

# 第一章 图像基础

## 1. 图像内蕴的信息：

### (1) 图和像

图：主观，图像的主观信息

像：客观，图像的成像机理

图像也是一种信号。

• “像”是物体投射或反射光的分布，“图”是人的视觉系统对图的接受在大脑中形成的印象或反映。

### (2) 图像的特点

客观和主观的结合

- 光学特性
  - 认知科学以及神经生理学
- 信息量大

- 百闻不如一见
- 人类从外界获取的信息约有 80% 是通过图像方式得到的

## 2. 图像成像信息

### (1) 成像的三要素：光照、相机、场景表面的特性

两个过程：入射、反射

图像成像的三个要素：

- 相机（个数，参数，距离，视角，运动）
- 光照（光源数量，特性，角度）
- 场景表面的特性（表面反射特性，表面三维形状）

### (2) 相机的三个基本参数和作用

#### 【1】焦距

相机焦距的作用是用于调节景深，不同的焦距会影响摄取的景物范围。焦距小，景深大决定图像的尺度、分辨率、模糊程度（尺度 $\neq$ 分辨率）

#### 【2】光圈

相机光圈可以控制相机的进光量，越大的光圈可以让照片更加的明亮。

决定图像的<1>朦胧(blur) <2>明亮 <3>清晰

光圈越小，景深越大

#### 【3】快门

是一个积分的过程

快门时间与拍摄动态场景的效果有关。快门时间越短，动态效果越好，（入光少导致）图像质量下降

\*\*除以上所提元素，还需要注意：

\*\*\*透镜的作用：将光线聚焦到胶片上

\*\*\*由于不同波长的光在透镜中的折射率不同，这将导致色差的问题，解决方案是增设透镜组

\*\*陀螺仪：解决手抖的问题

### (3) 人眼成像的机理

【1】眼球：是一个相当复杂、精细的光学仪器，起到调节适当的光强、折射率。同时外界的三维景物变换成二维的视网膜上的投影

【2】眼底视网膜：起到光电传感器的作用，吸收光量子，输出生物电流

【3】视觉通路将生物电信号经过平均与会聚转换成一束信号,传送到大脑皮层

【4】大脑皮层视觉区工作机理非常复杂,还没有被探明

### 3.图像成像模型

(1) 图像的基本单元: 像素

(2) 三种模型: 几何模型, 物理模型, 数字模型

【1】几何模型: 确定像点在成像平面的位置

【2】物理模型: 确定像点的图像函数值

【3】数字模型: 确定如何从图像中采集信息空间离散化

图像函数值离散化

(3) 数字图像的格式: 二维函数或矩阵  $f(x,y)$

注: 原点在左上角取  $(0,0)$

(4) 分辨率

【1】空间分辨率: 图像可分辨的最小细节的度量。

dpi: 每英寸点数 (像素数)

【2】亮度分辨率 (灰度分辨率)

灰度级中可分辨的最小变化 (每个像素的亮度的取值范围大小)

\*\*物的辐射与像的灰度值的关系:

<1>光源分布 (照明特性)

<2>物体表面的反射特性

<3>物体表面的几何形状

<4>物体、光源和观测者的相对位置

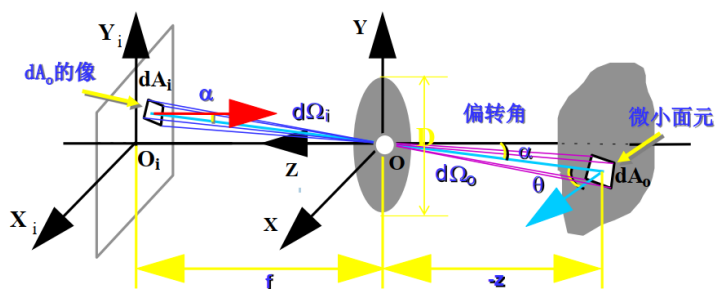
<5>成像系统的光学特性

【3】图像越好, 是指图像的分辨率很高吗?

一般认为的分辨率指的是空间分辨率。空间分辨率的度量必须针对空间单位来规定才有意义, 并且图像大小本身与图像的主观信息并没有直观联系, 分辨率大, 仍有可能多数像素为噪点或无意义的像素。

(5) 图像的亮度模型

【1】公式



$$E_i = \frac{\pi}{4} L \left( \frac{D}{f} \right)^2 \cos^4 \alpha$$

L: 辐射亮度 D: 透镜的孔径直径 f: 焦距

<1>图像平面的辐射照度 (也就是图像灰度) 和景物表面的辐射亮度成正比。

<2>图像的灰度与光学系统的孔径焦距比的平方成正比。

<3>图像的灰度和偏转角  $\alpha$  的余弦的四次方成正比。随着偏离图像中心, 图像的灵敏度将下降, 从而引起非线性失真。

<4>图像的灰度和景物的深度无关。只要物体的表面足够大，使得它在图像平面上形成的像足以覆盖一个像素，那么，相应的灰度值和深度无关。

### (6) 图像的彩色模型

为什么要设计三种模型，与人的视觉有什么联系？对应的人的视觉认知的三个区域用在哪些领域、场合？

【1】人的色觉：Young-Helmholtz 三色学说

研究发现，在人的视网膜上存在两种分别称为柱状细胞和锥状细胞的感光细胞。

柱状细胞：灵敏度高，能够感受很微弱的光。

锥状细胞：灵敏度低，但能够很好地区分颜色。锥状细胞又由三种不同的细胞组成。这三种细胞分别对红、绿、蓝三色敏感

【2】人的色觉成像区域：

<1>**视网膜**：在这里分布着柱状细胞，锥状细胞，柱状细胞负责感光，锥状细胞负责识别颜色。**对应的图像颜色模型:RGB&CMY**

<2>**视觉通路**：将视网膜上三种锥状细胞的信息进行加工，送往大脑皮层。**对应的图像模型为：YCrCb**

<3>**大脑皮层**：一般而言，大脑会将颜色转化为**明度、色调和色饱和度**三个基本属性。**对应的图像模型：HSI**

明度有时也称强度，是彩色光明暗程度的度量。

色调也称色(彩)相，是彩色彼此之间相互区分的一种特性，是颜色的心理属性的代表之一。光源的色调取决于所辐射的光谱组成对人眼所产生的感觉，由物理上到达视网膜的光的主波长所确定。

色饱和度也称彩度，是彩色的纯洁性，也即白色光缺少程度的度量。

对比度是指投影图像最亮和最暗区域之间的比率，比值越大，从黑到白的渐变层次就越多，从而色彩表现越丰富。

### 【3】RGB&CMY (设备场合)

<1>一个能发出光波的物体称为有源物体，它的颜色由该物体发出的光波决定，使用 (RGB) 相加混色模型；一个不发光波的物体称为无源物体，它的颜色由该物体吸收或者反射哪些光波决定，用 (CMY) 相减混色模型。

<2>颜色的三维表示：

颜色空间是三维的线性空间，任何一种具有一定亮度的色光均可表示为该空间中的一个点（或过原点的一个向量），它由适当选择的三种基色光经加权混合而成。选择不同的基色，可以得到不同的表色系统。

颜色向量：长度表示亮度，角度表示色度

<3>r-g 色度图

$$r = \frac{R}{R + G + B} \quad g = \frac{G}{R + G + B} \quad b = \frac{B}{R + G + B}$$

