装订线 答题时不要超过此线

# 中国科学技术大学数学科学学院
## 2017—2018学年第二学期期中试卷

课程名称 线性代数（B1） 课程编号 00151912

考试时间 2018年5月12日 考试形式 闭 卷

姓名________ 学号________ 学院________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | |

一、填空题（每小题5分，共25分）

（1）设$\alpha_1=(2,1,3,-1)^T,\alpha_2=(3,-1,2,0)^T,\alpha_3=(4,2,6,-2)^T,\alpha_4=(4,-3,1,1)^T$，则$\mathrm{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=$________。

（2）设$A=\begin{pmatrix}3&1\\-1&2\\2&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&4&-2\\3&0&1\end{pmatrix}$，则$\det(AB)=$________。

（3）方阵$A=\begin{pmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{pmatrix}$的第4行各元素余子式之和等于________。

（4）记方阵$A$的伴随矩阵为$A^*$。设$(A^*)^T=\begin{pmatrix}&&&1\\&&2&\\&-1&&\\4&&&\end{pmatrix}$，则$A=$________。

（5）若向量组$\alpha_1=(a,0,c)$，$\alpha_2=(b,c,0)$，$\alpha_3=(0,a,b)$线性无关，则$a,b,c$必须满足________。

二、判断题（判断下列命题是否正确，并简要说明理由。每小题5分，共20分）

（1）设 $A \in \mathbf{R}^{3\times 5}$，$\operatorname{rank}(A) = 3$，则存在向量 $b \in \mathbf{R}^3$使得方程组 $Ax = b$只有唯一解。

（2）设 $A, B \in \mathbf{R}^{m\times n}$且有 $\operatorname{tr}\Big((A-B)(A-B)^T\Big) = 0$，则 $A = B$。

（3）设向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$线性无关，$\beta = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha + \ldots + \lambda_r\alpha_r$且$\lambda_i \neq 0$，则 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_r$线性无关。

（4）已知 $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$，$B \in \mathbf{R}^{n\times m}$，则 $\det(AB) = \det(BA)$。

三、（本题15分）已知方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3, \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} x_1 + ax_2 - x_3 - x_4 = -5, \\ bx_1 - x_3 - 2x_4 = -3, \\ x_3 - 2x_4 = 1 - c, \end{cases}$$

同解，求 $a, b, c,$的值。

四、（本题16分）设$n$ $(n>1)$阶方阵$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求$\det(A)$ 及$A^{-1}$。

五、（本题16分）设 $\mathbf{R}^{2\times 2}$为实数域上所有$2\times 2$阶矩阵组成的集合，按矩阵的加法和数乘构成线性空间。

（1）证明：$S=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix}\right\}$构成$\mathbf{R}^{2\times 2}$的一组基;

（2）求基$S$到自然基$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$的过渡矩阵 $T$;

（3）求$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$在基$S$下的坐标。

六、（本题8分）设 $A \in F^{m\times n}, B \in F^{n\times m}$，证明：$n+\mathrm{rank}(I_m-AB) = m+\mathrm{rank}(I_n-BA)$.