数分分析 A3 第七次习题课

何展韬

2023 年 12 月 16 日

1 作业答案 (第 13,14 周)

练习 (习题 16.1.1). 判断下列无穷积分的敛散性：

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{3x^3-2}{x^5-x^3+1}\mathrm{d}x$ (4) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$ (6) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{(\ln x)^p}{1+x^2}\mathrm{d}x\ (p>0)$

解. (2) 由于 $x=0$ 不是瑕点，故原积分的敛散性跟其在 $(1+\infty)$ 上积分的敛散性相同。又 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{3x^3-2}{x^5-x^3+1}\sim\dfrac{3}{x^2}$，后者在 $(1,+\infty)$ 上积分收敛，由比较判别法，原积分收敛；
(4) 令 $t=\ln x$，则原积分变为：

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^p}$$

故原积分在 $p>1$ 时收敛，在 $p\leqslant 1$ 时发散；
(6) 令 $t=\ln x$，则原积分变为：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^t t^p}{1+\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{d}t\quad(p>0)$$

对任意给定的 $p>0$，当 t 充分大时：

$$0\leqslant\frac{\mathrm{e}^t t^p}{1+\mathrm{e}^{2t}}\leqslant\frac{t^p}{\mathrm{e}^t}\leqslant\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$$

后者在 $(0,+\infty)$ 积分收敛，故由比较判别法，任意 $p>0$，原积分收敛。 □

注 1.1. 本题的 (2)，有部分同学由比较判别法推出原积分和 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{3}{x^2}\mathrm{d}x$ 敛散性相同，而后者在 $(0,1)$ 上积分发散，在 $(1,+\infty)$ 上积分收敛，从而后者发散，得到原积分发散。这种做法的错误之处在于：$\dfrac{3x^3-2}{x^5-x^3+1}\sim\dfrac{3}{x^2}$ 是 $x\to+\infty$ 时的等价无穷小，因此积分敛散性相同只在 $(a,+\infty)$ 成立，其中 a 充分大，但无法保证有限区间上的积分敛散性相同。

练习 (补充习题).

若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

解. 首先由 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续可得，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得：

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon \quad (\forall |x-y|<\delta) \tag{1}$$

固定 δ，再由无穷积分的 Cauchy 收敛，$\exists\,A=A(\varepsilon)>0$，使得：

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\delta\varepsilon}{2} \quad (\forall A_1,A_2>A) \tag{2}$$

现在对 $\forall x>A$，我们可以选取 $A<x_1<x<x_2$，满足 $|x_1-x_2|=\dfrac{\delta}{2}$，结合式 (1)(2) 可得：

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{2}|f(x)| &= \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_{x_1}^{x_2}(f(x)-f(t))\mathrm{d}t+\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_{x_1}^{x_2}|f(x)-f(t)|\mathrm{d}t+\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t\right| \\
&< \frac{\delta\varepsilon}{2}+\frac{\delta\varepsilon}{2} \\
&= \delta\varepsilon
\end{aligned}$$

其中第一行那个积分，积分变量是 t，被积函数是 $f(x)$，$f(x)$ 相对于 t 是常数。整理可得：

$$|f(x)|<2\varepsilon \quad (\forall x>A=A(\varepsilon))$$

而这是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 的定义。 □

注 1.2. 有不少同学通过反证法证明此命题，过程与上述答案是基本一致的，但要注意这里反证法的第一步，假设结论不成立时，应当假设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$ 或极限不存在，不要漏了“极限不存在”。

练习 (**习题 16.2.1**). 研究下列积分的敛散性:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{1+x}\mathrm{d}x$ (3) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{x}\mathrm{d}x$ (5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{[t]-t+a}{t+x}\mathrm{d}t\ (x>0, a\neq\frac{1}{2})$

解. (1) 首先 0 不是瑕点，故只用考虑 $(1,+\infty)$ 上的积分。令 $f(x)=\cos x$，$g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$。由于 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减趋于 0，且：

$$|F(A)|=\left|\int_1^A f(x)\mathrm{d}x\right|=|\sin A-\sin 1|\leqslant 2\quad(\forall A>1)$$

故由 Dirichlet 判别法，原积分收敛。

(3) 利用二倍角公式可得：

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1+\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x\overset{\Delta}{=\!=}I_1+I_2$$

其中 I_1 发散。对 I_2，令 $f(x)=\cos 2x$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$。由于 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减趋于 0，且：

$$|F(A)|=\left|\int_1^A f(x)\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{2}|\sin 2A-\sin 2|\leqslant 1\quad(\forall A>1)$$

故由 Dirichlet 判别法，I_2 收敛，从而原积分发散。

(5) 首先注意到如下事实：对 $\forall k\in\mathbb{N}$，都有：

$$\int_k^{k+1}[t]-t+\frac{1}{2}\mathrm{d}t=k+\frac{1}{2}-\int_k^{k+1}t\mathrm{d}t=k+\frac{1}{2}-\frac{(k+1)^2}{2}+\frac{k^2}{2}=0\tag{3}$$

因此我们考虑把原积分分成如下两个部分：

$$\int_0^{+\infty}\frac{[t]-t+a}{t+x}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\frac{a-\frac{1}{2}}{t+x}\mathrm{d}t\overset{\Delta}{=\!=}I_1+I_2\tag{4}$$