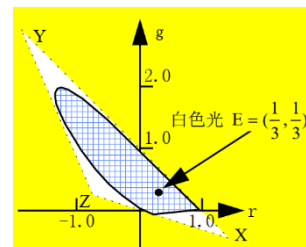
存在问题

r 取负值的领域非常宽。一方面，这在视觉上显得不是很好看。另一方面，更重要的是为了配色往往要求使用负的色度值。这给实际的测定带来问题。

白色左上方的领域太宽，使得二维的色度空间未被均等地加以利用，从而导致相应的色度图对不同彩色的表现能力上存在差异。

<4>x-y 色度图

为克服在使用 RGB 表色系统进行配色时所遭遇到的困难，国际上又规定了一种称之为 XYZ



表色系统的新的表色系统。由于这种表色系统具有许多优良的性质，得到广泛的使用，并为 CIE 所采纳，成为 CIE 标准表色系统。

XYZ 表色系统是对 RGB 表色系统进行坐标变换后产生的。配色方程为

$$C(c) = X(x) + Y(y) + Z(z)$$

这里三个基色量(x)、(y)、(z)的选择满足以下三个条件

相应的三个原刺激值均不为负；

Y 的数值正好是相应彩色光的光通量；

当 X=Y=Z 时，仍对应标准白光。

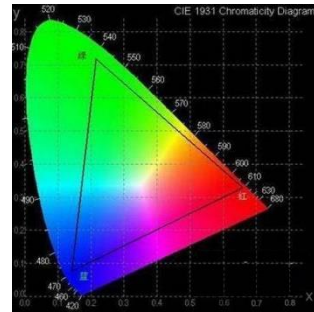
设白光对应的点为 C

<1>补色的定义？两点连线通过白光的点

<2>主色调？

由 C 作到 C1 的射线，交可视光边界的点 C2 即对应主色调

<3>饱和度？



$$x = \frac{X_1 - X_c}{X_s - X_c}$$

$$y = \frac{Y_1 - Y_c}{Y_s - Y_c}$$

#### [4] HIS (软件设计场合)

HSI 色彩空间是从人的视觉系统出发，用色调、色饱和度和亮度来描述色彩。这个模型虽然比较复杂，但能把色调、亮度和色饱和度的变化情形表现得很清楚。

HSI 表示和 RGB 表示只是同一物理量的不同表示而已，它们之间存在着转换关系：

$$\begin{cases} I = \frac{R+G+B}{3} \\ H = \frac{1}{360} [90 - \text{Arc tan}(\frac{F}{\sqrt{3}})] + \{0, G > B ; 180, G < B\} \\ S = 1 - [\frac{\min(R, G, B)}{I}] \end{cases}$$

$$F = \frac{2R - G - B}{G - B}$$

#### [5] YCrCb (图像处理场合)

<1>前两种模型的问题：

不是均匀分布的，不利于计算。

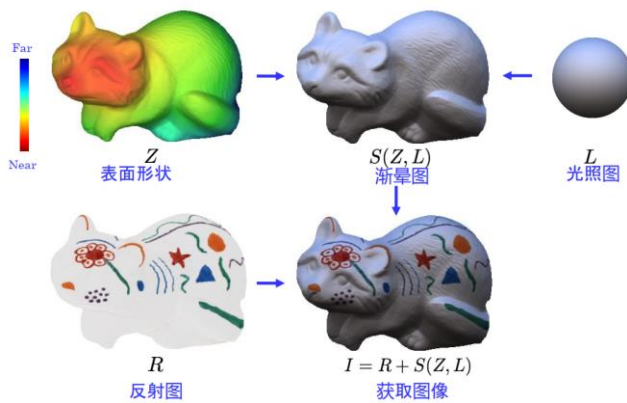
<2>该模型中 Y 代表了光源的亮度，而色度则包含在 Cr、Cb 两个参数里。此类模型被广泛采用在视频、电视信号的传输中。由于人眼对亮度的敏感程度大于对色度的敏感程度，因此总是将最大的带宽分给 Y 信号。

YCrCb 表示和 RGB 表示之间存在如下所示的转换关系：

$$\begin{pmatrix} Y \\ Cr \\ Cb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.30 & 0.59 & 0.11 \\ 0.50 & -0.42 & 0.08 \\ -0.17 & -0.33 & 0.50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

## 第二章 图像处理基础

## 1. 图像结构



以上所有图均具有：平滑性

\*表面形状  $Z$ ：三维、视角

光照图  $L$ ：强度、视角

渐晕图： $S(Z, L)$

反射图：吸收、反射光的波长、强度

图像： $I = R + S(Z, L)$

注：其实要考虑相机元素——抖动、光圈、焦距、噪声等： $C(I) = C(R + S(Z, L))$

**\*\*结构化的作用：去除冗余、方便图像处理**

图像结构：

邻域特性、边缘、轮廓、前景/背景

(1) 邻域特性：由局部平滑性学习获得

局限性：越近越相似

【4-adjacency、8-adjacency、m-adjacency】

(2) 边缘

突出边缘的作用：去除相似像素、无目的性

(3) 轮廓（有目的性）

图像分割，分割出有意义部分，提取出想要得到信息的轮廓

(4) 前景/背景

## 2. 图像的空间变换（位置域）

(1) 图像的相似性变换——旋转平移缩放

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

【1】平移变换

$$P' = P + t$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

【2】缩放变换

$$P' = AP$$

$$T = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**【3】旋转变换**

$$T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**【4】集成以上变换-旋转平移尺度变换**

$$T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} RS & t \\ O & 1 \end{bmatrix}$$

欲求出变换矩阵 $T$ 至少需要像素点（变换前后）的个数：3

一个像素点可以列出两个方程：

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_4 & t_5 & t_6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

高斯消元法：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ x_2' \\ y_2' \\ x_3' \\ y_3' \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$\text{if } \det(A) \neq 0 \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$\text{or if } \det(A^T A) \neq 0 \Rightarrow X = (A^T A)^{-1}A^T B$$

后者体现了最小二乘法的思想

**【5】自由度分析需要解的参数**

平移：2； 缩放：3； 旋转：4； 仿射变换：6； 投影变换：8

**(2) 图像插值**

基于图像插值的空间变换，过程如下：

采样——收缩——放大

例子：若要缩放一张图像，先创建一个空白的缩放后像素后的空白网格，它与原图像有相同的间隔，然后将其收缩，使它准确地与原图像匹配。

为了对覆盖的每一个点赋予灰度值，需要在原图像中寻找最相近的像素，并将其赋给新像素。完成像素内插后，在将图像扩展放大到原来规定的大小。

最近邻内插法，有两种插值方式，：

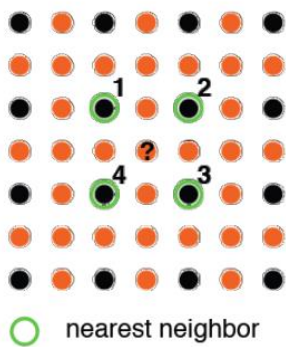
**【1】前向映射**

**【2】后向映射**

除此以外，还有的方法：双线性插值（双线性曲面） $v(x, y) = ax + by + cxy + d$

在两个方向分别进行一次线性插值

后者更为常用



$$f(x, y) = ax + by + cxy + d$$

coefficients that need to be estimated

$$ax_1 + by_1 + cx_1y_1 + d = f(x_1, y_1)$$

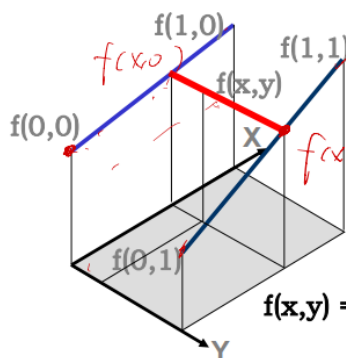
$$ax_2 + by_2 + cx_2y_2 + d = f(x_2, y_2)$$

$$ax_3 + by_3 + cx_3y_3 + d = f(x_3, y_3)$$

$$ax_4 + by_4 + cx_4y_4 + d = f(x_4, y_4)$$



$a, b, c, d$



$$\begin{cases} f(x,0) = f(0,0) + x[f(1,0) - f(0,0)] \\ f(x,1) = f(0,1) + x[f(1,1) - f(0,1)] \\ f(x,y) = f(x,0) + y[f(x,1) - f(x,0)] \end{cases}$$



$$f(x,y) = [f(1,0) - f(0,0)]x + [f(0,1) - f(0,0)]y + [f(1,1) + f(0,0) - f(0,1) - f(1,0)]xy + f(0,0)$$

\*\*两种方法的对比：最近邻插值法所得图像对比度更高，双线性插值所得图像更平滑

### 3. 图像的亮度变换 (亮度域)

$$g(x, y) = T\{f(x, y)\}$$

(1) 归一化

$$g(x, y) = K \frac{f(x, y) - \min [f(x, y)]}{\max [f(x, y)] - \min [f(x, y)]}$$

目的？将亮度取值限定在 (0, 1)，提高图像的对比度

(2) 亮度局部平均 (平滑处理)

$$g(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{(x', y') \in N_{xy}} f(x', y')$$

