中国科学技术大学

2021～2022 学年第二学期考试试卷

☑A 卷　　□B 卷

课程名称：热学 B　　课程代码：PHYS1002B.11

开课院系：物理学院　　考试形式：半开卷

姓　名：________　学　号：________　专　业：________

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总 分
得 分									

注：共八道大题，请勿漏答。请在首页写上姓名和学号，并在每道题下方空白处答题，答题时要注意写上必要的计算步骤。本次考试允许携带一张写满笔记的 A4 纸。

等温压缩系数 $-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$

等压体膨胀系数 $\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$

范德瓦尔斯气体方程 $\left(\mathrm{P}+\frac{a}{V_m^2}\right)(\mathrm{V}_m-\mathrm{b})=\mathrm{RT}$，$\mathrm{V_m}$是摩尔体积

麦克斯韦速率分布$f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}v^2e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$

平均自由程 $\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$，这里 n 是分子密度，σ是碰撞截面

对于粘度为η，截面为ΔS，位置 z_0 处的速度梯度为 du/dz 的流体中，粘滞力为：

$F=-\eta\left(\frac{du}{dz}\right)_{z0}\Delta S$

（装订线内不要答题）

1.（12 分）已知 1mol 某种气体等压体膨胀系数$\alpha=\frac{\nu R}{pV}$和等温压缩系数$\beta=\frac{1}{p}+\frac{a}{V}$，其中 a 是常数；ν是气体摩尔数；R 为气体常数。试求这种气体的状态方程。

解：由α和β的定义可知

$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p=\frac{\nu R}{p}$ (1) 1 分

$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T=-\left(\frac{V}{p}+a\right)$ (2) 1 分

对(1)式积分得

$pV=\ \nu RT+pA(p)=\ \nu RT+B(p)$ (3) 2 分

对上式在 T 不变时对 p 求偏导

$V+p(\frac{\partial V}{\partial p})_T=0+\ \frac{dB(p)}{dp}$ 2 分

将(2)式代入可得

$$\frac{dB(p)}{dp}=-ap$$

解得 $B(p)=-ap^2/2+C$ 2 分

代入(3)式可得

$pV=\nu RT-ap^2/2+C$ 1 分

考虑到气体无限稀薄时为理想气体，即 $p\to0$ 时， $C=0$。 2 分

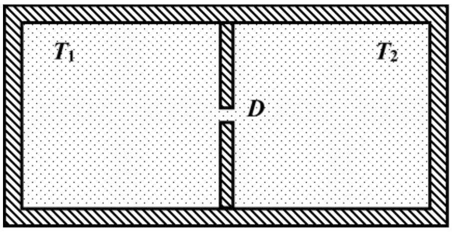
所以气体状态方程为：

$pV=\nu RT-ap^2/2$ 1 分

2.（12 分）一容器被隔板分隔成相等的两部分，隔板上有一直径为 D 的小孔，容器两部中都装有氦气，它们分别通过各自容器壁使得温度分别被维持在$T_1 = 150K$和$T_2 = 300K$。如图所示。这两部分氦气的平均自由程分别为$\bar{\lambda}_1$、$\bar{\lambda}_2$，试问：

（1）当$\bar{\lambda}_1 \gg D$同时$\bar{\lambda}_2 \gg D$时，稳态下的$\bar{\lambda}_1/\bar{\lambda}_2$为多少？

（2）当$\bar{\lambda}_1 \ll D$同时$\bar{\lambda}_2 \ll D$时，稳态下的$\bar{\lambda}_1/\bar{\lambda}_2$又为多少？



解：（1）当$\bar{\lambda}_1 \gg D$同时$\bar{\lambda}_2 \gg D$时，分子将以泻流方式从左边穿过小孔进入右边（或反之），