其中对 $\forall x>0$，0 不是 I_2 的瑕点，当且仅当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时 I_2 收敛。

对 I_1，令 $f(t)=[t]-t+\dfrac{1}{2}$，$g(t)=\dfrac{1}{t+x}$，$g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减趋于 0。考虑 $f(t)$ 的积分，对 $\forall A>0$，取 $M=[A]$，则结合式 (3) 可得：

$$F(A)=\int_0^A f(t)\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{M-1}\int_k^{k+1}f(t)\mathrm{d}t+\int_M^A f(t)\mathrm{d}t=\int_M^A f(t)\mathrm{d}t$$

由于 $A-M=A-[A]\in[0,1)$，$t-[t]\in[0,1)$，故：

$$|F(A)|=\left|\int_M^A f(t)\mathrm{d}t\right|=\left|\int_M^A[t]-t+\frac{1}{2}\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|\int_M^A 1+\frac{1}{2}\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{3}{2}\quad(\forall A>0)$$

故由 Dirichlet 判别法，I_1 收敛。最后结合式 (4)，由于 $a\neq\dfrac{1}{2}$，故原积分发散。 □

练习 (习题 16.2.2). 研究下列积分的绝对敛散性和条件收敛性：

(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(1-2x)}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{x^2+1}}\mathrm{d}x$　　(4) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln x}\mathrm{d}x$

解. (2) 由于 $\left|\dfrac{\cos(1-2x)}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{x^2+1}}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ $(\forall x>1)$，故由比较判别法，原积分绝对收敛。

(4) 令 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$。由于 $g(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 单调递减趋于 0，且：

$$|F(A)| = \left|\int_1^A f(x)\mathrm{d}x\right| = |\cos 2-\cos A| \leqslant 2 \quad (\forall A>2)$$

故由 Dirichlet 判别法，原积分收敛；

考虑其绝对值积分，利用二倍角公式：

$$\int_2^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x\ln x}\right|\mathrm{d}x \geqslant \int_2^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x\ln x}\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty}\frac{1}{2x\ln x}\mathrm{d}x - \int_2^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x\ln x}\mathrm{d}x \overset{\Delta}{=\!=} I_1+I_2 \tag{5}$$

其中 I_2 可通过类似讨论可用 Dirichlet 判别法证明其收敛。对 I_1，做简单换元可得：

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{2x\ln x}\mathrm{d}x \xlongequal{t=\ln x} \int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{1}{2t}\mathrm{d}t = +\infty$$

故 I_1 发散，从而由式 (5) 可得绝对值积分发散，因此原积分条件收敛。 □

练习 (习题 16.2.3).

设 f 为非负的减函数，且 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，证明：当 $x\to+\infty$ 时，

$$f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)$$

解. 首先由无穷积分的 Cauchy 收敛可得，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\, A_0>a$，使得：

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \quad (\forall A_1,A_2>A_0)$$

故当 $A>2A_0$ 时：

$$\left|\int_{\frac{A}{2}}^{A} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \quad (\forall A>2A_0) \tag{6}$$

由于 f 为非负的减函数，故式 (6) 变为：

$$0 \leqslant \frac{A}{2}f(A) \leqslant \int_{\frac{A}{2}}^{A} f(x)\mathrm{d}x < \varepsilon \quad (\forall A>2A_0)$$

故：

$$0 \leqslant Af(A) < 2\varepsilon \quad (\forall A>2A_0=A_0(\varepsilon))$$

而这是 $f(x)=o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的定义。 □

练习 (习题 16.3.1). 判断下列反常积分的敛散性：

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ (4) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^{\sin x}-1}\mathrm{d}x$ (6) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q}$

解. (2) 由于 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$，故 $x\to 0^+$ 时，有如下的等价无穷小：

$$\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\sim\frac{1}{x^{\alpha-1}}\quad(x\to 0^+) \tag{7}$$

故 $\alpha>1$ 时 $x=0$ 是瑕点，$\alpha\leqslant 1$ 时 $x=0$ 不是瑕点。由此将原积分分为两部分：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x\overset{\Delta}{=\!=}I_1+I_2$$

故原积分收敛 $\iff I_1,I_2$ 都收敛。

对 I_1，$\alpha\leqslant 1$ 时为常义积分，收敛；$\alpha>1$ 时，I_1 是非负函数积分。由式 (7) 以及比较判别法的极限形式可得 I_1 与 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^{\alpha-1}}\mathrm{d}x$ 同敛散，而后者收敛 $\iff \alpha-1<1\iff\alpha<2$。故 $\alpha<2$ 时 I_1 收敛，$\alpha\geqslant 2$ 时 I_1 发散。

对 I_2，直接换元可得：

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x\xlongequal{t=\ln(1+x)}\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{t\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t-1)^\alpha}\mathrm{d}t \tag{8}$$

对式 (8) 右边，由于：

$$\frac{t\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t-1)^\alpha}\sim\frac{t}{\mathrm{e}^{t(\alpha-1)}}\quad(t\to+\infty)$$

而 $\displaystyle\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^{t(\alpha-1)}}\mathrm{d}t$ 收敛 $\iff\alpha>1$，故由比较判别法的极限形式，$\alpha>1$ 时 I_2 收敛，$\alpha\leqslant 1$ 时 I_2 发散。