在邻域内平均，降低图像的对比度

【磨改的原理】

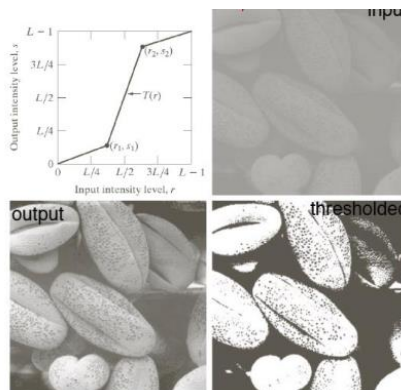
(3) 图像取反

灰度级范围为  $[0, L - 1]$

图像反转:  $g(x, y) = L - 1 - f(x, y)$

(4) 图像亮度拉伸

G 与 F 是分段线性函数的关系



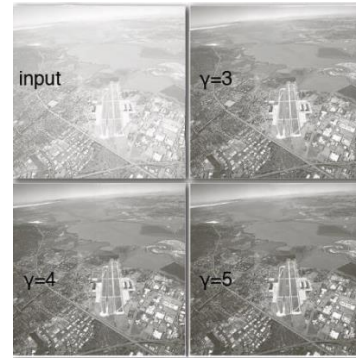
### (5) 伽马校正

$$g(x, y) = cf(x, y)^\gamma$$

目的：当图像太亮或者太暗，或者需要精确再现彩色，便需要伽马校正，使得计算机屏幕能精确显示图像。

\*\*伽马校正的一些问题：

当 $\gamma$ 太大时，会出现部分区域太暗的情况。只有 $\gamma$ 合适时，较高对比图的图像会更合期望。



### (6) 直方图均衡化与规定化

#### 【1】图像直方图

统计各灰度值区间像素的个数

#### 【2】均衡化、规定化的目的：

观察到，对这四样图像：暗图像（直方图的分量集中在灰度级的低端），亮图像（直方图的分量集中在灰度级的高端），低对比图（较窄的直方图且集中在灰度级的中部），高对比图（覆盖较宽的灰度级范围，较为均匀），可以得到结论：若一幅图像的像素倾向于占据整个可能的灰度级并且分布均匀，则图像的对比度会较高且灰色调会有较大变化。

而均衡化、规定化改变图像的灰度直方图并使其均匀

#### 【3】直方图均衡化：增加直方图分布区域，提高图像对比度

会产生 artifact，产生不属于原图的东西

用  $p$  表示输入图像灰度、 $q$  表示变换后输出图像灰度，根据均衡化处理要求，变换后的图像

$$g(q) = \frac{NK}{N} = \frac{1}{K}$$

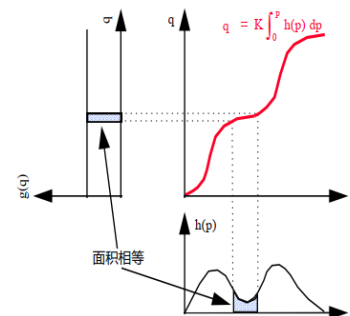
其中  $K$  为图像的量化灰度级数， $N$  为图像中像素的总数目，

$N/K$  为灰度级数为  $q$  的像素数目

根据输入灰度概率分布  $h(p)$  和输出灰度分布概率  $g(q)$  的分布可以确定输出灰度  $q$  和输入灰度  $p$  的映射关系  $q=f(p)$

$$f(p) = \frac{dq}{dp} = \frac{h(p)}{g(q)} = Kh(p)$$

$$f(p) = K \int_0^p h(p) dp$$



#### 【4】直方图规定化

均匀直方图的基本增强在某些环境下并非合适，特别是有时候希望处理后的图像具有规定的直方图形状（例如希望可分辨区域集中在亮端）

规定化，设定像素分布的参数（滤镜的应用）

## 第三章 傅里叶分析与卷积

### 1. 傅里叶变换的三层意义

(1) 信号的分解与重构：将复杂信号描述为一组正弦信号的叠加

(2) 信号的投影与表示：将信号由时域投影到一组正交基函数张成的变换域上，并用响应的系数表示

(3) 描述了输入信号动态变化特性，只度量变化的区域

\*\*频域的物理意义（更倾向于称为变换域）

（注意： $u$  表示信号频率，即信号动态特性的指标，是图像中灰度变化剧烈程度的指标）

频域是信号的频率分布函数，反应了信号变化的剧烈程度



## 2. 傅里叶变换性质与信号卷积

### (1) 典型信号的傅里叶变换记忆

注：角频率与频率的关系： $\omega = 2\pi u$ （本课中常用频率，以下公式注意换算）

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(2\pi u) e^{j2\pi ut} du \Leftrightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1$$

$$a \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$\delta(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$$

$$e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$u(t) \Leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$r_{2\tau}(t) \Leftrightarrow 2\tau Sa(\tau\omega)$$

$$\frac{\omega_0}{\tau} Sa(\omega_0\tau) \Leftrightarrow r_{2\omega_0}(\omega)$$

$$\delta^{(n)}(t) \Leftrightarrow (j\omega)^n$$

$$r_{2\tau}(t) * r_{2\tau}(t) = R_{2\tau}(t) \Leftrightarrow 4\tau^2 Sa^2(\tau\omega)$$

$$\left(\frac{\omega_0}{\pi}\right)^2 Sa^2(\omega_0 t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} R_{2\omega_0}(\omega)$$

$$e^{-\pi t^2} \Leftrightarrow e^{-\pi u^2} = e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$$

其中：

$r_{2\tau}(t)$ ：门信号，在 $-\tau \sim \tau$ 之间值为1，其余为0

$Sa(t)$ ：辛格信号， $Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$ ，抽样函数

$R_{2\tau}(t)$ ：三角信号，在 $-\tau \sim \tau$ 之间值为线性到1/0，其余为0

### (2) 傅里叶变换的性质

【1】线性性

【2】时域卷积  $x(t) * h(t) \Leftrightarrow X(\omega)H(\omega)$

【3】频域卷积  $x(t)h(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * H(\omega)$

【4】时移  $x(t - t_0) \Leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega t_0}$

【5】频移  $x(t)e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$

【6】时域微分/积分  $x'(t) \Leftrightarrow j\omega X(\omega)$       $\int_0^t x(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$

【7】频域微分/积分  $tx(t) \Leftrightarrow j \frac{X(\omega)}{d\omega}$       $-\frac{x(t)}{jt} + \pi x(0)\delta(t) \Leftrightarrow \int_0^\omega X(\xi) d\xi$

【8】对偶性

【9】对称性

【10】尺度变换  $x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

【11】帕什瓦尔定理（功率谱）

（表明傅里叶变换是一个可逆过程，总能量不变，不损失信息）

$$R_x(t) = x(t) * x^*(t) \Leftrightarrow X(\omega)X^*(\omega) = |X(\omega)|^2 = \psi_x(\omega)$$

$$E_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^2(w)dw = \int_{-\infty}^{\infty} X^2(2\pi u)du$$

(3) 卷积的物理意义  $f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$

图像卷积:  $g(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta)h(x - \alpha, y - \beta)d\alpha d\beta + n(x, y)$

其中 g 为变换后图像, f 为原图像, h 对应成像系统造成的图像退化 (质量失真), n 是噪声。

(4) 相关的物理意义  $f(t) * g(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t + \tau)d\tau$

相关的作用是判断两个信号的相似程度 (波形, 起始位置)

自相关: 判断信号是否为周期信号, 实际应用中用来表示局部范围内有效信号和噪声的权重比。(噪声, 随机, 不具备相关性)

### 3. 图像傅里叶变换

(1) 二维傅里叶变换

$$F(u, v) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy$$

对于一副 M\*N 的图像, 可以描述为:

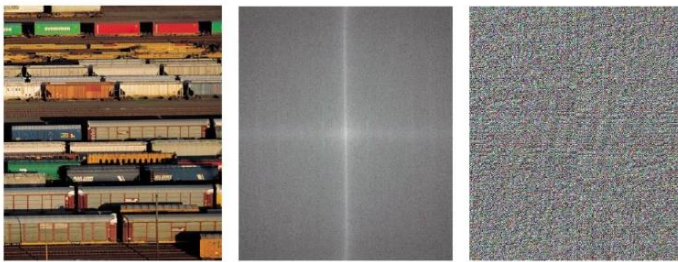
$$\begin{aligned} f_{u,v}[x, y] &= e^{j2\pi ux/M} e^{j2\pi vy/N} \\ &= e^{j2\pi(ux/M+vy/N)} \end{aligned}$$