利用气体分子碰壁数公式得，dt 时间内从左边泻流进入右边的分子数为

$\Delta N_1 = \frac{n_1\bar{v}_1}{4}\cdot\frac{\pi D^2}{4}dt$　　1 分

同理，dt 时间内从右边泻流进入左边的分子数为

$\Delta N_2 = \frac{n_2\bar{v}_2}{4}\cdot\frac{\pi D^2}{4}dt$　　1 分

达到稳恒状态时，$\Delta N_1 = \Delta N_2$　　1 分

即：$\frac{n_1\bar{v}_1}{4}\cdot\frac{\pi D^2}{4}dt = \frac{n_2\bar{v}_2}{4}\cdot\frac{\pi D^2}{4}dt \to \frac{n_1}{n_2} = \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_1}$　　1 分

平均自由程公式为：$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$，其中$\sigma = \pi d^2$为分子碰撞截面，为常量。

所以，说明平均自由程反比于分子数密度：$\bar{\lambda} \propto \frac{1}{n}$　　2 分

又$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$　　1 分

可以知道：$\frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\bar{v}_1}{\bar{v}_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$　　1 分

（2）当$\bar{\lambda}_1 \ll D$同时$\bar{\lambda}_2 \ll D$时，假若两边起初压强不相等，则气体从压强高的一边容器向另一边容器流动，直到达到两侧容器内的压强相等，即$p_1 = p_2$，这相应于稳态。　1 分

两边容器气体处在局部平衡，由理想气体状态公式$p = nkT$　　1 分

所以，有$\frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{p_2/kT_2}{p_1/kT_1} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{2}$　　2 分

3. (12 分) 一空气泡自深为H的海底浮出海面，海水的温度与深度h的关系为$T = T_0 - \frac{a}{H}h$。已知在海面上气泡体积为V_0，压强为p_0，海水的密度为ρ，求气泡上浮过程中对外做的功及吸收的热量。假设忽略气泡表面张力，并且气泡在上浮过程中其气体成分、质量不变，视为理想气体，摩尔比热容 $C_{V,m}$=5R/2。

解：设气泡的质量为m，视气泡中气体为理想气体，气泡上升为准静态过程，气泡内的压强和温度随深度h的变化由下列方程给出

$$p = p_0 + \rho g h$$

$$T = T_0 - \frac{a}{H}h$$

取微分得

$$dp = \rho g dh \qquad 1 分$$

$$dT = -\frac{a}{H}dh \qquad 1 分$$

气泡在海水中和在海平面上的状态方程分别为

$$pV = \frac{m}{\mu}RT \qquad 1 分$$

$$p_0V_0 = \frac{m}{\mu}RT_0 \qquad 1 分$$

由状态方程求微分得

$$p\mathrm{d}V = \frac{m}{\mu}R\mathrm{d}T - V\mathrm{d}p = \frac{p_0V_0}{T_0}\left(\mathrm{d}T - \frac{T}{p}\mathrm{d}p\right) = -\frac{p_0V_0}{T_0}\frac{\frac{a}{H}p_0 + \rho g T_0}{p_0 + \rho g h}\mathrm{d}h \qquad 1 分$$

对上式从 h=H 积分到$h = 0$，得到气泡从海底升到海平面对外做的功

$$W = \int p\,\mathrm{d}V = -\frac{p_0V_0}{T_0}\int_H^0 \frac{\frac{a}{H}p_0 + \rho g T_0}{p_0 + \rho g h}\mathrm{d}h = \frac{p_0V_0}{T_0}\left(\frac{a p_0}{\rho g H} + T_0\right)\ln\frac{p_0 + \rho g H}{p_0} \qquad 2 分$$

气泡的内能增加为

$$\Delta U = \frac{m}{\mu}c_v\big(T_0 - T(H)\big) \qquad 2 分$$

取空气的$c_v = \frac{5}{2}R, \frac{m}{\mu}R = \frac{p_0V_0}{T_0}$及$T(H) = T_0 - a$，代入得