综上 $1<\alpha<2$ 时原积分收敛，其他情形原积分发散。

(4) 注意到 $x\in(0,1)$ 时 $\sin x>0$，故 $\mathrm{e}^{\sin x}-1>0$，原积分是非负函数积分。进一步有：

$$\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^{\sin x}-1}\sim\frac{\sqrt{x}}{\sin x}\sim\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\quad(x\to 0^+)$$

故由比较判别法的极限形式，原积分与积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 同敛散。由于后者收敛，故原积分收敛。

(6) 容易得到 $x=0$ 是瑕点 $\iff p>0$ 或 $p=0,q<0$，$x=1$ 是瑕点 $\iff q>0$，因此将原积分分为 $(0,\frac{1}{2})$，$(\frac{1}{2},1)$，$(1,2)$，$(2\ +\infty)$ 四部分，分别记为 $I_k\,(k=1,2,3,4)$。故原积分收敛 $\iff I_k(k=1,2,3,4)$ 都收敛。

对 I_1，直接换元可得：

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q} \xlongequal{t=-\ln x} \frac{1}{(-1)^q}\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{(p-1)t}}{t^q}\mathrm{d}t$$

故 I_1 收敛 $\iff p<1$ 或 $p=1, q>1$。

对 I_4，同样直接换元可得：

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q} \xlongequal{t=\ln x} \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{(p-1)t}t^q}\mathrm{d}t$$

故 I_4 收敛 $\iff p>1$ 或 $p=1, q>1$。故为了让 I_1, I_4 都收敛，必有 $p=1, q>1$。

$p=1$ 时，对 I_2，我们有：

$$\frac{1}{x(\ln x)^q} \sim \frac{1}{(\ln x)^q} \sim \frac{1}{(1-x)^q} \quad (x\to 1^-)$$

故由比较判别法，I_2 收敛 $\iff q<1$。对 I_3 同理可得，$p=1$ 时，I_3 收敛 $\iff q<1$。

综上无论 p, q 取何值，$I_1 \sim I_4$ 总有一个发散，故无论 p, q 取何值原积分都发散。 □

注 1.3. 这一题的 (6) 常见两种错误：(1) 没有讨论 $p=1$ 的情况；(2) 对区间只分了 $(0,1)$, $(1,+\infty)$ 两个，忽视了 $x=1$ 可能为瑕点。

练习 (**习题 16.3.2**). 判断下列反常积分的绝对收敛性和条件收敛性：

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x \quad (q\geqslant 0)$

解. 首先判断 $x=0$ 何时为瑕点。由于：

$$\frac{x^p\sin x}{1+x^q} \sim \frac{x^{p+1}}{1+x^q} \quad (x\to 0^+, q\geqslant 0)$$

故 $x=0$ 为瑕点 $\iff p+1<0 \iff p<-1$。因此我们将原积分分为两部分：

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x \triangleq I_1 + I_2$$

故原积分收敛 $\iff I_1, I_2$ 都收敛；原积分绝对收敛 $\iff I_1, I_2$ 都绝对收敛。

对 I_1，由于 $x\in(0,1)$ 时 $\sin x>0$，故 I_1 为非负函数积分，收敛等价于绝对收敛。$p\geqslant -1$ 时 I_1 为常义积分，故 I_1 收敛。$p<-1$ 时 I_1 为瑕积分，又有：

$$\frac{x^p\sin x}{1+x^q} \sim \begin{cases} x^{p+1} & q>0 \\ \dfrac{x^{p+1}}{2} & q=0 \end{cases} \quad (x\to 0^+)$$

故 $p<-1$ 时 I_1 收敛 $\iff p+1>-1 \iff p>-2$。综上可知 I_1（绝对）收敛 $\iff p>$

-2。

对 I_2，令 $f(x)=\dfrac{x^p}{1+x^q}=\dfrac{1}{x^{-p}+x^{q-p}}$，$g(x)=\sin x$。当 $p<q$ 时，$f(x)$ 在 x 充分大时单调递减趋于 0，又有：

$$\left|\int_1^A \sin x\mathrm{d}x\right|=|\cos 1-\cos A|\leqslant 2\quad(\forall A>1)$$

故由 Dirichlet 判别法，$p<q$ 时 I_2 收敛。更进一步，$p+1<q$ 即 $q-p>1$ 时：

$$\left|\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\right|\leqslant\frac{x^p}{1+x^q}=\frac{1}{x^{-p}+x^{q-p}}\leqslant\frac{1}{x^{q-p}}\quad(\forall x>1)$$

故 $p+1<q$ 时 I_2 绝对收敛。$p<q\leqslant p+1$ 时，由于：

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\right|\mathrm{d}x\geqslant\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin^2 x}{1+x^q}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{2(x^{-p}+x^{q-p})}\mathrm{d}x-\int_1^{+\infty}\frac{x^p\cos 2x}{2(1+x^q)}\mathrm{d}x\triangleq I_3-I_4$$