其傅里叶变换及逆变换为:

$$F[u, v] = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f[x, y] e^{-i2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$f[x, y] = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F[u, v] e^{i2\pi(ux/M+vy/N)}$$

(2) 功率谱与相位谱



I

$\log\{|F\{I\}|^2+1\}$

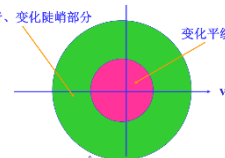
功率谱 (功率谱)

$\angle\{F\{I\}\}$

记录原始图像空间位置

边、噪音、变化陡峭部分

变化平缓部分



功率谱: 反应图像变化的剧烈程度

相位谱: 记录原始图像的空间位置

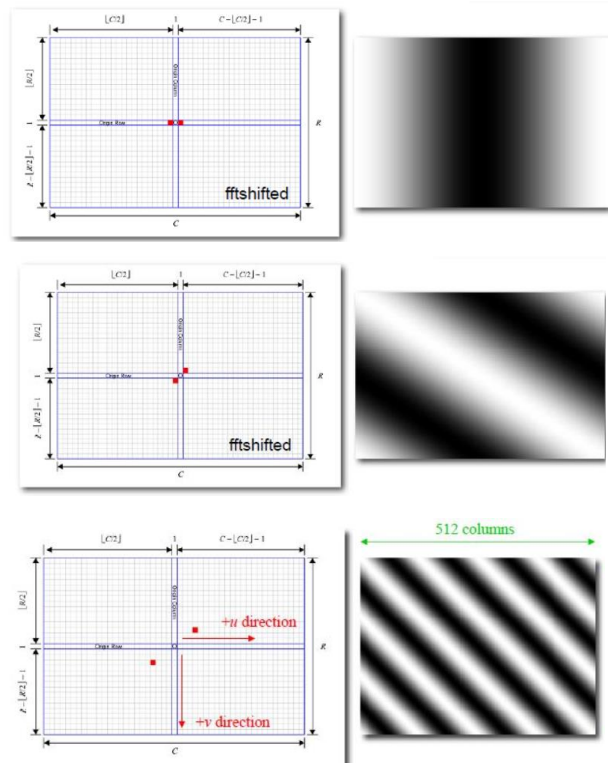
(3) 二维离散傅里叶变换的中心化: 为了便于分析和描述需要对频谱进行中心化

用  $(-1)^{x+y}$  乘以输入图像来进行中心变换

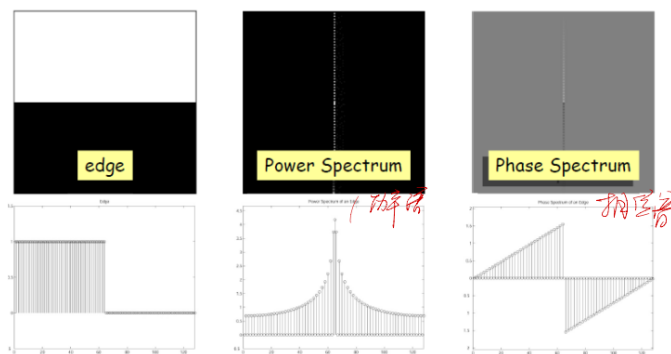
注意: 中心化后, 中间区域为低频 (反应变化缓慢的区域), 越靠外表示越高频 (表示边缘、噪声等变化陡峭的区域); 中间部分越亮表示低频占比越大, 能量越大

(4) 几种常见的图像类型的频谱

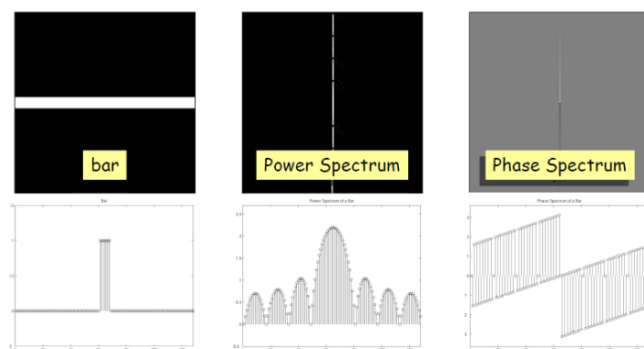
【1】脉冲点



【2】边缘

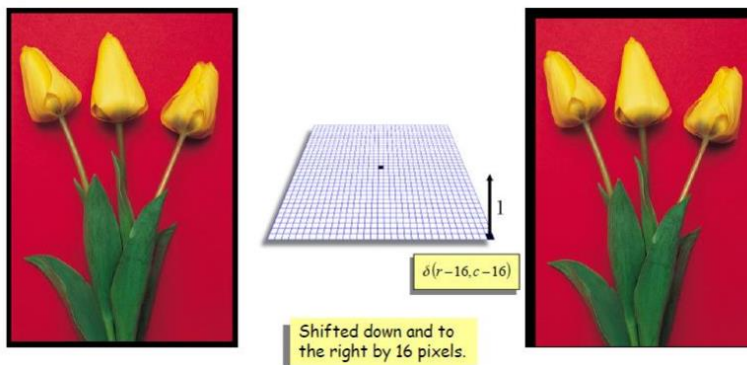


【3】线

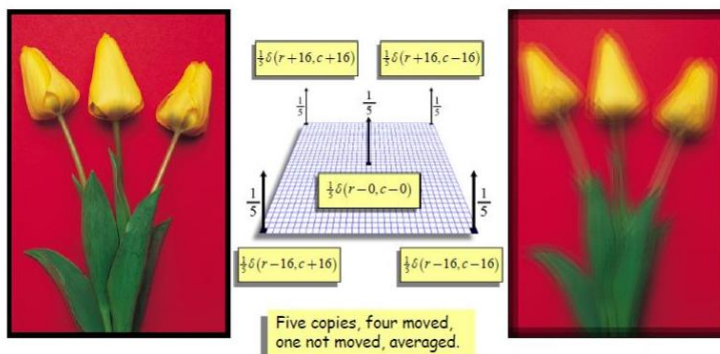
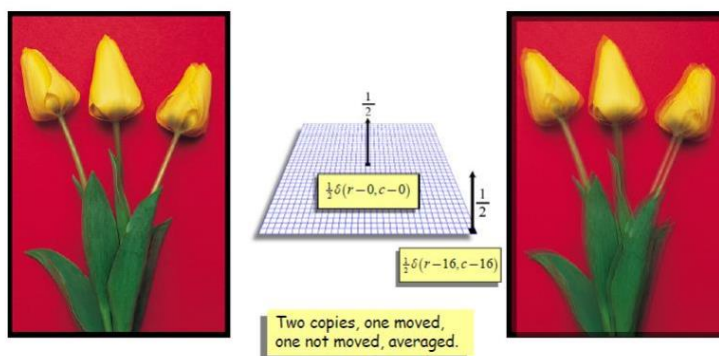


4. 图像卷积: 平移+求积+叠加

(1) 平移



(2) 平移+求积+叠加



(3) 图像卷积的物理意义:

相机的抖动可以视为原图像与一条抖动路径的冲激信号卷积的过程  
(事实上, 该函数被称为点扩散函数)

## 第四章 空域滤波

### 1.空域滤波基础-模板运算

(1) 空域滤波: 指直接在图像的空间域进行操作的图像处理  
用空域模板进行的图像处理, 称为空域滤波  
空域模板是一个系数矩阵 (又称为核函数或滤波器)

(2) 空域滤波的简化形式:

$W_1$	$W_2$	$W_3$
$W_4$	$W_5$	$W_6$
$W_7$	$W_8$	$W_9$

$$R = \sum_{i=1}^{mn} w_i z_i$$

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t), m = 2a + 1, n = 2b + 1$$

图像大小  $M \times N$  滤波器大小  $m \times n$

(3) 空域滤波的主要步骤

- 【1】将模板在图中漫游，并将模板中心与图中某个像素位置重合；
- 【2】将模板上系数与模板下对应像素相乘；
- 【3】将所有乘积相加；
- 【4】将和（模板的输出响应）赋给图中对应模板中心位置的像素。

