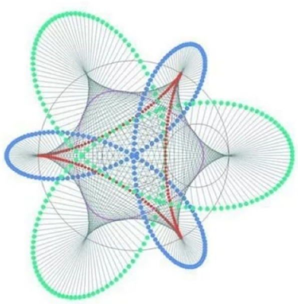
数学分析 A3 笔记

2022 秋-左达峰老师班

作者：何展韬

时间：September 5, 2023



千里之行，始于足下。

目录

第 1 章 数项级数

1.1 无穷级数的基本性质

定义 1.1 (数项级数及其收敛性)

设 $\{a_n \in \mathbb{R} | n \in \mathbb{N}^*\}$，称形式和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ 为无穷级数，a_n 为级数通项。$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i (n \in \mathbb{N}^*)$ 称为级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ 的部分和。

若部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛，则称无穷级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ 收敛，反之称其发散。♣

定理 1.1 (级数收敛的必要条件)

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ ♡

提示：利用 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 以及 $\{S_n\}$ 收敛。

注 定理 1.1 的逆命题不成立，反例：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$.

定理 1.2 (级数的线性性)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛，则 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ 收敛。♡

提示：利用部分和 $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k, B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$.

定理 1.3

对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 做以下这些操作，都不会改变级数收敛性：

(1) 在前面增加有限项；(2) 去掉前面的有限项；(3) 改变有限项的值. ♡

提示：部分和数列 $\{S_n\}$ 的敛散性与前有限项无关。

定理 1.4

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则把级数的项任意结合而不改变先后顺序，得到的新级数仍然收敛，且与原级数有相同的和。♡

提示：注意到按照定理要求结合后，新级数的部分和数列是原级数部分和数列 $\{S_n\}$ 的子列。

注 这里的不改变先后顺序，是指允许改变级数前面有限项的顺序，这样做不会改变级数的收敛性和收敛值（参考定理 1.3 的 (3)）。但如果任意改变无穷多项的顺序，可能会导致收敛性和

收敛值的改变。详见“1.5 绝对收敛与条件收敛”中的**定理1.21**。

注 定理 1.4 的逆命题不成立，反例：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$，把相邻两项结合后得到新级数各项为 0，但原级数不收敛。

要想定理 1.4 的逆命题成立，需要给级数加一些条件。

命题 1.1

把级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的项结合而不改变先后顺序，且同一个括号里的项同号，则得到的新级数收敛可以推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，且两个级数具有相同的和。

证明 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 按如下方式结合：

$$(a_1+\cdots+a_{k_1})+(a_{k_1+1}+\cdots+a_{k_2})+\cdots+(a_{k_{n-1}+1}+\cdots+a_{k_n})+\cdots$$

记得到新级数的部分和为 A_n，则有 $A_n=S_{k_n},\forall n\in\mathbb{N}^*$，且由条件假设 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=S$。由于同一个括号里各项保持同号，因此在 k 从 $k_{n-1}+1$ 变到 k_n 时，S_k 单调变化，且满足：

$$A_{n-1}\leqslant S_k\leqslant A_n \quad 或 \quad A_n\leqslant S_k\leqslant A_{n-1} \quad (k_{n-1}\leqslant k\leqslant k_n) \tag{1.1}$$

对式 (1.1) 令 $k\to\infty$，这时 $n\to\infty$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=S$ 以及夹逼定理可知 $\lim\limits_{k\to\infty}S_k=S$. □

1.2 正项级数的比较判别法

定义 1.2 (正项级数)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 称为正项级数，若 $a_n\geqslant 0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ 或者 $\exists N\in\mathbb{N}^*$，使得 $a_n\geqslant 0,\forall n\geqslant N$。

注 对于正项级数，其部分和数列 $\{S_n\}$ 在除去有限项后是个单调递增数列。

定理 1.5

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\iff$ $\{S_n\}$ 有界。

提示：由 $\{S_n\}$ 单调递增可知 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在 $\iff$ $\{S_n\}$ 有界。

注 由定理 1.5 可知，正项级数或者收敛于有限数，或者发散于 $+\infty$。

定理 1.6 (比较判别法)

$a_n,b_n\geqslant 0,\forall n\in\mathbb{N}^*$，若 $\exists N\in\mathbb{N}^*$，使得 $a_n\leqslant b_n,\forall n\geqslant N$，则：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散

提示：利用两个正项级数的部分和数列，结合单调数列收敛 $\iff$ 有界。

定理 1.7 (比较判别法的极限形式)

$a_n, b_n \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=l$：

(1) $l \in (0,+\infty)$：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散；

(2) $l=0$：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

(3) $l=+\infty$：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

笔记 比较判别法（包括定理 1.6,1.7）要求两个级数都是正项函数。不是正项级数不得随意使用比较判别法！

证明 只证明 (1)，其余同理。

设 $l \in (0,+\infty)$，则对 $\varepsilon=\dfrac{l}{2}$，存在 N，使得 $\left|\dfrac{a_n}{b_n}-l\right|<\dfrac{l}{2}$，则有：

$$\frac{1}{2}lb_n < a_n < \frac{3}{2}lb_n \tag{1.2}$$

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，由式 (1.2) 右半边以及定理 1.6 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，由式 (1.2) 左半边以及定理 1.6 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。 □

例题 1.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$：(1) 收敛，若 $p>1$；(2) 发散，若 $p\leqslant 1$。

解 此处就 (1) 给出一种利用函数的解法。

$p>1$ 时，设 $p=1+\alpha, \alpha>0$。考虑 $f(x)=x^{-\alpha}, x>0$，由微分中值定理得:

$$f(x)-f(y)=f'(\xi)(x-y) \quad (0<x<y, \xi\in(x,y))$$

令 $x=n, y=n+1$，则 $n<\xi<n+1$，得：

$$\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{(n+1)^\alpha}=-\frac{\alpha}{\xi^{1+\alpha}}\cdot(-1)=\frac{\alpha}{\xi^p}>\frac{\alpha}{(n+1)^p}>0 \tag{1.3}$$

以式 (1.3) 左边为通项的级数收敛，故由比较判别法，以右边为通项的级数收敛。 □

例题 1.2 研究 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 的敛散性。

解 $(\ln n)^{\ln n}=\mathrm{e}^{\ln n\ln\ln n}=n^{\ln\ln n}$，由于存在 $N\in\mathbb{N}^*$，使得 $\ln\ln n>2, \forall n>N$，故 $(\ln n)^{\ln n}>n^2, \forall n>N$，由比较判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 收敛。 □

例题 1.3 研究 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos\dfrac{x}{n})$ $(x\in\mathbb{R})$ 的敛散性。

解 对任意固定的 $x\in\mathbb{R}$，有：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{x^2}{2}$$

由比较判别法的极限形式 ($0\leqslant l<+\infty$ 情形)，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos\dfrac{x}{n})$ 收敛，$\forall x\in\mathbb{R}$. □

例题 1.4 $a_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\forall\alpha,\beta>0,\alpha+\beta>1$，都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n^{\alpha}}{n^{\beta}}$ 收敛。

解 (解法 1) 回顾 Young 不等式：若 $p,q>0$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，则有：

$$\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\geqslant ab\quad(a,b\geqslant 0)$$

(i) $0<\alpha<1$ 时，$1-\alpha>0$，$\dfrac{\beta}{1-\alpha}>1$。令 $\alpha=\frac{1}{p}$，$1-\alpha=\frac{1}{q}$，代入上式得：

$$0<\frac{a_n^{\alpha}}{n^{\beta}}=\frac{a_n^{\alpha}}{(n^{\beta/(1-\alpha)})^{1-\alpha}}\leqslant\alpha a_n+(1-\alpha)\frac{1}{n^{\beta/(1-\alpha)}}\tag{1.4}$$

对式 (1.4) 右边，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\beta/(1-\alpha)}}$ 收敛，因此由比较判别法，原级数收敛。

(ii) $\alpha\geqslant 1$ 时，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。故当 n 充分大时，有 $0<a_n<1$，此时 $0<a_n^{\alpha}\leqslant a_n$，从而有 $0<\dfrac{a_n^{\alpha}}{n^{\beta}}\leqslant a_n^{\alpha}\leqslant a_n$，因此由比较判别法，原级数收敛。 □

(解法 2) 对 a_n 与 $\dfrac{1}{n}$ 的大小进行比较：

若 $0<a_n\leqslant\dfrac{1}{n}$，则有 $0<\dfrac{a_n^{\alpha}}{n^{\beta}}\leqslant\dfrac{1}{n^{\alpha+\beta}}$.

若 $a_n>\dfrac{1}{n}$，则当 n 充分大时，由解法 1(ii) 的推导可知 $\dfrac{1}{n}<a_n<1$，又 $\alpha+\beta>1$，故此时 $0<\dfrac{a_n^{\alpha}}{n^{\beta}}<a_n^{\alpha+\beta}<a_n$.

因此有 $0<\dfrac{a_n^{\alpha}}{n^{\beta}}<\dfrac{1}{n^{\alpha+\beta}}+a_n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha+\beta}}$ 收敛，因此由比较判别法，原级数收敛。 □

定理 1.8 (Cauchy 积分判别法)

设 $f(x)\geqslant 0,\forall x\geqslant 1$，且 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递减，则无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 与无穷积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散。

提示：回顾数分 A1 的 7.3 节，利用面积原理。

例题 1.5 讨论 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p}$ $(p\in\mathbb{R})$ 的敛散性。

解 令 $t=\ln x$，则有：

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} \mathrm{d}x = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{t^p} \mathrm{d}t$$

故 $p > 1$ 时，级数收敛；$p \leqslant 1$ 时，级数发散。 □

1.3 正项级数的其他判别法

定理 1.9 (Cauchy 开方判别法)

对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，有 $a_n \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$，则：

(1) 若 $\exists N \in \mathbb{N}^*$，$n > N$ 时，$\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$，则级数收敛；

(2) 若对无穷多个 n，$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$，则级数发散。

提示：对 (1)，跟 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n, 0 < q < 1$ 用比较判别法。

定理 1.10 (Cauchy 开方判别法的极限形式)

对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，有 $a_n \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$，记 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q$，则：

(1) $q < 1$，级数收敛； (2) $q > 1$，级数发散； (3) $q = 1$，无法判断.

提示：由上极限定义，对 (1) 可得 $\exists N \in \mathbb{N}^*$，$n > N$ 时，$a_n < q + \varepsilon < 1$，从而得到定理 1.9(1)。

注 $q = 1$ 时同时存在收敛和发散的例子：$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$，前者发散，后者收敛。

为了更好地使用比较判别法得到新的正项级数判别法，我们先证明如下引理。

引理 1.1

$\{a_n\}, \{b_n\}$ 两个正数列，且 $\exists N \in \mathbb{N}^*$，$n \geqslant N$ 时 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$，则：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散。

提示：对条件在 $n \geqslant N$ 时用累乘得 $a_n \leqslant \frac{a_N}{b_N} b_n, n \geqslant N$，再结合比较判别法。

定理 1.11 (D'Alembert 判别法)

对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，有 $a_n \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$，

(1) 若 $\exists N \in \mathbb{N}^*$，$n > N$ 时，$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$，则级数收敛；

(2) 若 $\exists N \in \mathbb{N}^*$，$n > N$ 时，$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$，则级数发散。

提示：对 (1) 在**引理1.1**中取 $b_n = q^n, 0 < q < 1$，对 (2) 取 $b_n = 1$。

定理 1.12 (D'Alembert 判别法的极限形式)

对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，有 $a_n \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$，

(1) 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$，级数收敛；

(2) 若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \tilde{q} > 1$，级数发散；

(3) 只要 $q, \tilde{q}$ 有一个为 1，都无法判断。

提示：用上下极限定义，定理 1.12 的 (1)(2) 分别对应定理 1.11 的 (1)(2)。

注 $q, \tilde{q} = 1$ 时同时存在收敛和发散的例子：$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$，前者发散，后者收敛。

注 定理 1.12(2) 的条件不可改为上极限 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}$，反例如下：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots$$

计算得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$，故由 Cauchy 开方判别法，级数收敛；但是 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$。更进一步，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0$，故用 D'Alembert 判别法无法判别此级数的敛散性。

笔记 Cauchy 开方判别法和 D'Alembert 判别法本质都是跟 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n, 0 < q < 1$ 用比较判别法得到的，因此这两个判别法都只能判别收敛速度比 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n, 0 < q < 1$ 快的正项级数，但这两种方法的判别能力有强弱之分。

命题 1.2

对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，有 $a_n \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$，则：

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} \tag{1.5}$$

因此 Cauchy 判别法比 D'Alembert 判别法更强。

提示：以式 1.5 最右边为例，设最右式的值为 q，用上极限定义以及累乘可以得到 $\sqrt[n]{a_n}$ 的上界估计。

定理 1.13 (Raabe 判别法)

对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，有 $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$，

(1) 若 $\exists N \in \mathbb{N}^*$，$n > N$ 时，$n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant r > 1$，则级数收敛；

(2) 若 $\exists N \in \mathbb{N}^*$，$n > N$ 时，$n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1$，则级数发散。

提示：对 (1) 在**引理1.1**中取 $b_n=\frac{1}{n^\alpha},1<\alpha<r$，对 (2) 取 $b_n=\frac{1}{n}$。

定理 1.14 (Raabe 判别法的极限形式)

对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，有 $a_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$，记 $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=l$，则：

(1) $l>1$，级数收敛； (2) $l<1$，级数发散； (3) $l=1$，无法判断。

提示：用极限定义，定理 1.14(1)(2) 分别对应定理 1.13(1)(2)。

注 Raabe 判别法只能判别收敛速度比 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p},p>1$ 快的级数。

定理 1.15 (Gauss 判别法)

对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，有 $a_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$，若：

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+\frac{\beta}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\quad(n\to\infty)\tag{1.6}$$

则 (1) $\beta>1$，级数收敛； (2) $\beta<1$，级数发散； (3) $\beta=1$，无法判断。

提示：对 (1) 在**引理1.1**中取 $b_n=\frac{1}{n(\ln n)^\alpha},1<\alpha<\beta$，对 (2) 取 $b_n=\frac{1}{n\ln n}$。

注 Gauss 判别法只能判别收敛速度比 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^\beta},\beta>1$ 快的级数。

笔记 纵观 1.3 节的几个判别法，都是跟已知正项级数进行比较得到的，因此能判别级数的收敛速度一定要比已知级数快。那么一个自然的问题是：是否存在收敛最慢的级数，从而得到最强的正项级数判别法呢？答案是不存在。

命题 1.3 (不存在收敛最慢的正项级数)

设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则存在正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$。

证明 不妨设 $a_n\geqslant 0,\forall n\in\mathbb{N}^*$，记 $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，记 $A=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}A_n$。设 $b_n=\sqrt{A-A_{n-1}}-\sqrt{A-A_n},\forall n\in\mathbb{N}^*$. 由于 $a_n\geqslant 0$，因此 $\{A_n\}$ 单调递增趋于 A，故 $b_n\geqslant 0,\forall n\in\mathbb{N}^*$。并且有：

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_n}{\sqrt{A-A_{n-1}}-\sqrt{A-A_n}}=\sqrt{A-A_{n-1}}+\sqrt{A-A_n}\quad(n>1)\tag{1.7}$$

对式 (1.7) 令 $n\to\infty$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$，满足要求。 □

1.4 任意项级数的判别法

定理 1.16 (数项级数的 Cauchy 收敛)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\iff \forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}^*$，使得 $n > N$ 时，对 $\forall p \in \mathbb{N}^*$ 都有 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$ ♡

提示：对部分和数列 $\{S_n\}$ 使用数列的 Cauchy 收敛定理。

定义 1.3 (交错级数)

一个级数被称为交错级数，若其有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$，其中 $a_n \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ 的形式。♣

定理 1.17 (Leibniz 判别法)

对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$，其中 $a_n \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$，若 $\{a_n\}$ 单调递减趋于 0，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛。♡

证明 先研究 $\{S_n\}$ 的偶子列 $\{S_{2n}\}$，由于 $a_n \geqslant 0$ 且 $\{a_n\}$ 单调递减，故有：

$$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geqslant 0 \tag{1.8}$$

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leqslant a_1 \tag{1.9}$$

由式 (1.8)(1.9) 可知 $\{S_{2n}\}$ 递增有上界，因此收敛，记 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$。又 $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$，令 $n \to \infty$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$。

$\{S_n\}$ 的奇偶子列都收敛于 S，故 $\{S_n\}$ 也收敛于 S，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛。 □

注 Leibniz 判别法中"$\{a_n\}$ 单调递减"的条件不可少，详见下面两道例题。

例题 1.6 研究 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ 的敛散性。

解 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(\sqrt{n} - (-1)^n)}{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n-1}$，等号右边第一个级数为交错级数，由 Leibniz 判别法知级数收敛；第二个级数发散，因此原级数发散。 □

例题 1.7 研究 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\left[\frac{n+1}{2}\right] + (-1)^n}}$ 的敛散性，[ ] 表示向下取整。

解

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\left[\frac{n+1}{2}\right] + (-1)^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \cdots,$$

$S_{2n} = 2\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)$，故 $\{S_{2n}\}$ 发散，因此 $\{S_n\}$ 发散，即原级数发散。 □

笔记 例题 1.6,1.7 给我们证明级数发散的两个思路：
(1) 把原级数拆分成有限个收敛级数加一个发散级数；(2) 证明部分和数列存在发散子列。

在证明 Abel 引理之前，先回顾一个基础知识。

命题 1.4 (Abel 分部求和)

已知 $\{a_n\},\{b_n\}$，记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，则有：

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=S_nb_n-\sum_{k=1}^{n-1}S_k(b_{k+1}-b_k) \tag{1.10}$$

注 Abel 部分求和公式可以类比分部积分公式，写成如下形式；

$$\sum_{k=1}^{n}(\Delta S_k)b_k=S_nb_n-S_0b_0-\sum_{k=1}^{n-1}S_k(\Delta b_k)$$

其中 $\Delta S_k=S_k-S_{k-1}=a_k$，$\Delta b_k=b_{k+1}-b_k$，$S_0=0$。

引理 1.2 (数项级数的 Abel 引理)

若 $\{b_n\}$ 单调，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 有界，即 $\exists M>0$，使得 $|S_n|\leqslant M,\forall n\in\mathbb{N}^*$，则有：

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leqslant M\Big(|b_1|+2|b_n|\Big) \tag{1.11}$$

提示：用 Abel 求和把式 (1.11) 左边变形并用绝对值不等式放缩为 $M\sum\limits_{k=1}^{n-1}|b_{k+1}-b_k|+M|b_n|$，再结合 $\{b_n\}$ 单调性即可。

定理 1.18 (数项级数的 Dirichlet 判别法)

若 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足：(i) $\{b_n\}$ 单调趋于 0 (ii) $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 有界 ($\forall n\in\mathbb{N}^*$)

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛。

证明 我们用 Cauchy 收敛来证明定理 1.18。首先 $\forall n,p\in\mathbb{N}^*$ 都有：

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{n+p}a_k-\sum_{t=1}^{n}a_t\right|\leqslant\left|\sum_{t=1}^{n}a_t\right|+\left|\sum_{k=1}^{n+p}a_k\right|\leqslant 2M$$

又 $\{b_n\}$ 单调，$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 有界，故由 Abel 引理得：

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k\right|\leqslant 2M\Big(|b_{n+1}|+2|b_{n+p}|\Big) \tag{1.12}$$

由于 $b_n\to 0,n\to\infty$，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^*$，使得 $|b_n|<\dfrac{\varepsilon}{6M},\forall n>N$。因此由式 (1.12)，$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k\right|<\varepsilon,\forall n>N,p\in\mathbb{N}^*$。最后由 Cauchy 收敛知级数 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k$ 收敛。 □

注 Leibniz 判别法可由 Dirichlet 判别法推出，只需在定理 1.18 中令 $a_n=(-1)^{n-1}$，$b_n\geqslant 0$ 即可。

定理 1.19 (数项级数的 Abel 判别法)

若 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足：(i) $\{b_n\}$ 单调有界 (ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛。

证明 由 $\{b_n\}$ 有界，设 $|b_n|<M,\forall n\in\mathbb{N}^*$，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故由 Cauchy 收敛，$\exists N\in\mathbb{N}^*$，使得：

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<\frac{\varepsilon}{3M}\quad(\forall n>N,p\in\mathbb{N}^*)$$

又由 $\{b_n\}$ 单调，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛因此 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 有界，故由 Abel 引理得：

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k\right|<\frac{\varepsilon}{3M}\Big(|b_{n+1}|+2|b_{n+p}|\Big)<\varepsilon\quad(\forall n>N,p\in\mathbb{N}^*)\tag{1.13}$$

因此由 Cauchy 收敛知级数 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k$ 收敛。 □

注 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法对 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的约束有强有弱：
(1)Dirichlet 判别法：对 $\{b_n\}$ 要求趋于 0，约束较强，对 $\{a_n\}$ 要求部分和有界，约束较弱；
(2)Abel 判别法：对 $\{b_n\}$ 要求有界，约束较弱，对 $\{a_n\}$ 要求级数收敛，约束较强。

例题 1.8 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n},x\in\mathbb{R}$ 的敛散性。

解 需要对 x 进行分类讨论。

(i) $x=2k\pi,k\in\mathbb{Z}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散。

(ii) $x\neq 2k\pi,k\in\mathbb{Z}$ 时，$b_n=\dfrac{1}{n}$ 递减趋于 0，且有：

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|=\frac{1}{|2\sin\frac{x}{2}|}\left|\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{x}{2}\right|\leqslant\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}\tag{1.14}$$

对任意固定的 $x\neq 2k\pi,k\in\mathbb{Z}$，由式 (1.14) 知部分和有界。故由 Dirichlet 判别法，原级数收敛。 □

例题 1.9 研究 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin^2 n}{n}$ 的敛散性。

解 由于 $\sin^2 n=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2n)$，因此有：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin^2 n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos 2n}{n}\tag{1.15}$$

由 Leibniz 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛。对另一个级数，我们有：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos 2n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+n\pi)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(2+\pi)}{n}$$

由例题 1.8 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos 2n}{n}$ 收敛，因此原级数收敛。 □

1.5 绝对收敛与条件收敛

命题 1.5

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

提示：利用 Cauchy 收敛和绝对值不等式。

定义 1.4 (绝对收敛与条件收敛)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛。

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散。

注 由命题 1.5 可知，级数的绝对收敛蕴含级数本身收敛。

例题 1.10 研究 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ 的绝对收敛性和条件收敛性。

解 由例题**1.8**可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ 收敛，下面考虑 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{n}\right|$。因为 $|\cos n|\geqslant\cos^2 n$，故有：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{n}\right|\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n} \tag{1.16}$$

再由例题**1.8**知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2n}$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n}$ 发散。

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{n}\right|$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n}$ 都是正项级数，故由比较判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{n}\right|$ 发散，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ 条件收敛。 □

绝对收敛和条件收敛的出现，使得级数交换无穷多项顺序的问题有了一个较好的解答。

定理 1.20 (绝对收敛允许重排)

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则任意交换无穷多项顺序，得到的新级数仍然绝对收敛，且和不变。

证明 设新级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$。因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。下面对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的类型进行分类讨论。

(i) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，不妨设 $a_n \geqslant 0$，因为重排后 $\{b_n\}$ 均来自于 $\{a_n\}$，因此有：

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 正项级数且部分和有上界，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，对上式令 $n \to \infty$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$。又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也可视为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 重排得到，因此同理得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$。故新级数收敛且和不变。

(ii) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的正项和负项均有无穷多项，记：

$$a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2} = \begin{cases} a_n & a_n \geqslant 0 \\ 0 & a_n < 0 \end{cases} \qquad a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2} = \begin{cases} 0 & a_n > 0 \\ a_n & a_n \leqslant 0 \end{cases} \tag{1.17}$$

则有：

$$a_n = a_n^+ - a_n^- \qquad |a_n| = a_n^+ + a_n^- \tag{1.18}$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，a_n^+，a_n^- 均非负，故由比较判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 均收敛。

对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 做同样操作。注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^+$ 可视为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 的重排，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^-$ 可视为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 的重排。因此对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 用 (i) 可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^+ = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$, 故：

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

即新级数收敛且和不变。 □

笔记 由式 (1.17) 可知绝对收敛，条件收敛，发散在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 的敛散性表现有显著不同：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 均收敛；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 均发散；

(3) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 一个发散一个收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

定理 1.21 (Riemann 重排定理)

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则适当调整求和顺序，可使调整后新级数收敛于任意事先指定的 $S \in \mathbb{R}$，也可使其发散到 $+\infty$ 或 $-\infty$。

证明 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，因此 $\{a_n\}$ 有无穷多项正数，也有无穷多项负数（否则应为绝对收敛）。故我们只对 $S \geqslant 0$ 和 $S=+\infty$ 情形给出证明，其余情况同理。

(i) 若 $S \geqslant 0$，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 这两个正项级数均发散至 $+\infty$，因此可以做如下操作：

第一步：先按序号取 k_1 个 a_n^+，使得：

$$\sum_{t=1}^{k_1-1} a_{n_t}^+ \leqslant S < \sum_{t=1}^{k_1} a_{n_t}^+, \qquad \sum_{t=1}^{k_1} a_{n_t}^+ \triangleq A_1, \qquad |A_1 - S| \leqslant a_{n_{k_1}}^+$$

第二步：再按序号取 k_2 个 a_n^-，使得：

$$A_1 - \sum_{t=1}^{k_2} a_{n_t}^- \leqslant S < A_1 - \sum_{t=1}^{k_2-1} a_{n_t}^-, \qquad \sum_{t=1}^{k_2} a_{n_t}^- \triangleq A_2, \qquad |A_1 - A_2 - S| \leqslant a_{n_{k_2}}^-$$

再接着 k_1，按序号取 k_3 个 a_n^+……一直取下去。

其中取出的 $a_{n_t}^+$ 保证大于 0 或者满足 $a_{n_t}^+ = a_{n_t} = 0$，取出的 $a_{n_t}^-$ 保证小于 0，这样做是为了保证取出的 $a_{n_t}^+$，$a_{n_t}^-$ 均来自 $\{a_n\}$，且不重不漏，从而是重排。

由此我们得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的一个重排 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$，它的前 k_1 项是 $a_{n_t}^+ (1 \leqslant t \leqslant k_1)$，第 $k_1+1 \sim k_1+k_2$ 项是 $-a_{n_t}^- (1 \leqslant t \leqslant k_2)$……

更重要的，我们有：

$$\left|\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} A_j - S\right| \leqslant a_{N_+}^+ \text{ 或 } a_{N_-}^- \tag{1.19}$$

其中 $N_+ = \sum\limits_{1 \leqslant 2m-1 \leqslant n} k_m$，$N_- = \sum\limits_{0 < 2m \leqslant n} k_m$.

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^+ = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^- = 0$. 故对式 (1.19) 令 $n \to \infty$，则 $N_+, N_- \to \infty$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} A_n = S$。

注意到 $\sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} A_j$ 其实是把新级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的项加括号结合但不改变顺序的结果，并且括号里的项保持同号，因此由定理**1.4**知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = S$。

(ii) 若 $S=+\infty$，模仿 (i) 的操作，不过把第一步的 S 改为 1，第二步只放一个负项，把第三步的 S 改为 2，第四步放第二个负项……把第 $2n-1$ 步的 S 改为 n，第 $2n$ 步放第 n 个负项，这样做同样可以保证是重排。

这样得到的新级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 满足：$\forall n_0 \in \mathbb{N}^*$，$\exists N \in \mathbb{N}^*$ 使得：

$$\sum_{k=1}^{n} b_k > n_0 \quad \forall n > N \tag{1.20}$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$. □

1.6 级数的乘法

假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$ 均收敛。在考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的乘法时，我们需要处理 $\{a_i b_j\}(1 \leqslant i, j < +\infty)$ 这无穷多个乘积如何相加且遍历的问题。对此有两种常见的加法；按方块相加，按对角线相加。

按方块相加可以写成如下形式：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$$

按对角线相加，则有如下定义。

定义 1.5 (Cauchy 乘积，对角线乘积)

$c_n = \sum\limits_{i+j=n+1} a_i b_j$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 称为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的 Cauchy 乘积或对角线乘积。♣

我们自然希望 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = AB$，但事实并非如此。

例题 1.11 已知 $a_n = b_n = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$，证明其 Cauchy 乘积发散。

解 首先 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，由 Leibniz 判别法知收敛。又有：

$$|c_n| = \left|\sum_{i+j=n+1} a_i b_j\right| = \sum_{i+j=n+1} \frac{1}{\sqrt{ij}} \geqslant \sum_{i+j=n+1} \frac{2}{i+j} = \frac{2n}{n+1}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} |c_n| = 2 \neq 0$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散。□

但是如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 均绝对收敛，那么无论以何种方式相加，所得新级数都会收敛于 AB。

定理 1.22

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$。若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 均绝对收敛，则 $\{a_i b_j\}$ 以任意方式相加所得级数均绝对收敛于 AB。♡

证明 设 $a_{i_k}b_{j_k}(k\in\mathbb{N}^*)$ 是 $\{a_ib_j\}(1\leqslant i,j<+\infty)$ 的任意一个排列，对任意固定的 $n\in\mathbb{N}^*$，记 $N=\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{i_k,j_k\}<+\infty$，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均绝对收敛，有：

$$\sum_{k=1}^{n}|a_{i_k}b_{i_k}|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{N}|a_k|\right)\left(\sum_{k=1}^{N}|b_k|\right)\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|\right)<+\infty$$

故 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{i_k}b_{i_k}$ 绝对收敛。由定理**1.20**可知任意改变项的次序，和不变。因此按方块相加得：

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{i_k}b_{i_k}=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)=AB$$

故 $\{a_ib_j\}$ 无论以何种方式相加，所得新级数都会收敛于 AB。 □

由定理 1.22 立得：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均绝对收敛，则其 Cauchy 乘积也绝对收敛，且收敛于 AB。但是适当弱化条件，依然能得到 Cauchy 乘积收敛于 AB 的结果。

定理 1.23 (Mertens)

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=A,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=B$ 均收敛，且至少一个绝对收敛，则其 Cauchy 乘积收敛于 AB。♡

证明 不妨设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛。记 $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，$B_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$，$C_n=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k$，则有：

$$C_n=\sum_{k=1}^{n}(a_1b_k+a_2b_{k-1}+\cdots+a_kb_1)=a_1B_n+a_2B_{n-1}+\cdots+a_nB_1\tag{1.21}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}B_n=B$，设 $B_n=B-\beta_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$，而且代入式 (1.21) 有：

$$C_n=\sum_{k=1}^{n}\Big(a_1(B-\beta_k)+a_2(B-\beta_{k-1})+\cdots+a_k(B-\beta_1)\Big)=A_nB-\gamma_n\tag{1.22}$$

其中 $\gamma_n=a_1\beta_n+a_2\beta_{n-1}+\cdots+a_n\beta_1$.

由式 (1.22) 可知只用证 $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=0$。由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=M_1$。由于 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$，故 $\forall\varepsilon>0$，有：

(i) $\exists N_1\in\mathbb{N}^*$，$n>N_1$ 时，$|\beta_n|<\dfrac{\varepsilon}{2M_1}$；

(ii) $\exists N_2\in\mathbb{N}^*$，$n>N_2$ 时，$|a_n|<\dfrac{\varepsilon}{2N_1M_2}$，其中 $M_2=\max\{|\beta_1|,|\beta_2|,\cdots,|\beta_{N_1}|\}$.

