一、 填空题【每空5分、共25分】:

1. $\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$ 2. $\underline{1,1,1}$ 3. $\underline{x_i}$, $\underline{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}}$ 4. $\underline{2,1}$ 5. $\underline{\pm 1}$.

二、 判断题【每题5分、共20分】每题结论正确2分，理由或反例3分.

1. 正确. 任意有限维实线性空间V，设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是一组基，取任意正定方阵$A$，定义$(x,y)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)A(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$, 其中$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$分别为向量$x,y$在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标. 如此定义的运算即为一个内积.

2. 错误. 必须是n个线性无关的向量，才能Schmidt正交化得到标准正交基.

3. 错误. 反例：$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. 正确. 由A对称知A^k对称；又A^k的特征值为A的特征值的k次方，全为正. 故A^k正定.

三、 【5+4+6+5=20】

证明：（1）任意$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $f=c_1e^x+c_2x+c_3, g=d_1e^x+d_2x+d_3\in V$:

$\mathcal{D}(\lambda\cdot f+\mu\cdot g)=\frac{d}{dx}\big((\lambda c_1+\mu d_1)e^x+(\lambda c_2+\mu d_2)x+(\lambda c_3+\mu d_3)\big)=(\lambda c_1+\mu d_1)e^x+(\lambda c_2+\mu d_2)=\lambda\mathcal{D}(f)+\mu\mathcal{D}(g)\in V$，故$\mathcal{D}$为线性变换.

(2)$\mathcal{D}(1,x,e^x)=(1,x,e^x)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 故所求矩阵为$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3).法I)计算矩阵A的特征多项式为$\phi_A(\lambda)=|\lambda-A|=\lambda^2(\lambda-1)$，故特征值为0和1.

代入$\lambda=0$，解线性方程$-A\alpha=0$得A的特征向量为$(1,0,0)^T$.

代入$\lambda=1$，解线性方程$(I-A)\alpha=0$得A的特征向量为$(0,0,1)^T$.

故$\mathcal{D}$有特征值$0,1$，对应的特征向量分别为1和e^x.

法II)设$\mathcal{D}$的特征值与对应的特征向量为λ和$\alpha=c_1e^x+c_2x+c_3$. 则由

$$\mathcal{D}\big(c_1e^x+c_2x+c_3\big)=\lambda\big(c_1e^x+c_2x+c_3\big)=c_1e^x+c_2.$$

进而$\lambda=0$且$c_1=c_2=0$或$\lambda=1$且$c_2=c_3=0$. 即$\mathcal{D}$的特征值为$0,1$，对应的特征向量分别为1和e^x.

(4). 不存在这样的基，使得$\mathcal{D}$在此基下的矩阵可以对角化；因为由(3)的计算知道$\mathcal{D}$只有两个线性无关的特征向量.

四、【5+10=15】

(1) 二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -6 \\ 0 & -6 & -1 \end{pmatrix}$.

(2). 计算A的特征值为$\lambda_1=3$, $\lambda_2=11, \lambda_3=-4$.

对应的特征向量分别为$\alpha_1=(1,0,0)^T$, $\alpha_2=(0,-2,1)^T$, $\alpha_3=(0,1,2)^T$.

由于A有三个不同特征值，不同特征值的特征向量正交，将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化并令$P_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$，则$P_1^{-1}AP_1=diag(3,11,-4)$.

令$P=P_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$，则$\bar{Q}(y)=Q(x)|_{x=P^{-1}y}=y^T\big(P_1^{-1}AP_1\big)y=3y_1^2+11y_2^2-4y_3^2$. 由于$A$的正特征值有2个，故正惯性指数为$2<3$，故$A$非正定.