## 2.平滑滤波

(1) 作用：模糊处理：去除图像中一些不重要的细节；减小噪声

(2) 分类：

- 【1】线性平滑滤波器：均值滤波器
- 【2】非线性平滑滤波器：最大值滤波器、中值滤波器、最小值滤波器

(3) 线性平滑空域滤波

作用：减小噪声、模糊边缘

【1】通用表达式

$$g(x, y) = \frac{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)}{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t)}$$

$$\frac{1}{16} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

【2】在图像去噪方面的应用

<1>图像噪声

①椒盐噪声

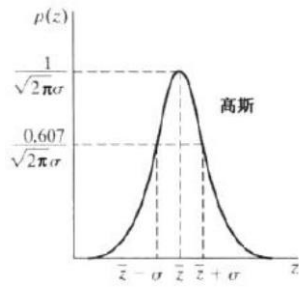
椒盐噪声也称为脉冲噪声，是图像中经常见到的一种噪声，它是一种随机出现的白点或者黑点，可能是亮的区域有黑色像素或是在暗的区域有白色像素（或是两者皆有）。椒盐噪声的成因可能是影像讯号受到突如其来的强烈干扰而产生、类比数位转换器或位元传输错误等。例如失效的感应器导致像素值为最小值，饱和的感应器导致像素值为最大值。

②高斯噪声

高斯噪声是指概率密度函数服从高斯分布（即正态分布）的一类噪声。常见的高斯噪声包括起伏噪声、宇宙噪声、热噪声和散粒噪声等等。

$$p_G(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

高斯随机变量  $z$  的 PDF 由上式给出，其中  $z$  表示灰度值， $\mu$  表示  $z$  的均值， $\sigma$  表示  $z$  的方差。当  $z$  服从高斯分布时，其值有大约 70% 落在范围  $[(\mu-\sigma), (\mu+\sigma)]$  内，有大约 95% 落在范围  $[(\mu-2\sigma), (\mu+2\sigma)]$  内。其



在电信和计算机网络中，通信信道可能受到来自许多自然源的宽带高斯噪声的影响，例如导体中的原子的热振动（称为热噪声或约翰逊 - 奈奎斯特噪声），散粒噪声，来自地球和其他温暖的物体，以及来自太阳等天体。

<2>空域平滑去噪的现象（显然，只用于椒盐噪声）

去除噪声的同时造成边缘模糊，且这种模糊效应随所取模板尺寸的增大、邻域半径的增大、权重的差异程度而愈发严重



当目标的灰度与相邻像素的灰度接近时，会加剧模糊效应

<3>抑制模糊的对策

- ①合理选择模板的尺寸。为避免处理结果过于模糊的情况发生，应选择尺寸相对小一点的模板。
- ②合理选择各模板元素的权值。例如，使模板中心元素和距离中心较近的元素具有相对大的权值以突出待处理像素点、尽量抑制由平滑化处理引入的模糊。
- ③使用多模板技术，根据对当前点是否为噪声点的检测结果，选择使用具有不同权值的模板完成计算。

\*\*如何检测孤立噪声点？（显然，这是指椒盐噪声）

孤立噪声点的灰度值与邻域平均灰度值相差悬殊

（硬阈值）对  $f(i,j)$ ，若

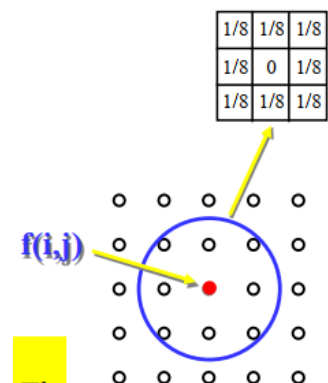
$$\left| f(i,j) - \frac{1}{N} \sum_{(m,n) \in T} f(m,n) \right| > Th$$

则判定  $f(i,j)$  为噪声点

\*\*\*上述判定存在的问题？

可能无法识别位于边缘的孤立噪声

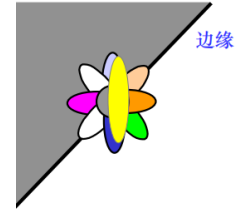
\*\*\*改进



以待处理像素为中心，设置 9 个邻域模式。对每一种邻域模式  $k$ ，分别计算邻域内元素的均值  $m_k$  和方差  $\sigma_k$ ， $k=1,2,\dots,9$ 。

判定规则：

$$\sigma_m = \min\{\sigma_k\} > Th$$



(4) 统计排序滤波器（非线性空域滤波器）

【1】定义与分类

是一种非线性滤波器，基于滤波器所在图像区域中像素的排序，由排序结果决定的值代替中心像素的值。

分类：

<1>中值滤波器：用像素领域内的中间值代替该像素。

<2>最大值滤波器：用像素领域内的最大值代替该像素。

<3>最小值滤波器：用像素领域内的最小值代替该像素。

【2】中值滤波器

$$R = \text{mid}\{z_k | k = 1, 2, \dots, n\}$$

强迫突出的亮点或暗点更像它周围的值，以消除孤立的亮点或暗点。

对付椒盐噪声的最佳方案

【3】中值滤波算法的特点：

(1) 在去除噪音的同时，可以比较好地保留边的锐度和图像的细节（优于均值滤波器）

(2) 能够有效去除脉冲噪声：以黑白点（椒盐噪声）叠加在图像上中。

\*\*图像去噪的要求：去噪包边

### 3.锐化滤波

锐化空间滤波是一种微分过程，常用于边缘提取的工作。

(1) 图像边缘

图像灰度发生变化的场所

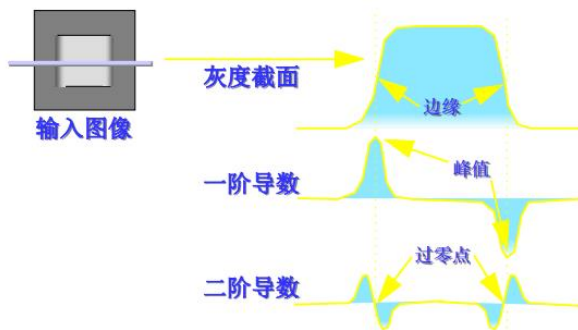
\*描述的参数：方向、幅度

沿边缘走向方向其幅度值变化较平缓，而沿垂直于边缘走向方向其幅度值变化较剧烈

\*\*图像边缘检测

基于图像灰度值在空间的不连续性对图像做出的一种分割

(2) 灰度截面与图像边缘



判据 1：在边缘处，图像的一阶导数的幅度值较大，并在其附近形成一个峰值。其峰值的大小和极性反映了边缘点的强度和方向。

判据 2：图像的二阶导数在边缘处取零值，并且，在该零值的左右两侧分别存在极性相反的两个波峰；其波峰的大小和走向反映了边缘点的强度和方向。

(3) 一阶方法：一阶微分算子

如果沿垂直于某个边缘走向方向求图像的一阶微分，则在相应的边缘点处，其微分的幅度值将较大；而在其它的图像点处，其微分的幅度值则取较小的值。这样，通过将各点处图像的一阶微分的幅度值同事先设定的阈值进行比较，可以很容易根据边缘检测的判据 1 判定该点是不是一个边缘点。

- (1) 沿X方向的一阶差分  $\Delta x$ :  $\Delta x f(i,j) = f(i,j) - f(i-1,j)$ 

-1	1
----	---
- (2) 沿X方向的一阶差分  $\Delta 2x$ :  $\Delta 2x f(i,j) = f(i+1,j) - f(i-1,j)$ 

-1	0	1
----	---	---
- (3) 沿Y方向的一阶差分  $\Delta y$ :  $\Delta y f(i,j) = f(i,j) - f(i,j+1)$ 

1	-1
---	----
- (4) 沿Y方向的一阶差分  $\Delta 2y$ :  $\Delta 2y f(i,j) = f(i,j-1) - f(i,j+1)$ 

1	0	-1
---	---	----
- (5) 沿45° 对角线方向的一阶差分  $\Delta +$ :  
 $\Delta + f(i,j) = f(i-1,j+1) - f(i,j)$ 

0	1
-1	0
- (6) 沿135° 对角线方向的一阶差分  $\Delta -$ :  
 $\Delta - f(i,j) = f(i-1,j-1) - f(i,j)$ 