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则 $n>N$ 时，有：

$$\begin{aligned}|\gamma_n|&\leqslant|a_1\beta_n+\cdots+a_{n-N_1}\beta_{N_1+1}|+|a_{n-N_1+1}\beta_{N_1}+\cdots+a_n\beta_1|\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n-N_1}|a_k||\beta_{n+1-k}|+\sum_{k=1}^{N_1}|a_{n+1-k}||\beta_k|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< \frac{\varepsilon}{2M_1} \cdot M_1 + \frac{\varepsilon}{2N_1M_2} \cdot N_1M_2 \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$，从而对式 (1.22) 令 $n \to \infty$，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} C_n = AB$。 □

注 定理 1.23 的条件某种程度上不能再弱。当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 均条件收敛时，存在反例：$a_n = b_n = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$。

若 Cauchy 乘积已知收敛，那么只需要 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛便能得到 Cauchy 乘积收敛于 AB 的结果。

定理 1.24 (Abel)

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$ 均收敛，其 Cauchy 乘积 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛，则必有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = AB$。♡

证明 由于 $C_n = a_1B_n + a_2B_{n-1} + \cdots + a_nB_1 (\forall n \in \mathbb{N}^*)$，故有：

$$
\begin{aligned}
&C_1 = a_1B_1 \\
&C_2 = a_2B_1 + a_1B_2 \\
&\cdots \\
&C_N = a_1B_N + a_2B_{N-1} + \cdots + a_NB_1
\end{aligned}
$$

累加再除以 N 得：

$$
\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} C_n = \frac{1}{N}(A_NB_1 + \cdots + A_1B_N) \tag{1.23}
$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 三个都收敛，故对式 (1.23) 两边令 $N \to \infty$，由数分 A1 第一章知识可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \lim\limits_{n=1} C_n = AB.$ □

1.7 无穷乘积

定义 1.6 (无穷乘积)

已知 $\{p_n\}, p_n \in \mathbb{R}$，则：$\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 称为无穷乘积，$\prod\limits_{n=1}^{N} p_n$ 称为部分乘积。♣

定义 1.7 (无穷乘积的敛散)

记 $P_n = \prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k$，则：

称 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛，若 $\lim_{n=1} P_n = P \neq 0$;
称 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 发散，若 $\lim_{n=1} P_n = 0$ 或极限不存在。

例题 1.12(Vieta 公式) 计算 $\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \cdots \times \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\cdots}}} \times \cdots$

解 注意到，利用 $\cos\frac{\pi}{2^n} = 2\cos^2\frac{\pi}{2^{n+1}} - 1$ 有:

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{2^2} &= \sqrt{\frac{1}{2}} \\
\cos\frac{\pi}{2^3} &= \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \\
&\cdots \\
\cos\frac{\pi}{2^n} &= \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\cdots}}}
\end{aligned}$$

故原式 $= \prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$。记 $P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$，则有:

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^n \sin\frac{\pi}{2^{n+1}}} \cdot \sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2^n \sin\frac{\pi}{2^{n+1}}} \tag{1.24}$$

故由式 (1.24) 可得 $\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{2}{\pi}$，即原式 $= \frac{2}{\pi}$. □

注 一般地，对 $\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^n} (x \neq 0)$，有类似式 (1.24) 的结果:

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^n \sin\frac{x}{2^n}} \cdot \sin x \quad (x \neq 0) \tag{1.25}$$

故 $\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{\sin x}{x}$，因此有恒等式:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x} \quad (x \neq 0) \tag{1.26}$$

类似于无穷级数 (**定理1.1**)，无穷乘积收敛也有必要条件。

定理 1.25 (乘积收敛的必要条件)

若 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$.

提示: $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P \neq 0$，故 $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1$.

注 定理 1.25 的逆命题不成立，反例: $p_n = \frac{n+1}{n}$。

笔记 由定理 1.25 可知，若 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛，则 p_n 仅有限项非正，故可不妨设 $p_n > 0(\forall n \in \mathbb{N}^*)$，则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n = P > 0$。进一步，可设 $p_n = 1 + a_n$，则有：$a_n > -1$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。

下面一个定理建立了无穷乘积与无穷级数的联系，由此我们可以利用无穷级数的敛散性来判断无穷乘积的敛散性。

定理 1.26 (无穷乘积与级数的敛散性等价)

无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛 $\iff$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 收敛。

注 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = P > 0 \iff \sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n) = \ln P$. 从这个等式也可以看出在**定义1.6**中为什么将 $P = 0$ 纳入发散，因为此时级数发散。

定理 1.27

(1) 若 $\exists N \in \mathbb{N}^*$，$n > N$ 时 a_n 保号，则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 同敛散；

(2) 若 a_n 不保号，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 同敛散。

提示： $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 无论哪个收敛都能推出 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

然后对 (1) 利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$，对 (2) 利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n^2} = \dfrac{1}{2}$，再结合定理 1.26 即可。

由定理 1.27(1) 可以进一步得到无穷乘积发散到 $0, +\infty$ 的充分条件。

推论 1.1

(1) 若 $\exists N \in \mathbb{N}^*$，$n > N$ 时 $-1 < a_n < 0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到 0；

(2) 若 $\exists N \in \mathbb{N}^*$，$n > N$ 时 $a_n \geqslant 0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到 $+\infty$.

定理 1.28

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散，则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到 $+\infty$.

提示： $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛可推 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 再利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n^2} = \dfrac{1}{2}$ 和定理 1.26 即可。

对无穷乘积也可以类似地定义“绝对收敛”，“条件收敛”。

定义 1.8 (无穷乘积的绝对/条件收敛)

(1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛，若 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 收敛；

(2) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 条件收敛，若 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛，但 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 发散。

对无穷乘积而言，绝对收敛同样蕴含乘积本身收敛。

定理 1.29

若 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛，则 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛。

证明 由 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 收敛，结合定理 1.27 可知 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$。故：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\ln(1+a_n)|}{|a_n|}=1$$

故由比较判别法的极限形式，$\sum_{n=1}^{\infty}|\ln(1+a_n)|$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 收敛。由定理 1.26，$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛。 □

例题 1.13 研究 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)$ 和 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\right)$ 的绝对/条件收敛性。

解 对 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)$，$a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 不保号，但 $a_n^2=\frac{1}{n^2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 均收敛，故由定理 1.27，$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)$ 收敛。又 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 发散，故 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)$ 条件收敛。

对 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\right)$，直接考虑 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$。因为 $b_n=\frac{1}{n^2}$ 保号，且 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，故由定理 1.27，$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ 收敛，故 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\right)$ 绝对收敛。 □

同样地，对无穷乘积也有类似**定理1.20，1.21**的重排定理。

定理 1.30 (绝对收敛允许重排)

若 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛，则任意改变其乘积因子的次序，得到的新无穷乘积仍然绝对收敛，且积不变。

定理 1.31 (Riemann 重排定理)

若 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 条件收敛，则适当调整乘积因子的顺序，可使调整后新无穷乘积收敛于任意事先指定的 $S>0$，也可使其发散到 $+\infty$ 或 0。

提示： 利用**定理 1.26** 转化为级数重排。

第 2 章 函数项级数

2.1 例子引入

定义 2.1 (极限函数)

设 $\{f_n(x)|x \in X, n \in \mathbb{N}^*\}$ 是函数列，记 $E \subset X$ 是 $\{f_n(x)\}$ 的收敛点集，又记 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)(\forall x \in E)$，则称 $f(x)$ 为函数列 $\{f_n(x)\}$ 的极限函数。♣

注 固定 $x \in E$ 后，$\{f_n(x)\}$ 是数项级数，收敛于一个值，记为 $f(x)$，由此定义出 $f(x)$,$x \in E$. 极限函数满足的是**逐点收敛**。

在逐点收敛下，函数列具有的良好性质（如连续，可导，可积）在极限函数中可能会丢失，并且极限函数的导数，积分也不一定可由函数列的导数积分取极限得到。

例题 2.1(连续性与可微性) 研究 $f_n(x) = x^n, x \geqslant 0$ 及其极限函数 $f(x)$ 的连续性和可微性。

解 收敛点集 $E = [0, 1]$，且有：

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [\,0, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

故 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续且可微，$f(x)$ 在 $x = 1$ 处不连续。 □

例题 2.2(极限函数的导数) 研究 $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}, x \in \mathbb{R}$ 及其极限函数 $f(x)$ 的可微性和导数的特点。

解 收敛点集 $E = \mathbb{R}$，且 $f_n(x) \to f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. 故 $f_n(x)$ 和 $f(x)$ 均在 $\mathbb{R}$ 上可导。
但是 $f'_n(x) = \sqrt{n}\cos(nx), f'(x) = 0$，我们有：

$$f'_n(x) = \sqrt{n}\cos(nx) \not\to 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x) \neq f'(x)$. □

例题 2.3(Riemann 可积性) 研究 $S_n(x), x \in [0, 1]$ 及其极限函数 $S(x)$ 的可积性，其中：

$$S_n(x) = \begin{cases} 1 & x = r_1, r_2, \cdots, r_n \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$\{r_k\}_{k=1}^{+\infty}$ 为 $[0, 1]$ 上全体有理数的一个排列.

解 易知极限函数为 Dirichlet 函数，即：

$$S_n(x) \to S_(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

$S_n(x)$ 的间断点集合为 $\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$，为有限集，且 $S_n(x)$ 有界，故 $S_n(x)$ Riemann 可积；但由所学知 Dirichlet 函数并非 Riemann 可积。 □

例题 2.4(极限函数的积分值) 研究 $f_n(x) = 2(n+1)x(1-x^2)^n, x \in [0,1]$ 及其极限函数 $f(x)$ 的可积性和积分值的特点。

解 收敛点集 $E = [0,1]$，且 $f_n(x) \to f(x) = 0, \forall x \in [0,1]$. 故 $f_n(x)$ 和 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上均可积。但是 $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \neq \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$。 □

2.2 函数列的一致收敛

由例题 2.1-2.4 知函数列的逐点收敛并不能使极限函数具有良好的性质，因此我们需要考虑函数列更强的收敛性。

定义 2.2 (函数列一致收敛)

已知函数列 $\{f_n(x)\}$ 在集合 E 上逐点收敛于 $f(x)$，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ 与 x 取值无关，使得 $n > N$ 时，

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (\forall x \in E)$$

则称 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$，记作 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(x \in E, n \to +\infty)$. ♣

笔记 一致收敛跟逐点收敛最大的不同在 N。逐点收敛的 $N = N(\varepsilon, x)$ 与 x 有关，一致收敛的 $N = N(\varepsilon)$ 与 x 无关，或者说关于 x 一致！因此一致收敛比逐点收敛要强，一致收敛蕴含逐点收敛。

注 函数列一致收敛的反面表述也是经常使用的：

若 $\exists \varepsilon > 0$，对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$，都 $\exists N = N(\varepsilon, n) > n, x_N \in E$ 使得：

$$|f_N(x_N) - f(x_N)| \geqslant \varepsilon$$

则称 $f_n(x)$ 在 E 上不一致收敛于 $f(x)$，记作 $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ $(x \in E, n \to +\infty)$.

从定义出发立刻可得以下命题成立。

命题 2.1

若 $\{f_n(x)\}$, $\{g_n(x)\}$ 在 E 上分别一致收敛于 $f(x), g(x)$，则任意给定 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，$\{\alpha f_n(x) + \beta f_n(x)\}$ 在 E 上也一致收敛于 $\alpha f(x) + \beta g(x)$。♠

提示： 直接用定义 2.2 和绝对值不等式即可。

下面一个定理告诉我们函数列一致收敛的一个充要条件。

定理 2.1 (上确界判别法)

$\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$ $\iff$ $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$，其中：$\beta_n = \sup\limits_{x\in E}|f_n(x) - f(x)|$. ♡

提示： 直接用定义 2.2。

注 定理 2.1 中的 β_n 即为函数列与极限函数差值的上确界。定理 2.1 告诉我们，一致收敛说的是“误差一致地小”。
另外注意 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n$ 正确求法是先求上确界 β_n，再取极限，而不是直接取上极限。

例题 2.5 $f_n(x)=x^n, x\in[0,1]$，研究 $\{f_n(x)\}$ 的一致收敛性。

解 易得：

$$f_n(x)\to f(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,1)\\ 1 & x=1\end{cases}$$

$|f_n(1)-f(1)|=0$，故 $\beta_n=\sup\limits_{x\in[0,1)}|x^n|=1,\forall n\in\mathbb{N}^*$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n\neq 0$，由上确界判别法，$\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 不一致收敛。 □

例题 2.6 $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$，研究 $\{f_n(x)\}$ 在 $(0,+\infty)$，$[\delta,+\infty)$ 的一致收敛性，其中 $\delta>0$ 给定。

解 首先 $f_n(x)\to f(x)=0,\forall x>0$。

对 $(0,+\infty)$，$f_n(\dfrac{1}{n})=\dfrac{1}{2}$，故 $\beta_n=\sup\limits_{x\in(0,+\infty)}|f_n(x)|\geqslant f_n(\dfrac{1}{n})=\dfrac{1}{2}$，由上确界判别法，$\{f_n(x)\}$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛。

对 $[\delta,+\infty)$，$f_n(x)\leqslant\dfrac{1}{nx}\leqslant\dfrac{1}{n\delta}$，故 $\beta_n=\sup\limits_{x\in(0,+\infty)}|f_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{n\delta}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$。由上确界判别法，$\{f_n(x)\}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 一致收敛。 □

例题 2.7 $f_n(x)=x^n-x^{n+1}, x\in[0,1]$，研究 $\{f_n(x)\}$ 的一致收敛性。

解 首先 $f_n(x)\to f(x)=0,\forall x\in[0,1]$。对任意固定的 n，对 $f_n(x)$ 求导分析可得 $f_n(x)$ 在 $x=\dfrac{n}{n+1}$ 取到最大值，故：

$$\beta_n=\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)|=f_n(\frac{n}{n+1})=\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$。由上确界判别法，$\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 一致收敛。 □

笔记 在使用上确界判别法时，如果想要证不一致收敛，可以用特殊点上的函数值对 β_n 放缩（如例题 2.6）；如果想要证一致收敛，可以通过求导，不等式等方式得到 β_n 表达式（如例题 2.7）。

例题 2.8 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，令：

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(x+\frac{k}{n})\ (n\in\mathbb{N}^*)$$

试证 $\{f_n(x)\}$ 在任意有限闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛。

解 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，故在 $[a,b+1]$ 可积。注意到 $f_n(x)$ 的表达式是 $f(x)$ 在 $[x,x+1]$ 上积分的 Riemann 和，在可积条件下便有：

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t$$

故：

$$\begin{aligned}
&\left|f_n(x) - \int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t\right| \\
=&\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x+\frac{k}{n})\mathrm{d}t - \int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t\right| \\
=&\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(f(x+\frac{k}{n}) - f(x+t)\right)\mathrm{d}t\right| \qquad (2.1)\\
\leqslant&\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\sup_{t\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]}\left|f(x+\frac{k}{n}) - f(x+t)\right| \\
\leqslant&\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\omega_k(x)
\end{aligned}$$

其中 $\omega_k(x) = \sup\limits_{s,t\in[x+\frac{k}{n},x+\frac{k+1}{n}]}|f(s)-f(t)|$，即 $f(t)$ 在 $[x+\dfrac{k}{n}, x+\dfrac{k+1}{n}]$ 的振幅。

对固定的 $x\in[a,b], n\in\mathbb{N}^*$，已经有 $[x,x+1]$ 的一个分割 π_x，分割得到的每个小区间长度为 $\dfrac{1}{n}$，注意到必定存在 $[a,b+1]$ 的一个分割 π，使得 π_x 是 $\widetilde{\pi_x}$ 的一部分，而且由 $\widetilde{\pi_x}$ 分割得到的每个小区间长度都不超过 $\dfrac{1}{n}$，即 $\|\widetilde{\pi_x}\|\leqslant\dfrac{1}{n}$。设 $\widetilde{\pi_x}=\{x_0,x_1,\cdots,x_N\}$，进一步有：

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\omega_k(x) \leqslant \sum_{i=0}^{N-1}\omega_i\Delta x_i \qquad (2.2)$$

其中 $\omega_i = \sup\limits_{s,t\in[x_i,x_{i+1}]}|f(s)-f(t)|$，$\Delta x_i = x_{i+1}-x_i$.

对式 (2.2) 令 $n\to\infty$，则对 $\forall x\in[a,b]$ 都有 $\|\widetilde{\pi_x}\|\to 0$。由于 $f(x)$ 在 $[a,b+1]$ 可积，由数分 A1 可积性相关知识可知式 (2.2) 右式关于 x 一致趋于 0。

又

$$\beta_n = \sup_{x\in[a,b]}\left|f_n(x) - \int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t\right| \qquad (2.3)$$

故综合式 (2.1)(2.2)(2.3) 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = 0$，由上确界判别法，命题成立。 □

在数项级数中收敛的充要条件有 Cauchy 收敛。同样地，只用改变先前定理中的 N，立刻可得函数列一致收敛的 Cauchy 收敛定理。

定理 2.2 (函数列一致收敛的 Cauchy 收敛)

$\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛 $\iff \forall\varepsilon>0$，$\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$，使得 $\forall n>N,p\in\mathbb{N}^*$，都有：

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon\quad(\forall x\in E)\tag{2.4}$$

证明 $(\Rightarrow)$ 由一致收敛定义显然，下证 $(\Leftarrow)$。

对任意固定的 $\varepsilon>0,x\in E$，由条件知 $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon\,(\forall n>N(\varepsilon),p\in\mathbb{N}^*)$，因此 $\{f_n(x)\}(x$ 固定$)$ 是数列 Cauchy 列，故收敛。由 x 的任意性，记 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)(\forall x\in E)$，则对固定的 $x\in E$，对式 (2.4) 令 $p\to+\infty$，得：

$$|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon\quad(\forall n>N(\varepsilon)，x\text{固定})\tag{2.5}$$

由于式 (2.5) 的 N 与 x 无关，因此由 x 的任意性得：

$$|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon\quad(\forall n>N(\varepsilon)，\forall x\in E)\tag{2.6}$$

而这是 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$ 的定义。 □

笔记 定理 2.1，2.2 都是函数列一致收敛的充要条件，但上确界判别法需要明确极限函数的表达式，Cauchy 收敛则不需要知道极限函数。两个定理在使用时各有优劣，需要甄别。

例题 2.9 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 连续可微且收敛，又有 $|f_n'(x)|\leqslant M\ (\forall x\in[a,b],n\in\mathbb{N}^*)$，则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛。

解 对 $\forall x_0\in[a,b]$，$\{f_n(x_0)\}$ 为收敛数列，由数列的 Cauchy 收敛可得：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N(x_0)\in\mathbb{N}^*$，使得；

$$|f_n(x_0)-f_m(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}\quad(n,m>N(x_0))\tag{2.7}$$

对这个 x_0，设 $I_{x_0}=(x_0-\frac{\varepsilon}{3M},x_0+\frac{\varepsilon}{3M})$。由微分中值定理：

$$|f_n(x)-f_n(x_0)|\leqslant M|x-x_0|<M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}=\frac{\varepsilon}{3}\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*,x\in I_{x_0})\tag{2.8}$$

结合式 (2.7)(2.8) 得：

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_m(x)|&\leqslant|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f_m(x_0)|+|f_m(x)-f_m(x_0)|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\\&=\varepsilon\quad(\forall n,m>N(x_0),x\in I_{x_0})\end{aligned}\tag{2.9}$$

由于 $[a,b]$ 有限闭区间是有界闭集，$\{I_{x_0}\}_{\forall x_0\in[a,b]}$ 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖，故由有限覆盖定理，$\exists\{I_{x_k}\}_{k=1}^n$ 覆盖 $[a,b]$。则令 $N=\max\{N(x_1),N(x_2),\cdots,N(x_n)\}<+\infty$，式 (2.9) 变为：

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon\quad(\forall n,m>N,x\in[a,b])\tag{2.10}$$

对式 (2.10) 由函数列一致收敛的 Cauchy 收敛，得 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛。 □

通过函数列我们可以定义函数项级数的一致收敛。

定义 2.3 (函数项级数一致收敛)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 为定义在区间 I 上的函数项级数。令 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$，若函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛。♣

注 记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$，$R_n(x) = S(x) - S_n(x)$。则 $S_n(x) \rightrightarrows S(x) \iff R_n(x) \rightrightarrows 0$.

由函数列的 Cauchy 收敛定理立得函数项级数的 Cauchy 收敛定理。

定理 2.3 (函数项级数的 Cauchy 收敛)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛 $\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$，使得 $\forall n > N, p \in \mathbb{N}^*$，都有：

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x) \right| < \varepsilon \quad (\forall x \in I) \tag{2.11}$$

♡

提示：对 $\{S_n(x)\}$ 用函数列的 Cauchy 收敛。

作为定理 2.3 的推论，我们得出函数项级数的一致收敛的必要条件。

推论 2.1 (函数项级数一致收敛的必要条件)

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛，则 $\{u_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 0。♡

提示：对式 (2.11) 令 $p = 1$.

注 推论 2.1 的逆命题不成立，反例：$u_n(x) = \dfrac{1}{n}\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

接下来一个定理是证明函数项级数一致收敛的很经常使用的定理。

定理 2.4 (Weierstrass 判别法)

对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，若存在收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，使得对充分大的 n 有：

$$|u_n(x)| \leqslant a_n \quad (\forall x \in I)$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛，并称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的优级数。♡

提示：利用函数项级数和数项级数两个 Cauchy 收敛和绝对值不等式。

注 存在优级数的 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 实际上不只是一致收敛，而是绝对一致收敛：即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ 一致收敛。也存在一致收敛但不存在优级数的反例：

$$u_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & x = \dfrac{1}{n} \\ 0 & x \in [0,1] \backslash \{\dfrac{1}{n}\} \end{cases}$$

(i) 由于 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_n(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ $(\forall x \in [0,1])$，故由 Cauchy 收敛知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 一致收敛。

(ii) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 存在优级数，则必有 $a_n \geqslant \dfrac{1}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$，此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 必发散。

函数项级数一致收敛也有类似的 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法。

定理 2.5 (函数项级数的 Dirichlet 判别法)

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上满足：

(i) $\forall x_0 \in I$，$\{b_n(x_0)\}$ 关于 n 单调趋于 0，且函数列 $\{b_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 0；

(ii) $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)\right\}$ 在 I 上一致有界；

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛。

♡

定理 2.6 (函数项级数的 Abel 判别法)

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上满足：

(i) $\forall x_0 \in I$，$\{b_n(x_0)\}$ 关于 n 单调，且函数列 $\{b_n(x)\}$ 在 I 上一致有界；

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上一致收敛；

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛。

♡

提示：定理 2.5，2.6 的证明可完全类比**定理1.18，1.19**。

笔记 定理 2.5，2.6 条件中的”一致收敛”都是关于 $x \in I$ 一致，”一致有界”则是关于 $x \in I$，$n \in \mathbb{N}^*$ 一致。

定义 2.4 (函数项级数的绝对收敛)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上绝对收敛，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ 在 I 上逐点收敛。

♣

函数项级数的绝对收敛和一致收敛并没有直接关系，详见下面两道例题。

例题 2.10 证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n}$ 在 $[\delta\,, 2\pi-\delta]$ $(0<\delta<\pi)$ 上一致收敛，但不绝对收敛。

解 (i) 由于对 $\forall x \in [\delta\,, 2\pi-\delta]$，$b_n(x) = \dfrac{1}{n}$ 与 x 无关，关于 n 递减趋于 0，且：

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| = \left|\frac{\cos(\frac{x}{2}) - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant \left|\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant \left|\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}\right|$$

故 $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx$ 一致有界。故由 Dirichlet 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n}$ 在 $[\delta\,, 2\pi-\delta]$ $(0<\delta<\pi)$ 上一致收敛。

(ii) 由于：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos nx|}{n}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 nx}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos 2x}{2n}$$

其中 $1+\cos 2x$ 仅在 $x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ 时为 0，取值为正时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos 2x}{2n}$ 发散。因此由正项级数的比较判别法，此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos nx|}{n}$ 发散。因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ 在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 不绝对收敛。 □

笔记 例题 2.10 函数项级数的一致收敛也可称为“内闭一致收敛”。我们说“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上内闭一致收敛”，是指 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 中任何紧集都一致收敛。对函数列也有类似定义。

值得注意的是，在 I 上内闭一致收敛往往推不出在 I 上一致收敛。反例：$f_n(x)=x^n$. 它在 $(0,1)$ 内闭一致收敛，但不一致收敛。

例题 2.11 证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 一致收敛，绝对收敛，但不绝对一致收敛。

解 (i) 由于 $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k$ 一致有界，对 $\forall x\in[0,1]$，$b_n(x)=x^n(1-x)$ 关于 n 单调递减，且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n(x)=0\ (\forall x\in[0,1])$。进一步求导可得：

$$\beta_n=\sup_{x\in[0,1]}|b_n(x)|=b_n(1-\frac{1}{n+1})=\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$，由上确界判别法知 $\{b_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 一致收敛于 0。故由 Dirichlet 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 一致收敛。

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1)^n x^n(1-x)|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)\ \forall x\in[0,1]$. 部分和 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}x^k(1-x)=x-x^{n+1}$. 对 $\forall x\in[0,1]$，$S_n(x)$ 收敛，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 绝对收敛。

(iii) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 绝对一致收敛，那么由 Cauchy 收敛定理：$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*$，使得 $\forall n>N, p\in\mathbb{N}^*$ 有：

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}x^k(1-x)\right|=|x^{n+1}(1-x^p)|<\varepsilon\quad(\forall x\in[0,1])\tag{2.12}$$

对式 (2.12) 固定 $n>N, x\in(0,1)$，令 $p\to+\infty$，再令 $x\to1^-$，得 $1\leqslant\varepsilon$，矛盾。

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 不绝对一致收敛。 □

2.3 极限函数与和函数的性质

本节我们研究一致收敛下极限函数与和函数对连续，Riemann 可积，可微性质的继承以及它们积分, 导数的计算。

定理 2.7 (一致收敛下的连续性)

若 $\{f_n(x)\}$ 满足：(i)$f_n(x)$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ 在 I 上连续；(ii)$\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$；则 $f(x)$ 在 I 上连续。

证明 由一致收敛，$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$，使得 $n \geqslant N$ 时：

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\forall x \in I) \tag{2.13}$$

现在对任意给定的 $x_0 \in I$，对这个 N，由 $f_N(x)$ 在 I 上连续，因此在 x_0 处连续，故 $\exists \delta > 0$，使得 $|x - x_0| < \delta, x \in I$ 时：

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.14}$$

故结合式 (2.13)(2.14)：

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &\leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&< \varepsilon \qquad (\forall |x - x_0| < \delta, x \in I)
\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续。由 $x_0 \in I$ 的任意性知 $f(x)$ 在 I 上连续。 □

笔记 从定理 2.7 的证明我们可以看出极限函数 $f(x)$ 的连续是点态的，即只要在 x_0 的小邻域内满足定理 2.7 的条件，$f(x)$ 在 $x = x_0$ 处就会连续。因此定理 2.7 中的 I 可以是开区间，闭区间，无界区间等等。

定理 2.8 (一致收敛下的可积性与积分)

若 $\{f_n(x) | x \in [a, b]\}$ 满足：

(i)$f_n(x)$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积；

(ii)$\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$；

则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积，且有：

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x) \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$$

证明 (i) 记 $f_n(x)$ 的不连续点集合为 $D(f_n)$，$f(x)$ 不连续点集合为 $D(f)$。

由于 $f_n(x)$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积，故由 Lebsegue 定理，$D(f_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ 是零测集，故 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D(f_n)$ 是零测集。

若 $x_0 \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D(f_n)$，则 x_0 是 $f_n(x)$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ 的连续点，由定理 2.7，$x_0 \notin D(f)$，从而 $D(f) \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D(f_n)$，故 $D(f)$ 也是零测集。

由一致收敛，对 $\varepsilon = 1$，$\exists N \in \mathbb{N}^*$ 与 x 无关，使得：

$$|f(x)-f_N(x)|<1 \quad (\forall x\in[a,b]) \tag{2.15}$$

又由 $f_N(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，由 Lebsegue 定理，$f_N(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，设为 M，则由式 (2.15) 得：

$$|f(x)<|f_N(x)|+1\leqslant M+1 \quad (\forall x\in[a,b])$$

故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。对 $f(x)$ 运用 Lebesgue 定理得 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积。

(ii) 由一致收敛，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$，使得 $\forall n>N$ 都有：

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a} \quad (\forall x\in[a,b])$$

故：

$$\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x<(b-a)\cdot\frac{\varepsilon}{b-a}=\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$ □

定理 2.9 (一致收敛下的可微性和导数)

若 $\{f_n(x)|x\in[a,b]\}$ 满足：

(i)$f_n(x)$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数；

(ii)$\{f_n'(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $g(x)$；

(iii)$\{f_n(x)\}$ 在一点 $x_0\in[a,b]$ 处收敛；

则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续可微，并且有：

$$f'(x)=g(x) \quad (\forall x\in[a,b])$$

证明 (i) 由于 $\{f_n'(x)\}$ 一致收敛，故由函数列的 Cauchy 收敛定理，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1=N_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$，使得 $\forall n,m>N_1$ 都有：

$$|f_n'(x)-f_m'(x)|<\frac{\varepsilon}{3} \quad (\forall x\in[a,b]) \tag{2.16}$$

由于 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛，故由数列的 Cauchy 收敛定理，$\exists N_2=N_2(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$，使得 $\forall n,m>N_2$ 都有：

$$|f_n(x_0)-f_m(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{2.17}$$

由于 $f_n'(x)$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ 在 $[a,b]$ 连续，故有：

$$f_n(x)=f_n(x_0)+\int_{x_0}^x f_n'(t)\mathrm{d}t \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*) \tag{2.18}$$

记 $N=\max\{N_1,N_2\}$ 与 x 无关，结合式 (2.16)~(2.18)，得 $n,m>N$ 时：

$$
\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x)| &= \left| f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\mathrm{d}t - f_m(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_m'(t)\mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + \int_{x_0}^{x} |f_n'(t) - f_m'(t)|\mathrm{d}t \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon \quad (\forall x \in [a,b])
\end{aligned}
$$

故由函数列的 Cauchy 收敛知 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。

(ii) 由 $f_n'(x)$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ 在 $[a,b]$ 连续可知 $f_n'(x)$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ 在 $[a,b]$Riemann 可积，又 $\{f_n'(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $g(x)$，故由定理 2.7 得 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由定理 2.8 和式 (2.18) 得：

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &= \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(x_0)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

由于 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $\int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t$ 可微，由式 (2.19) 得 $f(x)$ 可微，且有：

$$
f'(x) = \left(\int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t \right)' = g(x)
$$

故 $f(x)$ 连续可微。 □

笔记 从定理 2.9 的证明中可以发现 $f(x)$ 的可微性也是点态的，即只要在 x_0 的邻域满足定理 2.9 的条件，同样可以得到 $f(x)$ 在 x_0 处连续可微 $f'(x_0) = g(x_0)$ 。因此定理 2.9 中的 $[a,b]$ 可以改成开区间，无界区间等等。

注 对函数项级数，也有类似的定理 2.7~2.9，只需对部分和函数列进行考虑即可。

例题 2.12 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{2n} \ln x$ 在 $(0,1)$ 不一致收敛，但在 $[0,1]$ 可以逐项积分。

解 (i) 记 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x^{2k} \ln x = \dfrac{x^2 \ln x}{1-x^2}(1-x^{2n})$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*, x \in (0,1))$，则：

$$
\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{x^2 \ln x}{1-x^2} \triangleq S(x)
$$

记 $R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \dfrac{x^{2n+2} \ln x}{1-x^2}$，则有：

$$
\beta_n = \sup_{x\in(0,1)} |R_n(x)| \geqslant R_n\left(\sqrt{1 - \frac{1}{2n+2}}\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \tag{2.20}
$$

计算得：

$$
\lim_{n\to\infty} R_n\left(\sqrt{1 - \frac{1}{2n+2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}} \tag{2.21}
$$

故结合式 (2.20),(2,21)，由上确界判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{2n}\ln x$ 在 $(0,1)$ 不一致收敛。

(ii) 即证:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x$$

或者：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 R_n(x)\mathrm{d}x=0 \tag{2.22}$$

令 $g(x)=\dfrac{R_n(x)}{x^{2n}}=\dfrac{x^2\ln x}{1-x^2}\ (x\in(0,1))$. 定义 $g(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=0$，$g(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)=-\dfrac{1}{2}$，则补充定义后 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，故 $\exists M>0$ 使得 $|g(x)|\leqslant M\ (x\in[0,1])$，从而：

$$\left|\int_0^1 R_n(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M\int_0^1 x^{2n}\mathrm{d}x=\frac{M}{2n+1}\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*) \tag{2.23}$$

由式 (2.23) 可知式 (2.22) 成立，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{2n}\ln x$ 在 $[0,1]$ 可以逐项积分。 □

笔记 证明一个函数项级数不一致收敛通常有以下几种思路：(1) 证明余项 $R_n(x)\not\rightrightarrows 0$；(2) 证明 Cauchy 收敛定理不成立；(3) 证明通项 $u_n(x)\not\rightrightarrows 0$。其中 (1)(2) 是充要的，(3) 来自一致收敛的必要条件。

一个值得思考的问题是定理 2.7 的逆命题是否成立，即：已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的通项 $u_n(x)$ 和极限函数 $S(x)$ 均连续，是否能推出一致收敛。下面两个定理证明了在正项函数列情形，该逆命题成立。

定理 2.10 (Dini)

若 $\{f_n(x)|x\in[a,b]\}$ 满足：

(i)$f_n(x)\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)$ 在 $[a,b]$ 上连续；　(ii) 对 $\forall x\in[a,b]$，$\{f_n(x)\}$ 递减趋于 0；

则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0.