$$\Delta U = \frac{5}{2}\frac{p_0V_0}{T_0}a \qquad 1 分$$

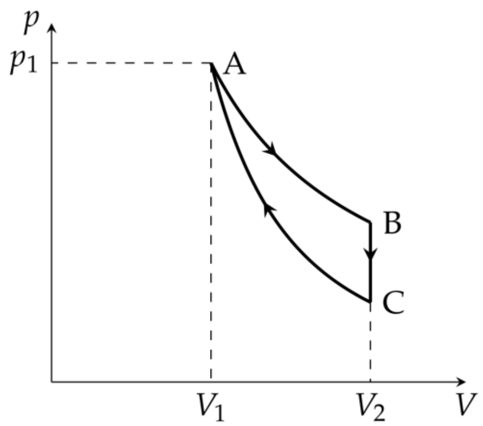
气泡从海底升到海平面吸收的热量

$$Q = \Delta U + W = \frac{p_0V_0}{T_0}\left\{\frac{5}{2}a + \left(\frac{a_0 p_0}{\rho g H} + T_0\right)\ln\frac{p_0 + \rho g H}{p_0}\right\} \qquad 2 分$$

4.（14 分）如图所示，1mol 室温下的氮气（摩尔比热容 $C_{V,m}$=5R/2）经历准静态循环过程 ABCA，其中 AB 为等温过程（高温热源吸热），BC 为等容过程，CA 为绝热过程。已知状态 A 的状态参量为（p_1, V_1），状态 B 的体积 $V_2=2V_1$。

（1）试求该循环过程的效率；

（2）考察该循环过程中熵的变化，给出温度与熵的函数关系，由此作温熵图。



解：（1）AB 等温过程，其温度用题给条件给出为

$$T_A = T_B = \frac{p_1 V_1}{R} \qquad (1) \qquad 1\text{ 分}$$

其中 R 为气体普适常量。

AB 过程中吸热等于气体对外作功：

$$Q_1 = -W = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT_A \mathrm{d}V}{V} = RT_A \ln\frac{V_2}{V_1} = p_1 V_1 \ln 2 \qquad (2) \qquad 1\text{ 分}$$

CA 绝热过程不吸热，满足过程方程

$$TV^{\gamma-1}=\text{const.} \qquad (3)$$

其中 γ 为绝热指数。氮气为双原子分子，在室温下其摩尔热容量为 $C_{V,m}=\frac{5}{2}R$，

绝热指数 $\gamma=\frac{C_{p,m}}{C_{V,m}}=\frac{C_{V,m}+R}{C_{V,m}}=\frac{7}{5}$。按式(3)，

$$T_A V_1^{\gamma-1} = T_C V_2^{\gamma-1} \qquad (4)$$

则得

$$T_C = T_A V_1^{\gamma-1}/V_2^{\gamma-1} = T_A 2^{1-\gamma} \qquad (5) \qquad 2\text{ 分}$$

BC 等容过程，放出的热量：

$$Q_2 = C_{V,m}\left(T_B - T_C\right) = C_{V,m}T_A\left(1-2^{1-\gamma}\right) \qquad (6) \qquad 1\ 分$$

于是该循环过程对外做功

$$\begin{aligned} W' = Q_1 - Q_2 &= p_1V_1\ln 2 - C_{V,m}T_A\left(1-2^{1-\gamma}\right) \\ &= RT_A\ln 2 - C_{V,m}T_A\left(1-2^{1-\gamma}\right) \end{aligned} \qquad (7) \qquad 1\ 分$$

该循环过程的效率

$$\eta = \frac{W'}{Q_1} = \frac{\ln 2 - 5\left(1-2^{-2/5}\right)/2}{\ln 2} \quad (8) \qquad 3\ 分$$

（2）AB 过程，$T = T_A$

$$S = S_A + \frac{p_1V_1}{T_A}\ln\frac{V}{V_1} = S_A + R\ln\frac{V}{V_1} \qquad (9)$$

所以

$$S_B = S_A + \frac{p_1V_1}{T_A}\ln\frac{V_2}{V_1} = S_A + R\ln 2 \qquad 1\ 分$$

BC 过程，由

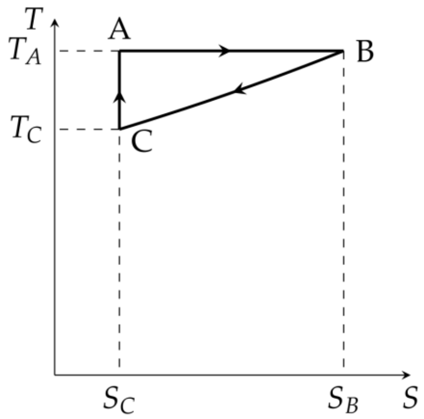
$$\mathrm{d}S = \frac{\text{đ}Q}{T} = \frac{C_{V,\mathrm{m}}\mathrm{d}T}{T} = \frac{5}{2}R\frac{\mathrm{d}T}{T} \qquad (10)$$