注意到 $q\geqslant 0$ 以及 $p<q\leqslant p+1$ 可以推出 $-p\leqslant 1$，又 $q-p\leqslant 1$，故此时 I_3 必发散且趋于 $+\infty$。I_4 可通过跟之前相同的讨论，用 Dirichlet 判别法证明其收敛。故 $p<q\leqslant p+1$ 时 I_2 不绝对收敛，但 $p<q$ 时 I_2 本身收敛，故 $p<q\leqslant p+1$ 时 I_2 条件收敛。

当 $0\leqslant q\leqslant p$ 时，由于：

$$\left|\int_{2k\pi}^{(2k+\frac{1}{2})\pi}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x\right|\geqslant\frac{(2k\pi)^p}{1+(2k+\frac{1}{2})^q\pi^q}\longrightarrow\begin{cases}+\infty & 0\leqslant q<p\\ \dfrac{1}{2} & 0\leqslant q=p\end{cases}\quad(k\to\infty)$$

故此时 I_2 必定不满足 Cauchy 收敛准则，因此 $0\leqslant q\leqslant p$ 时 I_2 发散。综上可知 $p+1<q$ 时 I_2 绝对收敛，$p<q\leqslant p+1$ 时 I_2 条件收敛，$0\leqslant q\leqslant p$ 时 I_2 发散。

最后结合 I_1,I_2 的结果可得：$p>-2$ 且 $p+1<q$ 时原积分绝对收敛，$p>-2$ 且 $p<q\leqslant p+1$ 时原积分条件收敛，其他情形原积分发散。 □

注 1.4. (1) 本题有同学在过程中用到了以下等价：

$$\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\sim\frac{\sin x}{x^{q-p}}\quad(x\to+\infty,q>0)$$

以此来说明左右两式在 $(1,+\infty)$ 上积分同敛散。这种做法是有问题的，原因是 $\sin x$ 的符号问题，这里不能使用比较判别法。想要证明上面两式在 $(1,+\infty)$ 上积分同敛散，一个常见思路是考虑作差，验证作差后的函数在 $(1,+\infty)$ 上积分收敛（对这里而言，似乎作差也搞不定）。

(2) 注意本题中有的证明敛散性得到的 p,q 范围有的是等价的，有的只是充分的；

(i) 通过比较判别法的极限形式得到的 p,q 范围都是等价的；

(ii) 用不等式形式的比较判别法，**Dirichlet** 判别法得到的 p,q 范围只是充分的。

因此本题答案中对 $p\geqslant q$ 时讨论原积分发散是必须要有的，仅由 **Dirichlet** 判别法证明 $p<q$ 时 I_2 收敛无法确定 $p\geqslant q$ 时原积分的敛散性。

练习 (问题 16.3.6).

设 $a,b>0$，证明：

(1) 如果 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(+\infty)$ 存在，那么：

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=(f(0)-f(+\infty))\ln\frac{b}{a}$$

(2) 如果 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，那么：

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}$$

(3) 如果 f 在 $(0,+\infty)$ 上连续，$f(+\infty)$ 存在，且 $\displaystyle\int_0^{1}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，那么：

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=-f(+\infty)\ln\frac{b}{a}$$

解. (1) 将待证等式左边写成极限形式，即证：

$$\lim_{\substack{A\to0^+\\B\to+\infty}}\int_A^B\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=(f(0)-f(+\infty))\ln\frac{b}{a}\tag{9}$$

对式 (9) 左边换元可得：

$$\begin{aligned}\int_A^B\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x&=\int_A^B\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_A^B\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x\\&=\int_{aA}^{aB}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_{bA}^{bB}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\\&=\int_{aA}^{bA}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_{aB}^{bB}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{10}$$

由于 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续，故对式 (10) 运用第一积分中值定理可得：

$$\int_{aA}^{bA}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_{aB}^{bB}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=f(\eta)\int_{aA}^{bA}\frac{1}{t}\mathrm{d}t-f(\xi)\int_{aB}^{bB}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=(f(\eta)-f(\xi))\ln\frac{b}{a}\tag{11}$$

其中 $aA\leqslant\eta\leqslant bA$，$aB\leqslant\xi\leqslant bB$。又 $a,b>0$，故 $A\to0^+,B\to+\infty$ 时，$\eta\to0^+,\xi\to+\infty$。又由 f 在 $x=0$ 处连续，$f(+\infty)$ 存在，结合式 (9)(10)(11) 可得：

$$\lim_{\substack{A\to0^+\\B\to+\infty}}\int_A^B\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\substack{A\to0^+\\B\to+\infty}}(f(\eta)-f(\xi))\ln\frac{b}{a}=(f(0)-f(+\infty))\ln\frac{b}{a}$$

(2) 在问 (1) 中得到的式 (9)(10) 依旧成立，且依旧可以使用第一积分中值定理得到 $f(\eta)$。现由于 $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，故由 Cauchy 收敛准则：

$$\lim_{B\to+\infty}\int_{aB}^{bB}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=0$$

再由 f 在 $x=0$ 处连续，可得：

$$\lim_{\substack{A\to0^+\\B\to+\infty}}\int_A^B\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\substack{A\to0^+\\B\to+\infty}}\left(f(\eta)\ln\frac{b}{a}-\int_{aB}^{bB}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right)=f(0)\ln\frac{b}{a}$$

