## 《磁流体力学》讲义公式含义表 2020级空间物理 徐小航

**注**：《公式含义表》可用于中国科学技术大学空间物理专业方向汪毓明老师的《磁流体力学》课程开卷考试考场速查。该表提供了汪毓明老师《磁流体力学》讲义中大多数公式的物理意义与公式号（讲义位置），并附有章节号和部分并未以公式形式表现的重要概念。为达到较好效果，建议在知晓讲义的基本知识结构后再使用该表。需要注意，本表采用的是2023春季学期汪毓明老师所使用的讲义，其它版本讲义可能公式号有错位，该版本讲义请至评课社区《磁流体力学》课程@点火燧石的评课下载，同学也可根据自己使用的讲义版本对本表进行修改。

2020级空间物理 徐小航

**2. 基本方程**

**2.1 物理量**

各种成分的总扩散速度为0

2.2 等离子体方程

2.2.1 连续性方程

单成分连续性方程积分形式

单成分连续性方程微分形式

随体导数

单成分连续性方程广义形式

全成分连续性方程积分形式

全成分连续性方程微分形式

**2.2.2 运动方程**

冲量定理

单成分运动方程积分形式，定义了

电磁力/洛伦兹力定义式

单成分运动方程微分形式

全成分运动方程积分形式

全成分运动方程微分形式

总压强张量定义式

非电磁流体方向对方向粘性力计算式

磁化流体方向对方向粘性力计算式

**2.2.3 理想气体状态方程**

基本热力学方程

热容定义式

等容热容定义式

等压热容定义式

理想气体状态方程

无量纲热容定义式

热容比/绝热指数的定义式，与单双原子理想气体情形下的值

理想气体单位质量内能计算式

**2.2.4 能量方程**

能量方程推导——各种能量变化值

单成分能量方程积分形式

单成分能量方程微分形式

全成分能量方程积分形式

全成分能量方程微分形式，包括各种力的做功值与能流

热流与温度梯度关系

将分离为沿着和穿过磁场的两分量

将分离为沿着和穿过磁场的两分量

Ohm定律

电磁力做功与传导电流、对流电流关系

能量方程微分形式的1个变形，由动量方程推导

理想气体的能量方程微分形式

理想气体中基于的计算式，由推导

理想气体的能量方程微分形式的1个变形，基于

绝热可逆过程下理想气体能量方程

绝热可逆过程下理想气体的

绝热可逆过程下理想气体的

辐射冷却为主要能量转换过程时，理想气体的能量方程

等压过程下的：

**2.2.5 电荷/电流方程**

单成分电荷方程，荷质比形式

单成分电荷方程，电荷体积密度形式

全成分电荷方程

全成分电流方程的简化替代，即Ohm定律

**2.2.6 总结**

全成分连续性方程积分形式

全成分连续性方程微分形式

全成分运动方程积分形式

全成分运动方程微分形式

全成分能量守恒方程积分形式

全成分能量守恒方程微分形式，

全成分能量守恒方程微分形式，

理想气体的能量守恒方程微分形式

全成分电荷守恒方程微分形式

理想气体状态方程

热平衡下完全电离等离子体可采用的近似与性质

此时，一共有7个方程、16个变量

**2.3 Ohm定律**

**2.3.1 各种可采用近似**

全电离等离子体的粒子电荷、质量

电离度的定义

全电离等离子体的与的关系

中性气体近似

热平衡下理想气体等离子体，各组分温度相等

热平衡下理想气体等离子体的分压定律，及各分压与电离度关系

等离子体流速远小于热运动速度的近似

还有一个近似，忽略粘性与非电磁力作用。一共**5**个假设！

**2.3.2 单成分运动方程**

电子相对质子的平均动量

电子相对中性粒子的平均动量计算式

质子相对中性粒子平均动量计算式

电子运动方程