于是

$$T = T_B\exp\left\{\frac{S-S_B}{C_{V,\mathrm{m}}}\right\} \qquad (11) \qquad 1\ 分$$

CA 准静态绝热过程，熵不变。 1 分

综上，做温熵图如下（注：做出下图即可得分） 2 分



5. 考虑 1 mol 的范德瓦尔斯气体。

（1）（6 分）证明$dS=\frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial T}|_V dT+\left(\frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial V}|_T+\frac{R}{V_m-b}-\frac{a}{V_m^2 T}\right)dV$，这里 U 是内能

（2）（6 分）根据上式，证明$\frac{\partial U}{\partial V}|_T=\frac{a}{V_m^2}$。

（3）（8 分）根据上面得结论，计算C_P-C_V（结果用 R，T，V，a 和 b 表示）

解答：（1）由熵的定义可得：$dS=\frac{dU+PdV}{T}$ （2 分）

又有：$dU=\frac{\partial U}{\partial T}|_V dT+\frac{\partial U}{\partial V}|_T dV$ （2 分）

根据范德瓦尔斯方程，有：$P=\frac{RT}{V_m-b}-\frac{a}{V_m^2}$ （2 分）

所有，综合上面两式，得：$dS=\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}|_V dT+\frac{\partial U}{\partial V}|_T dV\right)+\left(\frac{R}{V_m-b}-\frac{a}{V_m^2 T}\right)dV$

（2）由于 dS 是全微分，有：$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)=\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)$ （2 分）

结合（1）的结论有：$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial T}\right)=\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial V}|_T+\frac{R}{V_m-b}-\frac{a}{V_m^2 T}\right)$ （2 分）

由此可得：$\frac{1}{T^2}\frac{\partial U}{\partial V}|_T=\frac{a}{V_m^2 T^2}$ （2 分）

化简得到：$\frac{\partial U}{\partial V}|_T=\frac{a}{V_m^2}$

（3）由 H=U+PV 得：$C_P-C_V=\left[\frac{\partial U}{\partial V}|_T+P\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}|_P\right)$ （2 分）

由（2）得：$\frac{\partial U}{\partial V}|_T=\frac{a}{V_m^2}$，（2 分）

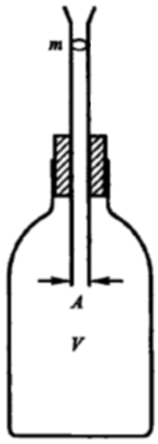
对 1 mol 的范德瓦尔斯气体有：$\frac{\partial V}{\partial T}|_P=\frac{R}{\frac{RT}{V-b}-\frac{2a}{V^3}(V-b)}$ （2 分）

结合上面各式，有：$C_P-C_V=\frac{R^2 T}{RT-\frac{2a}{V^3}(V-b)^2}$ （2 分）

6.（10 分）考虑洛恰特实验。如图所示，用质量为 m，截面为 S 的瓶塞，将气体封在体积 V 的瓶内。当对瓶塞进行扰动时，瓶塞会作快速振动。该运动远快于气瓶内气体与外界的热交换速度，所以在瓶塞运动过程中，气体可以被视为与外界绝热。

（1）（6 分）求证瓶塞受微小扰动时，其运动为简谐振动。

（2）（4 分）设瓶塞的运动周期为 T，将等压热容与等容热容的比值γ用实验中可测量的物理量表示出来。



解答：（1）设外界大气压为 P0，瓶塞在平衡位置时，被封住气体的压强为

$$P = P_0 + \frac{mg}{A}$$

当偏离平衡位置的位移为 x 时，气体压强为 P’。由绝热过程可得：

$$\left(P_0 + \frac{mg}{A}\right)V^\gamma = P'(V + Ax)^\gamma \quad （2 分）$$

在 Ax<<V 时，有：$P' = \left(P_0 + \frac{mg}{A}\right)\left(1 + \frac{Ax}{V}\right)^{-\gamma} = \left(P_0 + \frac{mg}{A}\right)\left(1 - \frac{\gamma Ax}{V}\right)$ （2 分）

