\\&i&\\&&-i\end{pmatrix}$。

3. 秩为r的实对称矩阵可分解成r个秩为1的实对称矩阵之和。

答：对。因为存在可逆（或正交）矩阵P使$A=P(\lambda_1E_{11}+\lambda_2E_{22}+\dots+\lambda_rE_{rr})P^T=\lambda_1PE_{11}P^T+\lambda_2PE_{22}P^T+\dots+\lambda_rPE_{rr}P^T$，$\lambda_i\neq 0(i=1,2,\dots,r)$，$A_i=\lambda_iPE_{ii}P^T(i=1,2,\dots,r)$是秩为1的实对称矩阵。

4. 若A,B为同阶正定实对称方阵，则AB也正定。

答：错。反例：$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$正定，但$AB=\begin{pmatrix}1&1\\2&4\end{pmatrix}$不对称，从而不正定。

5. 在$\mathbb{R}^n$中，若β_i与线性无关的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n-1}$中的每个向量都正交$(i=1,2)$，则$\beta_1,\beta_2$线性相关。

答：对。$\beta_i(i=1,2)$都是以$A=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n-1})^T$为系数矩阵的齐次线性方程组的解向量，而$rank(A^T)=n-1$，因此$\beta_1,\beta_2$线性相关。

三、【12分】设$A=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$。当$a,b$分别取何值时，存在$C$使得$AC-CA=B$，并求所有的$C$。

解：可设$C=\begin{pmatrix}w&x\\y&z\end{pmatrix}$，化为线性方程组来解。此方程组的增广矩阵为$\begin{pmatrix}0&-1&a&0&0\\-a&1&0&a&1\\1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&b\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&0\\0&0&0&0&b\\0&0&0&0&1+a\end{pmatrix}$。答案：$a=-1$，$b=0$，$C=\begin{pmatrix}1+y+z&-y\\y&z\end{pmatrix}(\forall y,z)$。

四、【12分】已知二次型$Q(X)=4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$。1. 给出二次型$Q(X)$的矩阵$A$和矩阵表示；2.试用正交变换$X=PY$将$Q(X)$化为标准形；3.给出$Q(X)=6$的几何意义，并作示意图。

解：1.$A=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$, $Q(X)=X^TAX$；

2.$|\lambda I-A|=(\lambda-4)^3-2-3(\lambda-4)=(\lambda-6)(\lambda-3)^2\Rightarrow A$的特征值为$\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_2=3$，显然$p_1=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$为属于特征值$\lambda_1=6$的单位特征向量，从而属于特征值$\lambda_2=\lambda_3=3$的单位正交特征向量可取$p_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $p_3=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，记$P=(p_1\ p_2\ p_3)=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}\sqrt2&\sqrt3&1\\\sqrt2&-\sqrt3&1\\\sqrt2&0&-2\end{pmatrix}$，则$P$正交，且正交变换$X=PY$即可将$Q(X)$化为标准形$6y_1^2+3y_2^2+3y_3^2$。

3.$Q(X)=6$即$y_1^2+\frac{y_2^2}{2}+\frac{y_3^2}{2}=1$的几何意义为：旋转椭球面，图：略。

五、【16分】设$V=M_2(\mathbb{R})$, $C=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\mathscr{A}(\alpha)=C\alpha+\alpha C, \forall\alpha\in V$。1.给出$V$的一组基$(B)$及$dimV$；2.求$\mathscr{A}$在基$(B)$下的矩阵$A$，并求$A$和$\mathscr{A}$的全部特征值与特征向量；3.$A$可否相似对角化？若能，试求$P$使$P^{-1}AP$为对角阵$\Lambda$，并求$V$的一组基$(E)$使$\mathscr{A}$在基$(E)$下的矩阵为对角阵$\Lambda$；4.给出从基$(B)$到基$(E)$的过渡矩阵和$D=\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix}$在基$(E)$下的坐标。