电子与其它组分碰撞导致动量变化计算式

质子运动方程

质子与其它组分碰撞导致动量变化计算式

中性粒子的运动方程（使用全成分运动方程代替）

电流与粒子运动速度关系

**2.3.3 部分电离气体的广义Ohm定律**

简化后的部分电离气体各组分运动方程

系数定义式

用表示的部分电离气体各组分运动方程组

用表示的计算式

电中性的部分电离气体广义Ohm定律

非电中性的部分电离气体广义Ohm定律

**2.3.4 简化的广义Ohm定律**

简化假设，基于

广义Ohm定律的另一种形式，与Hall电流定义

**2.3.5 总结**

广义Ohm定律

Ohm定律，即电磁力主导系统、等离子体全电离下的广义Ohm定律

电导率的计算式是什么？

**2.4** **电磁方程**

**2.4.1 Maxwell方程**

Maxwell方程组的微分形式，包括Faraday定律、Poisson方程、Ampere定律、磁场无散定理

磁矢势的定义

磁矢势形式的

电磁标量势的定义

**2.4.2 电磁场下的等离子体方程**

Lorentz力表达式，即

以Poynting矢量与电磁场能流张量表示的Lorentz力

以Poynting矢量与电磁场能量密度表示的电磁力做功

表示的运动方程

表示的能量方程

连续性方程，即

构成了等离子体方程守恒形式

**2.5 MHD方程**

等离子体动力学方程组/电磁流体力学方程组

等离子体方程组的约束条件，并非独立方程

热平衡假设

中性气体假设

非相对论假设

除了热平衡假设、中性气体假设、非相对论假设，等离子体动力学方程组还要求等离子体连续假设。

**2.5.1 MHD近似**

假设1：流速与特征长度-时间之比量级相近

假设2：电场与磁感应电场同量级

假设3：电能磁能

假设4：没有电荷累积过程

假设5：

以上5个假设均来自电场作用远小于磁场作用的要求。

**2.5.2 MHD基本方程组**

MHD基本方程组，包括MHD近似下**简化**后的：

理想气体状态方程

连续性方程

运动方程

能量方程

电荷方程

Ohm定律

Ampere定律

磁感应方程，由Faraday定律获得，以及磁扩散系数。

约束条件

实际应用的MHD基本方程组，只需要解这8个参量。

如何削去参量

**3. 基本性质**

**3.1 磁场的演化——磁感应方程**

**3.1.1 磁场线**

笛卡尔坐标下的磁场线方程

柱坐标下的磁场线方程

球坐标下的磁场线方程

磁场线方程的2个积分常数/两组曲面方程/Euler势的定义

磁场对称时，只需要2个标量函数就能描述磁场

柱对称情形的关系

磁感应方程

磁Reynold数定义式，及

**3.1.2 小磁Reynold数情形**

磁扩散方程，即时的磁感应方程

扩散时标

全电离等离子体的扩散系数的值（与Coulomb对数的关系）

表 不同下的值

日冕的特征长度、磁扩散系数、扩散时标参考值

另描述了地心扩散时标参考值，以及为什么存在行星发动机。

电流片/反转磁场的初磁场假设

电流片的磁场演化计算结果

误差函数的定义

图 函数的性质，包括极限、泰勒展开等

电流片磁场演化结果的近似值

图 电流片磁场示意图。此前介绍了电流片特征宽度。

电流片总电流

**3.1.2 大磁Reynold数情形**

时的磁感应方程

磁冻结定理，即穿过等体面的磁通量守恒

磁冻结定理的证明

磁感应方程的随体形式

是的变形

磁场线伸长导致磁场增强，即；太阳黑子与CME的成因

时的近似Ohm定律，不过电流仍存在