证明 由条件 (ii)，$\forall\varepsilon>0$，对固定的 $x\in[a,b]$，$\exists N_x\in\mathbb{N}^*$，$n\geqslant N_x$ 时，$|f_n(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。对这个 N_x，由于 $f_{N_x}(t)$ 在 $t\in[a,b]$ 上连续，因此存在 x 的小邻域 I_x，使得：

$$|f_{N_x}(t)-f_{N_x}(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\quad(\forall t\in I_x) \tag{2.24}$$

由式 (2.24) 得：

$$|f_{N_x}(t)|\leqslant|f_{N_x}(t)-f_{N_x}(x)|+|f_{N_x}(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\quad(\forall t\in I_x)$$

又由条件 (ii)，得：

$$0\leqslant f_n(t)\leqslant f_{N_x}(t)<\varepsilon\quad(\forall t\in I_x, n\geqslant N_x) \tag{2.25}$$

又因为 $\bigcup\limits_{x\in[a,b]} I_x$ 组成 $[a,b]$ 的一个开覆盖，故由有限覆盖定理，存在 $\{I_{x_1}, I_{x_2}, \cdots, I_{x_N}\}$，使得 $[a,b] \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} I_{x_k}$。记 $N_0 = \max\{N_{x_1}, N_{x_2}, \cdots, N_{x_N}\} < +\infty$ 且与 x 无关，则由式 (2.25)，$n > N_0$ 时：

$$0 \leqslant f_n(x) < \varepsilon \quad (\forall x \in [a,b])$$

故 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0。 □

注 定理 2.10 中的 $[a,b]$ 不可改为开区间和无界区间。

(i) 对开区间有反例：$f_n(x) = x^n \ \ (x \in (0,1))$;

(ii) 对无界区间有反例：$f_n(x) = \dfrac{x}{n} \ \ (x \in (0,+\infty))$.

定理 2.11 (Dini)

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足：

(i) $u_n(x)$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ 在 $[a,b]$ 上连续非负；

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛于 $S(x)$，且 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上也连续；

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$.

提示：记 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$，$R_n(x) = S(x) - S_n(x)$，对 $\{R_n(x)\}$ 用定理 2.10.

2.4 幂级数

定义 2.5 (幂级数)

形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的函数项级数称为幂级数。

注 多项式函数可视为特殊的幂级数。

由于 $x_0 \neq 0$ 的幂级数均可以视作 $x_0 = 0$ 的幂级数作平移得到，因此不妨设 $x_0 = 0$。对于幂级数这个特殊的函数项级数，首先要研究的是它的收敛域。

定理 2.12 (Abel)

(1) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_1 \neq 0$ 处收敛，则其在 $(-|x_1|, |x_1|)$ 绝对收敛；

(2) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_2 \neq 0$ 处发散，则其在 $|x| > |x_2|$ 发散。

证明 (1) 由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 收敛，故 $a_n x_1^n$ 有界，设 $|a_n x_1^n| \leqslant M$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$。对固定的 $x \in (-|x_1|, |x_1|)$，记 $q = \left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$，由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n (\frac{x}{x_1})^n$，且有：

$$|a_n x^n| \leqslant M \left|\frac{x}{x_1}\right|^n = Mq^n \quad (|q| < 1)$$

因此由比较判别法知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 在 $(-|x_1|, |x_1|)$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-|x_1|, |x_1|)$ 绝对收敛。

(2) 若存在 $|x_3| > |x_2|$，使得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_3^n$ 收敛，则由 (1)，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 x_2 处收敛，矛盾。故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_2 \neq 0$ 在 $|x| > |x_2|$ 发散。 □

由定理 2.12 我们可以预见存在一个临界值 x_0，使得 $|x| < |x_0|$ 时幂级数收敛，$|x| > |x_0|$ 时幂级数发散。下面这个定理告诉我们这个临界值是什么。

定理 2.13 (Cauchy-Hadamard)

对幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，记：

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{2.26}$$

称 R 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径，并且：

(1) $R = 0$：幂级数只在 $x = 0$ 处收敛；

(2) $R = +\infty$：幂级数在 $x \in \mathbb{R}$ 上绝对收敛；

(3) $0 < R < +\infty$：幂级数在 $(-R, R)$ 上绝对收敛，在 $|x| > R$ 发散，在 $x = \pm R$ 时需单独讨论。

♡

提示：用数项级数的 Cauchy 开方判别法 (**定理1.9**)，结合定理 2.12。

注 幂级数在收敛半径端点处的敛散性是需要单独讨论的，如以下三个幂级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

它们的收敛半径都是 1，但它们的收敛域分别是 $(-1, 1)$，$[-1, 1)$，$[-1, 1]$.

为研究幂级数和函数的性质，我们需要先研究幂级数的一致收敛性。

定理 2.14 (幂级数的一致收敛性)

若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径为 $R > 0$，则幂级数在 $(-R, R)$ 上内闭一致收敛，即 $\forall r \in (0, R)$，幂级数在 $[-r, r]$ 上一致收敛。

♡

提示：$|a_n x^n| \leqslant |a_n| \cdot r^n$ $(\forall |x| \leqslant r, n \in \mathbb{N}^*)$，结合定理 2.13 和 Weierstrass 判别法。

有了一致收敛性，我们可以运用 2.3 节所学得到幂级数的许多性质。

定理 2.15 (幂级数的性质)

若 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径为 $R > 0$，则：

(1) $S(x) \in \mathrm{C}^{\infty}(-R, R)$；

(2) $S^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k}$ $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$；

(3) $\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ $(\forall x \in (-R, R))$.

提示：利用**定理2.7~2.9**以及下式：

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n(n-1)\cdots(n-k+1)} = 1 \quad (\forall k \in \mathbb{N}^*)$$

例题 2.13 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n+1}$ $(x \in (-1, 1))$.

解 首先有：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n+1} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1}\mathrm{d}t \tag{2.27}$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t^{n-1}$ 收敛半径 $R = +\infty$，故由逐项积分：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t = -\ln(1-x) \tag{2.28}$$

结合式 (2.27)(2.28) 得原式 $= -x\ln(1-x)$. $\square$

如果给 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛半径端点处的收敛性作限制，可以得到和函数在端点处的连续性。

定理 2.16 (Abel 第二定理)

已知 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径为 $R > 0$：

(1) 若 $x = R$ 处，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛，则 $S(x)$ 在 $x = R$ 处左连续；

(2) 若 $x = -R$ 处，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ 收敛，则 $S(x)$ 在 $x = -R$ 处右连续。

提示：以 (1) 为例，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$，利用函数项级数的 Abel 判别法证明其在 $[0, R]$ 一致收敛。

注 Abel 第二定理的逆定理不成立，即已知幂级数收敛半径为 1，在 $x=1$ 处单侧极限存在，则幂级数在 $x=1$ 处不一定收敛，反例：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$. 其收敛半径为 1，在 $x=1$ 处单侧极限为 $\dfrac{1}{2}$，但 $x=1$ 处级数发散。

虽然 Abel 第二定理逆定理不成立，但如果对 a_n 进行限制，Abel 第二定理逆定理可以成立。下面一个定理给 a_n 加了收敛性限制。

定理 2.17 (Tauber)

已知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径为 $R=1$，$\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$，若 $a_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$，则：$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$.

证明 由于 $\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$，故 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，使得：

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - A\right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (\forall x\in(1-\delta,1)) \tag{2.29}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$，故 $\exists N_1\in\mathbb{N}^*$，使得：

$$|n a_n| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (\forall n > N_1) \tag{2.30}$$

又由 Stolz 公式：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} k|a_k|}{n} = \lim_{n\to\infty} n a_n = 0$$

从而 $\exists N_2\in\mathbb{N}^*$，使得：

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} k|a_k|}{n} < \frac{\varepsilon}{4} \quad (\forall n > N_2) \tag{2.31}$$

再取 $N_3\in\mathbb{N}^*$，使得 $1-\delta < 1-\dfrac{1}{N_3} < 1$，记 $N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$，则 $n>N$ 时：

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - A\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n}|a_k|(1-x^k) + \left|\sum_{t=n+1}^{\infty} a_t x^t\right| + \left|\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i - A\right| = I_1 + I_2 + I_3 \tag{2.32}$$

令 $x = 1-\dfrac{1}{2n}\in(1-\delta,1)$，则由式 (2.31) 得：

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{k=0}^{n}|a_k|(1-x)(1+x+\cdots+x^{k-1}) \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} k|a_k|(1-x) \end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k|a_k|$$
$$< \frac{\varepsilon}{4}$$

由式 (2.30) 以及 $x = 1 - \dfrac{1}{2n}$ 得：

$$I_2 = \left|\sum_{t=n+1}^{\infty} t a_t \left(\frac{x^t}{t}\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4n}\sum_{t=n+1}^{\infty} x^t \leqslant \frac{\varepsilon}{4n}\cdot\frac{1}{1-x} = \frac{\varepsilon}{2}$$

由式 (2.29) 得：$I_3 < \dfrac{\varepsilon}{4}$. 因此由式 (2.32) 知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$. □

最后考察幂级数的无穷乘积。由于幂级数在收敛半径内良好的收敛性，其 Cauchy 乘积也有不错的结果。

定理 2.18 (幂级数的 Cauchy 乘积)

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 收敛半径均为 $R > 0$，则 $\forall x \in (-R, R)$ 都有：

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

其中 $c_n = \sum\limits_{i+j=n+1} a_i b_j$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

提示：幂级数在 $(-R, R)$ 绝对收敛 **(定理2.13)**，结合**定理1.22**。

2.5 幂级数展开

定义 2.6 (幂级数展开)

设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，x_0 为区间内点，若 $\exists r > 0$ 使得 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ $(x \in (x_0 - r, x_0 + r) \subset I)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处可以展开成幂级数。

若 $f(x)$ 在 I 上每一点都能展开成幂级数，则称 $f(x)$ 在 I 上实解析。

由幂级数的逐项求导性质，立刻可以得到 $f(x)$ 能展开成幂级数的必要条件。

命题 2.2 (幂级数展开的必要条件)

若 $f(x)$ 在 x_0 处可以展开成幂级数，即 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ $(x \in (x_0 - r, x_0 + r) \subset I)$，则 $f(x)$ 在 $(x_0 - r, x_0 + r)$ 上有任意阶导数，且有：

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

提示：利用**定理2.15(2)**，令 $x = x_0$ 即可。

注 命题 2.3 也可说明函数幂级数展开的唯一性。

定义 2.7 (Taylor 级数)

若 $f(x)$ 在 x_0 处有任意阶导数，则可作出幂级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

称这个幂级数为 $f(x)$ 在 x_0 处的 Taylor 级数。特别地，当 $x_0 = 0$，称其为 Maclaurin 级数。

只要 $f(x)$ 在 x_0 处有任意阶导数，就可作出它在 x_0 处的 Taylor 级数，但这个幂级数不一定收敛，而且即使收敛，也不一定收敛于 $f(x)$。详见下面两道例题。

例题 2.14 研究 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sin(2^n x)$ 在 $x = 0$ 处的 Taylor 级数。

解 首先由 Weierstrass 判别法知 $f(x)$ 在 $x \in \mathbb{R}$ 上一致收敛，因此由定理**2.15**，$f(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. 逐项求导可得：

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{kn}}{n!} \sin\left(2^n x + \frac{k\pi}{2}\right) \qquad (\forall k \in \mathbb{N})$$

计算得：

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & k = 2m,\ m \in \mathbb{N} \\ (-1)^m \mathrm{e}^{2^{2m+1}} & k = 2m+1,\ m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

这里已经运用了恒等式:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n(2m+1)}}{n!} = \mathrm{e}^{2^{2m+1}} \qquad (\forall m \in \mathbb{N})$$

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处 Taylor 级数为：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \mathrm{e}^{2^{2n+1}} x^{2n+1}$$

其收敛半径 $R = 0$，因此这个 Taylor 级数仅在 $x = 0$ 处收敛。 □

例题 2.15 研究 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的 Taylor 级数，其中：

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

解 回顾数分 A1 4.3 节的内容，可得 $f^{(k)}(0) = 0\ (\forall k \in \mathbb{N})$. 因此 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的 Taylor 级数恒为 0，虽然在 $x \in \mathbb{R}$ 上收敛，但仅在 $x = 0$ 处收敛到 $f(x)$。 □

下面我们研究 Taylor 级数何时收敛于 $f(x)$。

命题 2.3 (Taylor 级数收敛的充要条件)

设 $f(x)$ 在 x_0 处有 Taylor 级数，记 $I=(x_0-r,x_0+r)$，并且：

$$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\quad(\forall x\in I,n\in\mathbb{N})$$

则：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\ (\forall x\in I)\iff\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0\ (\forall x\in I)$$

注 此处 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0\ (\forall x\in I)$ 只是逐点收敛，不是一致收敛，Taylor 级数收敛于 $f(x)$ 也只是逐点收敛。如果是一致收敛，则是多项式一致逼近（见 2.6 节）。

利用函数的 Taylor 公式可以给出 $R_n(x)$ 的具体表达式，从而可以给出 Taylor 级数收敛于 $f(x)$ 的便于应用的充分条件。

定理 2.19 (Taylor 级数收敛的充分条件)

如果 $\exists M>0$，使得对充分大的 $n\in\mathbb{N}$ 都有：

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant M\quad(\forall x\in(x_0-r,x_0+r))$$

则 $f(x)$ 在 (x_0-r,x_0+r) 上可以展开为 Taylor 级数。

证明 由于 $f(x)$ 在 (x_0-r,x_0+r) 上有任意阶导数，故由 Taylor 公式，对 $\forall x\in(x_0-r,x_0+r)$ 有：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

由 Lagrange 余项，$\exists\xi$ 介于 x,x_0 之间，使得：

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)\tag{2.33}$$

由条件 $|f^{(n)}(x)|\leqslant M\ (\forall x\in(x_0-r,x_0+r),n$充分大$)$，结合式 (2.33) 得当 n 充分大时：

$$|R_n(x)|\leqslant M\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}\quad(\forall x\in(x_0-r,x_0+r))\tag{2.34}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0\ (\forall x\in(x_0-r,x_0+r))$. 由命题 2.3，结论成立。 □

注 从式 (2.34) 可知 $R_n(x)$ 其实在 (x_0-r,x_0+r) 上是一致收敛于 0，因此由定理 2.19 得到的其实是 Taylor 级数一致收敛于 $f(x)$。

由定理 2.19 可以得到许多初等函数的幂级数展开，下面是一些列举。

$$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad(x\in(-\infty,+\infty))$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\quad (x\in(-\infty,+\infty))$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\quad (x\in(-\infty,+\infty))$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\quad (x\in(-1,1))$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\quad (x\in(-1,1])$$

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n\quad x\in\begin{cases}(-1,1) & \alpha\leqslant 1\\ (-1,1] & -1<\alpha<0\\ [-1,1] & \alpha>0\end{cases}$$

其中 $\binom{\alpha}{0}=1,\binom{\alpha}{n}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\ (\forall n>0)$

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad (x\in[-1,1])$$

例题 2.16 求 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 在 $x=1$ 处的幂级数展开。

解 令 $t=x-1$，则 $f(x)=\dfrac{1}{t^2+6t+8}\overset{\Delta}{=}g(t)$，转化为求 $g(t)$ 在 $t=0$ 处的幂级数展开。利用级数加法：

$$g(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+2}-\frac{1}{t+4}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{t}{2}\right)^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{t}{4}\right)^n\right)\tag{2.35}$$

其中 t 满足：

$$\begin{cases}-1<\dfrac{t}{2}<1\\ -1<\dfrac{t}{4}<1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad -2<t<2\tag{2.36}$$

$x=1+t$ 代入式 (2.35)(2.36)，得：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(-1)^n(x-1)^n\quad (-1<x<3)\tag{2.37}$$

由幂级数展开的唯一性知式 (2.37) 即为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的幂级数展开。 □

例题 2.17 求 $f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开。

解 利用初等函数的幂级数展开：

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad \ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n \tag{2.38}$$

其中 x 满足：

$$\begin{cases} -1<x<1 \\ -1<(-x)\leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \ -1<x<1 \tag{2.39}$$

令 $a_n=1\ (\forall n\in\mathbb{N})$，$b_n=-\dfrac{1}{n}\ (n\geqslant 1), b_0=0$，故：

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=\begin{cases} -\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right) & n\geqslant 1 \\ 0 & n=0 \end{cases} \tag{2.40}$$

利用幂级数的 Cauchy 乘积 (定理**2.18**)，结合式 (2.38)~(2.40) 得：

$$f(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n \tag{2.41}$$

由幂级数展开的唯一性知式 (2.41) 即为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开。 □

例题 2.18 求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开，其中：

$$f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

解 令 $g(x)=\dfrac{\sin x}{x}\ (x\neq 0)$，补充定义 $g(0)=1$，则 $g(x)$ 在 $x\in\mathbb{R}$ 上连续，又 $f(x)=\displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$，故 $f(x)$ 在 $x\in\mathbb{R}$ 上可导，且 $f'(x)=g(x)\ (x\in\mathbb{R})$.

对 $g(x)$ 在 $x=0$ 做幂级数展开得：

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n} \quad (x\in(-\infty,+\infty))$$

故：

$$f'(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n} \quad (x\in(-\infty,+\infty)) \tag{2.42}$$

对式 (2.42) 两边在 $0\sim x$ 上积分，由于 $f(0)=0$ 得：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}x^{2n+1} \quad (x\in(-\infty,+\infty)) \tag{2.43}$$

由幂级数展开的唯一性知式 (2.43) 即为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开。 □

笔记 对于幂级数展开，需要注意下几点：

(1) 幂级数展开一定要标注收敛域；
(2) 灵活运用间接法求幂级数，如：级数的加法乘法，求导，积分，换元等等；
(3) 验证计算得到的幂级数是原函数的幂级数展开需要利用幂级数展开的唯一性。

例题 2.19 $f(x) \in C^{\infty}([-1,1])$，且当 $x \in [-1,1]$ 时，$f^{(n)}(x) \geqslant 0\ (\forall n \in \mathbb{N})$，则 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上可以展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

解 由命题 2.3，只需证对任意固定的 $x \in (-1,1)$，$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。由于：

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{2.44}$$

故 $R_n^{(k)}(0) = 0\ (\forall 0 \leqslant k \leqslant n)$，$R_n^{(n+1)}(0) = f^{(n+1)}(0)$.

在定理 2.19 中我们用 Taylor 公式的 Lagrange 余项刻画 $R_n(x)$，下面我们用积分余项：

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_0^x R_n^{'}(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x R_n^{'}(t)\mathrm{d}(t-x) \\ &= R_n^{'}(t)(t-x)\big|_0^x - \int_0^x R_n^{''}(t)(t-x)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x R_n^{''}(t)(x-t)\mathrm{d}t \\ &\cdots \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^x R_n^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{2.45}$$

令 $t = ux$，代入式 (2.45) 得：

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(ux)(1-u)^n\mathrm{d}u \tag{2.46}$$

当 $x \in [-1,1]$ 时，$f^{(n)}(x) \geqslant 0\ (\forall n \in \mathbb{N})$，因此 $f^{(n)}(x)\ (\forall n \in \mathbb{N})$ 在 $[-1,1]$ 单调递增，结合式 (2.46) 得 $\forall n \in \mathbb{N}, x \in [-1,1]$ 都有：

$$-\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(u)(1-u)^n\mathrm{d}u \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(u)(1-u)^n\mathrm{d}u$$

即：

$$-x^{n+1}R_n(1) \leqslant R_n(x) \leqslant x^{n+1}R_n(1) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, x \in [-1,1]) \tag{2.47}$$

又 $x = 1$ 代入式 (2.44) 得 $R_n(1) \leqslant f(1)$，代入式 (2.46) 得 $R_n(1) \geqslant 0$，故结合式 (2.47) 得：

$$-x^{n+1}f(1) \leqslant R_n(x) \leqslant x^{n+1}f(1) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, x \in [-1,1]) \tag{2.48}$$

对任意固定的 $x \in (-1,1)$，在式 (2.48) 中令 $n \to \infty$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$，故 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上可以展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. □

2.6 多项式一致逼近函数

定义 2.8 (多项式一致逼近)

若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists P_\varepsilon(x)$ 多项式，使得：

$$|P_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (\forall x \in I)$$

或者 $\forall n \in \mathbb{N}^*$，$\exists P_n(x)$ 多项式，使得：

$$|P_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \quad (\forall x \in I)$$

则称 $f(x)$ 在 I 上可以被多项式一致逼近。♣

笔记 幂级数展开和多项式一致逼近有很大差别：
(1) 幂级数展开要求 $f(x) \in \mathrm{C}^\infty(I)$，多项式一致逼近只需要 $f(x) \in \mathrm{C}([a,b])$；
(2) 能幂级数展开的充要条件是逐点收敛，幂级数在收敛半径内是内闭一致收敛，多项式一致逼近要求在 I 上一致收敛；
(3) 幂级数展开具有唯一性，即有固定的形式，多项式一致逼近没有。

下面介绍本节的主要定理。此定理十分重要，在往后的学习中会经常出现。

定理 2.20 (Weierstrass 一致逼近)

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可以用多项式一致逼近。♡

注 定理 2.20 中的有界闭区间不可以随意改变，否则有反例：
(1) 对开区间 $(0,1)$：$f(x) = \dfrac{1}{x}$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 无界，但多项式有界，一定不能一致逼近；
(2) 对无界区间 $(1,+\infty)$：$f(x) = \dfrac{1}{x}$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 有界，但多项式无界，也不能一致逼近；

为了证明定理 2.20，我们先证明下面两个引理。

引理 2.1

令：

$$C_n = \left(\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \mathrm{d}x\right)^{-1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

则 $C_n < \sqrt{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$. ♡

证明 利用伯努利不等式得：

$$(1-x^2)^n \geqslant 1 - nx^2 \quad (\forall x \in [0,1])$$

故：

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x &= 2\int_{0}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x \\
&\geqslant 2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-x^2)^n\mathrm{d}x \\
&\geqslant 2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-nx^2)\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{3\sqrt{n}} \\
&> \frac{1}{\sqrt{n}}
\end{aligned}
$$

故 $C_n < \sqrt{n}\ \ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$. □

引理 2.2

令 $Q_n(x) = C_n(1-x^2)^n$，C_n 如引理 2.1 所示。若 $f(x) \in \mathrm{C}([0,1])$ 且 $f(0) = f(1)$，$f(x) = 0\ (x \notin [0,1])$，则存在多项式序列 $\{P_n(x)\}$，使得 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可以被 $\{P_n(x)\}$ 一致逼近，其中：

$$
P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x-t)Q_n(t)\mathrm{d}t \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)
$$

证明 需要证明 $P_n(x)$ 是多项式，以及 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可以被 $\{P_n(x)\}$ 一致逼近。

(i) 令 $y = x - t$ 得：

$$
P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x-t)Q_n(t)\mathrm{d}t = \int_{x-1}^{x+1} f(y)Q_n(x-y)\mathrm{d}y \tag{2.49}
$$

由于 $x \in [0,1]$，故 $x-1 \leqslant 0 \leqslant x+1$，$f(x) = 0\ (x \notin [0,1])$，因此式 (2.49) 变为：

$$
P_n(x) = \int_{0}^{1} f(y)Q_n(x-y)\mathrm{d}y = C_n\int_{0}^{1} f(y)(1-(x-y)^2)^n\mathrm{d}y \tag{2.50}
$$

式 (2.50) 右边的积分对 y 积，与 x 无关，因此展开后可得 $P_n(x)$ 为关于 x 的多项式。

(ii) 首先有 $Q_n(t) \geqslant 0\ (\forall t \in [-1,1])$，且有：

$$
\int_{-1}^{1} Q_n(t)\mathrm{d}t = C_n(t)\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\mathrm{d}t = C_n \cdot \frac{1}{C_n} = 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \tag{2.51}
$$

由条件知 $f(x) \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$，故 $\exists M$，使得 $|f(x)| < M\ (x \in \mathbb{R})$，且由一致连续，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists 0 < \delta < 1$，使得：

$$
|f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (s, t \in \mathbb{R}, |s-t| < \delta) \tag{2.52}
$$

因此由式 (2.51) 得：

$$\begin{aligned} |P_n(x)-f(x)| &= \left|\int_{-1}^{1} f(x-t)Q_n(t)\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1} f(x)Q_n(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_{-1}^{1} |f(x-t)-f(x)|Q_n(t)\mathrm{d}t \\ &= I_1+I_2+I_3 \quad (\forall x\in[0,1], n\in\mathbb{N}^*) \end{aligned} \tag{2.53}$$

其中 I_1, I_2, I_3 分别是 $|f(x-t)-f(x)|Q_n(t)$ 关于 t 在 $[-1,-\frac{\delta}{2}], [-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}], [\frac{\delta}{2},1]$ 上的积分。
对 I_2 由式 (2.51)(2.52) 得：

$$I_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} Q_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{-1}^{1} Q_n(t)\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{2}\cdot 1 = \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.54}$$

对 I_3 由引理 2.1，在取定 δ 后，对任意 n 充分大且与 x 无关，都有：

$$\begin{aligned} I_3 &\leqslant 2M\int_{\frac{\delta}{2}}^{1} Q_n(t)\mathrm{d}t \\ &= 2M\int_{\frac{\delta}{2}}^{1} C_n(1-t^2)^n\mathrm{d}t \\ &\leqslant 2MC_n\int_{\frac{\delta}{2}}^{1}\left(1-\frac{\delta^2}{4}\right)^n\mathrm{d}t \\ &= MC_n(2-\delta)\left(1-\frac{\delta^2}{4}\right)^n \\ &< 2M\sqrt{n}\left(1-\frac{\delta^2}{4}\right)^n \\ &< \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned} \tag{2.55}$$

对 I_1 与 I_3 同理，对任意 n 充分大且与 x 无关也有 $I_1 < \dfrac{\varepsilon}{4}$.
因此由式 (2.53)~(2.55) 可得 $P_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(x\in[0,1])$. □

现在我们回到定理 2.20 的证明。

证明 引理 2.2 已经证明了定理 2.20 在 $f(0)=f(1)=0, x\in[0,1]$ 的特殊情形，下面证明一般情形。

(i) 若 $f(0)\neq f(1)$，则令 $g(x)=f(x)-f(0)-x(f(1)-f(0))$，则 $g(0)=g(1)=0$，从而存在多项式序列 $\{P_n(x)\}$，使得 $P_n(x)\rightrightarrows g(x)$ $(x\in[0,1])$，从而：

$$P_n(x)+(f(1)-f(0))x+f(0)\rightrightarrows f(x) \quad (x\in[0,1])$$

(ii) 若是一般闭区间 $[a,b]$，则令 $x=a+t(b-a)$，则 $f(x)=f(a+t(b-a))=h(t)$ $(t\in[0,1])$，对 $h(t)$ 做多项式一致逼近后把 t 换元回 x 即可。 □

例题 2.20 已知 $f(x) \in \mathrm{C}([0,1])$，求证：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) = 0$$

解 (i) 先证：

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^m = 0 \quad (\forall n > m \geqslant 0) \tag{2.56}$$

用数学归纳法。首先 $m=0$ 时，对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$，$\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$.

假设 $n \geqslant 1$ 时对 $\forall 0 \leqslant m < n$ 式 (2.56) 成立。则 $n+1$ 时对 $\forall 1 \leqslant m < n+1$，利用 Abel 求和公式得：

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \left(\frac{k}{n+1}\right)^m \\
=& \sum_{k=0}^{n+1} \left((-1)^k \binom{n+1}{k} \left(\frac{k}{n+1}\right)^{m-1}\right) \left(\frac{k}{n+1}\right) \\
=& \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{t=0}^{k} (-1)^t \binom{n+1}{t} \left(\frac{t}{n+1}\right)^{m-1} + \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \left(\frac{k}{n+1}\right)^{m-1} \\
=& -\left(\frac{n}{n+1}\right)^m \sum_{t=0}^{n} (-1)^t \binom{n}{t} \left(\frac{t}{n}\right)^{m-1} + \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \left(\frac{k}{n+1}\right)^{m-1}
\end{aligned} \tag{2.57}$$

其中式 (2.57) 的前一项的求和部分是式 (2.56) 的 $n, m-1$ 情形，又已假设 $1 \leqslant m < n+1$，故 $0 \leqslant m-1 < n$，由归纳假设知式 (2.57) 前一项为 0。式 (2.57) 后一项是式 (2.56) 的 $n+1$，$m-1$ 情形，因此得到递推式：

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \left(\frac{k}{n+1}\right)^m = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \left(\frac{k}{n+1}\right)^{m-1} \quad (\forall 1 \leqslant m < n+1)$$

故：

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \left(\frac{k}{n+1}\right)^m = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} = 0$$

故由式 (2.57) 知 $n+1$ 时对 $\forall 0 \leqslant m < n+1$ 式 (2.56) 成立，由数学归纳法得式 (2.56) 对 $\forall n > m \geqslant 0$ 成立。

(ii) 由 (i) 得任给多项式 $P(x)$ 都有：

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P\left(\frac{k}{n}\right) = 0 \quad \Big(\forall n > \deg(P(x))\Big) \tag{2.58}$$

由于 $f(x) \in \mathrm{C}([0,1])$，故由定理 2.20，存在多项式序列 $\{P_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 一致逼近 $f(x)$，则 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}^*$，使得 $|f(x) - P_N(x)| < \varepsilon \ (\forall x \in [0,1])$，从而：

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}P_N\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\
=&\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-P_N\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right| \\
\leqslant&\ \varepsilon\cdot\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \\
=&\ \varepsilon
\end{aligned} \tag{2.59}$$

故结合式 (2.58)(2.59) 可得结论成立。 □

2.7 幂级数在组合数中的应用

定义 2.9 (生成函数，母函数)

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为给定数列，则称 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 为该数列的生成函数或者母函数。 ♣

母函数的主要应用是将某些跟数列求和有关的问题转化为幂级数运算的系数问题，具体见下面两道例题。

例题 2.21 已知 $a_0=0$，$a_1=1$，$a_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}\ (n\geqslant 2)$. 求 $a_n\ (n\geqslant 2)$.