解:1.$(B): E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$; $dimV=4$;

2.经计算得$A=\begin{pmatrix}2&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$； $\lambda_1=0, X_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$; $\alpha_1=E_{12}-E_{22}=\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}$;

$\lambda_2=\lambda_3=1, X_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, X_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$; $\alpha_2=E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \alpha_3=E_{11}-E_{21}-E_{22}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}$; $\lambda_4=2, X_4=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$; $\alpha_4=E_{11}+E_{12}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$;

3.能。$P=(X_1\ X_2\ X_3\ X_4)=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&1&0&1\\0&0&-1&0\\-1&0&-1&0\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}0&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&2\end{pmatrix}(=P^{-1}AP)$;

$(E): \alpha_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}, \alpha_4=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$;

4.从基(B)到基(E)的过渡矩阵为$P=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&1&0&1\\0&0&-1&0\\-1&0&-1&0\end{pmatrix}$,

$D=\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix}$在基$(E)$下的坐标为$Y=P^{-1}X=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&1&0&1\\0&0&-1&0\\-1&0&-1&0\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$。

六、【10分】已知三阶矩阵A和三维列向量X,使向量组X, AX, A^2X线性无关，且满足$A^3X=3AX-2A^2X$,记$P=(X\ \ AX\ \ A^2X)$.求: 1. $B=P^{-1}AP$; 2. $det(A-I)$.

解：设$B=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$，由$AP=PB$得

$AX=a_1X+b_1AX+c_1A^2X....(1)$

$A^2X=a_2X+b_2AX+c_2A^2X....(2)$

$A^3X=a_3X+b_3AX+c_3A^2X....(3)$

又 $A^3X=3AX-2A^2X............(4)$

而$X.AX.A^2X$线性无关，解$(1)-(4)$得$a_1=c_1=0.b_1=1.a_2=b_2=0,c_2=1.a_3=0.b_3=3.c_3=-2$，从而$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$。

2.由（1）知$A\sim B$，从而$(A-I)\sim(B-I)$。于是$det(A-I)=det(B-I)=det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}=0$。

a() A() 1(G) i() I()

中 国 科 学 技 术 大 学

2012 - 2013学年第二学期期终考试试卷(A)

考试科目: 线性代数(B1)　　　　得分:__________

学生所在院系:__________　　姓名:__________　　学号:__________

装订线 • 答题时不要超过此线

一、【25分】填空题:

1. $\mathbb{R}^2$中线性变换$\mathcal{A}$在基$\alpha_1=(1,-1),\alpha_2=(1,1)$下矩阵为$\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}$，则$\mathcal{A}$在基$\beta_1=(2,0),\beta_2=(-1,1)$下矩阵为__________

2. n阶方阵A的行列式为2，且有特征值λ，则$A^*+A^{-1}+A^2+2I_n$有特征值。

3. 设三维欧氏空间$\mathbb{R}^3$（标准内积）中向量$(1,\lambda,\mu)$与向量$(1,2,3)$和$(1,-2,3)$都正交，则$\lambda=$________，$\mu=$________.

4. 三元的实二次型$Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-6x_2x_3+x_3^2$的标准型是__________.

5. 设V为2阶复方阵构成的复线性空间，$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$，定义$V$上的线性变换$\mathcal{A}$为$\mathcal{A}(M)=AM$. 那么$\mathcal{A}$的特征值为1,1,1,1.

6. 三维实线性空间$\mathbb{R}^3$中从基$e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,1,1)$到另一组基$f_1=(1,1,1)$, $f_2=(1,1,0)$, $f_3=(0,1,2)$的过渡矩阵是$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\1&0&2\end{pmatrix}$.

二、判断下列命题是否正确，并简要地给出理由.

1. 若A与B相似，C与D相似，则$\begin{pmatrix}O&A\\C&O\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}O&B\\D&O\end{pmatrix}$相似. 。

2. 设A为n阶方阵A的不同特征值，X_1, X_2分别为属于λ_1, λ_2的特征向量，则$X_1 + X_2$一定不是A的特征向量.