这样，瓶塞受力$F = \left[P' - \left(P_0 + \frac{mg}{A}\right)\right]A = -\frac{\gamma A^2 x}{V}\left(P_0 + \frac{mg}{A}\right) = -kx$ （2 分）

所以，瓶塞作简谐振动

（2）由上面分析可得瓶塞的振动周期为：$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{mV}{\gamma(P_0+\frac{mg}{A})A^2}}$ （2 分）

从而有：$\gamma = \frac{4\pi^2 mV}{(P_0+\frac{mg}{A})A^2T^2}$ （2 分）

7.（10 分）有一圆柱形容器，高为 L，横截面为 A，其内充满了单原子分子理想气体，分子质量为 m。气体分布受重力场影响，设重力加速度为 g。在体系处于热平衡时，求热平衡时单个分子的定容热容。

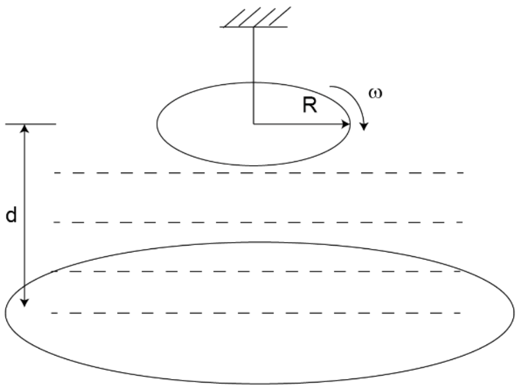
解答：考虑了重力场之后，单个分子的内能表示为：$\mathrm{U} = E_k + mgz$ （2 分）

考虑热平衡时的能量均分定理，对单原子分子有：$\bar{\mathrm{U}} = \frac{3}{2}kT + mg\bar{z}$ （2 分）

又由玻尔兹曼分布可知：$\bar{z} = \frac{\int_0^L ze^{-mgz/kT}dz}{\int_0^L e^{-mgz/kT}dz} = \frac{kT}{mg} - \frac{L}{e^{mgL/kT}-1}$ （4 分）

所以，$c_V = \frac{\partial \bar{U}}{\partial T} = \frac{5}{2}k - \frac{e^{mgL/kT}}{\left(e^{mgL/kT}-1\right)^2}\frac{(mgL)^2}{kT^2}$ （2 分）

8. (10 分) 一细金属丝将一质量为 m、半径为 R 的均质薄圆盘沿中心轴垂直吊住。盘能绕轴自由转动。盘面平行于一固定的大平面，盘与平面间距离为 d，中间充满了轴粘滞系数为η的液体。设初始时盘以ω_0角速度旋转，且之后圆盘下方液体的任一竖直线上的速度梯度相等，圆盘受到的粘滞力满足试卷首页给出的粘滞力公式。问在 t 时刻圆盘的旋转角速度时多少？



解答：取圆盘上的圆环，其受到的粘滞力为：$dF(r) = -\eta\frac{\omega r}{d}2\pi r dr$（2 分）

其对中心轴的力矩为：$dL(r) = -\eta\frac{\omega r}{d}2\pi r^2 dr$

圆盘受到的合力矩为：$L(r) = \int_0^R -\eta\frac{\omega_0 r}{d}2\pi r^2 dr = -\frac{\eta\omega\pi R^4}{2d}$ （2 分）

圆盘相对中轴的转动惯量为:$I = \frac{mR^2}{2}$ （2 分）

这样，有角动量的变化方程：$\frac{d(I\omega)}{dt} = -\frac{\eta\omega\pi R^4}{2d}$

从而有：$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\eta\omega\pi R^2}{md}$ （2 分）

解得：$\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{\eta\pi R^2}{md}t}$ （2 分）