解 由于 $\{a_n\}$ 的递推式是 Cauchy 乘积系数的形式，因此考虑母函数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 得：

$$\begin{aligned}
f^2(x)&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)^2 \\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}\right)x^n \\
&=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}\right)x^n \\
&=\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n \\
&=f(x)-x
\end{aligned}$$

从而得到关于 $f(x)$ 的方程组：

$$\begin{cases}f^2(x)-f(x)+x=0\\ f(0)=a_0=0\end{cases}$$

解得：

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} \tag{2.60}$$

最后对式 (2.60) 右边做幂级数展开，由于：

$$\begin{aligned}(1-4x)^{-\frac{1}{2}}&=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}(-4x)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n\end{aligned} \tag{2.61}$$

故比较 x^n 系数可得：

$$a_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}\quad(n\geqslant 2) \tag{2.62}$$

再由幂级数展开的唯一性，式 (2.62) 即为所求。 □

例题 2.22 试证：

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=n\cdot 2^{n-1}\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)$$

解 待证左式具有 Cauchy 乘积的形式，所用的母函数猜测可以由式 (2.61) 得到。问题关键是系数中的 k，这个可以通过求导得到。因此令 $f(x)=(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$，则：

$$xf'(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}n\binom{2n}{n}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}n\binom{2n}{n}x^n \tag{2.63}$$

又：

$$xf'(x)\cdot f(x)=\frac{2x}{(1-4x)^2} \tag{2.64}$$

由式 (2.61)(2.63) 可得，待证左式为式 (2.64) 左边幂级数展开后 x^n 的系数，对式 (2.64) 右边：

$$\frac{2x}{(1-4x)^2}=2x\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}(-4x)^n=2x\sum_{n=0}^{\infty}4^n(n+1)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot 2^{2n-1}x^n$$

由幂级数展开唯一性知结论成立。 □

第 3 章 反常积分

在本章开始之前，先回顾数分 A1 所学的反常积分知识。反常积分包括无穷积分和瑕积分，两者定义如下。

定义 3.1 (无穷积分)

一个积分称为无穷积分，若其积分区间无界，即形如 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$。

无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛是指：$f(x)$ 在任意有限区间 $[a, A]$ $(A > a)$ 上可积，且：

$$\lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\mathrm{d}x = S \in \mathbb{R}$$

此时记 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = S$。反之则称其发散。

♣

定义 3.2 (瑕积分)

一个积分称为瑕积分，若其形如 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，但 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有瑕点。

若 $f(x)$ 定义在 $(a, b]$ 上，且 $f(x)$ 在 $x \to a^+$ 时无界，则称 a 为 $f(x)$ 的一个瑕点。

设只有 a 为瑕点，则瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛是指：$f(x)$ 在任意有限区间 $[a+\varepsilon, b]$ $(\varepsilon > 0)$ 上可积，且：

$$\lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x = S \in \mathbb{R}$$

此时记 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = S$。反之则称其发散。

♣

在数分 A1 时我们已经学习了某些特殊反常积分的敛散性，在往后的章节中这些都将当作已知。

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x \Rightarrow \begin{cases} \text{收敛} & (p > 1) \\ \text{发散} & (p \leqslant 1) \end{cases} \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x \Rightarrow \begin{cases} \text{收敛} & (p < 1) \\ \text{发散} & (p \geqslant 1) \end{cases}$$

3.1 非负函数无穷积分的判别法

正项级数可以视为非负函数无穷积分的离散版本，用测度论（实分析内容）语言描述则是：正项级数可以视为离散/计数测度下的无穷积分。由于它们的本质相同，因此主要定理，判别法也是类似的。

定理 3.1 (非负函数无穷积分的充要条件)

若 $f(x) \geqslant 0\ (x \in [a, +\infty))$，则：

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ 收敛 } \Longleftrightarrow F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \text{ 在 } x \in [a, +\infty) \text{ 有界}$$

提示：$F(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 单增，故 $F(+\infty)$ 存在有限 $\Longleftrightarrow F(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 有界。

定理 3.2 (非负函数无穷积分的比较判别法)

若对充分大的 $x \in [a, +\infty)$ 有 $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ 则：

(1) $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Rightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散 $\Rightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

提示：利用定理 3.1。

定理 3.3 (定理 3.2 的极限形式)

已知 $f(x), g(x) \geqslant 0\ (x \in [a, +\infty))$，设 $l = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$，则：

(1) $l = 0$：$\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Rightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(2) $l = +\infty$：$\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散 $\Rightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散；

(3) $l \in (0, +\infty)$：$\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散。

提示：完全类比**定理1.7**的证明。

下面我们研究无穷积分的”子列”问题。考虑一般的可积函数（不需要非负条件），根据无穷积分的定义立即可以得到下面的命题成立。

命题 3.1

$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Longleftrightarrow \forall\{A_n\}$ 满足：单调递增，$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = +\infty$，都有：

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^{A_n} f(x)\mathrm{d}x = S \quad (S \in \mathbb{R}, \text{与}\{A_n\}\text{选取无关}) \tag{3.1}$$

无论哪个方向，最终都有：

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = S$$

提示：定义 3.1 结合极限与子列极限的关系。

注 如果只是存在某个 $\{A_n\}$ 使得式 (3.1) 成立，则无穷积分不一定收敛，反例：$\int_0^{+\infty}\cos x\mathrm{d}x$。一方面有：

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\cos x\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\sin A$$

上式右边极限不存在，故 $\int_0^{+\infty}\cos x\mathrm{d}x$ 发散。另一方面，令 $A_n=n\pi\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)$，则：

$$\int_0^{A_n}\cos x\mathrm{d}x=0\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{A_n}\cos x\mathrm{d}x=0.$

笔记 在命题 3.1 中若已知无穷积分收敛，则可以将无穷积分转化成数项级数。不妨设 $\{A_n\}$ 严格递增且 $A_1=a$，则：

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x&=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x\\&=\lim_{N\to+\infty}\int_{A_1}^{A_N}f(x)\mathrm{d}x\\&=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

将无穷积分转化为级数的过程启发我们给出“通过积分子列收敛得到无穷积分收敛”的充分条件。

定理 3.4

已知 $f(x)\geqslant 0\ (x\in[a,+\infty))$，若 $\exists\{A_n\}$ 满足：$A_1=a$，严格单增，且 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=+\infty$，使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且有：

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x)\mathrm{d}x$$

证明 $\forall A>a$，$\exists N\in\mathbb{N}^*$，使得 $A_N<A<A_{N+1}$，由 $f(x)\geqslant 0\ (x\in[a,+\infty))$ 可得：

$$\sum_{n=1}^{N-1}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^A f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=1}^{N}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x)\mathrm{d}x$$

故由夹逼定理知结论成立。 □

例题 3.1 试证以下无穷积分收敛：

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

解 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^6\sin^2 x}$，则 $f(x)\geqslant 0\ (x\in[0,+\infty))$，因此由定理 1.4，只需找到合适的 $\{A_n\}$ 即可。

为方便放缩计算，我们考虑的 $\{A_n\}$ 相邻两项之间相差应为 $\sin^2 x$ 的一个周期，故尝试 $A_n=n\pi\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)$，记 $a_n=\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)$，则：

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{3.2}$$

对 a_n 进行放缩，得：

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{(n+1)\pi}{1+(n\pi)^6\sin^2 x}\mathrm{d}x \\
&= 2(n+1)\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(n\pi)^6\sin^2 x}\mathrm{d}x \\
&\leqslant 2(n+1)\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x+(n\pi)^6\sin^2 x}\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{t=\tan x} 2(n+1)\pi\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(n\pi)^6t^2}\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{u=(n\pi)^3 t} \frac{2(n+1)\pi}{(n\pi)^3}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u \\
&= \frac{n+1}{n^3\pi} \qquad (\forall n\in\mathbb{N}^*)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

由式 (3.3) 结合正项级数的比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，故由式 (3.2)，无穷积分收敛。 □

笔记 (1) 命题 3.1 和定理 3.4 给证明无穷积分收敛/发散提供了了有力工具：

(i) 若要证非负函数的无穷积分收敛，则只需要找到合适的 $\{A_n\}$，对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 利用正项级数的判别法证明收敛；

(ii) 若要证无穷积分发散，则只需要找到合适的 $\{A_n\}$，使得式 (3.1) 的极限不存在。

(2) 仍考虑例题 3.1，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在 (实际上有：$\varlimsup\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$)，这说明：

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ 收敛} \not\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

但是在数项级数中，级数收敛可以推出通项趋于 0。这是无穷积分和数项级数的一个很大的不同！

3.2 无穷积分的其他判别法

由于无穷积分收敛的定义是变上限积分函数在 $+\infty$ 极限存在，因此运用 $+\infty$ 的 Cauchy 收敛可得下面的定理。

定理 3.5 (无穷积分的 Cauchy 收敛)

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\iff \forall \varepsilon > 0$，$\exists A > a$，使得:

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \quad (\forall b_1, b_2 > A)$$

提示：令 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，对 $F(x)$ 在 $+\infty$ 用函数的 Cauchy 收敛。

推论 3.1

若 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

提示：运用定理 3.5 和积分的绝对值不等式。

由推论 3.1，我们可以类比数项级数定义无穷积分的绝对收敛性和条件收敛性。

定义 3.3 (无穷积分的绝对/条件收敛)

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，若 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛。

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 条件收敛，若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，但 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 发散。

注 由推论 3.1，无穷积分的绝对收敛蕴含无穷积分本身收敛。

笔记 注意无穷积分和有限闭区间上积分的以下区别：

(1) 在 $(a, +\infty)$ 积分，绝对收敛可以推出本身收敛，反之不然；

(2) 在 $[a, b]$ 积分，$f(x)$ Riemann 可积可以推出 $|f(x)|$ Riemann 可积，反之不然。

下面我们类比数项级数的 Dirichlet，Abel 判别法，尝试给出无穷积分的对应判别法。由数项级数的知识可知，这两个判别法的关键在于 Abel 引理，因此我们需要给出无穷积分的 Abel 引理。为此我们需要做一些准备。

定理 3.6 (第二积分中值定理)

已知 $f(x)$ 在 $[a, b]$Riemann 可积，$g(x) \geqslant 0\ (x \in [a, b])$：

(1) 若 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 单调递减，则 $\exists \xi \in [a, b]$，使得：$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x$；

(2) 若 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 单调递增，则 $\exists\eta\in[a,b]$，使得：$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(b)\int_\eta^b f(x)\mathrm{d}x.$ ♡

证明 (1) 由 $g(x)$ 单调知 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 也 Riemann 可积，因此 $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积。任意给定分割 $\pi: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，有：

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x&=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x_{i-1})\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(g(x)-g(x_{i-1}))\mathrm{d}x\\&=I_1+I_2\end{aligned}\tag{3.4}$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界，记 $|f(x)|\leqslant K\ (\forall x\in[a,b])$，$\omega_i$ 为 $g(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 的振幅，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\ (1\leqslant i\leqslant n)$，故：

$$|I_2|\leqslant K\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i\tag{3.5}$$

由 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 也 Riemann 可积得：

$$\lim_{\|\pi\|\to0}\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i=0\tag{3.6}$$

故结合式 (3.5)(3.6) 得：

$$\lim_{\|\pi\|\to0}I_2=0\tag{3.7}$$

记 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\ (x\in[a,b])$ 利用 Abel 求和公式可得：

$$\begin{aligned}I_1&=\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})(F(x_i)-F(x_{i-1}))\\&=\sum_{i=1}^n F(x_i)(g(x_{i-1})-g(x_i))+F(b)g(b)\end{aligned}\tag{3.8}$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，记 $m=\min\limits_{x\in[a,b]}\{F(x)\}$，$M=\max\limits_{x\in[a,b]}\{F(x)\}$，则利用 $g(x)$ 单减非负和式 (3.8) 可得：

$$mg(a)\leqslant I_1\leqslant Mg(a)\tag{3.9}$$

故结合式 (3.4)(3.7)，对式 (3.9) 令 $\|\pi\|\to0$ 得：

$$mg(a)\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant Mg(a)\tag{3.10}$$

(i) 若 $g(a)=0$，由于 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 单减非负，因此 $g(x)=0\ (\forall x\in[a,b])$，从而第二中值定理自然成立。
(ii) 若 $g(a)>0$，则式 (3.10) 可变为：

$$m\leqslant\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{g(a)}\leqslant M$$

因此对连续函数 $F(x)$ 由介值定理，$\exists\xi\in[a,b]$，使得：

$$\int_a^{\xi}f(x)g(x)\mathrm{d}x=F(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{g(a)}\tag{3.11}$$

对式 (3.11) 做简单变形即证。

(2) 令 $x=a+b-t$，则：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-t)g(a+b-t)\mathrm{d}t\tag{3.12}$$

其中 $f(a+b-t)$ 关于 $t\in[a,b]$ 依旧 Riemann 可积，$g(a+b-t)$ 关于 $t\in[a,b]$ 单减非负，因此由 (1) 可得：

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(a+b-t)g(a+b-t)\mathrm{d}t\\=\ &g(b)\int_a^{\xi}f(a+b-t)\mathrm{d}t\xlongequal{x=a+b-t}g(b)\int_{a+b-\xi}^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{3.13}$$

故令 $\eta=a+b-\xi\in[a,b]$，结合式 (3.12)(3.13) 即证。 □

定理 3.7 (推广的第二积分中值定理)

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ Riemann 可积，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 单调，则 $\exists\xi\in[a,b]$，使得：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x$$

♡

证明 不妨设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 单调递减，令 $\varphi(x)=g(x)-g(b)$，则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 单减非负，因此由定理 3.6(1)：$\exists\xi\in[a,b]$，使得：

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(a)\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x\tag{3.14}$$

将 $g(x)=\varphi(x)+g(b)$ 返代式 (3.14) 可得结论成立。 □

由定理 3.7 容易给出无穷积分 Abel 引理的证明。

引理 3.1 (无穷积分的 Abel 引理)

已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ Riemann 可积，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 单调。若 $\exists M$，使得对 $\forall A>a$ 都有：

$$\left|\int_a^A f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M$$

则：

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M\Big(|g(a)| + 2|g(b)|\Big)$$

♡

提示：运用定理 3.7，其中：

$$\left|\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant 2M$$

有了 Abel 引理，便容易得到无穷积分的 Dirichlet,Abel 判别法。

定理 3.8 (无穷积分的 Dirichlet 判别法)

若 $f(x), g(x)$ 满足：

(i) $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 单调，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$；

(ii) $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 有界，即 $\exists M$，使得 $\left|\int_a^A f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M\ (\forall A > a)$；

则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

♡

定理 3.9 (无穷积分的 Abel 判别法)

若 $f(x), g(x)$ 满足：

(i) $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 单调有界； (ii) $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

♡

提示：定理 3.8,3.9 的证明可完全仿照**定理1.18,1.19**.

例题 3.2 研究下列无穷积分的绝对/条件收敛性：

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

解 (i) 由于 $\frac{1}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 递减趋于 0，且：

$$\left|\int_1^A \sin x\mathrm{d}x\right| = |\cos 1 - \cos A| \leqslant 2 \quad (\forall A > 1)$$

故由 Dirichlet 判别法得 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛。

(ii) 由于：

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geqslant \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x} \geqslant 0 \quad (x > 1) \tag{3.15}$$

对式 (3.15) 两边在 $[1, +\infty)$ 积分，由于 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}\mathrm{d}x$ 发散，与 (i) 同理得 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x$ 收敛，因此由非负函数无穷积分的比较判别法知 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x$ 发散。故原积分条件收敛。 □

3.3 瑕积分的收敛判别法

本节内容没有特别提及的积分均是瑕积分，且均假定被积函数在 $[a, b]$ 上只有 $x = a$ 一个瑕点。

瑕积分与无穷积分一样，也有对应的比较判别法和 Cauchy 收敛。

定理 3.10 (非负函数瑕积分的比较判别法)

若对充分靠近 a 的 $x \in (a, b]$ 有 $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ 则：

(1) $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散 $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

♡

定理 3.11 (定理 3.10 的极限形式)

已知 $f(x), g(x) \geqslant 0\ (x \in (a, b])$，设 $l = \displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$，则：

(1) $l = 0$：$\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(2) $l = +\infty$：$\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散 $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散；

(3) $l \in (0, +\infty)$：$\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散。

♡

定理 3.12 (瑕积分的 Cauchy 收敛)

$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\iff \forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得:

$$\left|\int_{a+\eta_1}^{a+\eta_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \quad (\forall \eta_1, \eta_2 \in (0, \delta))$$

♡

推论 3.2

若瑕积分 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

由推论 3.2 可以类似定义瑕积分的绝对收敛和条件收敛，同样有绝对收敛蕴含本身收敛，在此不再赘述。

笔记 同样是在有限闭区间 $[a,b]$ 上积分，注意 Riemann 积分和瑕积分的以下区别：
(1) 对 Riemann 积分，$f(x)$ 在 $[a,b]$ Riemann 可积可以推出 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ Riemann 可积，反之不然；
(2) 对瑕积分，绝对收敛可以推出本身收敛，反之不然。

瑕积分也有对应的 Dirichlet,Abel 判别法，但是更多时候，我们更倾向于把瑕积分转化为无穷积分，用无穷积分的收敛判别法来考虑问题。转化方法如下：

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x\\ &\xlongequal{y=\frac{1}{x-a}} \int_{+\infty}^{\frac{1}{b-a}} f(a+\frac{1}{y})\cdot(-\frac{1}{y^2})\mathrm{d}y\\ &= \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty}\frac{1}{y^2}f(a+\frac{1}{y})\mathrm{d}y\end{aligned}$$

例题 3.3(Gamma 函数) 求 s 的范围，使得下列反常积分收敛：

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \quad (s\in\mathbb{R}) \tag{3.16}$$

解 $x=0$ 是该反常积分可能的一个瑕点，因此：

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = I_1+I_2$$

对 I_1：
(i) 若 $s\geqslant1$，则 $\lim\limits_{x\to0^+} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}=0$，故此时 0 不是瑕点，$I_1$ 为 Riemann 积分，收敛。
(ii) 若 $s<1$，则 $\lim\limits_{x\to0^+} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}=+\infty$，故此时 0 是瑕点，$I_1$ 为瑕积分。进一步有：

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}}{x^{s-1}}=1 \quad (s<1)$$

故由定理 3.11，非负函数积分 $\int_0^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1\frac{1}{x^{1-s}}\mathrm{d}x$ 同敛散。因此 $\int_0^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 收敛 $\iff 1-s<1 \iff s>0$. 综上 $s>0$ 时 I_1 收敛。

对 I_2：由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}}{x^{-2}}=0\quad(s\in\mathbb{R})$$

故由非负函数无穷积分比较判别法的极限形式，$\forall s\in\mathbb{R}$，I_2 收敛。

综上，当 $s>0$ 时原积分收敛。 □

例题 3.4(Beta 函数) 求 p,q 的范围，使得下列反常积分收敛：

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x\quad(p,q\in\mathbb{R})\tag{3.17}$$

解 $x=0,1$ 是该反常积分可能的两个瑕点，因此给定 $0<a<1$ 有：

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x=\int_0^a x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x+\int_a^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x=I_1+I_2$$

(i) 若 $p,q\geqslant 1$，则 $0,1$ 均不是瑕点，积分收敛；

(ii) 若 $p<1$，则 0 是瑕点，对 I_1：

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{x^{p-1}}=1$$

故由非负函数瑕积分的比较判别法得 I_1 收敛 $\iff \int_0^a x^{p-1}\mathrm{d}x$ 收敛 $\iff p>0.$

(iii) 若 $q<1$，则 1 是瑕点，对 I_2：

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1-x)^{q-1}}=1$$

故由非负函数瑕积分的比较判别法得 I_2 收敛 $\iff \int_a^1 (1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$ 收敛 $\iff q>0.$

综上，当 $p,q>0$ 时原积分收敛。 □

笔记 式 (3.16)(3.17) 均可以看作关于参数的函数，由此定义了两个函数：

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\ (s>0)\qquad \mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x\ (p,q>0)$$

$\Gamma(s)$ 称为 Gamma 函数，$\mathrm{B}(p,q)$ 称为 Beta 函数，这两个函数将是第五章的重要数学对象，在往后的复分析课程中也会出现。

例题 3.5 研究下列反常积分的敛散性：

$$\int_0^1 |\ln x|^p\mathrm{d}x\quad(p\in\mathbb{R})$$

解 $x=0,1$ 是该反常积分可能的两个瑕点，因此给定 $0<a<1$ 有：

$$\int_0^1 |\ln x|^p\mathrm{d}x=\int_0^a |\ln x|^p\mathrm{d}x+\int_a^1 |\ln x|^p\mathrm{d}x=I_1+I_2$$

(i) 若 $p=0$，显然积分收敛；

(ii) 若 $p>0$，则 0 是瑕点，对 I_1：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|\ln x|^p}{x^{-\frac{1}{2}}}\xlongequal{t=-\ln x}\lim_{t\to+\infty}\frac{t^p}{\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}}=0$$

故由非负函数瑕积分的比较判别法得 $\displaystyle\int_0^a x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$ 收敛 $\Rightarrow I_1$ 收敛；

(iii) 若 $p<0$，则 1 是瑕点，对 I_2：

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|\ln x|^p}{(1-x)^p}=1$$

故由非负函数瑕积分的比较判别法得 I_2 收敛 $\iff \displaystyle\int_a^1(1-x)^p\mathrm{d}x$ 收敛 $\iff p>-1.$

综上，当 $p>-1$ 时原积分收敛。 □

例题 3.6 研究下列反常积分的绝对/条件收敛性：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\mu}\mathrm{d}x\quad(\mu\in\mathbb{R})$$

解 $x=0$ 是该反常积分可能的瑕点，因此有：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\mu}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sin x}{x^\mu}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\mu}\mathrm{d}x=I_1+I_2$$

(i) 若 $\mu>0$，对 I_1 有：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin x}{x^\mu}}{x^{1-\mu}}=1$$

因此 $\mu>1$ 时 0 为瑕点，$\mu\leqslant 1$ 时 0 不是瑕点，无论哪种情况，都有 I_1 收敛 $\iff \displaystyle\int_0^1 x^{1-\mu}\mathrm{d}x$ 收敛 $\iff \mu<2$. 更进一步，I_1 是非负函数的瑕积分，因此 $\mu<2$ 时 I_1 绝对收敛，$\mu\geqslant 2$ 时 I_1 发散。

仍旧是 $\mu>0$，由于 $\mu\geqslant 2$ 时 I_1 发散，因此下面只考虑 $0<\mu<2$ 的情形。对 I_2，由于 $\dfrac{1}{x^\mu}$ 关于 x 递减趋于 0，且：

$$\left|\int_1^A\sin x\mathrm{d}x\right|=|\cos 1-\cos A|\leqslant 2\quad(\forall A>1)$$

因此由无穷积分的 Dirichlet 判别法知 I_2 收敛。

当 $0<\mu\leqslant 1$ 时：

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^\mu}\right|\mathrm{d}x\geqslant\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x^\mu}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^\mu}\mathrm{d}x-\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^\mu}\mathrm{d}x$$

由无穷积分的 Dirichlet 判别法可知 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^\mu}\mathrm{d}x$ 收敛，$0<\mu\leqslant 1$ 时 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^\mu}\mathrm{d}x$ 发散，从

而由非负函数无穷积分的比较判别法知 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^\mu}\right|\mathrm{d}x$ 发散。

当 $1<\mu<2$ 时：

$$\left|\frac{\sin x}{x^\mu}\right|\leqslant\frac{1}{x^\mu}\quad(x>1)$$

因此由非负函数无穷积分的比较判别法知 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^\mu}\right|\mathrm{d}x$ 收敛。

(ii) 若 $\mu\leqslant 0$，则 0 不是瑕点，该反常积分是一个无穷积分。由于：

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin x}{x^\mu}\mathrm{d}x\xlongequal{x=t+2k\pi}\int_0^\pi\frac{\sin t}{(t+2k\pi)^\mu}\mathrm{d}t\geqslant\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x=2\quad(\forall k\in\mathbb{N}^*)\tag{3.18}$$

故此时 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\mu}\mathrm{d}x$ 一定不满足无穷积分的 Cauchy 收敛，因此必发散。

综上，$0<\mu\leqslant 1$ 时，原积分条件收敛；$1<\mu<2$ 时，原积分绝对收敛；$\mu\leqslant 0$ 或 $\mu\geqslant 2$ 时，原积分发散。 □

最后我们提一提反常积分主值的概念。

定义 3.4 (两边均无界的无穷积分)

无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，若 $\forall a\in\mathbb{R}$，$\int_{-\infty}^{a}f(x)\mathrm{d}x,\ \int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 均收敛。 ♣

定义 3.5 (无穷积分 Cauchy 主值)

若下列极限存在：

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)\mathrm{d}x$$

则称这个极限为无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 的 Cauchy 主值，记为：

$$\mathbf{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)\mathrm{d}x$$

♣

注 收敛的无穷积分，其 Cauchy 主值必存在，反之不然。如：$f(x)=x\ (x\in\mathbb{R})$，其在 $x\in\mathbb{R}$ 上积分发散，但是其 Cauchy 主值为 0。

对瑕积分也有类似的 Cauchy 主值定义。

定义 3.6 (瑕点在内部的瑕积分)

若 $c\in(a,b)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的唯一瑕点，则瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，若 $\forall\,0<\varepsilon<$

$\min\{c-a, b-c\}$，$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x, \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$ 均收敛。♣

定义 3.7 (瑕积分 Cauchy 主值)

若 $c \in (a,b)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的唯一瑕点，且下列极限存在：

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x \right)$$

则称这个极限为瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的 Cauchy 主值，记为：

$$\mathbf{P.V.} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x \right)$$ ♣

注 收敛的瑕积分，其 Cauchy 主值必存在，反之不然。如：$f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \in [-1,1] \backslash \{0\})$，其在 $[-1,1]$ 上积分发散，但是其 Cauchy 主值为 0。

例题 3.7 已知 $f(x)$ 在 $x \in \mathbb{R}$ 上连续，且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$，$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$，试证：$\forall \eta > 0$ 都有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x+\eta) - f(x))\mathrm{d}x = \eta(a-b)$$

解 即证：

$$\lim_{\substack{A \to +\infty \\ B \to +\infty}} \int_{-B}^{A} (f(x+\eta) - f(x))\mathrm{d}x = \eta(a-b) \tag{3.19}$$

由于：

$$\begin{aligned} \int_{-B}^{A} (f(x+\eta) - f(x))\mathrm{d}x &= \int_{-B+\eta}^{A+\eta} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-B}^{A} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{A}^{A+\eta} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-B}^{-B+\eta} f(x)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{3.20}$$

以及：

$$\eta(a-b) = \int_{A}^{A+\eta} a\mathrm{d}x - \int_{-B}^{-B+\eta} b\mathrm{d}x \tag{3.21}$$

故结合式 (3.20)(3.21)，作差，并运用第一积分中值定理得：

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-B}^{A} (f(x+\eta) - f(x))\mathrm{d}x - \eta(a-b) \right| \\ =& \int_{A}^{A+\eta} (f(x) - a)\mathrm{d}x - \int_{-B}^{-B+\eta} (f(x) - b)\mathrm{d}x \\ \leqslant& \left| \int_{A}^{A+\eta} (f(x) - a)\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{-B}^{-B+\eta} (f(x) - b)\mathrm{d}x \right| \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$=\eta\Big(|f(\xi_1)-a|+|f(\xi_2)-b|\Big)$$

其中 $\xi_1\in[A,A+\eta],\xi_2\in[-B,-B+\eta]$.

任意给定的 $\eta>0$，对式 (3.22) 令 $A,B\to+\infty$ 可得式 (3.19) 成立，故结论成立。 $\square$

第 4 章 含参变量积分

4.1 含参变量常义积分

定义 4.1 (含参变量常义/反常积分)

设 $f(x,u)$ 在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，那么对固定的 $u\in[\alpha,\beta]$，$f(x,u)$ 关于 x 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，此时记：

$$\varphi(u)\triangleq\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x\quad(u\in[\alpha,\beta])\tag{4.1}$$

则称式 (4.1) 为含参变量 u 的常义积分。

如果对固定的 $u\in[\alpha,\beta]$，$f(x,u)$ 关于 x 在 $[a,b]$ 上无界，或者 $[a,b]$ 是一个无界区间，则称式 (4.1) 是含参变量 u 的反常积分。♣

注 **例题3.3, 3.4**定义的 Gamma 函数和 Beta 函数都是含参变量积分。

笔记 数项级数，函数项级数，无穷积分，含参变量无穷积分的关系可以通过下图表示：

$$\begin{tikzcd}
\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n \arrow[rr, "连续化"] \arrow[d, "引入变量\ x"'] & & \int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x \arrow[d, "引入参量\ u"] \\
\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x) \arrow[rr, "连续化"] & & \int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x
\end{tikzcd}$$

其中值得注意的是，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 中的 n,x 地位分别与 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 中的 x,u 相同。

下面介绍含参变量常义积分的性质。

定理 4.1 (含参常义积分的连续性)

若 $f(x,u)$ 在 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，则由式 (4.1) 定义的 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续。♡

证明 只需证 $\forall u_0\in[\alpha,\beta]$，$\varphi(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续。
由于 $f(x,u)$ 在 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，$[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上有界闭集，因此 $f(x,u)$ 在 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上一致连续，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得：

$$|f(x_1,u_1)-f(x_2,u_2)|<\frac{\varepsilon}{b-a}\quad(\|(x_1,u_1)-(x_2,u_2)\|<\delta)\tag{4.2}$$

因此只要 $|u-u_0|<\delta$，则有 $\|(x,u)-(x,u_0)\|<\delta\ (\forall x\in[a,b])$，由式 (4.2) 得：

$$|f(x,u)-f(x,u_0)|<\frac{\varepsilon}{b-a}\quad(\forall x\in[a,b])$$

故：

$$|\varphi(u)-\varphi(u_0)|\leqslant\int_a^b|f(x,u)-f(x,u_0)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)=\varepsilon \tag{4.3}$$

由式 (4.3) 知 $\lim\limits_{u\to u_0}\varphi(u)=\varphi(u_0)$，即 $\varphi(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续。由 $u_0\in[\alpha,\beta]$ 的任意性，$\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续。 □

定理 4.2 (含参常义积分的可积性与积分)

若 $f(x,u)$ 在 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，则由式 (4.1) 定义的 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上 Riemann 可积，且：

$$\int_\alpha^\beta\varphi(u)\mathrm{d}u=\int_\alpha^\beta\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x\mathrm{d}u=\int_a^b\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}x$$

提示：这是数分 A2 的一个定理，详见教材下册第十章定理 10.3.3。

定理 4.3 (含参积分的可微性与导数)

若 $f(x,u)$，$\dfrac{\partial f}{\partial u}$ 均在 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，则由式 (4.1) 定义的 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，且：

$$\varphi'(u)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\mathrm{d}x$$

证明 (解法 1) 利用定理 4.1 和导数的定义。

对 $\forall u_0\in[\alpha,\beta]$，由于 $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ 在 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上存在，故利用微分中值定理得：

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(u_0+h)-\varphi(u_0)}{h}&=\frac{1}{h}\int_a^b(f(x,u_0+h)-f(x,u_0))\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial u}(x,u_0+\theta h)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{4.4}$$

其中 $\theta\in[0,1]$.