3. 设A为2阶实方阵，若A的行列式$|A| < 0$，则A可以相似对角化。

4. 若ϕ是从n维实线性空间V到R^n的同构，则$(u, v) = (\phi(u))^T \cdot (\phi(v))$定义了$V$上的一个内积。

5. 设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$都为$n$阶正定实对方阵, 则$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$也是正定的.

6. 在三维实线性空间$\mathbb{R}^3$中集合$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$为$\mathbb{R}^3$的线性子空间. (F)

7. 设$\mathcal{S}$是数域F上n维线性空间V上的线性变换, 并且对于任意$\alpha \neq \beta \in V$都有$\mathcal{S}(\alpha) \neq \mathcal{S}(\beta)$. 那么, 任给$V$的一组基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \mathcal{S}(\alpha_1), \mathcal{S}(\alpha_2), \cdots, \mathcal{S}(\alpha_n)$也是$V$的一组基. (T)

三、 【10分】如果$n \times n$矩阵A是正定的，那么存在一个正定矩阵B,使得$A = B^T B$.

四、 【12分】设e_1, e_2, e_3为R^3的一组标准正交基，且$\alpha_1 = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3)$, $\alpha_2 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3)$, $\alpha_3 = \frac{1}{3}(e_1 - 2e_2 - 2e_3)$.

1. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$也是$R^3$的一组标准正交基;
2. 求e_1, e_2, e_3到$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$的正交变换的矩阵.
3. 求e_1, e_2, e_3到$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$的坐标变换矩阵.

五、 设$V = \{(a_2x^2 + a_1x + a_0)e^x : a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$，$V$中元素按函数通常的数乘与加法构成的线性空间。对任意$f(x) \in V$, 定义V上的变换：$\mathcal{A} : p(x) \longrightarrow \frac{d}{dx}p(x)$, 对任意$p(x) \in V$.

1. 证明：$\mathcal{A}$是V上的线性变换；
2. 求$\mathcal{A}$ 在基e^x, xe^x, x^2e^x下的矩阵；
3. 求$\mathcal{A}$的特征值与特征向量。

六、 设α是n维欧氏空间V中的非0向量, 定义V上的线性变换$\mathscr{A}_\alpha$:

$$\mathscr{A}_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha.$$

证明:

1. $\mathscr{A}_\alpha$是一个正交变换.
2. 存在标准正交基，使得$\mathscr{A}_\alpha$在该基下的矩阵为$\mathrm{diag}(-1,1,\cdots,1)$.

七、 设n为大于1的整数, $\mathcal{S}$是数域F上n维线性空间V上的线性变换, 且存在$\alpha\in V$使得

$$\mathcal{S}^{n-1}(\alpha)\neq 0, \quad \mathcal{S}^n(\alpha)=0.$$

证明$\mathcal{S}$在V的某组基下的矩阵的$(2,1),(3,2),\cdots,(n,n-1)$位置元素全为1, 其他位置元素全为零.

证明: 可取基为$\mathcal{S}^{n-j}(\alpha)$, $j=1,2,\cdots,n$.

八、 问复数λ取何值时方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有唯一解, 有无穷多解或者无解? 并且在有无穷无解时求出通解.

解答: 系数矩阵行列式等于$(\lambda-1)^2(\lambda+2)$. 当λ不等于1或者-2时, 方程有唯一解. 当$\lambda=-2$时, 方程无解. 当$\lambda=1$, 方程有无穷多解, 通解为

$$(x_1,x_2,x_3)=(1,0,0)+a(1,-1,0)+b(0,1,-1)=(1+a,b-a,-b),$$

其中a,b取遍所有复数.

