

中国科学技术大学数学科学学院
2018~2019 学年第 2 学期期中考试试卷

■ A 卷 □ B 卷

课程名称 线性代数 (B1) 课程编号 001519

考试时间 2019 年 5 月 12 日 考试形式 闭卷

姓名 学号 学院

| | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|----|
| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总分 |
| 得分 | | | | | | | |

一、【25 分】填空题.

(1) 方阵的方幂 $\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{pmatrix}^{2019} =$ _____

(2) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 9 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, A_{ij} 表示 $|A|$ 中 (i, j) 元的代数余子式, 则
 $A_{11} - A_{12} =$ _____.

(3) 若方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ _____

(4) 设 A 为 4 阶复矩阵, $\text{rank}(A) = 3$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则齐次线性方程组 $A^*x = 0$ 的解空间的维数是_____.

(5) 若向量组的秩 $\text{rank}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 4$, 则 $\text{rank}(a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_1) =$ _____.

二、【20分】判断下面的说法是否正确. 对于正确的, 简要说明理由. 对于错误的, 举出反例加以说明.

(1) 设 A 和 B 均为行满秩的 $m \times n$ 的非零矩阵, 且 $m < n$, 则 $\det(AB^T) \neq 0$.

(2) 设非零矩阵 A, B 满足 $AB = O$ (零矩阵), 则 A 的行向量线性相关.

(3) 设 $A \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$, 若线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解, 则对任意非零的列向量 $b \in \mathbb{R}^5$, 方程组 $Ax = b$ 存在无穷多解.

(4) 对于任意 n 阶实方阵 A, B , 不存在非零的实数 μ 使得 $AB - BA = \mu I_n$. (这儿的 I_n 为 n 阶单位矩阵)

三、【15分】考虑方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$$

问 λ 为何值时, 该方程组有唯一解? 无解? 有无穷多解? 在有解的情况下, 给出通解.

线

订

装

四、【15分】计算行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 - 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - 2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - 3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - n \end{vmatrix}.$$

五、【15分】设 $F_3[x]$ 为数域 F 上次数不超过 3 的多项式的全体, 在多项式的加法与数乘下构成了线性空间.

- (1) 证明 $S = \{1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3\}$ 构成了该线性空间的一组基.
- (2) 求基 S 到自然基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 的过渡矩阵 T .
- (3) 求多项式 $1+x+x^2+x^3$ 在基 S 下的坐标.

六、【10分】设 A 是 n 阶方阵, I_n 为 n 阶单位矩阵.

(1) 若 $A^2 = A$, 证明: $\text{rank}(A) + \text{rank}(I_n - A) = n$.

(2) 反之, 若 $\text{rank}(A) + \text{rank}(I_n - A) = n$, 证明: $A^2 = A$.