由于 $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ 在 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，因此由定理 4.1，对式 (4.4) 令 $h\to0$，得：

$$\varphi'(u_0)=\lim_{h\to0}\frac{\varphi(u_0+h)-\varphi(u_0)}{h}=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial u}(x,u_0)\mathrm{d}x$$

最后由 $u_0\in[\alpha,\beta]$ 的任意性，$\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微。

(解法 2) 利用定理 4.1, 4.2。

令 $g(u)=\displaystyle\int_a^b\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\mathrm{d}x\ (u\in[\alpha,\beta])$. 由于 $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ 在 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，故由定理 4.1, 4.2，

$g(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，Riemann 可积，且对 $\forall u\in[\alpha,\beta]$ 有：

$$\begin{aligned}\int_\alpha^u g(v)\mathrm{d}v &= \int_a^b\int_\alpha^u \frac{\partial f}{\partial u}(x,v)\mathrm{d}v\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b (f(x,u)-f(x,\alpha))\mathrm{d}x\\ &= \varphi(u)-\varphi(\alpha)\end{aligned}\tag{4.5}$$

由 $g(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，故由式 (4.5) 可知 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，且对式 (4.5) 两边对 u 求导：

$$\varphi'(u)=g(u)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\mathrm{d}x\quad(\forall u\in[\alpha,\beta])$$

□

笔记 从定理 4.1, 4,3 的证明不难看出 $\varphi(u)$ 的连续性和可微性都是点态的，即只要在 u_0 的邻域满足定理条件，那么 $\varphi(u)$ 就会在 $u=u_0$ 处连续/可微，因此定理 4.1, 4,3 的 I 可以改成 $\mathbb{R}^2$ 上的一般开集。

例题 4.1 试证：

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

解 记：

$$f(x,u)=\frac{\ln(1+ux)}{1+x^2}\qquad\varphi(u)=\int_0^1\frac{\ln(1+ux)}{1+x^2}\mathrm{d}x\quad(u\in[0,1])$$

故只需证 $\varphi(1)=\frac{\pi}{8}\ln 2$. 由于：

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)=\frac{x}{(1+ux)(1+x^2)}\quad((x,u)\in[0,1]\times[0,1])$$

故 $f(x,u),\dfrac{\partial f}{\partial u}\in \mathrm{C}([0,1]\times[0,1])$，因此由定理 4.3 得：

$$\begin{aligned}\varphi'(u)&=\int_0^1\frac{x}{(1+ux)(1+x^2)}\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{u^2+1}\int_0^1(\frac{x}{x^2+1}+\frac{u}{x^2+1}-\frac{u}{1+ux})\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{u^2+1}\left(\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi u}{4}-\ln(1+u)\right)\end{aligned}\tag{4.6}$$

对式 4.6 两边在 $[0,1]$ 上积分得：

$$\varphi(1)=\int_0^1\frac{1}{u^2+1}\left(\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi u}{4}-\ln(1+u)\right)\mathrm{d}u+\varphi(0)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{8}\ln 2 + \frac{\pi}{8}\ln 2 - \varphi(1) + 0 \\
&= \frac{\pi}{4}\ln 2 - \varphi(1)
\end{aligned}
$$

故 $\varphi(1) = \frac{\pi}{8}\ln 2.$ □

接下来我们考虑积分区域也跟参数 u 有关的含参变量常义积分。

定理 4.4 (更广的含参常义积分的连续性) 若 $f(x,u)$ 在 $I = [a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，$p(u),q(u)$ 均在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，且 $p(u),q(u)\in[a,b]$ $(\forall u\in[\alpha,\beta])$。记：

$$
\psi(u) = \int_{p(u)}^{q(u)} f(x,u)\mathrm{d}x \tag{4.7}
$$

则 $\psi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续。♡

证明 只需证 $\forall u_0\in[\alpha,\beta]$，$\psi(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续。

由 $f(x,u),p(u),q(u)$ 的连续性，$\exists M_1,M_2$ 使得 $|f(x,u)|<M_1$ $((x,u)\in I)$，$|q(u)-p(u)|<M_2$ $(u\in[\alpha,\beta])$。更进一步，由 $f(x,u)$ 的一致连续性，$p(u),q(u)$ 在 u_0 处的连续性，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$ 使得：

$$
|f(x,u)-f(x,u_0)| < \frac{\varepsilon}{3M_2} \quad (\|(x,u)-(x,u_0)\|<\delta) \tag{4.8}
$$

$$
|p(u)-p(u_0)| < \frac{\varepsilon}{3M_1} \quad (|u-u_0|<\delta) \tag{4.9}
$$

$$
|q(u)-q(u_0)| < \frac{\varepsilon}{3M_1} \quad (|u-u_0|<\delta) \tag{4.10}
$$

故结合式 (4.8)~(4.10) 得：

$$
\begin{aligned}
&|\psi(u)-\psi(u_0)| \\
&= \left|\int_{p(u)}^{q(u)} f(x,u)\mathrm{d}x - \int_{p(u_0)}^{q(u_0)} f(x,u_0)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \left|\int_{p(u)}^{p(u_0)} f(x,u)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{q(u)}^{q(u_0)} f(x,u)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{p(u_0)}^{q(u_0)} (f(x,u)-f(x,u_0))\mathrm{d}x\right| \\
&< M_1\cdot\frac{\varepsilon}{3M_1} + M_1\cdot\frac{\varepsilon}{3M_1} + M_2\cdot\frac{\varepsilon}{3M_2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

由式 (4.11) 知 $\lim\limits_{u\to u_0}\psi(u)=\psi(u_0)$，即 $\psi(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续。由 $u_0\in[\alpha,\beta]$ 的任意性，$\psi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续。□

定理 4.5 (更广的含参常义积分可微性与导数)

若 $f(x,u)$，$\dfrac{\partial f}{\partial u}$ 均在 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，$p(u),q(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，且则由式 (4.1) 定义的 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，且 $p(u),q(u)\in[a,b]\,(\forall u\in[\alpha,\beta])$，则由式 (4.7) 定义的 $\psi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，且：

$$\psi'(u)=\int_{p(u)}^{q(u)}\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\mathrm{d}x+f(q(u),u)q'(u)-f(p(u),u)p'(u)$$

♡

证明 令 $F(u,\zeta,\eta)=\displaystyle\int_{\zeta}^{\eta}f(x,u)\mathrm{d}x$，$\eta=q(u)$，$\zeta=p(u)$，则 $\psi(u)$ 可视为以上三者的复合. 由 $f(x,u),\dfrac{\partial f}{\partial u}$ 连续性结合定理 4.3 可推出 $F(u,\zeta,\eta)$ 关于 u 可微，又由 $p(u),q(u)$ 的可微性，根据数分 A2 的知识得 $\psi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 可微，且：

$$\begin{aligned}\psi'(u)&=\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial u}\\&=\int_{\zeta}^{\eta}\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\mathrm{d}x+f(\eta,u)q'(u)-f(\zeta,u)p'(u)\end{aligned}\tag{4.12}$$

最后把 $\eta=q(u)$，$\zeta=p(u)$ 代入式 (4.12) 即可。 □

笔记 从定理 4.4, 4.5 的证明不难看出对更广的含参常义积分，其连续性和可微性也是点态的，条件中的 I 可以改成一般的开集。

例题 4.2 已知 $a<b$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，求 $\varphi''(u)$，其中 $\phi(u)$ 如下所示：

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x)|x-u|\mathrm{d}x\quad(u\in\mathbb{R})$$

解 由于 $|x-u|$ 在定义域内并不总是可导的，因此为了能够使用定理 4.5，我们需要对 u 的取值进行分类。

(i) 若 $a<u<b$，则：

$$\varphi(u)=\int_a^u f(x)(u-x)\mathrm{d}x+\int_u^b f(x)(x-u)\mathrm{d}x$$

故由定理 4.5：

$$\begin{aligned}\varphi'(u)&=\int_a^u f(x)\mathrm{d}x+f(u)(u-u)\cdot 1+\int_u^b(-f(x))\mathrm{d}x-f(u)(u-u)\cdot 1\\&=\int_a^u f(x)\mathrm{d}x-\int_u^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

故：

$$\varphi''(u)=2f(u)\quad(u\in(a,b))\tag{4.13}$$

(ii) 若 $u\geqslant b$，则：

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x)(u-x)\mathrm{d}x$$

故由定理 4.5:

$$\varphi'(u)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \qquad \varphi''(u)=0 \quad (u\geqslant b) \tag{4.14}$$

(iii) 若 $u\leqslant a$，则:

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x)(x-u)\mathrm{d}x$$

故由定理 4.5:

$$\varphi'(u)=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \qquad \varphi''(u)=0 \quad (u\leqslant a) \tag{4.15}$$

综上:

$$\varphi''(u)=\begin{cases}2f(u) & u\in(a,b)\\ 0 & u\notin(a,b)\end{cases}$$

$\square$

4.2 含参变量反常积分的一致收敛

定义 4.2 (含参反常积分的一致收敛)

称 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\ (u\in I)$ 关于 u 在 I 上一致收敛，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists A_0=A_0(\varepsilon)>a$ 与 u 无关，使得 $A>A_0$ 时:

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon \quad (\forall u\in I)$$

♣

注 可以将含参变量反常积分的一致收敛与函数列的一致收敛作类比，此时，前者的 (x,u) 对应后者的 (n,x)。

跟函数列一致收敛类似，含参变量反常积分的一致收敛也有对应的上确界判别法，Cauchy 收敛以及 Weierstrass 判别法。

定理 4.6 (含参反常积分的上确界判别法)

记:

$$\eta(A)=\sup_{u\in I}\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|$$

则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 关于 u 在 I 上一致收敛 $\Longleftrightarrow \displaystyle\lim_{A\to+\infty}\eta(A)=0$

♡

提示：直接用定义 4.2。

定理 4.7 (含参反常积分的 Cauchy 收敛)

$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 关于 u 在 I 上一致收敛 $\iff$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists A_0=A_0(\varepsilon)>a$ 与 u 无关，使得 $\forall A_1,A_2>A_0$ 都有：

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon \quad (\forall u\in I) \tag{4.16}$$

提示：($\Rightarrow$) 显然；($\Leftarrow$) 对式 (4.16) 先固定 u，令 $A_2\to+\infty$，再结合 u 任意性和定义 4.2 即可。

定理 4.8 (含参反常积分的 Weierstrass 判别法)

已知 $f(x,u),F(x)$ 关于 x 在 $[a,+\infty)$ 上连续，若：

(i) $\int_a^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(ii) 当 x 充分大时，对 $\forall u\in I$ 都有 $|f(x,u)|\leqslant F(x)$

则 $\int_a^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x$ 关于 u 在 I 上一致收敛。

提示：利用含参反常积分的 Cauchy 收敛和无穷积分的 Cauchy 收敛，结合绝对值不等式。

笔记 定理 4.8，4.9 都是含参反常积分一致收敛的充要条件，但上确界判别法需要知道无穷积分的具体表达式，这往往是难以计算的，因此实用性不高；Cauchy 收敛则不需要知道，因此定理 4.9 在证明含参反常积分的不一致收敛时会更多地被使用。

数项级数 Dirichlet 和 Abel 判别法可以类推为函数列一致收敛的对应判别法，类似地，从无穷积分的 Dirichlet 和 Abel 判别法，也能类推得到含参变量反常积分的 Dirichlet 和 Abel 判别法。

定理 4.9 (含参反常积分的 Dirichlet 判别法)

若 $f(x,u),g(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times I$ 上满足：

(i) 对任意给定的 $u\in I$，$g(x,u)$ 关于 x 在 $[a,+\infty)$ 上单调，且 $x\to+\infty$ 时，$g(x,u)$ 关于 u 在 I 上一致趋于 0；

(ii) 当 $A>a$ 充分大时，$\int_a^A f(x,u)\mathrm{d}x$ 关于 $u\in I$ 一致有界，即当 A 充分大时，$\exists M$ 与 u,A 都无关，使得：

$$\left|\int_a^A f(x,u)\mathrm{d}x\right|\leqslant M \quad (\forall u\in I)$$

则 $\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x$ 关于 u 在 I 上一致收敛。

定理 4.10 (含参反常积分的 Abel 判别法)

若 $f(x,u), g(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times I$ 上满足：

(i) 对任意给定的 $u\in I$，$g(x,u)$ 关于 x 在 $[a,+\infty)$ 上单调，且关于 $u\in I$ 一致有界，即 $\exists M$ 与 u 无关，使得：

$$|g(x,u)|\leqslant M \quad (\forall x\in[a,+\infty), u\in I)$$

(ii) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 关于 u 在 I 上一致收敛；

则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x$ 关于 u 在 I 上一致收敛。

提示：参考**定理3.8，3.9**的证明。

例题 4.3 试证下列含参变量积分关于 β 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x+\beta}\mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{d}x$$

解 令 $f(x,\beta)=\sin 2x$，$g(x,\beta)=\dfrac{1}{(x+\beta)\mathrm{e}^{\beta x}}$ $((x,\beta)\in(0,+\infty)\times[0,+\infty))$.

一方面，对任意固定的 $\beta\in(0,+\infty)$，$g(x,\beta)$ 关于 x 单调递减趋于 0，且：

$$\left|\frac{1}{(x+\beta)\mathrm{e}^{\beta x}}\right|\leqslant\frac{1}{x} \quad (\forall x\in(0,+\infty),\beta\in[0,+\infty))$$

故 $g(x,\beta)$ 关于 $\beta\in[0,+\infty)$ 一致趋于 0；

另一方面：

$$\left|\int_0^A\sin 2x\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{2}|1-\cos 2A|\leqslant 1 \quad (\forall\beta\geqslant 0, A>0)$$

故由含参反常积分的 Dirichlet 判别法知原积分关于 β 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛。 □

例题 4.4 试证下列积分关于 u 在 $[\delta,+\infty)$ $(\forall\delta>0)$ 上一致收敛，但在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛：

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\cos ux}{a^2+x^2}\mathrm{d}x \quad (a>0\text{固定})$$

解 (i) 令 $f(x,u)=\cos ux$，$g(x,u)=\dfrac{x}{a^2+x^2}$ $(x\in(0,+\infty),u\in[\delta,+\infty))$.

一方面，当 x 充分大时，$g(x,u)$ 关于 x 单调递减趋于 0，又 $g(x,u)$ 的表达式与 u 无关，故 $g(x,u)$ 关于 u 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致趋于 0。

另一方面：

$$\left|\int_0^A f(x,u)\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{1}{u}\sin A\right|\leqslant\frac{1}{\delta} \quad (\forall u\in[\delta,+\infty), A>0)$$

故由含参反常积分的 Dirichlet 判别法，原积分关于 u 在 $[\delta,+\infty)$ $(\forall\delta>0)$ 上一致收敛。

(ii) 为了证明不一致收敛，我们尝试从含参反常积分的 Cauchy 收敛这里找矛盾。设：

$$\phi(A)=\sup_{u\in(0,+\infty)}\left|\int_A^{2A}\frac{x\cos ux}{a^2+x^2}\mathrm{d}x\right| \quad (A>0) \tag{4.17}$$

对每个 A，令 $u=\dfrac{\pi}{6A}\in(0,+\infty)$，则由于式 (4.17) 中 $ux\in[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}]$，故：

$$\begin{aligned}\phi(A)&\geqslant\left|\int_A^{2A}\frac{x}{a^2+x^2}\cos\frac{\pi}{6A}x\mathrm{d}x\right|\\&\geqslant\frac{1}{2}\int_A^{2A}\frac{x}{a^2+x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{a^2+4A^2}{a^2+A^2}\right)\quad(\forall A>0)\end{aligned} \tag{4.18}$$

对式 (4.18) 令 $A\to+\infty$，右边趋于 $\dfrac{\ln 2}{2}>0$；左边由含参反常积分的 Cauchy 收敛知，若原积分关于 u 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛，则左边应当趋于 0，故矛盾。故原积分关于 u 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛。 □

笔记 在证明含参反常积分的不一致收敛时，一个典型的思路是通过 Cauchy 收敛找矛盾，归结于 u 的选取和 $\phi(A)$ 的放缩 (如例题 4.4 所示)。

在学习函数列一致收敛时，我们知道函数列在 $[a,b]$ 上的一致收敛会使 Riemann 可积性得到保持，并且极限符号和积分符号可以交换次序 (详见**定理2.8**)。但把 $[a,b]$ 换成 $[a,+\infty)$，则结论可能不再成立，反例如下：

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & 0\leqslant x\leqslant n\\ 0 & x>n\end{cases}$$

由于 $f_n(x)\leqslant\dfrac{1}{n}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*,x\geqslant 0)$，故 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)=0$ $(\forall x\geqslant 0)$，但：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\frac{1}{n}\mathrm{d}x=1\neq 0$$

故此时极限符号和积分符号不能交换次序。

作为含参变量反常积分一致收敛的应用，我们给出 $[a,+\infty)$ 下极限符号的积分符号交换次序的条件。

定理 4.11

设 $\{f_n(x)\}$ $(x\in[a,+\infty))$ 逐点收敛于 $f(x)$，且满足：

(i) $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,+\infty)$ 上内闭一致收敛于 $f(x)$，即任意给定 $A>a$，$\{f_n(x)\}$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛于 $f(x)$；

(ii) $\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ 关于参数 $n \in \mathbb{N}^*$ 一致收敛；

则成立等式：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

证明 (i) 先证明：$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

由 $\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ 关于 n 的一致收敛性，结合 Cauchy 收敛得 $\forall\varepsilon > 0$，$\exists A_0 = A_0(\varepsilon) > a$ 与 n 无关，使得 $\forall A_1, A_2 > A_0$ 都有：

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f_n(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \tag{4.19}$$

由于 $\{f_n(x)\}$ 内闭一致收敛于 $f(x)$，故对式 (4.19) 令 $n \to \infty$，得：

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon \quad (\forall A_1, A_2 > A_0)$$

故由无穷积分的 Cauchy 收敛知 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。进一步 $\exists A_3 > a$，使得 $\forall A \geqslant A_3$ 都有：

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.20}$$

(ii) 由 $\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ 关于 n 的一致收敛性得 $\exists A_4 = A_4(\varepsilon) > a$ 与 n 无关, 使得 $\forall A \geqslant A_4$ 都有：

$$\left|\int_A^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \tag{4.21}$$

记 $A_5 = \max\{A_3, A_4\} > a$ 与 n 无关，由 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, A_5]$ 上一致收敛于 $f(x)$ 得 $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ 与 x 无关，使得 $\forall n > N$ 都有：

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(A_5 - a)} \tag{4.22}$$

故结合式 (4.20)~(4.22) 得：

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant&\left|\int_{A_5}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{A_5}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| + \int_a^{A_5} |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \\
<&\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + (A_5 - a)\cdot\frac{\varepsilon}{3(A_5 - a)} \\
=&\varepsilon \quad (\forall n > N)
\end{aligned}$$

因此结论成立，极限符号和积分符号可以交换次序。 □

作为定理 4.11 的应用，我们计算一个重要的含参变量积分。

例题 4.5 计算积分：

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x \quad (0<p<1)$$

解 首先由于 $0<p<1$，故 $x=0$ 是瑕点，从而：

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^{1} \frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x \xlongequal{\Delta} I_1+I_2 \tag{4.23}$$

(i) 对 I_1，寻找被积函数的原函数困难，需要另辟蹊径。先将 $\dfrac{1}{1+x}$ 展开成幂级数，由于收敛半径是 1，因此可以在积分号下展开，得：

$$I_1 = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+p-1}\mathrm{d}x \tag{4.24}$$

一方面展开后幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+p-1}$ 收敛半径仍是 1，由幂级数性质，其在 $[0,1]$ 上内闭一致收敛。

另一方面，记 $f_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k x^{k+p-1}$，则：

$$|f_n(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{k+p-1}\right| = \left|x^{p-1}\frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}\right| \leqslant 2x^{p-1} \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*) \tag{4.25}$$

由于 $0<p<1$，故式 (4.25) 右边在 $[0,1]$ 上的积分收敛，故由含参反常积分的 Weierstrass 判别法，$\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ 关于 $n\in\mathbb{N}^*$ 一致收敛。

故由定理 4.11(此定理介绍的是无穷积分形式，对瑕积分也有类似定理)，结合式 (4.24)，得：

$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (-1)^n x^{n+p-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+p} \tag{4.26}$$

(ii) 对 I_2，由于：

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x \xlongequal{t=\frac{1}{x}} \int_0^1 \frac{t^{-p}}{1+t}\mathrm{d}t$$

故同理可得：

$$I_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (-1)^n x^{n-p}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-p+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p-n} \tag{4.27}$$

故结合式 (4.23)(4.26)(4.27) 得：

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p^2-n^2} \quad (0<p<1) \tag{4.28}$$

注 式 (4.28) 右边利用 Fourier 级数的知识可得为 $\dfrac{\pi}{\sin(p\pi)}$。这个积分的结果在证明 Gamma 函数余元公式的时候会用到。

4.3 含参变量反常积分的性质

本节所有内容，若没有特别强调，都假定 $\varphi(u)=\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 存在。

跟含参变量常义积分类似，我们也考察含参变量反常积分的连续性，Riemann 可积性与积分，可微性与导数。在 4.1 节中，所有定理对 u 范围的限制是 $u\in[\alpha,\beta]$，同样，本节我们也先考虑 u 的范围为有限闭区间 $[\alpha,\beta]$ 的情形。

定理 4.12 (含参反常积分的连续性)

若 $\varphi(u)$，$f(x,u)$ 满足：

(i) $f(x,u)$ 在 $(x,u)\in[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续；

(ii) $\varphi(u)$ 关于 u 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛；

则 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续。

证明 只需证任意 $u_0\in[\alpha,\beta]$，$\varphi(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续。对给定的 u_0，由 $\varphi(u)$ 关于 u 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛得，$\forall\varepsilon>0$，$\exists A_0=A_0(\varepsilon)>a$ 与 u 无关，使得 $\forall A\geqslant A_0$ 都有：

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{3}\quad(\forall u\in[\alpha,\beta])\tag{4.29}$$

对这个 A_0，由 $f(x,u)$ 的一致连续性得，$\exists\,\delta>0$，使得 $|u-u_0|<\delta$ 时有：

$$|f(x,u)-f(x,u_0)|<\frac{\varepsilon}{3(A_0-a)}\quad(\forall x\in[a,+\infty))\tag{4.30}$$

故结合式 (4.29)(4.30) 得：

$$\begin{aligned}|\varphi(u)-\varphi(u_0)|&=\left|\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x-\int_a^{+\infty} f(x,u_0)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\left|\int_{A_0}^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{A_0}^{+\infty} f(x,u_0)\mathrm{d}x\right|+\int_a^{A_0}|f(x,u)-f(x,u_0)|\mathrm{d}x\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+(A_0-a)\cdot\frac{\varepsilon}{3(A_0-a)}\\&=\varepsilon\quad(\forall|u-u_0|<\delta)\end{aligned}$$

因此 $\varphi(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续。由 $u_0\in[\alpha,\beta]$ 的任意性得 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续。 □

跟函数项级数一样，含参反常积分一致收敛只是充分条件，要想定理 4.12 的逆命题成立，还需要 $f(x,u)$ 非负的条件。

定理 4.13 (Dini)

若 $\varphi(u)$，$f(x,u)$ 满足：

(i) $f(x,u)$ 在 $(x,u)\in[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续非负；

(ii) $\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续；

则 $\varphi(u)$ 关于 u 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛。

提示：$\varphi(u)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{a+n-1}^{a+n}f(x,u)\mathrm{d}x\xlongequal{\Delta}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(u)$，对级数运用函数项级数的 Dini 定理 (**定理 2.10**)。

注 回顾**定理2.10**的证明，当中对 $[\alpha,\beta]$ 运用了有限覆盖定理。事实上，若为无界区间或者开区间，定理 4.13 都不一定成立，反例如下：

(i) 开区间：$\varphi(u)=\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}x\ (u\in(0,1))$. 则 $\varphi(u)=1\ (\forall u\in(0,1))$，$\varphi(u)\in C((0,1))$。但：

$$\eta(A)=\sup_{u\in(0,1)}\left|\int_A^{+\infty}u\mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}x\right|=\sup_{u\in(0,1)}\mathrm{e}^{-uA}=1\quad(\forall A>0)$$

故 $\lim\limits_{A\to+\infty}\eta(A)\neq0$，由含参反常积分的上确界判别法，$\varphi(u)$ 关于 u 在 $(0,1)$ 上不一致收敛。

(ii) 无界区间：$\varphi(u)=\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{u(u-x)}\mathrm{d}x\ (u\in[1,+\infty))$. 则 $\varphi(u)=\mathrm{e}^{u^2}\ (\forall u\in[1,+\infty))$，$\varphi(u)\in C([1,+\infty))$。但：

$$\eta(A)=\sup_{u\in[1,+\infty)}\left|\int_A^{+\infty}u\mathrm{e}^{u(u-x)}\mathrm{d}x\right|=\sup_{u\in[1,+\infty)}\mathrm{e}^{u(u-A)}=+\infty\quad(\forall A>0)$$

故 $\lim\limits_{A\to+\infty}\eta(A)\neq0$，由含参反常积分的上确界判别法，$\varphi(u)$ 关于 u 在 $[1,+\infty)$ 上不一致收敛。

定理 4.14 (含参反常积分的可积性与积分)

若 $\varphi(u)$，$f(x,u)$ 满足：

(i) $f(x,u)$ 在 $(x,u)\in[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续；

(ii) $\varphi(u)$ 关于 u 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛；

则 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上 Riemann 可积，且有：

$$\int_\alpha^\beta\varphi(u)\mathrm{d}u=\int_a^{+\infty}\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}x$$

证明 即证：

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta\varphi(u)\mathrm{d}u\tag{4.31}$$

由定理 4.12 得 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，故 Riemann 可积。由于 $\varphi(u)$ 关于 u 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists A_0=A_0(\varepsilon)>a$ 与 u 无关，使得 $\forall A>A_0$ 都有：

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$$

又由 $f(x,u)$ 的连续性得常义的二重积分可以交换积分次序，故：

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^A\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}x-\int_\alpha^\beta\varphi(u)\mathrm{d}u\right|\\
=&\left|\int_\alpha^\beta\int_a^A f(x,u)\mathrm{d}x\mathrm{d}u-\int_\alpha^\beta\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\mathrm{d}u\right|\\
=&\left|\int_\alpha^\beta\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\mathrm{d}u\right|\\
\leqslant&\int_\alpha^\beta\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|\mathrm{d}u\\
<&(\beta-\alpha)\cdot\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\\
=&\varepsilon\quad(\forall A>A_0)
\end{aligned}$$

故式 (4.31) 成立。 □

定理 4.15 (含参反常积分的可微性与导数)

若 $f(x,u)$，$\dfrac{\partial f}{\partial u}$ 满足：

(i) $f(x,u)$ 在 $(x,u)\in[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续；

(ii) $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ 在 $(x,u)\in[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续；

(iii) $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}x$ 关于 u 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛；

则 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可微，且有：

$$\varphi'(u)=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\mathrm{d}x\quad(u\in[\alpha,\beta])$$

♡

证明 令 $g(u)=\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\mathrm{d}x$，由条件 (ii)(iii)，结合定理 4.12，4.14 得 $g(u)\in C([\alpha,\beta])$，且：

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^u g(v)\mathrm{d}v&=\int_a^{+\infty}\int_\alpha^u\frac{\partial f}{\partial u}(x,v)\mathrm{d}v\mathrm{d}x\\
&=\int_a^{+\infty}(f(x,u)-f(x,\alpha))\mathrm{d}x
\end{aligned}\tag{4.32}$$

$$= \varphi(u) - \varphi(\alpha)$$

由式 (4.32) 结合 $g(u)$ 的连续性，$\varphi(u) \in \mathrm{C}^1([\alpha,\beta])$，且：

$$\varphi'(u) = g(u) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\mathrm{d}x \quad (\forall u \in [\alpha,\beta])$$

□

笔记 由定理 4.12, 4.15 的证明可以看出含参变量反常积分的连续性和可微性都是点态的，条件中的 $[\alpha,\beta]$ 可以改为一般开集。

下面我们考虑 $u \in [\alpha,+\infty)$ 的情形。由于含参变量反常积分的连续性和可微性是点态的，因此有界区间和无界区间的定理内容相同。但对于 Riemann 可积性，由于反常积分和常义积分本身就有很大不同，因此参数限制在有界区间和无界区间也会不同。

定理 4.16 (二重无穷积分)

若 $f(x,u)$ 满足：

(i) $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,+\infty)$ 上连续；

(ii) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 关于 u 在任意有限闭区间 $[\alpha,\beta]\subset[\alpha,+\infty)$ 上一致收敛；

(iii) $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u$ 关于 x 在任意有限闭区间 $[a,b]\subset[a,+\infty)$ 上一致收敛；

(iv) $\displaystyle\int_a^{+\infty}\int_\alpha^{+\infty} |f(x,u)|\mathrm{d}u\mathrm{d}x$，$\displaystyle\int_\alpha^{+\infty}\int_a^{+\infty} |f(x,u)|\mathrm{d}x\mathrm{d}u$ 至少一个存在；

则成立等式：

$$\int_a^{+\infty}\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}x = \int_\alpha^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\mathrm{d}u \tag{4.33}$$

♡

证明 不妨设 $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty}\int_a^{+\infty} |f(x,u)|\mathrm{d}u\mathrm{d}x$ 存在，下面先证明 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}x$ 存在，再证明式 (4.33) 成立。

(i) 由假设，$\forall\varepsilon>0$，$\exists A_0>a$，使得：

$$\int_A^{+\infty}\int_\alpha^{+\infty} |f(x,u)|\mathrm{d}u\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall A > A_0) \tag{4.34}$$

故：

$$\left|\int_A^{+\infty}\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_A^{+\infty}\int_\alpha^{+\infty} |f(x,u)|\mathrm{d}u\mathrm{d}x < \varepsilon \quad (\forall A > A_0) \tag{4.35}$$

视 $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u$ 为关于 x 的函数 (由假设知这个函数是良好定义的)，故结合式 (4.35)，由无穷积分的定义，$\displaystyle\int_\alpha^{+\infty}\int_a^{+\infty} |f(x,u)|\mathrm{d}u\mathrm{d}x$ 存在。

(ii) 要证式 (4.33) 成立，即证：

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int_\alpha^\beta\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x\mathrm{d}u=\int_a^{+\infty}\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}x \tag{4.36}$$

由 $f(x,u)$ 的连续性，$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 关于 u 的内闭一致收敛性，结合定理 4.14 得：

$$\int_a^{+\infty}\int_\alpha^{\beta}f(x,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}x=\int_\alpha^{\beta}\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x\mathrm{d}u$$

故：

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\alpha^\beta\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x\mathrm{d}u-\int_a^{+\infty}\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}x\right|\\
=&\left|\int_a^{+\infty}\int_\alpha^{\beta}f(x,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}x-\int_a^{+\infty}\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}x\right|\\
=&\left|\int_a^{+\infty}\int_\beta^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}x\right| \qquad (4.37)\\
\leqslant&\left|\int_a^{A_1}\int_\beta^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{A_1}^{+\infty}\int_\beta^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}x\right|\\
\triangleq&\, I_1+I_2
\end{aligned}$$

其中 $A_1>a$ 待定。

对 I_2：令 $A_1>A_0$，则由式 (4.34) 得：

$$I_2<\frac{\varepsilon}{2} \tag{4.38}$$

对 I_1：固定 A_1，由 $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u$ 关于 x 的一致收敛性，$\exists\beta_0=\beta_0(\varepsilon)>\alpha$ 与 x 无关，使得 $\forall\beta>\beta_0$ 都有：

$$\left|\int_\beta^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\right|<\frac{\varepsilon}{2(A_1-a)}\quad(\forall x\in[a,+\infty))$$

故：

$$I_1\leqslant\int_a^{A_1}\left|\int_\beta^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\right|\mathrm{d}x<(A_1-a)\cdot\frac{\varepsilon}{2(A_1-a)}=\frac{\varepsilon}{2} \tag{4.39}$$

故结合式 (4.37)~(4.39) 得：

$$\left|\int_\alpha^\beta\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x\mathrm{d}u-\int_a^{+\infty}\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}x\right|<\varepsilon\quad(\forall\beta>\beta_0)$$

故式 (4.36) 成立，即式 (4.33) 成立。 □

作为本节定理的应用，下面介绍几个重要的积分。

例题 4.6(Gauss 概率积分) 试证：

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

解 在数分 A2 曾给出这个积分的重积分证明，下面给出另一种证明。令：

$$f(t) = \left(\int_0^t \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 \qquad g(t) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\mathrm{d}x \quad (t \geqslant 0)$$

一方面，由于都是常义积分，连续性条件都满足，故由定理**4.3**，$f(t), g(t)$ 在 $t \geqslant 0$ 时都可导，故有：

$$\begin{aligned}
f'(t) + g'(t) &= 2\int_0^t \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \cdot \mathrm{e}^{-t^2} + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\cdot(-2t)\mathrm{d}x \\
&= 2\mathrm{e}^{-t^2}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x - \int_0^1 t\mathrm{e}^{-t^2x^2}\mathrm{d}x\right) \\
&= 2\mathrm{e}^{-t^2}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x - \int_0^t \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\right) \\
&= 0 \quad (\forall t \geqslant 0)
\end{aligned}$$

故：

$$f(t) + g(t) = f(0) + g(0) = 0 + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \quad (\forall t \geqslant 0) \tag{4.40}$$

另一方面，对 $g(t)$ 有：

$$|g(t)| = \left|\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\mathrm{d}x\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \quad (\forall t \geqslant 0)$$

故：

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$$

故对式 (4.40) 令 $t \to +\infty$ 得：

$$\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 = f(+\infty) = \frac{\pi}{4}$$

再结合被积函数的非负性，开根号即证。 □

例题 4.7(Dirichlet 积分) 试证：

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

解 分母中 x 的存在使我们对积分无从下手，因此考虑引入参数 u，利用含参变量积分的求导消掉 x，方便计算。故引入积分因子 e^{-ux}，得：

$$I(u)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\sin x\mathrm{d}x \quad (u\in[0,+\infty)) \tag{4.41}$$

记 $f(x,u)=\sin x$，$g(x,u)=\dfrac{1}{x\mathrm{e}^{ux}}$。由于 $|g(x,u)|\leqslant\dfrac{1}{x}\ (\forall u\geqslant 0,x>0)$，故对每个固定的 $u\geqslant 0$，$g(x,u)$ 关于 x 单调递减，且关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上一致趋于 0。另一方面：

$$\left|\int_0^A f(x,u)\mathrm{d}x\right|=|1-\cos A|\leqslant 2 \quad (\forall A>0,u\geqslant 0)$$

故由含参反常积分的 Dirichlet 判别法，$I(u)$ 关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛。故由定理 4.12，$I(u)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续。又令：

$$G(u)=-\int_0^{+\infty}e^{-ux}\sin x\mathrm{d}x \quad (u\in[0,+\infty))$$

由于对任意给定的 $u_0>0$ 都有：

$$|\mathrm{e}^{-\mathrm{ux}}\sin x|\leqslant\mathrm{e}^{-u_0x} \quad (\forall u\in[u_0,+\infty),x\geqslant 0) \tag{4.42}$$

式 (4.42) 右边关于 x 在 $[0,+\infty)$ 上积分收敛，故由含参反常积分的 Weierstrass 判别法，$G(u)$ 关于 u 在 $[u_0,+\infty)$ 上一致收敛。由 u_0 任意性知 $G(u)$ 关于 u 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛。因此由定理 4.15，结合求导的点态性有：

$$I'(u)=G(u)=-\int_0^{+\infty}e^{-ux}\sin x\mathrm{d}x=-\frac{1}{1+u^2} \quad (u\in(0,+\infty)) \tag{4.43}$$

其中最后一个等号需要使用两次分部积分。
解式 (4.43) 的微分方程得：

$$I(u)=-\arctan u+C \quad (u>0,C\text{为待定常数}) \tag{4.44}$$

又因为：

$$|I(u)|=\left|\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}x=\frac{1}{u} \quad (\forall u>0)$$

故：

$$\lim_{u\to+\infty}I(u)=0$$

故对式 (4.44) 令 $u\to+\infty$，得 $C=\dfrac{\pi}{2}$. 故 $I(u)$ 表达式为：

$$I(u)=-\arctan u+\frac{\pi}{2} \quad (u>0) \tag{4.45}$$

最后由 $I(u)$ 在 0 处的右连续性，对式 (4.45) 令 $u\to 0^+$ 即证。 □

例题 4.8(Laplace 积分) 试证：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha\beta}\quad(\alpha>0,\beta\geqslant 0)$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\alpha\beta}\quad(\alpha>0,\beta>0)$$

解 记 $I(\beta)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x\ (\alpha>0,\beta\geqslant 0)$ 是 β 的函数。首先由于：

$$\left|\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}\right|\leqslant\frac{1}{x^2+\alpha^2}\quad(\forall\beta\geqslant 0,x\geqslant 0)\qquad\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\alpha}$$

故由含参反常积分的 Weierstrass 判别法得 $I(\beta)$ 关于 β 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛。故由定理 4.12，$I(\beta)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续。又令：

$$G(\beta)=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x\quad(\beta\in[0,+\infty))$$

运用含参反常积分的 Dirichlet 判别法，类似于例题**4.4**的讨论得 $G(\beta)$ 关于 β 在 $[\delta,+\infty)$ $(\forall\delta>0)$ 上一致收敛。故 $G(\beta)$ 关于 β 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛。因此由定理 4.15，结合求导的点态性有：

$$\begin{aligned}I'(\beta)=G(\beta)&=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x\\&=-\int_0^{+\infty}\frac{(x^2+\alpha^2-\alpha^2)\sin\beta x}{x(x^2+\alpha^2)}\mathrm{d}x\\&=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\frac{\alpha^2\sin\beta x}{x(x^2+\alpha^2)}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\alpha^2\sin\beta x}{x(x^2+\alpha^2)}\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\quad(\beta\in(0,+\infty))\end{aligned}$$

对 $I'(\beta)$ 同样可以由定理 4.15 得（依旧是用 Dirichlet 判别法证内闭一致收敛）：

$$I''(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\alpha^2\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x=\alpha^2I(\beta)\quad(\beta>0)\tag{4.46}$$

故解式 (4.46) 的微分方程得：

$$I(\beta)=C_1\mathrm{e}^{\alpha\beta}+C_2\mathrm{e}^{-\alpha\beta}\quad(\beta>0,\alpha>0)\tag{4.47}$$

一方面，由 $I(\beta)$ 在 0 处的右连续性，结合式 (4.47) 得：

$$C_1+C_2=\lim_{\beta\to0^+}I(\beta)=I(0)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\alpha}\tag{4.48}$$

另一方面，由于：

$$|I(\beta)|\leqslant\left|\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x\right|=\frac{\pi}{2\alpha}\quad(\forall\beta\geqslant 0)$$

故对式 (4.47) 令 $\beta \to +\infty$，为保持有界性，迫使 $C_1 = 0$，故由式 (4.48)，$C_2 = \dfrac{\pi}{2\alpha}$，得到 $I(\beta)$ 的表达式：

$$I(\beta) = \frac{\pi}{2\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha\beta} \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

事实上由 $I(\beta)$ 在 0 处的右连续性，上述表达式对 $\beta = 0$ 也成立。又有：

$$I(\beta) = -\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\alpha\beta} \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

最后注意到第一个积分为 $I(\beta)\ (\beta \geqslant 0)$，第二个积分为 $-I'(\beta)\ (\beta > 0)$，即证。 □

笔记 对于例题 4.7, 4.8 这种利用含参变量反常积分进行积分计算的题目，一个比较典型的方法是运用定理 4.15 进行求导，尝试得到关于原积分的常微分方程，通过解方程得到原积分关于各个参数的表达式。

一个需要注意的细节是，在验证定理 4.15 的条件时，往往只能证明内闭一致收敛，因此导数只在区间内部存在，得到的微分方程，解得的表达式也都只在区间内部成立。最后需要利用含参变量积分在区间端点的连续性来验证端点处也满足表达式。

4.4 Gamma 函数与 Beta 函数

本节的数学对象是以下两个含参变量积分：

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \ \ (x > 0) \qquad \mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t \ \ (p > 0, q > 0)$$

下面先来研究 Gamma 函数。

定理 4.17 (Gamma 函数的可微性)

$\Gamma(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续，且有各阶连续导数。即 $\Gamma(x) \in C^\infty((0, +\infty))$.