中 国 科 学 技 术 大 学
2012 - 2013学年第二学期期终考试试卷(A)

考试科目: 线性代数(B1)　　　　得分: ________

学生所在院系: ________　　姓名: ________　　学号: ________

一、【25分】填空题:

(1) 设向量$(1,6,\lambda)$落在由向量组$\{(1,2,3),(1,-2,3),(4,4,12)\}$生成的线性子空间内,则$\lambda=$ 3 .

(2) 设$P_2[x]$是次数不超过二次多项式的全体构成的线性空间, 则从基$\{(1-x)^2,2(1-x)x,x^2\}$到基$\{1,x,x^2\}$的过渡矩阵是 $\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}$.

(3) 设$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$是$n$阶方阵$A$的全部特征值, 则$\det(2I+A)=$ $\prod\limits_{i=1}^{n}(2+\lambda_i)$.

(4) 设n阶实对称方阵A满足$A^2=2A$, $\mathrm{rank}(A)=r$, 则A的相合规范形为 ________ .

(5) 实二次型$Q(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+2x_3)^2+(x_3+tx_1)^2$正定的充要条件是参数$t$满足 $t\neq-\frac{1}{2}$.

二、【25分】判断下列命题是否正确, 并简要地给出理由.

(1) 若向量β不能由向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性表示, 则向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta$线性无关.

×

(2) 设$F^{n\times n}$是所有n阶方阵全体按矩阵线性运算所构成的线性空间, W是所有行列式为零的n阶方阵全体, 则W是$F^{n\times n}$的子空间.

(3) 若$\mathbb{R}_n[x]$是次数不超过n的实系数多项式构成的实线性空间, D是$\mathbb{R}_n[x]$上的微分(求导)运算, 则D是线性变换.

✓ ✓

(4) 有限维欧氏空间的不同标准正交基之间的过渡矩阵是正交阵.

/

(5) 设A为m阶实对称方阵, B为n阶实对称方阵, 且分块矩阵$\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}$正定, 则方阵$A$与$B$皆正定.

/

三、【10分】给定对角矩阵$A = \mathrm{diag}(1,1,2)$, 令V是所有与A都可以交换的三阶实对称方阵全体.

1. 证明：在矩阵通常的数乘与加法运算下, V构成实数域上的一个线性空间.

2. 求V的维数与一组基.

四、【16分】设γ是n维欧氏空间V中的单位向量，定义V上的线性变换$\mathscr{A}$:

$$\mathscr{A}(\alpha)=\alpha-2(\alpha,\gamma)\gamma.$$

(1) 证明: $\mathscr{A}$是一个正交变换. 5

(2) 设β是$\mathbb{R}^n$中一个单位列向量，证明：存在V的一组标准正交基，使得$\mathscr{A}$在这组基下的矩阵为$I-2\beta\beta^{\mathrm{T}}$. 5

(3) 求$\mathscr{A}$的特征值与特征向量. 6

$(\mathscr{A}\alpha, \mathscr{A}\beta) = (\alpha - 2(\alpha,r)r, \beta-2(\beta,r)r) = (\alpha,\beta) - (\alpha,r)\cdot(r,\beta)$

$= (\alpha,\beta)$

$\cancel{-2(\alpha,r)(\beta,r)} + 4(\beta,r)(\alpha,r)$

$I - 2\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)^{T}$

$\mathscr{A}e_1 = e_1 - 2(e_1,r)r.$

∃ 标准基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 使 $V=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$.

$\mathscr{A}(e_1,e_2,\cdots,e_n)=(e_1$

五、【14分】给定二次曲面在直角坐标系下的方程

$$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz-4x+6y-2z+3=0,$$

将它通过正交变换化为标准方程，并指出该二次曲面的类型.