五、【共10分】

（$\Longrightarrow$: ）设A_i的阶数为k_i，A_i的特征向量的极大无关组为$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir_i}(r_i\le k_i)$. 令$\beta_{ij}$为$\alpha_{ij}$的加长向量，长度为$n$，其中第$k_1+k_2+\cdots+k_{i-1}+1$ 到第$k_1+k_2+\cdots+k_i$个分量构成α_{ij}，其余分量为0.

则易证向量组$\{\beta_{ij}(1\le i\le s, 1\le j\le r_i)\}$线性无关且为$A$的特征向量，同时$A$的特征向量都能表示为它们的线性组合.

于是$\{\beta_{ij}\}$与A的特征向量的极大无关组等价，进而由这两组向量线性无关知它们所含向量个数相同.

当A可对角化时，A有n个线性无关的特征向量，故$r_1+r_2+\cdots+r_s=n$.

但同时有$r_i \leq k_i$和$k_1+k_2+\cdots+k_s=n$. 故只能是$r_i=k_i(1\leq i\leq s)$，即每个A_i有k_i个线性无关的特征向量. 于是每个A_i都可以对角化.

（$\Longleftarrow$: ）反之，若每个A_i都能对角化，则A_i有k_i个线性无关的特征向量，从而$\sharp\{\beta_{ij}\}=n$，即可找到A的n个线性无关的特征向量$\{\beta_{ij}\}$，于是A可以对角化.

（另，$\Longleftarrow$: 设任意A_{ii}都能对角化，则存在可逆的Q_i使得$Q_i^{-1}A_{ii}Q_i = D_i$为对角阵$(1\leq i\leq s)$. 令$Q=\mathrm{diag}(Q_1,Q_2,\cdots,Q_s)$，则$Q$可逆，且$Q^{-1}AQ=\mathrm{diag}(D_1,D_2,\cdots,D_s)$. 即$A$可对角化.）

法II)设A_i的Jordan标准型为$T_i=\mathrm{diag}(J_{i1},\cdots,J_{ik_i})$且$P_i^{-1}A_iP_i=T_i$，则$\mathrm{diag}(P_1,\cdots,P_s)$可将$A$相似到$\mathrm{diag}(J_{11},\cdots,J_{1k_1},\cdots,J_{s1},\cdots,J_{sk_s})$，此即为$A$的Jordan标准型. 故$A$可对角化$\Longleftrightarrow A$的Jordan块都是1阶$\Longleftrightarrow$每个$J_{ik_j}$均为1阶$\Longleftrightarrow$ 每个A_i的Jordan块均为1阶$\Longleftrightarrow$每个A_i可对角化.

六、 【6+4=10】

证明：(1)设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，其中$\alpha_i$为$A$的第$i$列. 由$A$可逆知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，从而可以构成$\mathbb{R}^n$的一组基.

于是可经Schmidt正交化算法得到一组标准正交基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$.

注意到在Schmidt正交化过程中，每个β_i都只是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i$的线性组合，且关于$\alpha_i$的系数总是正的. 于是, 从基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵$T$ 为上三角阵，且对角元为正.

将向量组还原为矩阵，即有$Q=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)T=AT$. 由$\{\beta_i\}_{1\leq i\leq n}$为标准正交基知$Q$为正交阵.

令$R=T^{-1}$，则R为上三角阵，且对角线上元素仍然为正.

于是得到A的分解$A=QR$，其中Q正交阵，R为上三角阵且对角元为正.

（2）. 若A有两个分解$A=Q_1R_1=Q_2R_2$，满足：Q_1,Q_2都是正交阵，R_1,R_2都是上三角阵且对角元为正. 则$Q_2^{-1}Q_1=R_2R_1^{-1}$.

注意到$Q_2^{-1}Q_1$为正交阵，且$R_2R_1^{-1}$为上三角阵且对角元仍为正.

而若一个对角元为正的上三角阵同时为正交阵，则它只能是单位阵I.

于是$Q_2^{-1}Q_1=R_2R_1^{-1}=I$，即$Q_1=Q_2$且$R_1=R_2$. 即分解唯一.