证明 下面只证 $\Gamma(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续，更高阶的连续可微性可以类似证明。任意给定 $x_0 \in (0, +\infty)$，$\exists[\alpha, \beta]$，使得 $x_0 \in [\alpha, \beta] \subset (0, +\infty)$. 将 $\Gamma(x)$ 分成两部分：

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \xlongequal{\triangle} I_1 + I_2 \quad (x > 0) \tag{4.49}$$

对 I_1 有：

$$|t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}| \leqslant t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t} \quad (\forall t \in (0,1), x \in [\alpha, \beta]) \tag{4.50}$$

对式 (4.50) 的右边，有：

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}}{t^{\alpha-1}} = 0$$

又由于 $\alpha - 1 > -1$，故由非负函数瑕积分的比较判别法得 $\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 收敛。结合式 (4.50)，

由含参反常积分的 Weierstrass 判别法得 I_1 在关于 x 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛。再由 $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ 的连续性，结合定理 4.12 得 $I_1\in\mathrm{C}([\alpha,\beta])$.
对 I_2，则有：

$$|t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}|\leqslant t^{\beta-1}\mathrm{e}^{-t}\quad(\forall t\in(1,+\infty),x\in[\alpha,\beta])\tag{4.51}$$

对式 (4.51) 的右边，有：

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{t^{\beta-1}\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}=0$$

故由非负函数瑕积分的比较判别法得 $\displaystyle\int_1^{+\infty}t^{\beta-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 收敛。结合式 (4.51)，由含参反常积分的 Weierstrass 判别法得 I_2 在关于 x 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛。再由 $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ 的连续性，结合定理 4.12 得 $I_2\in\mathrm{C}([\alpha,\beta])$.
故由式 (4.49) 得 $\Gamma(x)\in\mathrm{C}([\alpha,\beta])$，特别地，$\Gamma(x)$ 在先前给定的 x_0 处连续。由 $x_0\in(0,+\infty)$ 的任意性，$\Gamma(x)\in\mathrm{C}((0,+\infty))$. □

下面一个定理介绍了 Gamma 函数最核心的三条性质。

定理 4.18 (Gamma 函数的性质)

$\Gamma(x)$ 具有以下性质：

(i) $\forall x>0$，$\Gamma(x)>0$，$f(1)=1$；

(ii) $\forall x>0$，$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$；

(iii) $\ln\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是 (下) 凸函数。

♡

证明 下面只证明 (ii)(iii)。
(ii) 利用分部积分：

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1)&=\int_0^{+\infty}t^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\\&=(-t^x\mathrm{e}^{-t})\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}xt^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\\&=x\Gamma(x)\quad(\forall x>0)\end{aligned}$$

(iii) 即证 $\forall p,q>1$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ 都有：

$$\begin{aligned}&\ln\Gamma\left(\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{q}\right)\leqslant\frac{1}{p}\ln\Gamma(x_1)+\frac{1}{q}\ln\Gamma(x_2)\\\Longleftrightarrow\quad&\Gamma\left(\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{q}\right)\leqslant(\ln\Gamma(x_1))^{\frac{1}{p}}(\ln\Gamma(x_2))^{\frac{1}{q}}\quad(\forall x_1,x_2>0)\end{aligned}$$

即：

$$\int_0^{+\infty} t^{\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{q}-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^{+\infty} t^{x_1-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{+\infty} t^{x_2-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} \quad (\forall x_1, x_2 > 0)$$

而这正是积分的赫尔德不等式。 □

笔记 由定理 4.18(ii) 可得许多重要结论：

(1) 阶乘：

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

(2) 由于：

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \xlongequal{u=\sqrt{t}} 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$$

故：

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

(3) $\forall x \in (n, n+1]\ (n \in \mathbb{N}^*)$，$\exists\, \alpha \in (0,1]$，使得 $x = n+\alpha$，则：

$$\Gamma(x) = \Gamma(n+\alpha) = \alpha(1+\alpha)\cdots(n-1+\alpha)\Gamma(\alpha)$$

因此 $\Gamma(x)$ 的值完全由其在 $(0,1]$ 上的值决定。

反过来，定理 4.18 的三条性质唯一决定了 $\Gamma(x)$。

定理 4.19 (Bohr-Mollerup)

设 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足以下三个条件：

(i) $\forall x > 0$，$f(x) > 0$ 且 $f(1) = 1$；

(ii) $\forall x > 0$，$f(x+1) = xf(x)$；

(iii) $\ln f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的（下）凸函数；

则 $f(x) = \Gamma(x)$ 对 $\forall x > 0$ 成立。

证明 只需证以上三个条件唯一决定一个函数，再由定理 4.18，$\Gamma(x)$ 具有这三个性质，因此必有 $f(x) = \Gamma(x)$ 对 $\forall x > 0$ 成立。

由条件 (i)(ii) 知 $f(x)$ 的值被其在 $(0,1]$ 上的值决定，因此只需对 $x \in (0,1)$ 讨论。由条件 (iii)，结合凸函数的性质得 $\forall x \in (0,1), n \in \mathbb{N}^*$ 有：

$$\frac{\ln f(n) - \ln f(n-1)}{n-(n-1)} \leqslant \frac{\ln f(n+x) - \ln f(n)}{n+x-n} \leqslant \frac{\ln f(n+1) - \ln f(n)}{n+1-n} \tag{4.52}$$

由条件 (i)(ii) 知 $f(n) = (n-1)!\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$，代入式 (4.52) 得：

$$\ln(n-1)! - \ln(n-2)! \leqslant \frac{\ln f(n+x) - \ln(n-1)!}{x} \leqslant \ln n! - \ln(n-1)!$$

整理得：

$$(n-1)^x(n-1)! \leqslant f(n+x) \leqslant n^x(n-1)! \tag{4.53}$$

又由条件 (ii) 得：

$$f(n+x) = x(1+x)\cdots(n-1+x)f(x) \tag{4.54}$$

故结合式 (4.53)(4.54) 得：

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \tag{4.55}$$

注意到式 (4.55) 对于 $n \in \mathbb{N}^*$ 的任意性，故把左式的 $n-1$ 换成 n，不等式仍成立，得：

$$\frac{(n)^x(n)!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{n^x(n)!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \cdot \frac{x+n}{n}$$

故：

$$\frac{n}{x+n}f(x) \leqslant \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \leqslant f(x) \tag{4.56}$$

对式 (4.56) 令 $n \to \infty$，结合夹逼定理得：

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \quad (x \in (0,1)) \tag{4.57}$$

由式 (4.57) 知 $f(x)$ 具有唯一性，即证。 □

推论 4.1 (Gamma 函数的另一个表达式)

$\Gamma(x)$ 满足以下等式：

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \quad (x > 0)$$

提示：结合定理 4.19 的证明以及“$\Gamma(x)$ 被其在 $(0,1]$ 上的取值所决定”。

利用推论 4.1，我们可以证明一条重要的公式。

定理 4.20 (余元公式)

对 $\forall x \in (0,1)$，有：

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

在证明定理 4.20 之前，我们还需要一个引理。

引理 4.1 (Euler)

对 $\forall x\in\mathbb{R}$，有：

$$\sin\pi x=\pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\tag{4.58}$$

证明 注意到式 (4.58) 两边对 x 平移整数值均不变，在整数取值均为 0，故只需证此式对 $x\in(0,1)$ 成立。记：

$$\varphi(x)=\ln\left(\pi\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\right)=\ln\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\quad(x\in(0,1))$$

由于：

$$\left|\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\right|=\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2-x^2}\right)\leqslant\frac{x^2}{n^2-x^2}<\frac{1}{n^2-1}\quad(\forall n\geqslant 2,x\in(0,1))$$

故由函数项级数的 Weierstrass 判别法得 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛。另一方面，考察：

$$\psi(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{n^2-x^2}\quad(x\in(0,1))$$

由于：

$$\left|\frac{2x}{n^2-x^2}\right|<\frac{2}{n^2-1}\quad(\forall n\geqslant 2,x\in(0,1))$$

故由函数项级数的 Weierstrass 判别法得 $\psi(x)$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛。故由定理**2.9**，$\varphi(x)$ 可以逐项求导，得：

$$\varphi'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2}=\pi\cot\pi x-\frac{1}{x}\quad(\forall x\in(0,1))$$

其中最后一个等号需要利用 $\cot x$ 的 Fourier 级数。结合 $\varphi(0)=\ln\pi$，可以解得：

$$\varphi(x)=\ln\left(\frac{\sin\pi x}{x}\right)\quad(x\in(0,1))\tag{4.59}$$

对式 (4.59) 做简单变形即得式 (4.58)。 □

下面回到定理 4.20 的证明。

证明 由推论 4.1 得：

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(1-x)&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^xn!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-x}n!}{(1-x)(2-x)\cdots(n+1-x)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1-x}\cdot\frac{(n!)^2}{x\prod\limits_{k=1}^{n}(k-x)(k+x)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{x\prod\limits_{k=1}^{n}(k-x)(k+x)}\end{aligned}\tag{4.60}$$

由引理 4.1 得：

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\sin \pi x} &= \frac{\pi}{\pi x \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{x\prod\limits_{k=1}^{n}(k-x)(k+x)}\end{aligned} \tag{4.61}$$

结合式 (4.60)(4.61) 得结论成立。 □

接下来研究 Beta 函数以及 Gamma 函数与 Beta 函数的关系。

首先对 Beta 函数有一个重要的换元：

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(p,q) &= \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t \\ &\xlongequal{t=\frac{1}{1+u}} \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+u}\right)^{p-1}\cdot\left(\frac{u}{1+u}\right)^{q-1}\cdot\frac{1}{(1+u)^2}\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{u^{q-1}}{(1+u)^{p+q}}\mathrm{d}u \quad (\forall p,q>0)\end{aligned}$$

由此可以得到定理 4.20 的更加完善的版本。

定理 4.21 (余元公式的完善版本)

对 $\forall x\in(0,1)$，有：

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} = \int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \mathrm{B}(x,1-x) \tag{4.62}$$

♡

提示：式 (4.62) 第一个等号即定理 4.20，第二个等号由**例题4.5**可得，第三个等号即为以上的换元。

定理 4.21 展现了 Gamma 函数和 Beta 函数的联系，实际上，它只是一种特殊情形，下面介绍 Gamma 函数和 Beta 函数的关联等式。为此我们需要做些准备。

引理 4.2 (Beta 函数递推公式)

对 $\forall p,q>0$，有：

$$\mathrm{B}(p+1,q) = \frac{p}{p+q}\mathrm{B}(p,q)$$

♡

证明 利用分部积分，直接计算得：

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(p+1,q) &= \int_0^1 t^p(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^p(1-t)^{p+q-1}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{p+q}\left(\left(\frac{t}{1-t}\right)^p (1-t)^{p+q}\Big|_0^1 - \int_0^1 (1-t)^{p+q} \cdot p\left(\frac{t}{1-t}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{(1-t)^2}\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{p}{p+q}\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{p}{p+q}\mathrm{B}(p,q)$$

□

定理 4.22 (Gamma 函数与 Beta 函数关联等式)

对 $\forall p, q > 0$，有：

$$\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

♡

证明 固定 $q > 0$，令：

$$f(p) = \frac{\Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q)}{\Gamma(q)} \quad (p > 0)$$

则由定理 4.19，只需证 $f(p)$ 满足定理 4.19 的三个条件。

首先由定理 4.18(ii) 和引理 4.2 得：

$$\begin{aligned} f(p+1) &= \frac{\Gamma(p+q+1)\mathrm{B}(p+1,q)}{\Gamma(q)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)} \cdot (p+q)\Gamma(p+q) \cdot \frac{p}{p+q}\mathrm{B}(p,q) \\ &= \frac{p\Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q)}{\Gamma(q)} \\ &= pf(p) \quad (\forall p > 0) \end{aligned}$$

故条件 (ii) 成立。

又有：

$$\mathrm{B}(1,q) = \int_0^1 (1-t)^{q-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{q} \quad (\forall q > 0)$$

故：

$$f(1) = \frac{\Gamma(q+1)\mathrm{B}(1,q)}{\Gamma(q)} = \frac{\Gamma(q+1)}{q\Gamma(q)} = 1$$

显然又有 $f(p) > 0\ (\forall p > 0)$，故条件 (i) 成立。

最后由于：

$$\ln f(p) = \ln\Gamma(p+q) + \ln\mathrm{B}(p,q) - \ln\Gamma(q) \tag{4.63}$$

定理 4.18(iii) 已经告诉我们 $\ln\Gamma(p+q)$ 关于 p 在 $(0,+\infty)$ 上是 (下) 凸函数，$\ln\Gamma(q)$ 关于 p 是常数，不影响函数凸性。运用与证明定理 4.18(iii) 相同的方法可以证明 $\ln\mathrm{B}(p,q)$ 关于 p 在 $(0,+\infty)$ 上也是 (下) 凸函数。因此由式 (4.63) 得 $\ln f(p)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是 (下) 凸函数，条件 (iii) 成立。
综上由定理 4.19 得 $f(p)=\Gamma(p)\ (\forall p>0)$，即证。 □

由定理 4.22，结合 Gamma 函数的性质，可以立即得到 Beta 函数的许多重要性质。

推论 4.2 (Beta 函数的性质)

$\mathrm{B}(p,q)$ 具有以下性质：

(i) $\mathrm{B}(p,q)\in C^{\infty}\big((0,+\infty\times(0,+\infty)\big)$；

(ii) $\forall p,q>0$，$\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$；

(iii) $\forall p,q>0$，$\mathrm{B}(p+1,q+1)=\dfrac{pq}{(p+q+1)(p+q)}\mathrm{B}(p,q)$.

提示：利用定理 4.18, 4.22.

最后介绍 Gamma 函数与 Beta 函数的应用。

定理 4.23 (Legendre 加倍公式)

对 $\forall x>0$，有：

$$\Gamma(2x)=\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) \tag{4.64}$$

证明 其中一种证法是令式 (4.64) 右边为 $f(2x)$，证明 $f(x)$ 满足定理 4.19 的三个条件，从而 $f(2x)=\Gamma(2x)$，即证。下面给出的是利用 Beta 函数与余元公式的证法。
一方面，由余元公式：

$$\mathrm{B}(x,x)=\frac{(\Gamma(x))^2}{\Gamma(2x)}\quad(x>0) \tag{4.65}$$

另一方面，又有：

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(x,x)&=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\left(\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2\right)^{x-1}\mathrm{d}t\\&\xlongequal{w=t-\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-w^2\right)^{x-1}\mathrm{d}w\\&=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-w^2\right)^{x-1}\mathrm{d}w\end{aligned} \tag{4.66}$$

$$
\begin{aligned}
&\xlongequal{w=\frac{\sqrt{u}}{2}} \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{x-1} \cdot \frac{1}{2^{2x-1}} \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2^{2x-1}} \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, x\right) \\
&= \frac{1}{2^{2x-1}} \frac{\Gamma(x)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(x+\frac{1}{2})} \quad (x>0)
\end{aligned}
$$

故结合式 (4.65)(4.66)，利用 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ 可得式 (4.64) 成立。 □

利用 Gamma 函数与 Beta 函数可以计算一些用常规方法十分难算的积分。

例题 4.9 计算积分：

$$
\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^4} \mathrm{d}u
$$

解 令 $t=\frac{1}{1+u^4}$，得：

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^4} \mathrm{d}u &= \int_1^0 t \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4} \int_0^1 t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{3}{4}} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4} \mathrm{B}\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)
\end{aligned}
$$

故利用余元公式的完善版本 (定理 4.21)，得：

$$
\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^4} \mathrm{d}u = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}
$$

□

例题 4.10 计算积分值的极限：

$$
\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} \mathrm{d}x
$$

解 令 $t=\frac{1}{1+x^n}$，得：

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} \mathrm{d}x &= \int_1^0 t \cdot \frac{1}{n}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n} \int_0^1 t^{-\frac{1}{n}}(1-t)^{\frac{1}{n}-1} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n} \mathrm{B}\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

故利用余元公式的完善版本 (定理 4.21)，得：

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*) \tag{4.67}$$

故对式 (4.67) 令 $n\to\infty$，得：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x = 1$$

□

例题 4.11 计算积分值的极限：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^{2n}}\mathrm{d}x$$

解 令 $t=x^{2n}$，得：

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^{2n}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{2n}t^{\frac{1}{2n}-1}\cdot t^{\frac{1}{n}}\cdot\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2n}\int_0^{+\infty} t^{\frac{3}{2n}-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2n}\Gamma\left(\frac{3}{2n}\right)\end{aligned} \tag{4.68}$$

又由定理 4.18(ii)：

$$\Gamma\left(\frac{3}{2n}+1\right) = \frac{3}{2n}\Gamma\left(\frac{3}{2n}\right) \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*) \tag{4.69}$$

故由式 (4.68)(4.69) 得：

$$\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^{2n}}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{3}{2n}+1\right) \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*) \tag{4.70}$$

最后由 Gamma 函数的连续性，对式 (4.70) 令 $n\to\infty$ 得：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^{2n}}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{3}{2n}+1\right) = \frac{1}{3}\Gamma(1) = \frac{1}{3}$$

□

在数分 A1 中，我们学习了 $n!$ 的一个渐进表达式。对 $\Gamma(x)$ 也有类似的结果。

定理 4.24 (Stiring)

对 $\forall x>0$，$\exists\,\theta(x)\in(0,1)$，使得：

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x \mathrm{e}^{\frac{\theta(x)}{12x}}$$

由定理 4.24 可得下面这个推论。

推论 4.3

对 $\forall a \in \mathbb{R}$，有：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)}=1$$

提示：将定理 4.24 代入式子中，化简求极限即可。

注 推论 4.3 可视为定理 4.18(ii) 的一般情形。

例题 4.12 计算积分值的极限：

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\sqrt{\alpha}\int_0^1(1-x^2)^\alpha\mathrm{d}x$$

解 令 $t=x^2$，得：

$$\begin{aligned}\int_0^1(1-x^2)^\alpha\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^\alpha\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\alpha\right)\\&=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})}\end{aligned}\tag{4.71}$$

在推论 4.3 中令 $x=\alpha+1$，$a=\dfrac{1}{2}$，可得：

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\sqrt{\alpha}\,\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})}=1\tag{4.72}$$

故由式 (4.71)(4.72) 得：

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\sqrt{\alpha}\int_0^1(1-x^2)^\alpha\mathrm{d}x=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2}\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\sqrt{\alpha}\,\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

□

第 5 章 Fourier 分析

5.1 周期函数的 Fourier 级数

为研究三角级数：

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

我们首先从周期函数入手。由伸缩和平移，我们只需要研究周期为 2π 的函数，且只需研究 $[-\pi,\pi]$ 上的函数。考虑到对 $f(x)$ 在 $[\pi,\pi]$ 上积分可能是常义积分，也可能是瑕积分，而对于这两种积分，有下列关系：

$$f(x)在[\pi,\pi]有界，可积 \Rightarrow f(x)在[\pi,\pi]绝对可积$$

$$f(x)在[\pi,\pi]无界，绝对可积 \Rightarrow f(x)在[\pi,\pi]可积$$

其中 $f(x)$ 绝对可积是指 $|f(x)|$ 可积。

因此为了方便讨论，我们常假设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积。

类似于幂级数的研究，一个核心问题是在什么条件下三角级数逐点收敛于 $f(x)$。为此我们先将逐点收敛强化为一致收敛，研究一致收敛的必要条件。

命题 5.1 (Fourier 系数，三角级数一致收敛的必要条件)

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积。若 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$，则：

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2\cdots)\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\quad(n=1,2\cdots)\end{aligned}\tag{5.1}$$

提示：结合 $f(x)$ 的可积性与一致收敛性，由**定理2.8**得逐项积分，再利用三角函数系的正交性，即：

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\mathrm{d}x=\pi\delta_{mn}\\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\mathrm{d}x=\pi\delta_{mn}\qquad(\forall m,n\in\mathbb{N})\\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\mathrm{d}x=0\end{cases}$$

其中：

$$\delta_{mn}=\begin{cases}1 & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases}$$

由命题 5.1 我们知道三角级数在一致收敛下的唯一性，由此可以定义 Fourier 级数。

定义 5.1 (Fourier 级数)

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积，则可定义 $a_n\,(n\geqslant 0)$，$b_n\,(n>0)$ 如式 (5.1) 所示，并称为 $f(x)$ 的 Fourier 系数。称三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 为 $f(x)$ 的 Fourier 级数，记为：

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

♣

现在核心问题变为，$f(x)$ 的 Fourier 级数是否收敛；若收敛，是否收敛于 $f(x)$。这两个问题需要后面的内容来解答，现在我们继续研究 Fourier 系数的性质。为此我们需要一个重要引理。

定理 5.1 (Riemann-Lebesgue 引理)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ (b 可以是 $+\infty$) 上可积且绝对可积，则：

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x=0$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x=0$$

♡

证明 (i) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则一方面 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，即 $\exists M$，使得 $|f(x)|\leqslant M\ (\forall x\in[a,b])$.
另一方面，对分割 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，有：

$$\lim_{\|T\|\to 0^+}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0$$

其中 $\omega_i=\sup\limits_{s,t\in[x_{i-1},x_i]}|f(s)-f(t)|$，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\ (1\leqslant i\leqslant n)$，$\|T\|=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$.
故 $\forall\varepsilon>0$，存在分割 T，使得：

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}\tag{5.2}$$

对这个分割 T，有：

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_i)) \cos \lambda x \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i) \cos \lambda x \mathrm{d}x \right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i + \left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \frac{\sin x_i - \sin x_{i-1}}{\lambda} \right| \qquad (5.3) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i + 2M \frac{n}{\lambda}
\end{aligned}
$$

在分割 T 固定后，n 也是固定的，此时对 $\forall \lambda > \dfrac{4nM}{\varepsilon}$，结合式 (5.3)(5.4) 得：

$$
\left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x \mathrm{d}x \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
$$

故 $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x \mathrm{d}x = 0$.

(ii) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ $(b < +\infty)$ 上无界，不妨设 b 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的唯一瑕点，则由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上反常绝对可积，则 $\exists \eta > 0$，使得：

$$
\int_{b-\eta}^{b} |f(x)| \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.4}
$$

由于 $f(x)$ 在 $[a, b-\eta]$ 上可积且绝对可积，故由 (i) 得，$\exists \lambda_1 > 0$，使得 $\forall \lambda > \lambda_1$，都有：

$$
\left| \int_a^{b-\eta} f(x) \cos \lambda x \mathrm{d}x \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.5}
$$

故结合式 (5.4)(5.5)：

$$
\left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x \mathrm{d}x \right| \leqslant \left| \int_a^{b-\eta} f(x) \cos \lambda x \mathrm{d}x \right| + \int_{b-\eta}^{b} |f(x)| \mathrm{d}x = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (\forall \lambda > \lambda_1)
$$

故 $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x \mathrm{d}x = 0$.

(iii) 若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上反常绝对可积，则 $\exists A > a$，使得：

$$
\int_a^A |f(x)| \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.6}
$$

由于 $f(x)$ 在 $[a, A]$ 上可积且绝对可积，故由 (i) 得，$\exists \lambda_2 > 0$，使得 $\forall \lambda > \lambda_2$，都有：

$$
\left| \int_a^A f(x) \cos \lambda x \mathrm{d}x \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.7}
$$

故结合式 (5.6)(5.7)：

$$
\left| \int_a^{+\infty} f(x) \cos \lambda x \mathrm{d}x \right| \leqslant \left| \int_a^A f(x) \cos \lambda x \mathrm{d}x \right| + \int_A^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}x = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (\forall \lambda > \lambda_2)
$$

故 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x = 0.$

对 $\sin x$ 证明同理。 □

推论 5.1 (Fourier 系数的性质)

若 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是某个可积且绝对可积函数的 Fourier 系数，则：

$$\lim_{n to\infty} a_n = \lim_{n to\infty} b_n = 0$$

提示：运用定理 5.1 即可。

注 由推论 5.1 知，不是所有的三角级数都能作为某个可积且绝对可积函数的 Fourier 级数。

由定理 5.1，我们可以给出**例题4.7**的另一个证明。

例题 5.1(Dirichlet 积分) 试证：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

解 首先原积分在 $x=0$ 处有界，因此 0 不是瑕点，故原积分只是无穷积分，由无穷积分的 Dirichlet 判别法可得原积分收敛。因此有：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \tag{5.8}$$

令 $x=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t$，得：

$$\begin{aligned}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\right)\sin(n+\frac{1}{2})t\mathrm{d}t + \int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t \\ &\triangleq I_1+I_2\end{aligned} \tag{5.9}$$

对 I_1，由于：

$$\lim_{t\to0^+}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\right) = \lim_{t\to0^+}\frac{2\sin\frac{t}{2}-t}{2t\sin\frac{t}{2}} = \lim_{t\to0^+}\frac{2(\frac{t}{2}-\frac{1}{6}(\frac{t}{2})^3+o(t^3))-t}{t^2} = \lim_{t\to0^+}\frac{-t}{24}=0$$

故 0 不是 I_1 的瑕点，$\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\right)\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t$ 在 $[0,\pi]$ 上 Riemann 可积，从而由定理 5.1：

$$\lim_{n\to\infty} I_1 = 0 \tag{5.10}$$

对 I_2，由于：

$$\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}=\sum_{k=1}^{n}\cos kt+\frac{1}{2}\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)\tag{5.11}$$

故对式 (5.11) 两边在 $[0,\pi]$ 上积分得：

$$I_2=\frac{\pi}{2}\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)\tag{5.12}$$

故结合式 (5.8)(5.9)(5.10)(5.12) 得原积分的值为 $\dfrac{\pi}{2}$。 □

5.2 Fourier 级数收敛定理

本节我们将给出 $f(x)$ 的 Fourier 级数逐点收敛于 $f(x)$ 的充分条件，其中 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积。为得到收敛定理，我们从 Fourier 级数的部分和函数入手。将 Fourier 系数的表达式 (式 (5.1)) 代入部分和函数得：

$$\begin{aligned}S_n(x)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}f(u)\mathrm{d}u+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos ku\cos kx+\sin ku\sin kx)f(u)\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(u-x)\right)\mathrm{d}u\\&\xlongequal{\Delta}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)D_n(u-x)\mathrm{d}u\end{aligned}\tag{5.13}$$

其中：

$$D_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\tag{5.14}$$

$D_n(t)$ 被称为 Dirichlet 核。它具有以下性质：

(i) $D_n(t)=D_n(-t)$，即 $D_n(t)$ 是偶函数；

(ii) $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)\mathrm{d}t=\dfrac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}D_n(t)\mathrm{d}t=1$；

(iii) $D_n(t+2\pi)=D_n(t)$，即 $D_n(t)$ 周期为 2π。

利用以上三条性质，式 (5.13) 可进一步变为：

$$\begin{aligned}S_n(x)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)D_n(u-x)\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi}f(u)D_n(u-x)\mathrm{d}u\\&\xlongequal{u=x+t}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_n(t)\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{5.15}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))D_n(t)\mathrm{d}t$$

利用式 (5.15)，我们可以得到下面这个定理。

定理 5.2 (Foueier 级数局部化定理)

设 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 x_0 处是否收敛，收敛到什么值，仅与 $f(x)$ 在 x_0 附近的行为有关。♡

证明 由式 (5.15)，对任意给定的 $\delta>0$，有：

$$\begin{aligned} S_n(x_0) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t))D_n(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}(f(x_0+t)+f(x_0-t))D_n(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t))D_n(t)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{5.16}$$

其中式 (5.16) 右边第二个积分是常义积分，对其运用 Riemann-Lebesgue 引理 (定理 5.1) 得：

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t))D_n(t)\mathrm{d}t \\ =&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t \\ =&0 \end{aligned} \tag{5.17}$$

故结合式 (5.16)(5.17) 得：

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}(f(x_0+t)+f(x_0-t))D_n(t)\mathrm{d}t \tag{5.18}$$