六、【10分】设A, B均为n阶方阵, A有n个互异的特征值, 且$AB = BA$. 证明:

(1) B相似于对角阵; 6

(2) 存在唯一的次数不超过$n-1$的多项式$f(x)$, 使得$B = f(A)$. 4

答题不要超过此线

中 国 科 学 技 术 大 学

2010－2011 学年第二学期《线性代数》期终考试试卷

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
复评人							

得分	评卷人

一、填空题（本大题共9小题，共42分）

(1) 给定空间直角坐标系中点$A(0,1,1)$，$B(1,2,3)$，$C(1,1,3)$及$D(1,3,5)$，则(a) 经过点A, B, C的平面的一般方程为________________；(b) 四面体$ABCD$的体积为__________。

(2) 设三阶方阵$A=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3)$，$B=(2\mathbf{a}_3,3\mathbf{a}_2,4\mathbf{a}_1)$，其中$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$是三维列向量。若$\det(A)=2$，则$\det(B)=$__________。

(3) 已知$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，则$A^{-1}=$________________。

(4) 设A为正交矩阵，A^*为A的伴随矩阵。则$\det(A^*)=$__________。

(5) 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}x&1&2\\-10&6&7\\y&-2&-1\end{pmatrix}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$。则$x=$__________，$y=$__________。

(6) 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&t-1\\t-1&1\end{pmatrix}$是正定矩阵，则$t$必须满足的条件是__________。

(7) 已知$\mathbb{R}$上四维列向量$\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$、$\mathbf{a}_3$、$\mathbf{b}_1$，$\mathbf{b}_2$，$\cdots$，$\mathbf{b}_9$。若$\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$线性无关，$\mathbf{b}_i$ $(i=1,2,\cdots,9)$非零且与$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$均正交，则$\mathrm{rank}(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_9)$ =__________。

(8) 设$\mathbb{P}_3[x]$为次数小于等于3的实系数多项式全体构成的线性空间。定义$\mathbb{P}_3[x]$上的线性变换$\mathcal{A}$: $\mathcal{A}(p(x))=(x+1)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x)$，则$\mathcal{A}$在基1，$x$，$x^2$，$x^3$下

的矩阵为________。

(9) 在线性空间$M_n(\mathbb{R})$中（运算为矩阵的加法和数乘），记V_1为所有对称矩阵构成的子空间，V_2为所有反对称矩阵构成的子空间。则$\dim V_1 =$________，$\dim V_2 =$________。

得分	评卷人

二、（本题15分）

已知线性方程组

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = & a \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & -3x_5 & = & 0 \\ & x_2 & +2x_3 & +2x_4 & +6x_5 & = & b \\ 5x_1 & +4x_2 & +3x_3 & +3x_4 & -x_5 & = & 2 \end{array}\right.$$

(1) 当a，b为何值时，方程组有解。

(2) 当方程组有解时，求出对应的齐次方程组的一组基础解系。

(3) 当方程组有解时，求出方程组的全部解。

得分	评卷人

三、（本题12分）

在线性空间$M_2(\mathbb{R})$中，设$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$和$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$分别为$M_2(\mathbb{R})$的两组基。

(1) 求α_1, α_2, α_3, α_4到β_1, β_2, β_3, β_4的过渡矩阵T。

(2) 设$A \in M_2(\mathbb{R})$在β_1, β_2, β_3, β_4下的坐标为$(1, -2, 3, 0)^T$，求A在α_1, α_2, α_3, α_4下的坐标。

得分	评卷人

四、（本题8分）

考虑分块矩阵$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，其中$A$为$n$阶可逆方阵。

证明：$\mathrm{rank}(M)=n+\mathrm{rank}(D-CA^{-1}B)$。

得分	评卷人

五、（本题15分）

已知二次型$Q(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-2x_1x_3$。

(1) 写出二次型$Q(x_1,x_2,x_3)$对应的矩阵A，和$Q(x_1,x_2,x_3)$的矩阵式。

(2) 求正交变换P，使$\mathbf{x}=P\mathbf{y}$把$Q(x_1,x_2,x_3)$化为标准形。

(3) 二次型是正定的、负定的还是不定的，为什么？

(4) 指出$Q(x_1,x_2,x_3)=1$的几何意义。

得分	评卷人

六、（本题8分）

设V是欧氏空间，b_1. b_2, $\cdots$, b_n是V中一组两两正交的非零向量，

$\beta_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\mathrm{b}_k \; (i = 1, 2, \cdots, m)$，$A = (a_{ij})_{n\times m}$。证明：