1	0
0	-1

**Sobel算子**

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

1	2	1
0	0	0
-1	-2	-1

0	1	2
-1	0	1
-2	-1	0

2	1	0
1	0	-1
0	-1	-2

**Priwitt算子**

-1	0	1
-1	0	1
-1	0	1

1	1	1
0	0	0
-1	-1	-1

0	1	1
-1	0	1
-1	-1	0

1	1	0
1	0	-1
0	-1	-1

以上方法不具备各向同性

【1】 梯度算子

$$|\nabla f(x,y)| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2}$$

具有各向同性，梯度幅度等于 f(x,y)沿梯度方向上的最大变化率

【2】 Canny 算子

<1>问题：边缘检测思想简单、易行，但在图像中存在噪声的情况下上述简单方法经常遇到困难。

<2>原因：图像中通常混有高频噪声。这些高频噪声和边缘类似，均表现为图像灰度发生跳变，导致检测到的边缘点集中包含大量由噪声引起的虚假边缘点。

<3>解决：平滑滤波 + 边缘检测

<4>最佳边缘检测的三个评价指标

- ①好的信噪比：一个好的边缘检测算子将非边缘点判为边缘点，或者反过来将边缘点判为非边缘点的概率要尽可能低。
- ②好的定位性能：一个好的边缘检测算子检测出的边缘点应尽可能在实际边缘的中心。
- ③对单一边缘有唯一的响应：一个好的边缘检测算子对图像中的单一边缘产生多个响应的概率要尽可能低。

<4>Canny 算子的步骤

① 平滑滤波

设输入图像为 f(x,y)，所使用的平滑滤波器为 h(x,y)，则平滑滤波后的输出图像可表为

$$s(x,y) = f(x,y) * h(x,y)$$

② 边缘检测

计算输出图像的梯度

$$\nabla s(x,y) = f(x,y) * \nabla h(x,y)$$



同时与事先设定的阈值比较，获得边缘

<5>存在的问题

高斯平滑滤波后，边缘变得模糊且具有一定高度

存在剩余噪声和图像的细纹理，造成虚假边缘

<6>改进 1: 非极大点抑制

在垂直于边缘的方向（即梯度方向）上，对相邻点的梯度幅度进行比较，仅保留具有较大梯度幅度的点。

<7>改进 2: 非极大点抑制后采用双阈值法予以消除

设置两个阈值:  $T_1, T_2=2T_1$

采用非极大点抑制后，分别得到两幅边缘图像:  $e_1, e_2$

其中,  $e_1$  真边缘较全, 但虚假边缘也多;

$e_2$  虚假边缘少, 但真边缘不全, 出现断裂现象。

以  $e_2$  图像为基础, 寻找连续的图像边缘; 当到达连续边缘的端点处时, 在  $e_1$  图像相应点的邻域内寻找可连接的边缘点, 直到填满断裂处的间隙为止。

(2) 二阶方法: 增强细节方面较好, 抗噪力较差

【1】拉普拉斯算子

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

差分近似

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

【2】问题

由于数字图像的离散特性, 使得实际图像边缘处未必出现所期望的零值。

\*\*对策: 可利用边缘点的过零特性, 通过检测其两侧的正、负峰值来定出实际的边缘位置, 但是处理起来显得较烦琐。

\*\*实际做法: 采用将  $|\nabla^2 f|$  同给定阈值  $T$  进行比较的方法定出图像中的边缘点, 即把  $|\nabla^2 f| > T$  的像素看作是边缘点。

\*\*代价: 不得不经常接受双像素宽的边缘。同时由于  $|\nabla^2 f|$  对孤立噪声点等高频噪声很敏感, 使得方法的抗干扰能力较差

【3】提高二阶微分算子的抗噪能力

在实际进行边缘检测之前, 首先对图像进行平滑滤波处理以抑制掉图像中的高频噪声。

设输入图像为  $f(x,y)$ , 所使用的平滑滤波器为  $h(x,y)$ , 则输入图像经该平滑滤波器滤波后的输出可表为

$$s(x,y) = f(x,y) * h(x,y)$$

从而:

$$\Delta s(x,y) = f(x,y) * \Delta h(x,y)$$

\*\* $h(x,y)$  的选择: LOG 算子

<1>抑制高频噪声

<2>二次可微

<3>滤波功能可调, 保证灰度图像滤波后均值

综上，选用高斯滤波

$$h(x, y) = G(x, y, \sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

【4】判定

图像中的边缘点集  $E(x, y)$  可表为

$$\begin{aligned} E(x, y) &= \{(x, y, \sigma) \mid \nabla^2 (f(x, y) * G(x, y, \sigma)) = 0\} \\ &= \{(x, y, \sigma) \mid (f(x, y) * \nabla^2 G(x, y, \sigma)) = 0\} \end{aligned}$$

$\sigma$  是可调因子。选用不同的  $\sigma$ ，可检测图像中以不同尺度出现的强度变化。 $\sigma$  选得越大，检测到的边缘点越少，定位精度也越差。反之， $\sigma$  选得越小，检测到的边缘点越多，定位精度也越高。

(3) 比较两种滤波器的性能

二阶方法相对于一阶方法：增强细节方面较好，但抗噪能力较差

(4) 图像锐化

先用拉氏算子突出图像中的小细节，然后用梯度法突出其边缘，平滑过的梯度图像用于屏蔽拉氏图像，最后用灰度变换扩展灰度动态范围

4. 高斯滤波器为什么可以做平滑滤波？

$$h(x, y) = G(x, y, \sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

平滑滤波函数  $G$  具有将图像模糊化的功能，可有效地消除图像中尺度小于空间参数  $\sigma$  的强度变化。

由于平滑滤波函数  $G$  在空域和频域都是平滑和定域的，使得出现由它而引入的在原图像中没有的变化的可能性最小。

由于  $\nabla^2$  是各向同性的微分算子，用它可避免沿各个方向的方向导数的计算问题，从而可减少计算开销。

$G$  函数与人类视觉视网膜感受野的响应模型相符合

## 第五章 频域滤波

1. 频域滤波基本步骤

- (1) 中心化：用  $(-1)^{x+y}$  乘以输入图像
- (2) 二维离散傅里叶变换 DFT
- (3) 计算  $H(u, v)F(u, v)$
- (4) 反 DFT 变换
- (5) 提取实部
- (6) 反中心化：用  $(-1)^{x+y}$  乘以输出图像

\*\*频域滤波方法分类：

低通滤波：保留低频部分，通常用于平滑、去噪等任务

高通滤波：保留高频部分，通常用于边缘提取等任务

高频提升滤波：提升高频成分（X 光片）

带通滤波：保留中频成分，通常用于纹理提取等任务

带阻滤波：阻断中频成分

## 2.理想低通滤波器

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

(1) 低通滤波器的功率：

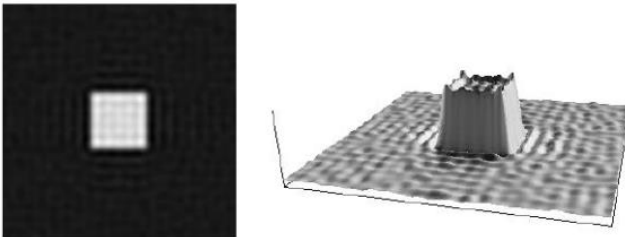
$$P(u, v) = R^2(u, v) + I^2(u, v)$$

$$P_T = \sum_{u=0}^{P-1} \sum_{v=0}^{Q-1} P(u, v)$$

$$\alpha = 100 \sum_u \sum_v P(u, v) / P_T \quad (\%)$$

以上 $P_T$ 为图像总功率， $\sum_u \sum_v P(u, v)$ 是滤波器包含的图像频域的功率

(2) 振铃现象

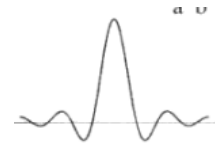


造成的原因：

首先，频域中的门信号对应到时域的辛格函数

而理想低通滤波实际上就是一种时域的辛格函数

若对一个亮点作一次理想低通滤波，亮点可视为冲激信号，与辛格信号卷积得到辛格信号，而辛格信号的时域图如下

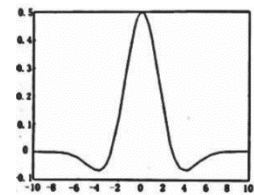


因此会得到一种类似水波纹的现象，导致像素“扩散振荡”