故 Fourier 级数在 x_0 处是否收敛和收敛于什么值仅与 $f(x)$ 在 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ $(\forall\delta>0)$ 的行为有关。 □

注 由定理 5.2，若 $f(x),g(x)$ 在 x_0 附近的行为相同，则它们的 Fourier 级数在 x_0 处同敛散，若收敛，收敛值相等。

为处理式 (5.18) 右边的极限，我们引入一个判别法。

定理 5.3 (Fourier 级数的 Dini 判别法)

设 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积。令:

$$\varphi(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s$$

若对某个 $s\in\mathbb{R}$，$\exists\,\delta>0$，使得 $\dfrac{\varphi(t)}{t}$ 在 $[0,\delta]$ 上可积且绝对可积，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 s。♡

证明 利用 Dirichlet 核的性质，得：

$$\begin{aligned}S_n(x_0)-s &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t))D_n(t)\mathrm{d}t-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}sc\dot{D}_n(t)\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(t)D_n(t)\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{5.19}$$

由于 $t\to 0^+$ 时，$2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\to t$，且由条件，$\frac{\varphi(t)}{t}$ 在 $[0,\delta]$ 上可积且绝对可积，从而在 $[0,\pi]$ 上可积且绝对可积。故对式 (5.19) 两边令 $n\to\infty$，对右边运用 Riemann-Lebesgue 引理，得：

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x_0)=s$$

□

因此问题转化为了寻找合适的 s 满足 Dini 判别法的条件。我们自然希望 $f(x_0)$ 就是满足条件的 s，但对一般的可积函数，甚至是连续函数，这点都不一定成立。因此我们需要对 $f(x)$ 做更强的限制。

定义 5.2 (α 阶 Lipschitz 条件)

设 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义。若 $\exists\,\delta>0$，$L>0$，$\alpha\in(0,1]$，使得：

$$|f(x_0+t)-f(x_0+0)|\leqslant Lt^{\alpha}\qquad |f(x_0-t)-f(x_0-0)|\leqslant Lt^{\alpha}\quad(\forall t\in(0,\delta])$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 附近满足 α 阶 Lipschitz 条件。♣

定理 5.4

设 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积，并在 x_0 附近满足 α 阶 Lipschitz 条件，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$. ♡

证明 在定理 5.3 中令 $2s=f(x_0+0)+f(x_0-0)$，由于 $f(x)$ 在 x_0 附近满足 α 阶 Lipschitz 条件，故有：

$$\begin{aligned}\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right| &= \left|\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)}{t}\right|\\ &\leqslant\left|\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\right|+\left|\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t}\right|\\ &\leqslant 2Lt^{\alpha}\quad(\forall t\in(0,\delta])\end{aligned}\tag{5.20}$$

由于 $0<\alpha\leqslant 1$，故式 (5.20) 右边在 $[0,\delta]$ 上反常可积，故由非负函数瑕积分的比较判别法得 $\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right|$ 在 $[0,\delta]$ 上可积，从而 $\frac{\varphi(t)}{t}$ 在 $[0,\delta]$ 上可积且绝对可积。由定理 5.3 即证。□

为了方便使用，我们引入“分段可微”的概念。

定义 5.3 (分段可微)

已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义。若存在 $[a,b]$ 的一个分割：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，使得按以下方式定义在每个闭子区间 $[x_{i-1},x_i]\ (1\leqslant i\leqslant n)$ 上的函数：

$$g_i(x)=\begin{cases} f(x_{i-1}+0) & x=x_{i-1} \\ f(x) & x\in(x_{i-1},x_i) \\ f(x_i-0) & x=x_i \end{cases} \qquad (1\leqslant i\leqslant n)$$

都是可微的 (在闭区间端点单侧可微)，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上分段可微。♣

下面是本节的主要定理。

定理 5.5 (Fourier 级数收敛定理)

设 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积，并且在 $[-\pi,\pi]$ 上分段可微，则对 $\forall x_0\in[-\pi,\pi]$，$f(x)$ 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 $\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

特别地，若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 $f(x_0)$. ♡

提示：分段可微可以推出 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 1 阶 Lipschitz 条件，再用定理 5.4 即可。

推论 5.2

设 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积。若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可导，则：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\quad (\forall x\in[-\pi,\pi])$$

♡

例题 5.2(Abel) 计算并讨论 $f(x)$ 的 Fourier 级数，其中：

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x\leqslant 2\pi \\ 2\pi & x=0 \end{cases}$$

解 首先先将 $f(x)$ 以 2π 为周期延拓为实数域上的函数 $\tilde{f}(x)$ ($f(x)$ 在 $0,2\pi$ 上的值相等，因此可以直接周期延拓)。将 $f(x)$ 代入 Fourier 系数公式，得：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\mathrm{d}x=2\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=0\quad (n\geqslant 1)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{2}{n}\quad (n\geqslant 1)$$

故 Fourier 级数表达式为：

$$\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx$$

考察延拓后的函数 $\tilde{f}(x)$，其在 $[0,2\pi]$ 上可积且绝对可积，同时分段可微，由定理 5.5 得：

$$\frac{\tilde{f}(x+0)+\tilde{f}(x-0)}{2}=\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx\quad(\forall x\in[0,2\pi])$$

再由 $\tilde{f}(x)$ 的连续性，得：

$$f(x)=x=\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx\quad(\forall x\in(0,2\pi))\tag{5.21}$$

但 $f(0)$ 和 $f(2\pi)$ 的值与 Fourier 级数在 $0,2\pi$ 的值不相等。 □

注 将式 (5.21) 变形，可得：

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx\quad(\forall x\in(0,2\pi))\tag{5.22}$$

式 (5.22) 即为当年 Abel 举的例子。更进一步，我们可以利用式 (5.22) 得到一些有趣的等式。如：在式 (5.22) 中把 x 换成 $2x$，可得：

$$\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{2n}\quad(\forall x\in(0,\pi))\tag{5.23}$$

再用式 (5.22) 减式 (5.23) 得：

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\quad(\forall x\in(0,\pi))\tag{5.24}$$

式 (5.24) 右边的函数项级数决定一个 $(0,\pi)$ 上的常值函数。再令 $x=\frac{\pi}{2}\in(0,\pi)$，得：

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\tag{5.25}$$

像这样，运用函数的 Fourier 级数及定理 5.5，可以得到大量有趣的恒等式。

例题 5.3 将 $f(x)=\cos ax\ (a\notin\mathbb{Z})$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开为 Fourier 级数。

解 首先先将 $f(x)$ 以 2π 为周期延拓为实数域上的函数 $\tilde{f}(x)$ ($f(x)$ 在 $-\pi,\pi$ 上的值相等，因此可以直接周期延拓)。将 $f(x)$ 代入 Fourier 系数公式，结合函数奇偶性，得：

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ax\sin nx\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 \quad (n \geqslant 1) \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos ax\cos nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(a+n)x+\cos(a-n)x\mathrm{d}x \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2a\sin a\pi}{a^2-n^2} \quad (n \geqslant 0)
\end{aligned}
$$

故 Fourier 级数表达式为：

$$\frac{\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\cos nx\right)$$

注意到 $\tilde{f}(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积，在 $x\in\mathbb{R}$ 上连续，故由定理 5.5 得：

$$\tilde{f}(x)=\frac{\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\cos nx\right) \quad (\forall x\in[-\pi,\pi])$$

即：

$$f(x)=\cos ax=\frac{\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\cos nx\right) \quad (\forall x\in[-\pi,\pi]) \tag{5.26}$$

□

注 对式 (5.27) 令 $x=0$，可得：

$$\frac{\pi}{\sin a\pi}=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2} \quad (\forall a\notin\mathbb{Z}) \tag{5.27}$$

令 $x=\pi$，可得：

$$\pi\cot a\pi=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{a^2-n^2} \quad (\forall a\notin\mathbb{Z}) \tag{5.28}$$

其中，式 (5.27) 为**定理4.21**第二个等号的证明提供了关键的一步；式 (5.28) 则为**引理4.1**的证明提供关键等式。

接下来我们考虑 $f(x)$ 只在 $(0,\pi)$ 上有定义的情形。我们需要先对 $f(x)$ 做对称延拓为 $(-\pi,\pi)$ 上的函数，再以 2π 为周期延拓为 $\mathbb{R}$ 上的函数。其中对称延拓的方式有以下两种：

(i) 奇性延拓：即把 $f(x)$ 延拓为 $(-\pi,\pi)$ 上的奇函数，延拓的具体方式如下：

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & x\in(0,\pi) \\ 0 & x=0 \\ -f(-x) & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

此时由奇偶性，$a_n=0 \quad (\forall n\geqslant 0)$，Fourier 级数中只有 sin 项。我们称这样的 Fourier 级数为正弦级数。

(ii) 偶性延拓：即把 $f(x)$ 延拓为 $(-\pi,\pi)$ 上的偶函数，延拓的具体方式如下：

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & x\in(0,\pi) \\ f(-x) & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

此时由奇偶性，$b_n=0 \quad (\forall n\geqslant 1)$，Fourier 级数中只有 cos 项和常项。我们称这样的 Fourier 级数为余弦级数。

最后讨论 $f(x)$ 的周期为 $2l\ (l\in\mathbb{R}^+)$ 的情形。令 $x=\dfrac{lt}{\pi}$，则有：

$$f(x)=f\left(\frac{lt}{\pi}\right)=g(t)$$

则 $g(t)$ 以 2π 为周期。若可以将 $g(t)$ 展开成 Fourier 级数，即有：

$$g(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$$

其中：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos nt\mathrm{d}t \quad (n=0,1,2\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin nt\mathrm{d}t \quad (n=1,2\cdots)$$

则把 x 代入回去，可得：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{5.29}$$

其中：

$$\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2\cdots) \\ b_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \quad (n=1,2\cdots) \end{aligned} \tag{5.30}$$

例题 5.4 把 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 上展开为正弦级数，其中：

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{l}{2} \\ l-x & \dfrac{l}{2}\leqslant x\leqslant l \end{cases}$$

解 对 $f(x)$ 先做奇性延拓 (由于 $f(0)=0$，故可以直接延拓)，再以 $2l$ 为周期做周期延拓得到 $\tilde{f}(x)$ $(x\in\mathbb{R})$。利用式 (5.30)，结合奇偶性得：

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \quad (\forall n\geqslant 0) \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{l}\int_{0}^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x+\frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \\ &= \frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} \quad (\forall n\geqslant 1) \end{aligned}$$

故：

$$b_n=\begin{cases} 0 & n=2k \\ \dfrac{4l}{\pi^2}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2} & n=2k+1 \end{cases} \qquad (k=0,1,\cdots)$$

故正弦级数为：

$$\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{2k+1}{l}\pi x$$

由于 $\tilde{f}(x)$ 在 $[-l,l]$ 上可积且绝对可积，同时分段可微，并在 $\mathbb{R}$ 上连续，故由定理 5.5 得：

$$f(x)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{2k+1}{l}\pi x \quad (\forall x\in[0,l])$$

□

5.3 Fourier 级数的 Cesàro 求和

本节我们讨论连续函数的 Fourier 级数。在 1876 年 Du Bois Reymond 已经举出了连续函数的 Fourier 级数再弱干点发散的反例，因此连续性并不能作为 Fourier 级数收敛的充分条件。保留函数的连续性，其中一个思路是继续给函数添加限制，使得 Fourier 级数收敛，另一个思

路则是修改“收敛”的意义，即抛弃原有的逐点收敛，寻求更宽泛，更弱的收敛性。均值意义下的收敛，便是我们所需要的。

定义 5.4 (Cesàro 意义下收敛，均值意义下收敛)

已知数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，部分和 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$，记：

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 在 **Cesàro** 意义下收敛，记为：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sigma\ (\mathrm{C})$$

♣

注 σ_n 的定义就是部分和序列 $\{S_k\}$ 的前 n 项平均值，因此这种收敛又称均值意义下收敛。

一个必要的验证是 **Cesàro** 意义下收敛要比逐点收敛要更弱。

命题 5.2 (Cesàro 意义下收敛弱于逐点收敛)

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛于 s，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 在 **Cesàro** 意义下收敛，且收敛于 s。

♠

提示： 利用 Stolz 公式。

注 命题 5.2 的逆命题不成立，即级数在均值意义下收敛推不出原来意义下收敛。反例：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$$

我们有：

$$S_{2n+1} = 1 \qquad S_{2n} = 0 \quad (n = 0, 1\cdots)$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 在原来意义下发散。但：

$$\sigma_{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1} \qquad \sigma_{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \quad (n = 0, 1\cdots)$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{1}{2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 在 **Cesàro** 意义下收敛于 $\frac{1}{2}$。

综上均值意义下的收敛可以说是严格弱于原来意义下的收敛。

在数项级数原来意义下收敛的研究中，我们得到一个必要条件，即级数收敛可得到通项收敛于 0。对 **Cesàro** 意义下收敛则不然，上面的例子就是反例。不过对 **Cesàro** 意义下收敛，依然有类似，但更弱的必要条件。

命题 5.3 (Cesàro 意义下收敛的必要条件)

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 在 **Cesàro** 意义下收敛，则：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$$

证明 设级数在均值意义下收敛于 σ。一方面由：

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k$$

故：

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} S_k \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} S_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k + \frac{S_n}{n} \right) \\ &= \sigma - \sigma + \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \end{aligned} \tag{5.31}$$

另一方面：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n} \frac{S_{n-1}}{n-1} \right) \tag{5.32}$$

故结合式 (5.31)(5.32) 即证。 □

为了进一步研究 Fourier 级数在 **Cesàro** 意义下的敛散性，我们需要弄清楚 $\sigma_n(x)$ 的具体表达式。由 5.2 节的我们已经有以下等式：

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x_0+t) + f(x_0-t)) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} \mathrm{d}t \quad (\forall n \geqslant 0)$$

故：

$$\begin{aligned} \sigma_n(x_0) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x_0) \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} (f(x_0+t) + f(x_0-t)) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2n\pi} \int_0^{\pi} (f(x_0+t) + f(x_0-t)) \left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \right)^2 \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{5.33}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (f(x_0+t)+f(x_0-t))F_n(t)\mathrm{d}t$$

其中：

$$F_n(t)=\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}=\frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 \tag{5.34}$$

$F_n(t)$ 被称为 **Fejér** 核，它也可以写成：

$$F_n(t)=\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}=\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}D_k(t) \tag{5.35}$$

其中 $D_k(t)$ 为 Dirichlet 核，定义如 5.2 节式 (5.14) 所示。由式 (5.35)，结合 Dirichlet 核的性质，容易得到 **Fejér** 核的一条重要性质：

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi F_n(t)\mathrm{d}t=1 \tag{5.36}$$

利用上面的计算，便可以证明：在 **Cesàro** 意义下，函数不需要分段可微的条件，只需要有左右极限，即可使 Fourier 级数收敛。

定理 5.6 (Fejér)

设 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积，并且在 $x_0\in[-\pi,\pi]$ 上存在左右极限，则其 Fourier 级数在 x_0 处，在 **Cesàro** 意义下收敛于 $\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$，即：

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx_0+b_n\sin nx_0)=\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0))\ (\mathrm{C})$$

特别地，若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则有：

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx_0+b_n\sin nx_0)=f(x_0)\ (\mathrm{C})$$

证明 由式 (5.33) 即证：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi(f(x_0+t)+f(x_0-t))F_n(t)\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} \tag{5.37}$$

令 $\varphi(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)$，利用式 (5.36)，把式 (5.37) 变为：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\varphi(t)F_n(t)\mathrm{d}t=0 \tag{5.38}$$

一方面，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，使得：

$$|f(x_0+t)-f(x_0+0)|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad|f(x_0-t)-f(x_0-0)|<\frac{\varepsilon}{2}\quad(\forall 0\leqslant t<\delta)$$

故：

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \varphi(t)F_n(t)\mathrm{d}t\right| \\
\leqslant{}& \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^\delta \varphi(t)F_n(t)\mathrm{d}t\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_\delta^\pi \varphi(t)F_n(t)\mathrm{d}t\right| \\
<{}& \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^\delta F_n(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2n\pi}\int_\delta^\pi |\varphi(t)|\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\mathrm{d}t \\
<{}& \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^\pi F_n(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi |\varphi(t)|\frac{1}{(\sin\frac{\delta}{2})^2}\mathrm{d}t\right) \\
={}& \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi |\varphi(t)|\frac{1}{(\sin\frac{\delta}{2})^2}\mathrm{d}t\right)
\end{aligned} \tag{5.39}
$$

当 δ 给定后，由于 $f(x)$ 的可积与绝对可积性及 $\varphi(t)$ 的定义，式 (5.39) 右边第二项是关于 $\frac{1}{n}$ 的有界量，因此 $\exists N \in \mathbb{N}^*$，使得 $\forall n > N$ 都有：

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \varphi(t)F_n(t)\mathrm{d}t\right| < \varepsilon$$

故式 (5.38) 成立，即证。 □

推论 5.3

设 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积，在 $x_0 \in [-\pi,\pi]$ 上存在左右极限，并且其 Fourier 级数在 x_0 处收敛，则必收敛于 $\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$。

提示：利用命题 5.2 和定理 5.6。

更进一步，如果 $f(x)$ 是连续函数，则有下述更强的结果。

定理 5.7 (Fourier 级数均值下一致收敛)

若 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，则它的 Fourier 级数在 Cesàro 意义下在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 $f(x)$。

证明 只需证在 $[-\pi,\pi]$ 上 $\sigma_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$，再利用周期性即可得到 $\mathbb{R}$ 上的一致收敛性。类似于定理 5.6 的证明，令 $\varphi(t) = f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\ (x\in\mathbb{R})$，则有：

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \varphi(t)F_n(t)\mathrm{d}t \tag{5.40}$$

由于 $f(x)$ 在 $x\in\mathbb{R}$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[-2\pi,2\pi]$ 上一致连续，从而对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\,\delta=\delta(\varepsilon)\in(0,\pi)$ 与 x 无关，使得 $\forall t\in(0,\delta)$ 都有：

$$|f(x+t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad |f(x-t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall x\in[-\pi,\pi]) \tag{5.41}$$

故式 (5.40) 变为：

$$\begin{aligned}|\sigma_n(x)-f(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi(t)F_n(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}\varphi(t)F_n(t)\mathrm{d}t\right| + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\varphi(t)F_n(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\triangleq I_1+I_2\end{aligned} \tag{5.42}$$

对 I_1，由式 (5.41) 可得：

$$I_1\leqslant\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{\delta}\varphi(t)F_n(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi(t)F_n(t)\mathrm{d}t=\frac{\varepsilon}{2} \tag{5.43}$$

对 I_2，由于 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，故 $f(x)$ 在 $x\in\mathbb{R}$ 上有界，即 $\exists M$ 使得 $|f(x)|\leqslant M$ $(\forall x\in\mathbb{R})$. 故：

$$|\varphi(t)|\leqslant|f(x+t)|+|f(x-t)|+2|f(x)|\leqslant 4M \quad (\forall x,t\in\mathbb{R})$$

故：

$$I_2\leqslant\frac{4M}{2n\pi}\int_{\delta}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\mathrm{d}t\leqslant\frac{2M}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{(\sin\frac{\delta}{2})^2}\mathrm{d}t=\frac{2M}{n\sin^2\frac{\delta}{2}} \tag{5.44}$$

当 δ 给定后，式 (5.44) 右边是个关于 $\dfrac{1}{n}$ 的有界量，与 x 无关，因此 $\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$ 与 x 无关，使得：

$$I_2<\frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall x\in[-\pi,\pi]) \tag{5.45}$$

结合式 (5.42)(5.43)(5.45) 得：

$$|\sigma_n(x)-f(x)|<\varepsilon \quad (\forall x\in[-\pi,\pi])$$

故 $\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$，即证。 □

作为定理 5.7 的应用，我们给出三角多项式逼近连续函数的定理。

定义 5.5 (三角多项式)

称 $T_n(x)$ 为三角多项式，若：

$$T_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$$

♣

注 Fourier 级数的部分和就是一个三角多项式。

定理 5.8 (Weierstrass 第二逼近定理，三角逼近)

若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，且 $f(-\pi)=f(\pi)$，则 $f(x)$ 可用三角多项式一致逼近，即 $\forall\varepsilon>0$，存在 $T_\varepsilon(x)$ 是三角多项式，使得：

$$|T_\varepsilon(x)-f(x)|<\varepsilon \quad (\forall x\in[-\pi,\pi])$$

提示： 由条件知 $f(x)$ 可以以 2π 为周期延拓为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，而定理 5.7 告诉我们，$\sigma_n(x)$ 就是我们想要的一致逼近。

注 由三角逼近可以导出多项式一致逼近。只需要将一般 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 通过伸缩和减去一个一次函数转化为满足定理 5.8 条件的函数 $g(t)$，对 $g(t)$ 用三角多项式一致逼近后利用三角函数幂级数展开的内闭一致收敛性即可。

5.4 平方平均逼近

在 5.3 节我们已经讨论了连续函数的 Fourier 级数，并得到了定理 5.8。由于一般的可积函数无法保证能用三角多项式一致逼近，因此为了进一步弱化对函数的限制，我们考虑介于可积函数和连续函数之间的函数：可积且平方可积函数。考虑原因如下：

$$f(x)\text{在}[a,b]\text{有界，可积}\Rightarrow |f(x)|,f^2(x)\text{均在}[a,b]\text{可积}$$

$$f(x)\text{在}[a,b]\text{无界，}f^2(x)\text{在}[a,b]\text{反常可积}\Rightarrow |f(x)|,f(x)\text{均在}[a,b]\text{反常可积}$$

其中第二条运用了 $|f(x)|\leqslant\dfrac{1}{2}\big(1+f^2(x)\big)$ 以及非负函数瑕积分的比较判别法。

因此为了方便讨论，我们记：

$$\widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}|f(x),f^2(x)\text{均在}[a,b]\text{上可积}\}$$

则显然有：

$$\widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])\subsetneq\{f:[a,b]\to\mathbb{R}|f(x)\text{均在}[a,b]\text{上可积且绝对可积}\}$$

其中真包含的例子有 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\quad(x\in(0,1))$

下面我们定义 $\widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])$ 上的内积与范数。

定义 5.6 ($\widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])$ 上的内积与范数)

对 $\forall f(x),g(x)\in\widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])$，定义如下映射：

$$\begin{aligned}\langle\,,\,\rangle:\quad \widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])\times\widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b]) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (f,g)\quad &\longmapsto \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

容易验证这个映射是 $\widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])$ 上的一个内积 (此处已经将几乎处处相等的函数视为同一个函数)。

特别地，若 $\langle f,g\rangle=0$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 正交。

更进一步，定义：

$$\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle}=\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\quad(\forall f\in\widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b]))$$

容易验证 $\|\cdot\|$ 是 $\widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])$ 上由内积诱导的范数，称为 L^2 范数。♣

有了内积，便可以参照线性代数的概念，定义正交系与规范正交系。

定义 5.7 (正交函数系，规范正交系)

称 $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}\subset\widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])$ 为 $\widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])$ 上的一个正交函数系，若对 $\forall k,l\geqslant 0$ 都满足：

$$\langle\varphi_k,\varphi_l\rangle=\begin{cases}\lambda_k & k=l\\ 0 & k\neq l\end{cases}$$

更进一步，若 $\lambda_k=1\ (\forall k\geqslant 0)$，则称 $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ 为 $\widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])$ 上的一个规范正交系。♣

注 $\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots\}$ 是 $\widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])$ 上的一个正交函数系；

$\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}},\dfrac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\dfrac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\sqrt{\pi}}},\cdots\right\}$ 是 $\widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])$ 上的一个规范正交系。

注 严格来说，定义 5.7 中两个函数系的指标集应当是一般集合 I(可以不可数)，但是后面的内容只需要用到指标集可数的情形。事实上，$\widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])$ 在赋予内积后构成完备的内积空间，并且可分。利用泛函分析的知识可知它具有可数的规范正交基。

有了规范正交系，我们就可以定义广义 Fourier 级数。

定义 5.8 (广义 Fourier 级数)

已知 $f(x)\in\widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])$，$\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ 为 $\widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])$ 上的一个规范正交系，令：

$$c_n=\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x\quad(\forall n\geqslant 0)$$

称 $\{c_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 为 $f(x)$ 在规范正交系 $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ 下的 Fourier 系数。函数项级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

称为 $f(x)$ 在规范正交系 $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ 下的 Fourier 级数，记为：

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

♣

在定义了内积和广义 Fourier 级数后，我们可以谈论 Fourier 级数在全新意义下的收敛性：平方平均收敛/依 L^2 范数收敛。

定义 5.9 (平方平均收敛，平方平均逼近)

设 $f(x) \in \widetilde{\mathrm{L}}^2([-\pi, \pi])$，如果存在三角多项式序列 $\{T_n(x)\}$，使得：

$$\lim_{n\to\infty} \|f(x) - T_n(x)\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_n(x))^2 \mathrm{d}x = 0$$

则称 $\{T_n(x)\}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上平方平均收敛于 $f(x)$ 或依 L^2 范数收敛于 $f(x)$，$f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可用三角多项式平方平均逼近。

♣

注 定义 5.9 实际上只定义了三角多项式的平方平均逼近。对一般的函数列也可以定义平方平均逼近。

接下来我们先对一般的规范正交系的广义 Fourier 级数讨论平方平均逼近，最后再应用到三角函数系上。

定理 5.9

已知 $f(x) \in \widetilde{\mathrm{L}}^2([a, b])$，$\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{+\infty}$ 为 $\widetilde{\mathrm{L}}^2([a, b])$ 上的一个规范正交系，$\{c_k\}_{k=0}^{+\infty}$ 是 f 在规范正交系 $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ 下的 Fourier 系数，则：

(1)(Fourier 系数的最优性) 对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 以及 $\forall\, T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)$，都有：

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k \right\| \leqslant \left\| f - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\| \tag{5.46}$$

(2) 对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$，成立等式：

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2$$

进而有 Bessel 不等式：

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^2 \leqslant \|f\|^2 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

(3) 成立不等式：

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \leqslant \|f\|^2 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \tag{5.47}$$

♡

证明 直接计算得：

$$\begin{aligned}
\|f(x)-T_n(x)\|^2 &= \langle f(x)-T_n(x), f(x)-T_n(x)\rangle \\
&= \langle f(x), f(x)\rangle - 2\langle f(x), T_n(x)\rangle + \langle T_n(x), T_n(x)\rangle \\
&= \|f\|^2 - 2\sum_{k=0}^{n} \alpha_k c_k + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2 \qquad (5.48)\\
&= \|f\|^2 + \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k - c_k)^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2
\end{aligned}$$

特别地，当 $\alpha_k = c_k \ (\forall k \geqslant 0)$ 时，代入式 (5.48) 得：

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \tag{5.49}$$

故 (2) 成立。又结合式 (5.48)(5.49) 得：

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k \right\|^2 = \left\| f - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k - c_k)^2 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \tag{5.50}$$

故 (1) 成立。最后由式 (5.49) 得：

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^2 \leqslant \|f\|^2 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \tag{5.51}$$

其中式 (5.51) 左边是正项级数的部分和，右边是 $f(x)$ 的 L^2 范数，由于 $f(x) \in \widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])$，故右边是有限正数，因此左边正项级数部分和有界，从而收敛。最后对式 (5.51) 令 $n \to \infty$ 即证 (3) 成立。 □

注 式 (5.46) 实际上告诉我们广义 Fourier 系数定义的合理性，因为它使得规范正交系的线性组合与 $f(x)$ 的平方平均误差最小，说明如此定义的广义 Fourier 级数是理想的平方平均逼近工具。

在 $\mathbb{R}^n$ 上的规范正交基成立 n 维的勾股定理。同样地，我们把 $\widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])$ 的规范正交系 $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ 看成 $\widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])$ 的一组基，则对 $f(x) \in \widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])$，若有 (此处的收敛为平方平均收敛)：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

我们也可以把 $\{c_0, c_1, c_2, \cdots\}$ 看成 f 在这组基下的坐标，一个自然的问题是是否仍有勾股定理成立，即是否成立：

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \tag{5.52}$$

对比式 (5.47)(5.52)，这也就是式 (5.47) 是否能够取等。但是这并不显然，为了方便讨论，我们将其作为新的定义。

定义 5.10 (Parseval 等式，完备规范正交系)

已知 $f(x) \in \widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])$，$\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{+\infty}$ 为 $\widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])$ 上的一个规范正交系，$\{c_k\}_{k=0}^{+\infty}$ 是 f 在规范正交系 $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ 下的 Fourier 系数，则称等式：

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$$

为 Parseval 等式或封闭性方程。

若对 $\forall f \in \widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])$，均有 Parseval 等式成立，则称 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{+\infty}$ 在 $\widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])$ 上是完备的。♣

由定理 5.9 立得：

推论 5.4 (完备正交系的等价刻画)

规范正交系 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{+\infty}$ 在 $\widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])$ 上是完备的 $\iff$ $\forall f \in \widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])$ 都有：

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k \right\|^2 = 0$$

即 $\forall f \in \widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])$ 都可以用它的 Fourier 级数的部分和平方平均逼近。♡

完备规范正交系还有着类似于 $\mathbb{R}^n$ 的基的极大无关性质。

命题 5.4

设 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{+\infty}$ 为 $\widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])$ 上的完备规范正交系，则：

(1) 去掉其中任何一个函数，余下的部分仍旧规范正交，但一定不完备；

(2) 对 $\forall \psi(x) \in \widetilde{\mathrm{L}}^2([a,b])$ 满足 $\|\psi\| = 1$，$\{\psi(x)\} \cup \{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{+\infty}$ 必定不是完备规范正交系。♠

证明 两个都使用的反证法进行证明。

(1) 不妨设去掉 $\varphi_0(x)$。若 $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$ 仍完备，则由 Parseval 等式：

$$\|\varphi_0\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \tag{5.53}$$

又由正交性：

$$\alpha_n = \langle \varphi_0, \varphi_n \rangle = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

故式 (5.53) 变为：

$$\|\varphi_0\|^2 = 0$$

与 $\varphi_0(x)$ 的规范性：$\|\varphi_0\| = 1$ 矛盾。

(2) 若 $\phi(x)$ 跟 $\varphi_n(x)$ $(\forall n \geqslant 0)$ 都正交，则：

$$\langle \psi, \varphi_n \rangle = 0 \quad (\forall n \geqslant 0)$$

故由于 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{+\infty}$ 完备规范正交，由 Parseval 等式得：

$$\|\psi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \psi, \varphi_n \rangle^2 = 0$$

与 $\|\psi\| = 1$ 矛盾。 □

下面介绍本节主要定理。

定理 5.10 (规范三角函数系是完备的)

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \cdots \right\}$ 是 $\widetilde{\mathrm{L}}^2([-\pi, \pi])$ 上的一个完备规范正交系。

注 此定理的证明我们放到本节最后，它的应用才是本节的重点。

定理 5.11 (Fourier 级数平方平均逼近定理)

已知 $f(x) \in \widetilde{\mathrm{L}}^2([-\pi, \pi])$，$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 是其关于三角函数系的 Fourier 级数 (按 5.1 节的定义)，则：

(1) $f(x)$ 可用这个 Fourier 级数的部分和平方平均逼近；

(2)(Bessel 不等式)

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \mathrm{d}x \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

(3)(Parseval 等式)

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \mathrm{d}x$$

证明 (1) 由定理 5.10 和推论 5.4 可得。

对 (2)(3)：由于规范三角函数系为：

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \varphi_{2k-1}(x) = \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \quad \varphi_{2k}(x) = \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

故 Fourier 系数 (按本节定义) 为：

$$\begin{aligned} c_0 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_0(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0 \\ c_{2k-1} &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_{2k-1}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}a_k \quad (k=1,2,\cdots) \\ c_{2k} &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_{2k}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}b_k \quad (k=1,2,\cdots) \end{aligned} \tag{5.54}$$

故由式 (5.54) 结合 Bessel 不等式与 Parseval 等式定义得 (2)(3) 成立。 □

利用定理 5.10,5.11 结合函数连续性，可以得到以下重要结论。

推论 5.5

若 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数 $f(x)$ 与三角函数系的每个函数都正交，则必有：

$$f(x) = 0 \ \ (\forall x \in [-\pi,\pi])$$

提示：运用命题 5.4 的证明和定理 5.10，结合函数连续性。

推论 5.6 (连续函数 Fourier 级数唯一性)

若连续函数 $f(x),g(x)$ 有相同的 Fourier 级数，则 $f(x),g(x)$ 必恒等。

提示：运用定理 5.11(3)，结合函数连续性。

由定理 5.11 的 Parseval 等式可以得到其推广形式。

命题 5.5

设 $f(x),g(x) \in \widetilde{\mathrm{L}}^2([-\pi,\pi])$，且：

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \quad g(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx + \beta_n\sin nx)$$

则有下列推广的 Parseval 等式成立：

$$\frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

提示：利用 $(f+g)^2 + (f-g)^2 = 4fg$，分别写出 $f+g, f-g$ 的 Parseval 等式再相减即可。

注 在命题 5.5 中令 $g(x) = f(x)$ $(\forall x \in [-\pi,\pi])$，则可重新得到定理 5.11 中的 Parseval 等式。

利用推广的 Parseval 等式可以得到一个令人意外的结果。

定理 5.12 (Fourier 级数逐项积分定理)

设 $f(x) \in \widetilde{\mathrm{L}}^2([-\pi,\pi])$，且 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$，则对 $\forall [a,b] \subset [-\pi,\pi]$，有：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{a_0}{2}\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\mathrm{d}x$$

提示：在命题 5.5 中令:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

计算推广的 Parseval 等式就能得到结果。

注 注意定理 5.12 中不需要 Fourier 级数跟 $f(x)$ 的任何收敛关系，只需要 Fourier 级数存在，就可以进行逐项积分，这是让人意外的。

注 定理 5.12 可以导出某些函数的一致收敛性。如在定理 5.12 中令 $a = 0, b = x \in [-\pi,\pi]$，可得：

$$\begin{aligned} h(x) &\triangleq \int_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos nx + \frac{a_n}{n}\sin nx\right) \end{aligned} \tag{5.55}$$

由定理 5.11(3) 的 Parseval 等式可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 均收敛，又：

$$\frac{|a_n|}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + a_n^2\right) \qquad \frac{|b_n|}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + b_n^2\right) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

故由正项级数的比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|b_n|}{n}$ 均收敛。最后由式 (5.55):

$$\left|-\frac{b_n}{n}\cos nx + \frac{a_n}{n}\sin nx\right| \leqslant \frac{|a_n| + |b_n|}{n} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}^*, x \in [-\pi,\pi])$$

故由函数项级数的 Weierstrass 判别法，$h(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 一致收敛。

利用 Parseval 等式并对 $f(x)$ 多加限制，仿照上述讨论，可以得到下面有关 Fourier 级数一致收敛的定理。

定理 5.13 (Fourier 级数的一致收敛性)

设 $f(x)$ 以 2π 为周期，为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，在 $[-\pi,\pi]$ 上分段可微，且有 $f(x)\in\widetilde{\mathrm{L}}^2([-\pi,\pi])$。则 $f'(x)$ 的 Fourier 级数在 $\mathbb{R}$ 上绝对一致收敛于 $f(x)$。

证明 首先由定理**5.5**可得 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $[-\pi,\pi]$ 上逐点收敛于 $f(x)$，进而由周期性，在 $\mathbb{R}$ 上逐点收敛于 $f(x)$，即：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\quad(\forall x\in\mathbb{R})\tag{5.56}$$

对 $f'(x)$，设 $f'(x)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$，其中：

$$\begin{aligned}\alpha_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}(f(\pi)-f(-\pi))=0\\ \alpha_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\mathrm{d}x=nb_n\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)\\ \beta_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\mathrm{d}x=-na_n\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)\end{aligned}\tag{5.57}$$

由于 $f'(x)\in\widetilde{\mathrm{L}}^2([-\pi,\pi])$，故由 Parseval 等式，结合式 (5.57) 得：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'^2(x)\mathrm{d}x=\frac{\alpha_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^2+\beta_n^2)=\sum_{n=1}^{\infty}(n^2a_n^2+n^2b_n^2)$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2a_n^2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2b_n^2$ 均收敛。又有：

$$|a_n|=\frac{n|a_n|}{n}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+n^2a_n^2\right)\qquad|b_n|=\frac{n|b_n|}{n}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+n^2b_n^2\right)\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)$$

故由正项级数的比较判别法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 均收敛。最后由式 (5.56)：

$$|a_n\cos nx+b_n\sin nx|\leqslant|a_n|+|b_n|\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*,x\in\mathbb{R})$$

故由函数项级数的 Weierstrass 判别法得 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 $f(x)$。 □

例题 5.5 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，$f'(x)\in\widetilde{\mathrm{L}}^2([-\pi,\pi])$，$f(\pi)=f(-\pi)$，且有：

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$$

则有：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x$$

取等当且仅当 $f(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x \ \ (\forall x \in [-\pi,\pi], \alpha,\beta \in \mathbb{R})$.