(1) b_1, b_2, $\cdots$, b_n线性无关。

(2) $\dim\langle\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\rangle = \mathrm{rank}(A)$。

学生所在系：物理学院　姓名：[illegible]　学号：PB11203096

答题时不要超过此线

中国科学技术大学

2011－2012 学年第一学期《线性代数》期终考试试卷

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
复评人							

得分	评卷人

一、填空题（本大题共 8 小题，共 48 分）

(1) 已知矩阵 $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -2 & x & -1 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似于 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。则 $x=$ 2，$y=$ 6。

(2) 设 A, B, C 为 n 阶矩阵，I_n 为 n 阶单位矩阵。则矩阵 $\begin{pmatrix} I_n & A & C \\ 0 & I_n & B \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}$ 的逆

矩阵为 $\begin{pmatrix} I_n & -A & -C+AB \\ & I_n & -B \\ & & I_n \end{pmatrix}$。

(3) 已知矩阵 $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ 的秩为 3。则 $\lambda=$ -3。

(4) 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+\lambda x_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_2+x_3=0 \\ \lambda x_2+x_3=0 \end{cases}$ 只有平凡解（即，零解）当且仅当

系数 λ 满足条件 $\lambda \neq 1$

(5) 设 $\mathbb{P}_3[x]$ 为次数小于或等于 3 的实系数多项式全体构成的线性空间。则从基 $1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3$ 到基 $1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3$ 的过度矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(6) 在线性空间 $M_3(\mathbb{R})$ 中（运算为矩阵的加法和数乘），考虑线性子空间

$$V = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A\}$$。则 $\dim V =$ 3。

(7) 实二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = -4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 的矩阵是 $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，二次型的秩为 3，正惯性指数为 2。

(8) $\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^9 =$ $-512\, I_n$，$\det \begin{pmatrix} -I_n & 2I_n \\ 3I_n & 4I_n \end{pmatrix} =$ $(-10)^n I_n$。

得分	评卷人

二、（本题 10 分）

考虑 $\mathbb{R}^4$ 中向量组 $S = \{a_1 = (1,-1,2,4), a_2 = (0,3,1,2), a_3 = (1,-1,2,0), a_4 = (2,1,5,10), a_5 = (3,0,7,14)\}$。

(1) 试求向量组 S 的秩。

(2) 试求向量组 S 的所有极大线性无关组。

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{rank}(S) = \mathrm{rank}(A) = 3$

(2) 极大线性无关组：$\{a_1, a_2, a_3\}$。

答题不要超过封线

得分	评卷人

三、（本题 12 分）

设 V 为全体 2 阶对称复方阵构成的线性空间。设 $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$。定义线性映射 $\mathcal{A}: V\to V$ 使得 $\mathcal{A}(X)=AX+XA$。试求 $\mathcal{A}$ 的全部特征值以及相应的特征向量。

A在 E_{11} E_{12} E_{21} E_{22} 下的度量为:

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}0&0\\1&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&1\\0&0\end{matrix}$$

得分	评卷人

四、（本题 10 分）

已知向量 $X=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的特征向量。

(1) 试确定参数 a,b 以及特征向量 X 所对应的特征值。

(2) 问 A 是否相似于对角阵？说明理由。

得分	评卷人

五、（本题 10 分）

已知二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$。

(1) 试求正交变换 P，使 $\mathbf{x}=P\mathbf{y}$ 把 $Q(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形。

(2) 指出二次曲面 $Q(x_1,x_2,x_3)=\sqrt{2}(x_1-x_3)+1$ 的类型。