(3) 在问 (1) 中得到的式 (9)(10) 依旧成立，且依旧可以使用第一积分中值定理得到 $f(\xi)$。现由于 $\int_0^1\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，故由 Cauchy 收敛准则：

$$\lim_{A\to0^+}\int_{aA}^{bA}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=0$$

再由 $f(+\infty)$ 存在，可得：

$$\lim_{\substack{A\to0^+\\B\to+\infty}}\int_A^B\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\substack{A\to0^+\\B\to+\infty}}\left(\int_{aA}^{bA}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-f(\xi)\ln\frac{b}{a}\right)=-f(+\infty)\ln\frac{b}{a}$$

□

练习 (习题 18.1.1). 求极限：

(1) $\lim_{a\to0}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x$ (2) $\lim_{t\to0}\int_0^2x^2\cos tx\mathrm{d}x$

解. (1) 令 $f(x,a)=\sqrt{x^2+a^2}$，$\varphi(a)=\int_{-1}^1\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x$。因为 f 在 $[-1,1]\times[-1,1]$ 上连续，故 $\varphi(a)$ 在 $a=0$ 处连续，故：

$$\lim_{a\to0}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\varphi(0)=\int_{-1}^1|x|\mathrm{d}x=1$$

(2) 令 $f(x,t)=x^2\cos tx$，$\varphi(t)=\int_0^2x^2\cos tx\mathrm{d}x$。因为 f 在 $[0,2]\times[-1,1]$ 上连续，故 $\varphi(t)$ 在 $t=0$ 处连续，故：

$$\lim_{t\to0}\int_0^2x^2\cos tx\mathrm{d}x=\varphi(0)=\int_0^2x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{3}$$

□

练习 (习题 18.1.3). 计算下列函数的导数：

(1) $f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{e}^{(1+t)^2}\mathrm{d}t$ (2) $f(x)=\int_{a+x}^{b+x}\frac{\sin xt}{t}\mathrm{d}t$

解. (1) $f(x)$ 的可微性是容易得到的，直接计算可得：

$$f'(x)=\mathrm{e}^{(1+\cos x)^2}(-\sin x)-\mathrm{e}^{(1+\sin x)^2}\cos x=-\mathrm{e}^{(1+\cos x)^2}\sin x-\mathrm{e}^{(1+\sin x)^2}\cos x$$

(2) $f(x)$ 的可微性是容易得到的，直接计算可得：

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{\sin x(b+x)}{b+x}-\frac{\sin x(a+x)}{a+x}+\int_{a+x}^{b+x}\cos xt\mathrm{d}t\\&=\frac{\sin x(b+x)}{b+x}-\frac{\sin x(a+x)}{a+x}+\frac{\sin x(b+x)-\sin x(a+x)}{x}\end{aligned}$$

□

练习 (问题 18.1.2(1)). 利用对参数的微分法，计算下列积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)\mathrm{d}x$

解. 视 a 为参变量，b 为参数，设：

$$f(x,a)=\ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)$$

$$\varphi(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)\mathrm{d}x$$

则 a,b 满足 ab 不同为 0。由于原积分关于 a,b 是偶函数，因此下面只讨论 $a,b\geqslant 0$ 的情形。当 $b=0$ 时，$a>0$，此时 $\varphi(a)$ 的值可以直接计算：

$$\begin{aligned}\varphi(a)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2 x)\mathrm{d}x\\&=\pi\ln a+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x\\&=\pi\ln a-\pi\ln 2\\&=\pi\ln\frac{a}{2}\end{aligned}$$

其中运用了一个积分结果：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$

当 $b>0$ 时，$a\geqslant 0$，此时 $f(x,a)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,+\infty)$ 上连续，且计算 $\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}$ 可得：

$$\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}=\frac{2a\sin^2 x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$$

故 $\dfrac{\partial f(x,a)}{\partial a}$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,+\infty)$ 上连续，因此 $\varphi(a)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 上可微。计算 $\varphi(a)$ 可得：

$$\varphi'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\sin^2 x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

当 $a=b>0$ 时：

$$\varphi'(b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{b}\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2b}$$

当 $a\neq b,a,b>0$ 时：

$$\begin{aligned}\varphi'(a)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\sin^2 x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{u=\tan x}\int_0^{+\infty}\frac{2au^2}{a^2u^2+b^2}\cdot\frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u\\&=\frac{2a}{b^2-a^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{b^2}{a^2u^2+b^2}-\frac{1}{u^2+1}\right)\mathrm{d}u\\&=\frac{2a}{b^2-a^2}\left(\arctan(\frac{au}{b})-\arctan u\right)\Big|_0^{+\infty}\\&=\frac{\pi}{a+b}\end{aligned}$$

故 $\varphi'(a)=\dfrac{\pi}{a+b}\ (\forall a,b>0)\ \Rightarrow\ \varphi(a)=\pi\ln(a+b)+C\ (a\geqslant 0,b>0)$，其中 C 为待定常数。又 $a=b>0$ 时：

$$\pi\ln(2b)+C=\varphi(b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(b^2)\mathrm{d}x=\pi\ln b$$

故 $C=-\pi\ln 2$，从而 $\varphi(a)=\pi\ln\dfrac{a+b}{2}\ (a\geqslant 0,b>0)$.