**3.2 Lorentz力**

**3.2.1 Lorentz力的分解**

Lorentz力的双分量（磁压力、磁张力）形式

磁压定义式

等离子体总压

磁张力在磁场线自然坐标系下的表达式/与曲率的关系

Lorentz力在自然坐标系下的表达式/与曲率的关系

描述了的电流、Lorentz力

描述了对称弯曲磁场的电流、Lorentz力、磁场线

描述了热平衡X形磁场的磁场线、Lorentz力

描述了

**3.2.2 Lorentz力对等离子体运动的影响**

推导了等离子体垂直于磁场线运动速度

扩散运动矫正时标与扩散深度

磁冻结情况下磁场线运动速度

描述了均匀圆柱等离子体的线性箍缩（电压产生电流、电流产生感应磁场、感应磁场洛伦兹力使得等离子体箍缩运动）

**3.3 与流体力学类比**

平面运动、无限电导率、运动平面的情形下，气体动力学结论可用于MHD运动。

流体与等离子体的Bernouli方程

流体与等离子体的旋度方程/磁感应方程

**3.4** **无量纲MHD方程与物理量（用于查询）**

MHD近似下的独立与非独立特征参量，及其定义式。

无量纲MHD方程组

各种无量纲参数的定义，分别为比热比、Reynold数（惯性力/粘性力）、磁Reynold数、Mach数（表征压缩程度）、Alfvén-Mach数、Prandtl数（粘性/热耗散）、Cowling数（磁压/动压）、Hartmann数（磁力/粘性耗散力）、等离子体值（热压/磁压）

**4. 磁流体静力学**

静力学的MHD方程组。静力学条件：

**4.1 无力场**

无力场的定义

无力系数的定义

小角度仍满足无力场条件，此时与的夹角的计算式

无非电磁力，且磁场与气压空间变化的特征长度量级一致时，

无力场近似下，同一磁场线上是常数，即

**4.1.1 线性无力场**

描述了势场，即时的性质：

势场有势

利用磁能差为0证明只有一个解

对线性无力场，

的环面极向分解

、

描述了线性无力场的一维解。此时磁场是球对称或柱对称的，形成一个磁通管。

对称轴上的解

柱坐标上的解

磁通管半径

描述了线性无力场的1个二维解——矩形笛卡尔解，冕环即此情形：

矩形笛卡尔解的

磁结构向长度/冕环足点距离为，冕环与日表夹角计算式

磁场的模

一个周期内单位长度的总磁能

势场情形的退化解，及是剪切角

描述了线性无力场的1个二维解——柱坐标解，与矩形笛卡尔解类似：

柱坐标解的

螺旋角、磁场模、磁通管内空间总磁能

柱坐标解的2个极限——势场与高螺旋场的

描述了线性无力场在直角笛卡尔坐标系下的通解

描述了线性无力场在柱坐标下的通解

描述了线性无力场在球坐标下的通解

**4.1.2** **非线性无力场**

描述了坐标系独立于的非线性无力场

描述了柱坐标下轴对称（独立于）的非线性无力场

**4.1.3** **无力场有关定理**

磁螺度的定义式

证明了定理：对一体积内的闭合磁结构，我们总能找到一个垂直于表面的磁矢势，即，且系统内任意变化导致的也垂直于，即。

定理：对一个封闭磁系统，磁螺度具有规范不变性（即和能描述同一个磁场）。

证明了定理：对于体积内的开放磁系统，相对磁螺度具有规范不变性。

相对磁螺度的定义式

闭合空间中磁螺度耗散率的计算式

均匀电导率的线性无力场的磁螺度耗散值

电流螺度的定义式

定理：所有在边界表面规范的场中，势场的磁能最小。

证明了定理：设体积的表面，以及出入点的联线上的磁场法向分量是规范的；那么，如果中的场能在的移动下是固定的（如极值），则场必然是无力的。以上结论的一个推论是，如果给定了上的通量与拓扑连接，且场能为极小值，那么该场是无力的。