解 设 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$. 首先由定理**5.5**可得:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \quad (\forall x \in [-\pi,\pi]) \tag{5.58}$$

一方面由于 $f(x) \in \mathrm{C}([-\pi,\pi])$，故 $f(x) \in \widetilde{\mathrm{L}}^2([-\pi,\pi])$。在定理 5.12 中令 $a=-\pi, b=\pi$ 可得:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\mathrm{d}x$$

故由条件 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0$ 得 $a_0 = 0$. 从而对 $f(x)$ 由 Parseval 等式，得:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \tag{5.59}$$

另一方面，与定理 5.13 的证明同理可得:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}(n^2a_n^2 + n^2b_n^2) \tag{5.60}$$

故结合式 (5.59)(5.60) 可得不等式成立，且取等条件是 $a_n = b_n = 0 \ \ (\forall n \geqslant 2)$，代入式 (5.58) 得:

$$f(x) = a_1\cos x + b_1\sin x \quad (\forall x \in [-\pi,\pi])$$

这里也已经代入了前面证得的 $a_0 = 0$。其中 a_1, b_1 可以是任意实数。 $\square$

最后我们证明定理 5.10。

证明 设 $f(x)$ 在规范三角函数系下的 Fourier 级数 (按本节定义) 为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$，记:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

即证:

$$\lim_{n\to\infty}\|f(x) - S_n(x)\|^2 = 0 \tag{5.61}$$

(i) 若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 有界，则在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积。不妨设 $f(\pi) = f(-\pi)$，仅改变至多一个点的值不会影响函数的可积性以及积分值，自然也不会改变其 Fourier 级数。由数分 A1 关于 Riemann 可积性的知识，得 $\forall \varepsilon > 0$，存在分割 $T: -\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = \pi$，使得:

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4\Omega} \tag{5.62}$$

其中 ω_i 为 f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅，Ω 为 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上的振幅，$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. 用直线连接 $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$，$(x_i, f(x_i))$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$，得到折线 $g(x)$。则 $g(x)$ 满足：$g(x) \in \mathrm{C}([-\pi, \pi])$，$g(-\pi) = f(-\pi) = f(\pi) = g(\pi)$，且：

$$|f(x) - g(x)| < \omega_i \quad (\forall x \in [x_{i-1}, x_i], 1 \leqslant i \leqslant m) \tag{5.63}$$

故结合式 (5.62)(5.63)：

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 \mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - g(x)|^2 \mathrm{d}x \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{m} \omega_i^2 \Delta x_i < \Omega \\
&\leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} \omega_i \Delta x_i \right) \\
&< \Omega \cdot \frac{\varepsilon}{4\Omega} \\
&= \frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned} \tag{5.64}$$

对 $g(x)$，由于 $g(x) \in \mathrm{C}([-\pi, \pi])$，$g(-\pi) = g(\pi)$，故由 Weierstrass 第二逼近定理 (定理**5.8**) 得，存在 $T_{n_0}(x)$ 三角多项式，使得：

$$|g(x) - T_{n_0}(x)| < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}} \quad (\forall x \in [-\pi, \pi])$$

故：

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - T_{n_0}(x)|^2 \mathrm{d}x < 2\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}} \right)^2 = \frac{\varepsilon}{4} \tag{5.65}$$

故结合式 (5.64)(5.65) 可得：

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_{n_0}(x)|^2 \mathrm{d}x &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} (|f(x) - g(x)| + |g(x) - T_{n_0}(x)|)^2 \mathrm{d}x \\
&\leqslant 2\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 \mathrm{d}x + 2\int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - T_{n_0}(x)|^2 \mathrm{d}x \\
&< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} \\
&= \varepsilon
\end{aligned} \tag{5.66}$$

利用 Fourier 系数的最优性 (定理**5.9**(1)) 得：

$$\|f(x)-S_{n_0}(x)\|^2 \leqslant \|f(x)-T_{n_0}(x)\|^2 \tag{5.67}$$

又由定理 5.9(2) 得：

$$\|f(x)-S_n(x)\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \quad (\forall n \geqslant 0) \tag{5.68}$$

故结合式 (5.66)~(5.68) 得：

$$\|f(x)-S_n(x)\|^2 \leqslant \|f(x)-S_{n_0}(x)\|^2 < \varepsilon \quad (\forall n > n_0)$$

从而式 (5.61) 成立。

(ii) 若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 无界，则 $f(x), f^2(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上均反常可积。不妨设 π 为唯一瑕点，由瑕积分定义，$\exists\eta>0$，使得：

$$\int_{\pi-\eta}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{4} \tag{5.69}$$

设：

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x) & -\pi\leqslant x\leqslant \pi-\eta \\ 0 & \pi-\eta<x\leqslant\pi \end{cases} \qquad f_2(x)=\begin{cases} 0 & -\pi\leqslant x\leqslant \pi-\eta \\ f(x) & \pi-\eta<x\leqslant\pi \end{cases}$$

则 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ $(\forall x\in[-\pi,\pi])$，且 $f_1(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 有界，因而在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积，由 (i) 得存在 $T_{n_0}(x)$ 为三角多项式，使得：

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_1(x)-T_{n_0}(x)|^2\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{4} \tag{5.70}$$

故结合式 (5.69)(5.70) 得：

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-T_{n_0}(x)|^2\mathrm{d}x &\leqslant 2\int_{-\pi}^{\pi} |f_1(x)-T_{n_0}(x)|^2\mathrm{d}x + 2\int_{-\pi}^{\pi} f_2^2(x)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{-\pi}^{\pi} |f_1(x)-T_{n_0}(x)|^2\mathrm{d}x + 2\int_{\pi-\eta}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x \\
&< 2\cdot\frac{\varepsilon}{4} + 2\cdot\frac{\varepsilon}{4} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

再类比 (i) 的证明可得在 (ii) 中仍有式 (5.61) 成立。 □

5.5 Fourier 积分与 Fourier 变换

前面 5.1~5.4 节对 Fourier 级数的讨论都是建立在有限闭区间的基础上的，这是因为在有限闭区间下我们才可以对函数进行周期延拓。那么对定义在 $\mathbb{R}$ 上非周期函数，对给定的 x_0，我们

可以任意选取 $x_0 \in [a,b]$，在 $[a,b]$ 上考虑 Fourier 级数，但由于 Fourier 系数是通过在 $[a,b]$ 上积分得到的，因此我们不能保证 Fourier 级数与 $[a,b]$ 的选取无关。为了表达式的统一，我们考虑在 $\mathbb{R}$ 上积分。

定义 5.11 (Fourier 系数的推广)

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积，定义：

$$a(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ut\mathrm{d}t \quad (u \in \mathbb{R})$$

$$b(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ut\mathrm{d}t \quad (u \in \mathbb{R})$$

♣

注 对比 Fourier 级数中 Fourier 系数的定义可知，这里只是将积分区域和自变量 u 的取值范围做了改变。另外由于绝对可积性，定义 5.11 是良好的，事实上定义中的两个含参变量积分关于 $u \in \mathbb{R}$ 都是一致收敛的。

进一步，我们定义 Fourier 级数的推广，Fouier 积分。

定义 5.12 (Fourier 积分)

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积，称 $f(x)$ 的 Fourier 积分为：

$$\int_0^{+\infty}(a(u)\cos ux + b(u)\sin ux)\mathrm{d}u$$

记为：

$$f(x) \sim \int_0^{+\infty}(a(u)\cos ux + b(u)\sin ux)\mathrm{d}u$$

记部分和为：

$$S(\lambda, x) = \int_0^{\lambda}(a(u)\cos ux + b(u)\sin ux)\mathrm{d}u \quad (\forall\lambda > 0)$$

♣

想要研究 Fourier 积分，必然是从部分和入手。然而定义 5.12 中部分和定义良好却不显然 (即部分和可能根本不存在)，见下面的命题。

命题 5.6 (Fourier 系数推广的一致连续性)

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积，则定义 5.11 中定义的 $a(u), b(u)$ 在 $u \in \mathbb{R}$ 上一致连续。

♠

证明 下面只对 $a(u)$ 进行证明，$b(u)$ 同理。由于：

$$\begin{aligned}|a(u_1) - a(u_2)| &= \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos u_1 t - \cos u_2 t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)||\cos u_1 t - \cos u_2 t|\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{5.71}$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{-A}|f(t)|\mathrm{d}t+\int_{A}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t\right)+\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{A}|f(t)||\cos u_1 t-\cos u_2 t|\mathrm{d}t$$

$$\triangleq I_1+I_2 \quad (\forall u_1,u_2\in\mathbb{R})$$

其中 $A>0$ 为待定常数。对 I_1，由于 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists A_0=A_0(\varepsilon)>0$，使得：

$$\int_{-\infty}^{-A_0}|f(t)|\mathrm{d}t<\frac{\pi\varepsilon}{4}\qquad \int_{A_0}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<\frac{\pi\varepsilon}{4}$$

故在 I_1 中令 $A=A_0$，得：

$$I_1<\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi\varepsilon}{4}+\frac{\pi\varepsilon}{4}\right)=\frac{\varepsilon}{2} \tag{5.72}$$

对 I_2，在 $A=A_0>0$ 确定后由于 $\cos x$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续，故 $\exists\eta>0$，使得 $\forall|u_1-u_2||t|<\eta$ 都有：

$$|\cos u_1 t-\cos u_2 t|<\min\left\{\frac{\pi\varepsilon}{2}\left(\int_{-A}^{A}|f(t)|\mathrm{d}t\right)^{-1},1\right\}\triangleq\delta \tag{5.73}$$

其中式 (5.73) 右边为 1，若 $\int_{-A}^{A}|f(t)|\mathrm{d}t=0$.

故 $\forall|u_1-u_2|<\dfrac{\eta}{A_0}$，都有：

$$I_2\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{A}|f(t)|\mathrm{d}t\cdot\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{2},0\right\}<\frac{\varepsilon}{2} \tag{5.74}$$

最后结合式 (5.71)(5.72)(5.74) 得：

$$|a(u_1)-a(u_2)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \quad \left(\forall|u_1-u_2|<\frac{\eta}{A_0},u_1,u_2\in\mathbb{R}\right)$$

故 $a(u)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续。 □

注 由命题 5.6 可知，对 $\forall\lambda>0$，$S(\lambda,x)$ 的被积函数 $a(u)\cos ux+b(u)\sin ux$ 关于 $u\in[0,\lambda]$ 连续，从而 Riemann 可积，故 $S(\lambda,x)$ $(\forall\lambda>0)$ 存在，定义 5.12 是良好的。

类似 5.2 节的研究方法，我们先研究部分和的表达式。

引理 5.1 (Fourier 积分部分和表达式)

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积，则 $\forall\lambda>0,x\in\mathrm{R}$ 都有：

$$S(\lambda,x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t$$

♡

证明 直接计算得：

$$S(\lambda,x)=\int_0^{\lambda}\int_0^{\lambda}(a(u)\cos ux+b(u)\sin ux)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ut\cos ux + \sin ut\sin ux\mathrm{d}t\mathrm{d}u \tag{5.75}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(t-x)\mathrm{d}t\mathrm{d}u$$

先证明对 $\forall\lambda > 0, x \in \mathbb{R}$，以下等式成立：

$$\int_0^{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(t-x)\mathrm{d}t\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\lambda} f(t)\cos u(t-x)\mathrm{d}u\mathrm{d}t \tag{5.76}$$

由命题 5.6 结合式 (5.75) 知式 (5.76) 左边存在，并且有：

$$|f(t)\cos u(t-x)| \leqslant |f(t)| \quad (\forall u, t \in \mathbb{R})$$

又 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积，故由含参变量积分的 Weierstrass 判别法得 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(t-x)\mathrm{d}t$ 关于 $u \in \mathbb{R}$ 一致收敛。从而由定理**4.14**(实际上是类似于定理 4.14 的证明) 可得式 (5.76) 等号成立。

故结合式 (5.75)(5.76) 可得：

$$\begin{aligned}
S(\lambda, x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\lambda} f(t)\cos u(t-x)\mathrm{d}u\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} (f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

□

从引理 5.1 中可以看出 $S(\lambda, x)$ 的表达式跟 Fourier 级数部分和的表达式有比较强的相似性，被积函数里都有类似的“核结构”。与 5.2 节类似，对 Fourier 积分也有对应的局部化定理与 Dini 判别法。

定理 5.14 (Fourier 积分的局部化定理)

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积，则 $f(x)$ 的 Fourier 积分在 x_0 处是否收敛，收敛于何值，只与 $f(x)$ 在 x_0 附近的行为有关。

♡

证明 对 $\forall\delta > 0$，由引理 5.1 得：

$$\begin{aligned}
S(\lambda, x_0) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} (f(x_0+t)+f(x_0-t))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} (f(x_0+t)+f(x_0-t))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{+\infty} (f(x_0+t)+f(x_0-t))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\triangleq I_1 + I_2 \tag{5.77}$$

对 I_2，由于：

$$\int_\delta^{+\infty}\left|\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t}\right|\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\delta}\int_\delta^{+\infty}|f(x_0+t)+f(x_0-t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{\delta}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t \tag{5.78}$$

又 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积，故 $\dfrac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t}$ 在 $t\in\mathbb{R}$ 上可积且绝对可积，故由定理**5.1**即 Riemann-Lebesgue 定理可得：

$$\lim_{\lambda\to+\infty} I_2 = \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_\delta^{+\infty}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t}\sin\lambda t\mathrm{d}t = 0$$

最后对式 (5.77) 令 $\lambda\to+\infty$ 得：

$$\lim_{\lambda\to+\infty} S(\lambda,x) = \lim_{\lambda\to+\infty} I_1 \quad (\forall x\in\mathbb{R})$$

故 $f(x)$ 的 Fourier 积分在 x_0 处是否收敛，收敛于何值，只与 $f(x)$ 在 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ $(\forall\delta>0)$ 的行为有关。 □

定理 5.15 (Fourier 积分的 Dini 判别法)

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积。对固定的 $x_0, s\in\mathbb{R}$，记：

$$\varphi(t) = f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s \quad (\forall t\in\mathbb{R})$$

若 $\exists\,\delta>0$，使得 $\dfrac{\varphi(t)}{t}$ 在 $[0,\delta]$ 上可积且绝对可积，则有：

$$\lim_{\lambda\to+\infty} S(\lambda,x_0) = s$$

♡

证明 由于 $\lambda>0$，故由例题**4.7**得：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

故：

$$\begin{aligned}
&S(\lambda,x_0)-s\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}(f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s)\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t}\sin\lambda t\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\varphi(t)}{t}\sin\lambda t\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_\delta^{+\infty}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t}\sin\lambda t\mathrm{d}t-\frac{1}{\pi}\int_\delta^{+\infty}\frac{2s}{t}\sin\lambda t\mathrm{d}t\\
&\triangleq I_1+I_2-I_3
\end{aligned} \tag{5.79}$$

在定理 5.14 的证明中我们已经得到：

$$\lim_{\lambda\to+\infty} I_2 = 0 \tag{5.80}$$

又由可积与绝对可积条件，再次运用 Riemann-Lebesgue 定理可得：

$$\lim_{\lambda\to+\infty} I_1 = 0 \tag{5.81}$$

对 I_3，有：

$$I_3 = \frac{1}{\pi}\int_\delta^{+\infty}\frac{2s}{t}\sin\lambda t\mathrm{d}t \xlongequal{u=\lambda t} \frac{2s}{\pi}\int_{\lambda\delta}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u \tag{5.82}$$

由于 δ 固定，是式 (5.82) 右边的无穷积分收敛，故令 $\lambda\to+\infty$，由无穷积分收敛的定义得：

$$\lim_{\lambda\to+\infty} I_3 = 0 \tag{5.83}$$

最后对式 (5.79) 令 $\lambda\to+\infty$，结合式 (5.80)(5.81)(5.83) 可得：

$$\lim_{\lambda\to+\infty} S(\lambda,x) = s$$

□

由 Dini 判别法我们可以得到 Fourier 积分收敛定理。

定理 5.16 (Fourier 积分收敛定理)

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积，在 x_0 处有广义左右导数，则 $f(x)$ 的 Fourier 积分在 x_0 处收敛于 $\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$，即：

$$\int_0^{+\infty}(a(u)\cos ux_0 + b(u)\sin ux_0)\mathrm{d}u = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

特别地，若 $f(x)$ 在 x_0 处导数存在，则有：

$$\int_0^{+\infty}(a(u)\cos ux_0 + b(u)\sin ux_0)\mathrm{d}u = f(x_0)$$

♡

证明 在定理 5.15 中令 $s=\dfrac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0))$，由于 $f(x)$ 在 x_0 处有广义左右导数，故：

$$\lim_{t\to0^+}\frac{\varphi(t)}{t} = \lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} - \lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t} = f'_+(x_0) - f'_-(x_0)$$

因此 $\dfrac{\varphi(t)}{t}$ 在 $[0,\delta]$ $(\forall\delta>0)$ 上有界。再结合 $f(x)$ 在 $[0,\delta]$ 可积且绝对可积，由数分 A1 的 Lebesgue 定理不难得 $\dfrac{\varphi(t)}{t}$ 在 $[0,\delta]$ 上可积且绝对可积。从而由定理 5.15，即证。 □

注 将式 (5.75) 和定理 5.16 结合，在满足一定条件下，有如下等式：

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(t-x)\mathrm{d}t\mathrm{d}u \tag{5.84}$$

式 (5.84) 称为 f 的 Fourier 积分公式。

接下来我们介绍 Fourier 变换。接下来的内容我们均假定：$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$，其中 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 为 Schwarz 空间，它的定义为：

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}) \xlongequal{\Delta} \left\{ f \in \mathrm{C}^{\infty}(\mathbb{R}) \middle| f^{(l)}\text{快速衰减，且}\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| < +\infty \ \forall k, l \geqslant 0 \right\}$$

在这个假定下，许多交换积分次序需要的条件都能够满足，因此我们不再考虑交积分次序的合理性。更重要的是定理 5.16 对 $x \in \mathbb{R}$ 成立，下面的内容全部围绕 Fourier 积分公式展开。

首先我们考虑 $f(x)$ 具有良好对称性下的 Fourier 积分。

(i) 若 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的偶函数，则：

$$a(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ut\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos ut\mathrm{d}t$$

$$b(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ut\mathrm{d}t = 0$$

故：

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} (a(u)\cos ux + b(u)\sin ux)\mathrm{d}u \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos ux\mathrm{d}u \int_0^{+\infty} f(t)\cos ut\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{5.85}$$

我们称式 (5.85) 为 Fourier 余弦公式。令：

$$g(u) \xlongequal{\Delta} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\cos ut\mathrm{d}t$$

则式 (5.85) 变为：

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} g(u)\cos xu\mathrm{d}u$$

可以看到，$g(u)$ 与 $f(x)$ 以完全相同的形式相互表示。我们称 g 为 f 的 Fourier 余弦变换，称 f 为 g 的 Fourier 余弦变换反变换。

(ii) 若 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，则：

$$b(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ut\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin ut\mathrm{d}t$$

$$a(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ut\mathrm{d}t = 0$$

故：

$$f(x) = \int_0^{+\infty} (a(u)\cos ux + b(u)\sin ux)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin ux \mathrm{d}u \int_0^{+\infty} f(t) \sin ut \mathrm{d}t \tag{5.86}$$

我们称式 (5.86) 为 Fourier 正弦公式。令：

$$g(u) \triangleq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin ut \mathrm{d}t$$

则式 (5.86) 变为：

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} g(u) \sin xu \mathrm{d}u$$

同样地，$g(u)$ 与 $f(x)$ 以完全相同的形式相互表示。我们称 g 为 f 的 Fourier 正弦变换，称 f 为 g 的 Fourier 正弦变换反变换。

例题 5.6 $f(x) = \mathrm{e}^{-\beta x}$ $(\beta > 0, x > 0)$ 求 $f(x)$ 的 Fourier 余弦变换和正弦变换。

解 先把 $f(x)$ 延拓为 $\mathbb{R}$ 上的偶/奇函数，易知延拓后的函数满足定理 5.16。直接计算得：

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos ut \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\beta t} \cos ut \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta}{\beta^2 + u^2}$$

$$h(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin ut \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\beta t} \sin ut \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{u}{\beta^2 + u^2}$$

其中 $g(u)$ 为所求的余弦变换，$h(u)$ 为所求的正弦变换。 □

注 对所求的 $g(u), h(u)$ 分别做 Fourier 余弦逆变换和正弦逆变换，可得：

$$\mathrm{e}^{-\beta x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta}{\beta^2 + u^2} \cos xu \mathrm{d}u$$

$$\mathrm{e}^{-\beta x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{u}{\beta^2 + u^2} \sin xu \mathrm{d}u$$

故：

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xu}{\beta^2 + u^2} \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2\beta} \mathrm{e}^{-\beta x} \quad (x, \beta > 0)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{u \sin xu}{\beta^2 + u^2} \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} \mathrm{e}^{-\beta x} \quad (x, \beta > 0)$$

这里我们再次得到了 Laplace 积分 (**例题4.8**) 的结果。

Fourier 余弦变换和正弦变换都只能对在 $\mathbb{R}$ 上对称性良好的函数使用，或者是对仅在 $(0, +\infty)$ 上有定义的可积且绝对可积函数使用 (需要做对称延拓)。为了得到一般函数的 Fourier 变换，我们需要寻求 Fourier 积分的复数形式。

考虑 Fourier 积分公式：

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(t-x)\mathrm{d}t\mathrm{d}u$$

注意到：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(t-x)\mathrm{d}t$$

关于 u 是 $\mathbb{R}$ 上的偶函数，故：

$$\begin{aligned}&f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(t-x)\mathrm{d}t\mathrm{d}u\\&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin u(t-x)\mathrm{d}t\mathrm{d}u=0\end{aligned}\tag{5.87}$$

将式 (5.87) 相加，得：

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(x-t)+\mathrm{i}\sin u(x-t)\mathrm{d}t\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}u(x-t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}u\end{aligned}\tag{5.88}$$

我们称式 (5.88) 为 Fourier 积分的复数形式。

由此我们可以给出 Fourier 变换的定义。

定义 5.13 (Fourier 变换)

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积，称：

$$\hat{f}(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ut}\mathrm{d}t$$

为 f 的 Fourier 变换。又有：

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\mathrm{d}u$$

称上式为 f 的 Fourier 反变换。♣

注 $f(x)$ 也称为本函数，自变量 x 称为时间变量；$\hat{f}(u)$ 也称为像函数，自变量 u 称为频率变量。

注 5.1 节定义的 Fourier 级数可视为 Fourier 变换的离散情形。设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积，且满足：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\tag{5.89}$$

由于：

$$\cos nx = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}) \qquad \sin nx = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx})$$

故式 (5.89) 右边变为：

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx+b_n \sin nx) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}+\frac{a_n+\mathrm{i}b_n}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \tag{5.90}$$

其中：

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{a_0}{2}\\
c_n &= \frac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2}\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x - \mathrm{i}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x\\
c_{-n} &= \frac{a_n+\mathrm{i}b_n}{2}\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

如果我们将 $f(x)$ 视为定义在 $\mathbb{R}$ 上，但在 $[-\pi,\pi]$ 之外取值恒为 0 的函数，则 $\{c_n\}$ 有统一的表达式：$c_n = \hat{f}(n)\ \ (\forall n\in\mathbb{Z})$。从而式 (5.89) 变为：

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \tag{5.91}$$

其中：

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x \quad (\forall n\in\mathbb{Z}) \tag{5.92}$$

式 (5.91)(5.92) 分别对应离散的 Fourier 变换和离散的 Fourier 反变换。

例题 5.7 求 $f(x)$ 的 Fourier 变换，其中：

$$f(x) = \begin{cases}\mathrm{e}^{-\beta x} & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases} \qquad (\beta>0)$$

解 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可积且绝对可积，故直接计算得：

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ut}\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{i}u)t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi(\beta+\mathrm{i}u)}\left(\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{i}u)t}\Big|_{+\infty}^{0}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi(\beta+\mathrm{i}u)}
\end{aligned}
$$

□

注 在例题 5.7 中我们计算的积分实际上是复变函数积分。对于复变函数积分的严格定义参考复分析的相关内容。在这门课中，计算复变函数积分均可将其视为实变函数积分进行计算 (如例题 5.7)。

Fourier 变换有许多有用的性质。

命题 5.7 (Fourier 变换的基本性质)

Fourier 变换有以下性质：

(1)(线性性)：$\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g} \qquad \lambda\hat{f} = \widehat{\lambda f} \quad (\forall\lambda\in\mathbb{R})$

(2)(频移)：$\hat{f}(u+u_0) = \widehat{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xu_0}f}(u)$

(时移)：$f(x+x_0) = \widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux_0}\hat{f}}(x)$

(3) 微分性质 (对本函数)：若 $f(\pm\infty) = 0$，且 $\widehat{f'}$ 存在，则：

$$\widehat{f'}(u) = \mathrm{i}u\hat{f}(u)$$

(4) 微分性质 (对像函数)：若 $\hat{f}, \widehat{xf}$ 都存在，且 $\hat{f}(u)$ 关于 u 可微，则：

$$\frac{\partial}{\partial u}\hat{f}(u) = \widehat{-\mathrm{i}xf}(u)$$

♠

提示：(1)(2) 直接验证皆可。(3) 需要使用分部积分公式，(4) 需要证明求导和 $\mathbb{R}$ 上积分可以交换次序。命题 5.7(3) 还有更加一般的命题。

命题 5.8 (Fourier 变换的微分性质)

若 $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f^{(k)}(t) = 0\ (\forall 0\leqslant k\leqslant n-1)$，且 $\widehat{f^{(n)}}$ 存在，则：

$$\widehat{f^{(n)}}(u) = (\mathrm{i}u)^n\hat{f}(u)$$

♠

注 命题 5.8 告诉我们 Fourier 变换可以把求导运算变成简单的乘法运算，这为解高阶微分方程提供了一个新思路。

例题 5.8(Fourier 变换的 Parseval 等式) 设 $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$，试证：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{f}(u)\|^2 \mathrm{d}u$$

解 令：

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y)f(y)\mathrm{d}y$$

由于 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$，故 $g(u)$ 良定义，且可以做 Fourier 变换与反变换，可以进行适当的积分换序。故：

$$\begin{aligned}
\hat{g}(u) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ut}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y)f(y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ut}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ut}\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}y \\
&\xlongequal{v=t+y} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u(v-y)}\mathrm{d}v \right) \mathrm{d}y \\
&= 2\pi \hat{f}(u)\overline{\hat{f}(u)} \\
&= 2\pi \|\hat{f}(u)\|^2
\end{aligned}$$

故：

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\mathrm{d}u = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{f}(u)\|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\mathrm{d}u \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{5.93}$$

特别地，在式 (5.93) 中令 $x = 0$，可得：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = g(0) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{f}(u)\|^2 \mathrm{d}u$$

□

最后简单介绍卷积以及 Fourier 变换在卷积方面的重要性质。

定义 5.14 (卷积)

两个函数 f, g 的卷积是指：

$$(f * g)(t) \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)\mathrm{d}u$$

♣

卷积具有以下性质。

命题 5.9 (卷积的基本性质)

卷积有以下基本性质：

(1)(对称性)：$f * g = g * f$

(2)(结合律)：$(f * g) * h = f * (g * h)$

(3)(分配律)：$f * (g + h) = f * g + f * h$

Fourier 变换作用在卷积上会让卷积转变为容易计算的式子，这是个十分重要的性质。

定理 5.17 (Fourier 变换与卷积)

设 $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$，则有：

$$\widehat{f * g}(x) = \hat{f}(x)\hat{g}(x)$$

证明 直接计算：

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(g(u)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u \\
&\xlongequal{v=t-u} \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(g(u)\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x(u+v)}\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}vx}\mathrm{d}v \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ux}\mathrm{d}u \\
&= \hat{f}(x)\hat{g}(x)
\end{aligned}$$

□