(3) 马赫带（一种视觉惰性效应）

指人们在明暗变化的边界，常常在亮区看到一条更亮的光带，而在暗区看到一条更暗的线条。

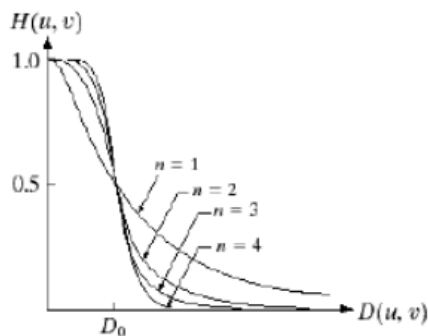
人的视觉敏感度呈现一种墨西哥草帽的形状



(4) 其他低通滤波模型——布特沃斯滤波

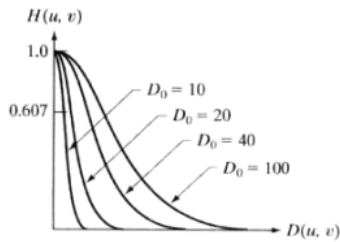
$$H(u, v) = \frac{1}{1 + (D^2(u, v)/D_0^2)^n}$$

$n$ ：滤波器的阶次，控制截断性能， $n$  越大，平滑性能越好但会产生振铃现象



(5) 其他低通滤波模型——高斯低通滤波

$$H(u, v) = e^{-\frac{1D^2(u,v)}{2 D_0^2}}$$



\*\*比较（布特沃斯滤波）BLPF 与（高斯低通滤波）GLPF 的效果  
 对于相同的截止频率 $D_0$ ，GLPF 与二阶 BLPF 相比，平滑效果稍差，但没有振铃效应在任何类型的人工缺陷不可接受的情况（医学成像）（不接受振铃）：GLPF 需要严格控制低频与高频之间截止频率得到过渡：BLPF

### 3.高通滤波

(1) 作用：去模糊化、逆卷积、锐化、边缘提取

消除模糊但是放大噪声

(2) 分类：同样，有理想高通滤波、布特沃斯滤波、高斯高通滤波

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + (D_0^2/D^2(u, v))^n}$$

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{1D^2(u,v)}{2 D_0^2}}$$

(3) LOG

$$H(u, v) = Ae^{-\frac{1D^2(u,v)}{2 D_1^2}} - Be^{-\frac{1D^2(u,v)}{2 D_2^2}}$$

$$A \geq B \text{ and } D_1 \geq D_2$$

(4) 应用：指纹识别

### 4.高频提升（强调）滤波

$$H(u, v) = 1 + \alpha HP(u, v)$$

$HP(u, v)$  is a highpass filter

### 5.带通滤波

是一个低通和高通的结合

模糊与噪声的权衡（低通减少噪声但增加模糊，高通减少模糊但增加噪声）

### 6.同态滤波：同时压缩灰度范围和增强对比度

去除光照变换所带来的影响（提升高频部分，衰减低频部分但保留细节）

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y)$$

$i(x, y)$ 为照射分量（慢的空间变化表征）， $r(x, y)$ 为反射分量（光反射造成的影响）

前者变化缓慢主要分布在低频，后者主要分布在高频

(1) 同态滤波的步骤

取对数

$$\ln f(x, y) = \ln i(x, y) + \ln r(x, y)$$

傅里叶变换

$$Z(u, v) = F_i(u, v) + F_r(u, v)$$

作一次滤波,

$$S(u, v) = H(u, v)F_i(u, v) + H(u, v)F_r(u, v)$$

傅里叶反变换

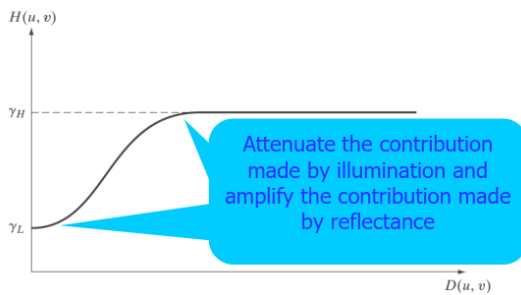
$$s(x, y) = i^{\wedge}(x, y) + r^{\wedge}(x, y)$$

取指数

$$g(x, y) = i_0(x, y)r_0(x, y)$$

(2) 滤波器的选择

$$H(u, v) = (\gamma_H - \gamma_L) \left[ 1 - e^{-c[(u^2+v^2)/D_0^2]} \right] + \gamma_L$$



**FIGURE 4.61**  
Radial cross section of a circularly symmetric homomorphic filter function. The vertical axis is at the center of the frequency rectangle and  $D(u, v)$  is the distance from the center.

$$\gamma_L < 1 \text{ and } \gamma_H > 1$$

衰减低频（照射），增强高频（反射）

(3) 效果



## 第六章 自适应滤波

### 1. 滤波的作用

(1) 定义：空域角度：在一个邻域内，对邻域内的像素执行的预定义操作；频域角度：接受（通过）或拒绝一定的频域分量

(2) 作用：

滤波去噪，平滑内插、预测估计

### 2. 自适应滤波

(1) 背景：

信号或者噪声的特性并不是一成不变的，为了取得更好的滤波效果，滤波器的参数应该也随之调整。

(2) 定义自适应滤波器包含有一种参数自适应调整的机制，即能够对处理的信号进行监控，

据此调整滤波器的参数。

自适应滤波器还包含有一种最优机制，即根据实际获取的信号，对滤波器结构和参数进行设计，以取得最优的滤波效果。

(3) 设计内容：

【1】需要给定一个优化目标

需要关于信号或者噪声的先验信息

【2】需要建立一种自调整机制

通常是基于递归模型的，当缺少完整的先验信息时，递归模型是一种有效的手段。

(4) 两个阶段

【1】滤波过程：根据输入信号产生预定的输出信号。

【2】自调整过程：根据外界条件的变化调整滤波器的结构或者参数。

通常会采用信号的均方误差作为目标函数来设计滤波器

(5) 应用：

系统辨识、信道均衡、预测估计、消除噪声、消除干扰、消除回声

### 3. 维纳滤波

(1) 目标：找到最佳的滤波器参数使得均方误差  $E\{e^2(n)\}$  最小

(2) 设计过程

定义目标函数：

$$\begin{aligned} J(w) &= E\{e^2(n)\} = E\{d^2(n) - 2d(n)y(n) + y^2(n)\} \\ &= E\{d^2(n)\} - 2E\{d(n)w^T x(n)\} + E\{w^T x(n)x^T(n)w\} \end{aligned}$$

定义  $P = E\{d(n)x(n)\}$  互相关矩阵， $R = E\{x^T(n)x(n)\}$  为自相关矩阵，因此有

$$J(w) = \sigma_d^2 - 2w^T P + w^T R w$$

二维维纳滤波：

$$\begin{aligned} J(w_0, w_1) &= \sigma_d^2 - 2w_0 E\{d(n)x(n)\} - 2w_1 E\{d(n)x(n-1)\} + w_0^2 E\{x^2(n)\} \\ &\quad + 2w_0 w_1 E\{x(n)x(n-1)\} + w_1^2 E\{x^2(n-1)\} \end{aligned}$$

$$J(w_0, w_1) = \sigma_d^2 - 2w_0 p(0) - 2w_1 p(1) + w_0^2 r(0) + 2w_0 w_1 r(1) + w_1^2 r(0)$$

对代价函数求导

$$\frac{\partial}{\partial w_0} J(w_0, w_1) = -2p(0) + 2w_0 r(0) + 2w_1 r(1)$$

$$\frac{\partial}{\partial w_1} J(w_0, w_1) = -2p(1) + 2w_1 r(0) + 2w_0 r(1)$$

令导数为 0，可得

$$w_0 = \frac{p(0)r(0) - p(1)r(1)}{r^2(0) - r^2(1)} \quad w_1 = \frac{p(1)r(0) - p(0)r(1)}{r^2(0) - r^2(1)}$$