定理：在一个闭合体积中，最小磁能的状态一定是无力场。（最小磁能指的是，有磁自由能的磁场会自然耗散磁自由能达到稳态）

证明了定理：对于一个闭合体积中的理想导电等离子体，最小磁能的磁场状态对应线性无力场。

磁自由能的定义。是体积内与有相同表面法向磁场的势场在内的磁能。

定理：无力场的磁能可以只通过表面磁场来计算。

表面为的半空间内的无力场的磁能的计算式

表面为的半空间内的无力场的磁自由能的计算式

证明了定理：在体积的表面上如果Lorentz力消失了，那么内的磁场为0。说明无空间约束下，热等离子体必须有磁笼约束。

证明了定理：对稳态介质（），一个无力场初态在演化中必然保持为无力场。

**4.2 MHD静力学中的等离子体结构**

**4.2.1 有重力场情形**

非电磁力时的受力平衡，即

同根磁场线内，重力场下等离子体与标高的解

磁场线内温度均匀时，重力场下的解；太阳大气参考值

描述了完全垂直磁场的，并证明此时相同下也相同。

描述了完全水平磁场的，此时不能使用

**4.2.2 无重力磁通管（等离子体箍缩）**

无非电磁力的描述

描述了完全轴向磁场/箍缩（柱坐标下电流只有分量绕轴前进）的电流，且总压为常量。

箍缩约束效率的定义式

描述了完全方位角向磁场/箍缩（电流沿轴方向）的热压、磁场、总电流。

Bennett关系，箍缩单位长度粒子数与总电流的关系

描述了螺旋磁场/螺旋箍缩（箍缩+箍缩）的磁场线及其扭转角。

描述了托卡马克螺旋箍缩（圆环形箍缩）的坐标系、扭转角与安全因子。

安全因子/磁扭转匝数的定义式。时，箍缩对不稳定性不敏感。

**4.3\* 无力磁通管的准静态演化**

本节讨论了一个均匀扭转管（为常量）在扩张过程中的演化。

**5. 不可压缩稳定等离子体流**

**5.1 沿直流线的粘性流**

本节采用假设：沿流线不变、流线沿轴、流速只有分量

稳态MHD方程

简化后的Lorentz力、粘度、运动方程

简化后的磁感应方程，即Poisson方程

确定压强：

可由/直接求解的方程组。定义了参量。

由可以完全解决该问题 。

**5.2 层流**

本节讨论两平行板间的层流，采用假设：。此时一定是常量。

层流情形下简化的求解方程组，定义了参量。

求解完毕的，即的计算式。拥有6个未知常数

板间层流的。在有充足边界条件的情形下可以完全求解。

描述了Hartmann流的求解结果。为Hartmann流的边界条件。

求解了Couette流，即依靠板运动带动的层流。

**6. 波**

运动方程，及其中各项回复力导致哪些波

**6.1 小振幅波**

**6.1.1 小扰动近似**

线性近似/完全理想等离子体：忽略粘性与磁扩散、非电磁力只有重力、过程绝热

线性近似下的MHD方程

扰动量定义

线性近似下扰动量的MHD方程

**6.1.2** **波模**

无重力均匀等离子体的线性化MHD方程组

平面波标准形式

平面波相位面定义

相速度定义式

群速度定义式

振幅表示的MHD波动方程

、在平面上时的振幅各分量表示的MHD波动方程

描述了熵波模中各扰动量的结果。熵波是中的解，该解中熵会发生波动。熵波的结果还分为和两种情况。

是MHD波动方程在时的简化，导向Alfvén波或磁声波。

描述了Alfvén波的条件、色散关系、解得振幅结果。

描述了磁声波的条件与色散关系/相速度，又分为快慢磁声波两个模。

今后仅考虑前向传播情况！

1维情况下，一个小扰动会生成以上4个模。

**6.1.3 群速度、相速度图解**

图 相速度的Freidrichs图，倾角为对的夹角，距原点距离为相速度，其关于轴对称。Freidrichs图中2个切于圆点的圆/灰色实线代表Alfvén波，灰色实线外的黑色实线代表快磁声波，灰色实线内的黑色实线代表慢磁声波，熵波在原点。Freidrichs图的形状会随而变化。

