装订线 ● 答题时不要超过此线

中　国　科　学　技　术　大　学

a() A() 1(0) i() I() 2012 - 2013学年第二学期期终考试试卷(A)

考试科目: 线性代数(B1)　　　　得分:________

学生所在院系:________　　姓名:________　　学号:________

一、【25分】填空题:

1. $\mathbb{R}^2$中线性变换$\mathcal{A}$在基$\alpha_1=(1,-1),\alpha_2=(1,1)$下矩阵为$\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}$，则$\mathcal{A}$在基$\beta_1=(2,0),\beta_2=(-1,1)$下矩阵为________.

2. n阶方阵A的行列式为2，且有特征值λ，则$A^*+A^{-1}+A^2+2I_n$有特征值。

3. 设三维欧氏空间$\mathbb{R}^3$（标准内积）中向量$(1,\lambda,\mu)$与向量$(1,2,3)$和$(1,-2,3)$都正交, 则$\lambda=$________，$\mu=$________.

4. 三元的实二次型$Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-6x_2x_3+x_3^2$的标准型是________.

5. 设V为2阶复方阵构成的复线性空间, $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$, 定义$V$上的线性变换$\mathcal{A}$为$\mathcal{A}(M)=AM$. 那么$\mathcal{A}$的特征值为<u>1,1,1,1</u>.

6. 三维实线性空间$\mathbb{R}^3$中从基$e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,1,1)$到另一组基$f_1=(1,1,1)$, $f_2=(1,1,0)$, $f_3=(0,1,2)$的过渡矩阵是$\underline{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\1&0&2\end{pmatrix}}$.

二、 判断下列命题是否正确, 并简要地给出理由.

1. 若A与B相似，C与D相似，则$\begin{pmatrix}O&A\\C&O\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}O&B\\D&O\end{pmatrix}$相似.

2. 设A为n阶方阵A的不同特征值，X_1, X_2分别为属于λ_1, λ_2的特征向量，则$X_1 + X_2$一定不是A的特征向量.

3. 设A为2阶实方阵，若A的行列式$|A| < 0$，则A可以相似对角化。

4. 若ϕ是从n维实线性空间V到R^n的同构，则$(u, v) = (\phi(u))^T \cdot (\phi(v))$定义了$V$上的一个内积。

5. 设$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$都为n阶正定实对方阵, 则$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$也是正定的.

6. 在三维实线性空间$\mathbb{R}^3$中集合$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$为$\mathbb{R}^3$的线性子空间. (F)

7. 设$\mathcal{S}$是数域F上n维线性空间V上的线性变换, 并且对于任意$\alpha \neq \beta \in V$都有$\mathcal{S}(\alpha) \neq \mathcal{S}(\beta)$. 那么, 任给$V$的一组基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \mathcal{S}(\alpha_1), \mathcal{S}(\alpha_2), \cdots, \mathcal{S}(\alpha_n)$也是$V$的一组基. (T)

三、【10分】如果$n \times n$矩阵A是正定的，那么存在一个正定矩阵B,使得$A = B^T B$.

四、【12分】设e_1, e_2, e_3为R^3的一组标准正交基，且$\alpha_1 = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3)$, $\alpha_2 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3)$, $\alpha_3 = \frac{1}{3}(e_1 - 2e_2 - 2e_3)$,

1. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$也是$R^3$的一组标准正交基;

2. 求e_1, e_2, e_3到$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$的正交变换的矩阵.

3. 求e_1, e_2, e_3到$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$的坐标变换矩阵.

五、设$V = \{(a_2x^2 + a_1x + a_0)e^x : a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$，$V$中元素按函数通常的数乘与加法构成的线性空间。对任意$f(x) \in V$, 定义V上的变换：$\mathcal{A} : p(x) \longrightarrow \frac{d}{dx}p(x)$, 对任意$p(x) \in V$.

1. 证明：$\mathcal{A}$是V上的线性变换；

2. 求$\mathcal{A}$ 在基e^x, xe^x, x^2e^x下的矩阵；

3. 求$\mathcal{A}$的特征值与特征向量。

六、 设α是n维欧氏空间V中的非0向量, 定义V上的线性变换$\mathscr{A}_\alpha$:

$$\mathscr{A}_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha.$$

证明：

1. $\mathscr{A}_\alpha$是一个正交变换.
2. 存在标准正交基，使得$\mathscr{A}_\alpha$在该基下的矩阵为$\mathrm{diag}(-1,1,\cdots,1)$.

七、 设n为大于1的整数, $\mathcal{S}$是数域F上n维线性空间V上的线性变换, 且存在$\alpha \in V$使得

$$\mathcal{S}^{n-1}(\alpha) \neq 0, \quad \mathcal{S}^n(\alpha) = 0.$$

证明$\mathcal{S}$在V的某组基下的矩阵的$(2,1),(3,2),\cdots,(n,n-1)$位置元素全为1, 其他位置元素全为零.

证明: 可取基为$\mathcal{S}^{n-j}(\alpha)$, $j=1,2,\cdots,n$.

八、 问复数λ取何值时方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有唯一解, 有无穷多解或者无解? 并且在有无穷无解时求出通解.

解答: 系数矩阵行列式等于$(\lambda-1)^2(\lambda+2)$. 当λ不等于1或者-2时, 方程有唯一解. 当$\lambda=-2$时, 方程无解. 当$\lambda=1$, 方程有无穷多解, 通解为

$$(x_1,x_2,x_3) = (1,0,0) + a(1,-1,0) + b(0,1,-1) = (1+a, b-a, -b),$$

其中a,b取遍所有复数.