综上 $\varphi(a)=\pi\ln\dfrac{a+b}{2}\ (a,b\geqslant 0$ 且 a,b 不同为 $0)$。最后由原积分关于 a,b 是偶函数，故：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)\mathrm{d}x=\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}$$

其中上述等式有意义当且仅当 a,b 不同为 0。 □

注 1.5. (1) 本题若当成纯粹的计算题，直接在 $b\geqslant 0$ 时对 $\varphi(a)$ 求导也可以把题目做出来，但是 $b=0$ 时，由于 $f(x,a)$ 在 $(0,a)\ (\forall a>0)$ 处都没有意义，无法做到在 $[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,+\infty)$ 上连续，因此无法使用定理说明 $\varphi(a)$ 的连续性。故当成证明题来做，为了避开这个问题，需要对 b 进行分类。

(2) 本题在计算 $\varphi'(a)$ 时，需要对 $a^2=b^2(a,b>0$ 时为 $a=b)$ 单独讨论，原因是直接计算 $\varphi'(a)$，过程中不可避免会在分母出现 b^2-a^2（尽管最后消掉了）。在计算 $a=b$ 时的 $\varphi'(a)$，

一方面可以按答案做法，直接代入计算，另一方面也可以说明 $\varphi'(a)$ 的连续性，通过 $a \neq b$ 时的表达式得到。

(3) 本题注意到原积分关于 a, b 的对称性可以大大简化求 $\varphi'(a)$ 时的分类。在求 $\varphi'(a)$ 时，a, b 的符号问题将会影响 $\arctan(\frac{au}{b})$ 在 $+\infty$ 处的值或为 $\frac{\pi}{2}$，或为 $-\frac{\pi}{2}$。这个符号问题会影响 $\varphi'(a)$ 的一般表达式：

$$\varphi'(a) = sgn(a)\frac{\pi}{|a|+|b|} \quad (\forall |a|+|b|>0)$$

注意这里的 $sgn(a)$，只有一两个同学算对了 $\varphi'(a)$ 的表达式，大部分同学都漏了 $sgn(a)$。其实可以从 $\varphi(a)$ 是偶函数，或者 $\varphi'(a)$ 的原始表达式（积分前的形式）看出 $\varphi'(a)$ 是个奇函数，这个观察有助于我们判断计算结果是否正确。

2 补充题目

在习题 16.3.2(2) 里我们做了一道跟三角函数有关的反常积分绝对/条件收敛性判断的题，当中涉及了瑕积分和无穷积分的分类，带三角函数判断积分条件收敛，发散的常规做法。下面对此继续补充两道题目。

例题 2.1. 判断下列反常积分的绝对收敛性和条件收敛性：

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^p \sin x^q \mathrm{d}x\ (q \neq 0)$ (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\mathrm{d}x\ (p > 0)$

解. (1) 三角函数里面带着 x 的幂次会妨碍我们对三角函数项的分析，因此首先考虑换元：

$$\int_0^{+\infty} x^p \sin x^q \mathrm{d}x \xlongequal{t=x^q} \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{q}\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t & q > 0 \\ \displaystyle-\frac{1}{q}\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t & q < 0 \end{cases}$$

记 $\dfrac{p+1}{q} = \alpha$，则 $\alpha \in \mathbb{R}$，故原积分的绝对/条件收敛性等价于积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \sin x\mathrm{d}x$ 的绝对/条件收敛性。由于 0 有可能成为瑕点，因此将积分分为两部分：

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\sin x\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\alpha-1}\sin x\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}\sin x\mathrm{d}x \triangleq I_1 + I_2$$

故原积分收敛 $\iff$ I_1, I_2 都收敛，原积分绝对收敛 $\iff$ I_1, I_2 都绝对收敛。
对 I_1，这是 $(0,1)$ 上的非负函数积分，故 I_1 收敛 $\iff$ I_1 绝对收敛。又由于：

$$x^{\alpha-1}\sin x \sim x^\alpha \quad (x \to 0^+)$$

故由比较判别法，I_1（绝对）收敛 $\iff$ $\alpha > -1$.
对 I_2，当 $1-\alpha > 0$ 即 $\alpha < 1$ 时，令 $f(x) = \dfrac{1}{x^{1-\alpha}}$，$g(x) = \sin x$。由于 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减趋于 0，且：

$$\left|\int_1^A g(x)\mathrm{d}x\right| = |\cos 1 - \cos A| \leqslant 2 \quad (\forall A > 1)$$

故由 Dirichlet 判别法，$\alpha < 1$ 时 I_2 收敛。
当 $1-\alpha > 1$ 即 $\alpha < 0$ 时，由于 $\left|\dfrac{\sin x}{x^{1-\alpha}}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^{1-\alpha}}$，故由比较判别法，$\alpha < 0$ 时 I_2 绝对收敛。
当 $1-\alpha \in (0,1]$ 即 $0 \leqslant \alpha < 1$ 时，由于：

$$\int_1^{+\infty} |x^{\alpha-1}\sin x|\mathrm{d}x \geqslant \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}\sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}\cos 2x\mathrm{d}x \triangleq I_3 - I_4$$

由 Dirichlet 判别法可知 I_4 收敛，又 $0 \leqslant \alpha < 1$ 时 $I_3 = +\infty$，故 $0 \leqslant \alpha < 1$ 时 I_2 条件收敛。