快慢磁声波相速度的性质

通过求的关系式

表 完全理想等离子体的4个波模及特殊情况性质总结，可用于查询！

Alfvén波群速度

磁声波群速度

图 群速度图，坐标与相速度图一样。群速度传播方向代表能量的传播方向。

**6.2 波前——弱不连续性**

**6.2.1 弱不连续性的传播**

函数连续但某阶导数不连续的表面为弱不连续表面；函数不连续的表面为强不连续表面；波前是一种弱不连续表面，能量从扰动部分向未扰动部分运送。

用表示的波前MHD方程组。指表面后与表面前物理量之差。

弱不连续性相对速度

均匀线性化的波前MHD方程组

从波前MHD方程组解得4种模弱不连续性。

**6.2.2 弱不连续性的模**

熵波情形的弱不连续性

熵波情形的弱不连续性

Alfvén波的弱不连续性

磁声波的弱不连续性

图 4种模中各个不同物理量的弱不连续性总结

**6.2.3 波前**

波前是能量界面，因此其传播速度取决于群速度。

圆形波前经后的传播结果

**6.3 简单波的演化**

简单波/Riemann波：有连续函数使得一切扰动量均满足

的随体导数为0，即等相位面随波运动。

简单波的MHD波动演化方程

**6.3.1 熵简单波**

**6.3.2** **Alfvén简单波**

**6.3.3 磁声简单波**

介绍了各种简单波的演化。磁声简单波可以发展为激波。描述手段：

**6.4 更多条件的波**

**6.4.1 存在磁耗散**

磁耗散存在时Alfvén波、磁声波的色散关系

**6.4.2 存在重力场**

此时有6个模。

存在重力场时的色散关系

**6.4.3 旋转坐标系内/存在Coriolis力**

Alfvén波分裂为2个惯性波模

**7. 激波**

**7.1 强不连续性**

**7.1.1 边界条件**

电磁场在表面的强不连续性，源于面电荷与面电流

等离子体物理量（质量、动量、能量方程）没有强不连续性

**7.1.2 完全理想MHD的强不连续性**

无粘、无非电磁力、无热流、无电阻

Rankine-Hugoniot关系。对于激波而言，穿过激波表面后超声速流会降速为亚声速流、密度增高、体积降低、内能(的体积密度)升高。

激波绝热关系：穿越激波的能量变化

强不连续性方程在/情形下的解，此时等离子体流不穿过断面。

时的接触不连续性解，条件是。此时密度、温度、熵不连续。

时的切向不连续性解，条件是。此时在接触不连续性解外，不连续。

对/的解，等离子体流会穿过断面。

时的旋转不连续解，条件为连续（等价于连续，即等离子体不可压缩）。穿过断面时，磁场强度不变，发生旋转。

激波：不连续/不连续，等离子体流过断面时发生压缩与能量转化。

**7.1.3 激波关系**

激波关系

激波关系的解，对应激波的快波模和慢波模

的上限与的下限。的含义是穿过激波面的质量流。

利用激波阶跃关系判断激波是快模还是慢模

图 磁场穿越激波面的改变

压缩比和（或）的关系

**7.2 激波性质**

**7.2.1 进化性条件**

质量流进入方向为上游（），输出方向为下游（）。MHD波入射激波面后会被作用而成为不同的出射波，激波面受扰动也会产生MHD波。如果出射波只取决于激波关系，此时激波面是稳定的，称为进化性激波；反之为非进化性激波。

各向同性气体中的进化性激波条件。此时向上游有1种出射波，向下游有3种出射波。然而，空气动力学守恒关系只允许进化性出射波有2个模。

图 上下游流速声速关系的4种不同情况，其中只有右下角是进化性的。也就是说，激波的上游必须是超声速的，下游必须是亚声速的，否则激波不连续性就会被破坏。

进化性MHD激波：有2个模，快模与慢模；快激波的上游流速必须高于上游的快磁声速，下游流速低于下游快磁声速但高于下游Alfvén速度；对慢激波，、；

原位Mach数在上下游的大小关系。

**7.2.2 共面定理**

共面定理：激波面法向矢量共面

通过求

HT坐标系：建立一个在激波面上移动的坐标系，使激波面一侧的流速平行于磁场，如。HT坐标系的磁场与惯性坐标系相同。

HT坐标系下的计算式

HT坐标系相对原坐标系运动速度计算式

HT坐标系没有磁感生电场。时HT坐标系不能忽略相对论效应而失效。

**7.2.3 不同种类的激波**

严格垂直激波，条件为，其上下游流速均垂直于磁场。描述了不连续性关系、流速-波速大小关系、压缩比与各类物理量上下游之比关系

严格平行激波，条件为，类似一个流体力学激波。描述了其压缩比的计算式与大小。

斜激波，即普通形态，可用HT坐标系描述。其压缩比有3个解，分别对应慢激波、中间激波（旋转180°的旋转不连续性）、快激波。

开关激波：对的严格平行激波，下游会出现上游所没有的，即开激波。上游有而下游没有即关激波。这两者均不满足进化性条件，因此是不稳定的，会因为小扰动而消散。

表 理想MHD可能的强不连续性种类