最后当 $\alpha\geqslant 1$ 时，对 $\forall k\in\mathbb{N}^*$ 有：

$$\left|\int_{2k\pi}^{(2k+\frac{1}{2})\pi}x^{\alpha-1}\sin x\mathrm{d}x\right|\geqslant(2k\pi)^{\alpha-1}\left(\int_{2k\pi}^{(2k+\frac{1}{2})\pi}\sin x\mathrm{d}x\right)=(2k\pi)^{\alpha-1}\geqslant 1$$

故此时 I_2 不满足 Cauchy 收敛准则，故 $\alpha\geqslant 1$ 时 I_2 发散。

综上，结合 I_1,I_2 的结果，当 $\dfrac{p+1}{q}\in(-1,0)$ 时原积分绝对收敛，当 $\dfrac{p+1}{q}\in[0,1)$ 时原积分条件收敛，其他情形原积分发散。

(2) 首先需要先确定 $x=0$ 是否为原积分的瑕点。由于：

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\sin x}{x}}{x^{p-1}+\frac{\sin x}{x}}=\begin{cases}1 & p>1\\ \dfrac{1}{2} & p=1\\ 0 & 0<p<1\end{cases}$$

故 $x=0$ 不是瑕点，我们只需讨论 $(1,+\infty)$ 上的积分即可。本题被积函数和第 (1) 问有相似之处，但分母有所不同。因此我们考虑被积函数与已知结果作差：

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x-\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\mathrm{d}x\triangleq I_1+I_2$$

对 I_1，直接由第 (1) 问可得，当 $p>1$ 时 I_1 绝对收敛，当 $0<p\leqslant 1$ 时 I_1 条件收敛，其他情形 I_1 发散。

对 I_2，这是 $(1,+\infty)$ 上的非负函数积分，故 I_2 收敛 $\iff$ I_2 绝对收敛。下面只考虑 I_1 收敛，即 $p>0$ 的情形。

当 $0<p\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，有：

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\mathrm{d}x\geqslant\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+1)}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^p(x^p+1)}\mathrm{d}x-\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^p(x^p+1)}\mathrm{d}x$$

当 $0<p\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，上式右边第一个积分为 $+\infty$，第二个积分由 Dirichlet 判别法知其收敛，故 $0<p\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时 I_2 发散。

当 $p>\dfrac{1}{2}$ 时，由于 $0\leqslant\dfrac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\leqslant\dfrac{1}{x^p(x^p-1)}$，故由比较判别法，$p>\dfrac{1}{2}$ 时 I_2 绝对收敛。

综上，结合 I_1,I_2 的结果，当 $0<p\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时原积分发散，当 $\dfrac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时原积分条件收敛，当 $p>1$ 时原积分绝对收敛。 □

注 2.1. **(1) 本题问 (1) 和问 (2) 都把原积分分成两部分，但注意其中的不同：**

问 (1)：把原积分的积分区间 $(0,+\infty)$ 分成了两部分，拆分后原积分收敛 $\iff$ I_1, I_2 都收敛，原积分绝对收敛 $\iff$ I_1, I_2 都绝对收敛，这个性质是由定义直接得到的。
问 (2)：把原积分被积函数分成了两部分，拆分后原积分敛散性与 I_1, I_2 的敛散性并没有等价关系（如 I_1, I_2 发散，原积分也有可能收敛），对于绝对/条件收敛性也是如此！
(2) 本题问 (2) 之所以能够得到最后的结果，是基于以下三条论断：
(i) $0 < p \leqslant \frac{1}{2}$ 时，I_1 收敛，I_2 发散，故原积分发散；
(ii) $\frac{1}{2} < p \leqslant 1$ 时，I_1 收敛，I_2 收敛，故原积分收敛；I_1 不绝对收敛，I_2 绝对收敛，由于：

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\right|\mathrm{d}x \geqslant \int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\mathrm{d}x - \int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\right|\mathrm{d}x$$

故原积分的绝对值积分发散，从而原积分条件收敛。
(iii) $p > 1$ 时，I_1 绝对收敛，I_2 绝对收敛，由于：

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\right|\mathrm{d}x \leqslant \int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\right|\mathrm{d}x$$

故原积分绝对收敛。

在习题 16.2.1(5) 中我们用到了周期函数积分的性质来帮助判断积分敛散性（在那道题中可以通过计算来得到这个性质）。三角函数的周期性以及良好的对称性，使得某些跟三角函数有关的积分敛散性变得容易判断。

例题 2.2. 判断下列反常积分的敛散性：

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\cos x}\sin(\sin x)\mathrm{d}x$$

解. 首先需要确定 $x=0$ 是否为原积分的瑕点。由于：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\cos x}\sin(\sin x) = \lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin(\sin x)}{\sin x} = \mathrm{e}$$

故 $x=0$ 不是原积分瑕点，我们只需要对 $(1,+\infty)$ 上的积分讨论敛散性即可。令 $g(x)=\frac{1}{x}$，$f(x)=\mathrm{e}^{\cos x}\sin(\sin x)$。$g(x)$ 单调递减趋于 0。注意到，$f(x)$ 是周期为 2π 的奇函数，且为连续函数，故 $f(x)$ 在一个周期上的积分为 0，且在小于一个周期上的积分值有界，因此：

$$\left|\int_1^A f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M \quad (\forall A > 1)$$

故由 Dirichlet 判别法，原积分收敛。 $\square$

在 18.1 中我们学习了含参变量常义积分的连续性定理，对 $\varphi(t)=\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$，它要求被积函数 $f(x,t)$ 在一个小闭矩形上连续。通过证明我们不难发现，这里的矩形对 x 要求必须是 $[a,b]$，但对 t 可以是任意小，即 $[t-\varepsilon,t+\varepsilon]$，最重要的是闭性是必须要的，因为我们需要使用二元连续函数的一致连续性质，这个性质只能在有界闭集上导出。而对于一些点，如果找不到小闭矩形使得二元函数在闭矩形上连续，则不能使用该定理得到该点处含参变量积分的连续性，这时候我们需要具体问题具体分析。接下来我们通过一道题目，考察一下这一点。

例题 2.3.

设 $f(x)\in \mathrm{C}([0,1])$，问：$f(0)$ 取何值时，含参变量积分：

$$F(t)=\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\mathrm{d}x$$

在 $t=0$ 处连续？

解. 首先，$g(x,t)=\dfrac{t}{x^2+t^2}f(x)$ 在 $(x,t)=(0,0)$ 处的连续性未知，如果我们想要使用 18.1 中的连续性定理，我们需要 $g(x,t)$ 在 $[0,1]\times[-\varphi\ \varepsilon]$ 上连续，这显然不一定满足（这也是可以预见的，如果满足就没有必要问 $f(0)$ 应该取何值了）。

由于 $F(0)=0$，因此问题是在问，$f(0)$ 取何值时有：

$$\lim_{t\to 0}F(t)=\lim_{t\to 0}\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\mathrm{d}x=0 \tag{12}$$

由于需要得到式 (12) 成立的充要条件，因此这里最好的做法是，直接求出 $\lim\limits_{t\to 0}F(t)$ 的表达式。由于 $g(x,t)$ 在 $(0,0)$ 具有奇性，因此我们在考虑 $F(t)$ 时，可能需要把它分为 $(0,\delta)$，$(\delta,1)$ 两部分。为了让 $f(0)$ 出现，又由于 f 连续，因此一种想法是对 $(0,\delta)$ 用第一积分中值定理，并令 $t\to 0$，此时 $0<\xi<\delta$，为了让 $t\to 0$ 时，$\xi\to 0$，我们还需要取 $\delta=\delta(t)$ 满足：$t\to 0$ 时，$\delta\to 0$。故可以先设 $t>0$，令 $\delta=\sqrt{t}$，则有：

$$F(t)=\int_0^{\sqrt{t}} \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{t}}^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\mathrm{d}x \triangleq I_1+I_2 \tag{13}$$

对 I_1，由于 $f\in \mathrm{C}([0,1])$，且 $t>0$ 时 $\dfrac{t}{x^2+t^2}\geqslant 0$，故由第一积分中值定理，$\exists \xi=\xi(t)\in[0,\sqrt{t}]$，使得：

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^{\sqrt{t}} \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\mathrm{d}x\\&=f(\xi)\int_0^{\sqrt{t}} \frac{t}{x^2+t^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= f(\xi)\int_0^{\frac{1}{\sqrt{t}}} \frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u$$

$$= f(\xi)\arctan(\frac{1}{\sqrt{t}})$$

令 $t \to 0^+$，由 $\xi(t) \to 0$ 以及 f 的连续性，可得：

$$\lim_{t\to 0^+}\int_0^{\sqrt{t}} \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+} f(\xi)\arctan(\frac{1}{\sqrt{t}}) = \frac{\pi}{2}f(0) \tag{14}$$

对 I_2，由 $f \in \mathrm{C}([0,1])$，设 $|f(x)| \leqslant M\ (\forall x \in [0,1])$，则有：

$$\left|\int_{\sqrt{t}}^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M\left|\int_{\sqrt{t}}^1 \frac{t}{x^2}\mathrm{d}x\right| = Mt(\frac{1}{\sqrt{t}}-1) = M(\sqrt{t}-t) \tag{15}$$

故对式 (15) 令 $t \to 0^+$，可得：

$$\lim_{t\to 0^+}\int_{\sqrt{t}}^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{16}$$

故结合式 (13)(14)(16)，得 $\lim\limits_{t\to 0^+} F(t) = \frac{\pi}{2}f(0)$。当 $t<0$ 时，将所有的 $\sqrt{t}$ 替换为 $\sqrt{-t}$，注意式 (14) 变为：

$$\lim_{t\to 0^-}\int_0^{\sqrt{-t}} \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\mathrm{d}x = -\lim_{t\to 0^-} f(\xi)\arctan(\frac{1}{\sqrt{-t}}) = -\frac{\pi}{2}f(0) \tag{17}$$

故 $\lim\limits_{t\to 0^-} F(t) = -\frac{\pi}{2}f(0)$。

故 $F(t)$ 在 $t=0$ 处连续 $\iff \lim\limits_{t\to 0^+} F(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} F(t) = F(0) \iff f(0)=0$。 $\square$