对于 N-1 元维纳滤波

$$\begin{aligned} \nabla J(w) &= -2P + 2Rw \\ w &= R^{-1}P \end{aligned}$$

(3) 性能分析

利用平稳随机过程的相关特性和频谱特性，对混有噪声的信号进行滤波，奠定了最优滤波理论的基础。

当输入过程是广义平稳的，且统计特性已知时，能够取得较好的结果。

但是，输入过程取决于外界环境的信号和干扰，其统计特性常常是未知的、变化的。

### 4. 最小二乘滤波 (LMS filter)

同样有两个步骤：滤波过程：根据输入信号产生预定的输出信号；自调整过程：根据外界条

件的变化调整滤波器的结构或者参数。

设  $W(n)$  为第  $n$  次迭代后得到的滤波器参数，则第  $n+1$  次迭代的参数估计可表示为：

$$w(n+1) = w(n) + g(n)$$

其中， $g(n)$  为方向向量，其作用是最小化目标函数  $J(W(n+1)) = J(W(n) + g(n))$ 。

为实现目标函数的最小化，可以对  $J(W(n+1))$  进行泰勒级数展开。

以二元滤波器为例：

$$J(w+g) = J(w) + g_0 \frac{\partial J(w)}{\partial w_0} + g_1 \frac{\partial J(w)}{\partial w_1} + \frac{1}{2} [g_0^2 \frac{\partial^2 J(w)}{\partial w_0^2} + 2g_0g_1 \frac{\partial^2 J(w)}{\partial w_0 \partial w_1} + g_1^2 \frac{\partial^2 J(w)}{\partial w_1^2}]$$

对  $g_0$  和  $g_1$  求导

$$\frac{\partial J(w+g)}{\partial g} = \nabla J(w) + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J(w)}{\partial w_0^2} & \frac{\partial^2 J(w)}{\partial w_0 \partial w_1} \\ \frac{\partial^2 J(w)}{\partial w_0 \partial w_1} & \frac{\partial^2 J(w)}{\partial w_1^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix}$$

令导数为 0

$$g = -H^{-1} \nabla J$$

于是可得：牛顿迭代法

$$w(n+1) = w(n) - H^{-1} \nabla J$$

若将  $H \approx 2I$ ,

$$w(n+1) = w(n) - \frac{\mu}{2} \nabla J$$

将维纳滤波器的表达式代入其中，得

$$w(n+1) = w(n) + \mu(P + R w)$$

$P$  和  $R$  为瞬态估计

$$R(n) = u(n)u^H(n) \quad P(n) = u(n)d^*(n)$$

$$w(n+1) = w(n) + \mu u(n)e^*(n)$$

(4) 收敛分析：证明略

设  $\lambda$  是  $R$  的特征值

则递归式收敛的条件是

$$0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{\max}}$$

\*\*那么，步长的选择是？

$$tr(R) = \sum_{i=1}^M \lambda_i \Rightarrow tr(R) > \lambda_{\max}$$

$$tr(R) = E[u^H(n)u(n)]$$

因此选择

$$0 < \mu < \frac{2}{E[u^H(n)u(n)]}$$

## 第七章 图像复原

### 1. 图像退化/复原过程的模型

(1) 图像退化的具体原因包括：

【1】成像系统的像差、畸变、带宽有限等造成图像失真；

- 【2】 成像器件拍摄姿态和扫描非线性引起的图像几何失真；
- 【3】 成像系统与目标景物之间的相对运动，引起的图像运动模糊；
- 【4】 光学系统或成像器件本身响应特性的不均匀，造成的灰度失真；
- 【5】 由于场景能量传输通道中的介质特性如大气湍流效应、大气成分变化引起的图像辐射失真。
- 【6】 图像在成像、数字化、采集和处理过程中引入的噪声。

(2) 图像复原是试图利用退化过程的先验知识使已退化的图像恢复本来面目，即根据退化的原因，分析引起退化的环境因素，建立相应的数学模型，并沿着使图像降质的逆过程恢复图像。

目的是消除或减轻在图像获取以及传输过程中造成的图像品质下降，恢复图像的本来面目。因此，复原技术就是把**退化模型化**，并采用相反的过程进行处理，以便复原出原图像。

(3) 图像复原和图像增强的区别：

- 图像增强不考虑图像是如何退化的，而是一个探索性过程，试图采用各种技术来增强图像的视觉效果。因此，图像增强可以不顾增强后的图像是否失真，只要看得舒服就行。(主观)
- 图像复原就完全不同，需知道图像退化的机制和过程等先验知识，据此找出一种相应的逆处理方法，从而得到复原的图像。图像复原通常会涉及到设立一个最佳准则，它将会产生期望的最佳估计。(客观)
- 如果图像已退化，应先作复原处理，再作增强处理。
- 二者的目的都是为了改善图像的质量。

图像去噪属于图像复原

图像增强信息量不变，图像复原信息量增加

(4) 图像复原技术的分类：

- 无约束和有约束
  - 设定一个条件，来定义什么是接近真实；或者来衡量接近真实的程度。
- 自动和交互
  - 是否需要人的参与。
- 频域和空域

(5) 图像退化/复原模型

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta + n(x, y)$$

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$

通常将退化原因作为**线性、空间不变系统**来考虑，从而建立系统退化模型来近似描述图像函数的退化。

## 2.图像去噪

(1) 图像噪声的空间和频率特性

频率特性：噪声在傅里叶变换域的频率特性。

空间特性：噪声与空间坐标的关系。(除周期噪声以外，本章中假设噪声独立于空间坐标，并且它与图像内容无关联)

空间噪声利用退化模型中噪声分量的灰度值统计特性来表示， 可以被认为是由概率密度函



数 (PDF) 表示的随机变量。

(2) 各种图像噪声 (加性噪声) 的 PDF

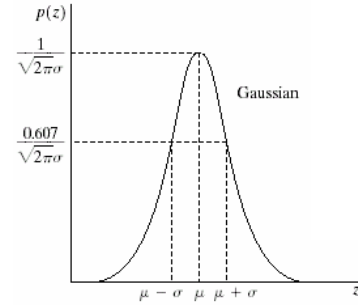
【1】高斯噪声 (正态噪声)

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(z-\mu)^2/2\sigma^2}$$

其中  $z$  表示灰度值,  $\mu$  表示  $z$  的平均值或期望值,  $\sigma$  表示  $z$  的标准差。  $\sigma^2$  称为  $z$  的方差。

当  $z$  服从高斯分布时, 其值 70% 落在  $[(\mu - \sigma), (\mu + \sigma)]$  范围内, 其值 90% 落在  $[(\mu - 2\sigma), (\mu + 2\sigma)]$  范围内。

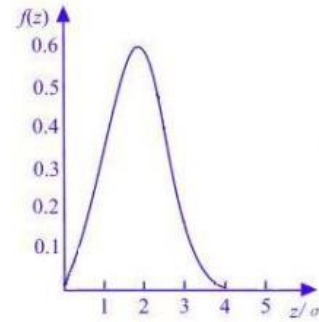
由于高斯噪声在数学上的易处理性, 实践中常用在实际中也十分常见, 因为拍照时, 摄像头的性能受传感器、电池的性能影响严重, 且光照等辐射影响下也会使得拍出的照片高斯噪声现象明显



【2】瑞利噪声

$$p(z) = \begin{cases} \frac{2}{b}(z-a)e^{-\frac{(z-a)^2}{b}} & z \geq a \\ 0 & z < a \end{cases}$$

$$\mu = a + \sqrt{\frac{\pi b}{4}} \quad \sigma^2 = \frac{b(4-\pi)}{4}$$



\*\*瑞利密度的曲线, 距原点的位移和密度的基本形状向右变形, 因此适用于近似歪斜的直方图

这种情况出现在相机拍照时, 相机自动处理造成的人造噪声 (深度成像)

当一个随机二维向量的两个分量呈独立的、有着相同的方差的正态分布时, 这个向量的模呈瑞利分布

【3】伽马噪声

$$p(z) = \begin{cases} \frac{a^b z^{b-1}}{(b-1)!} e^{-az} & z \geq a \\ 0 & z < a \end{cases}$$

$$\mu = \frac{b}{a} \quad \sigma^2 = \frac{b}{a^2}$$

其中,  $a > 0, b \in Z$

【4】指数噪声

$$p(z) = \begin{cases} a e^{-az} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

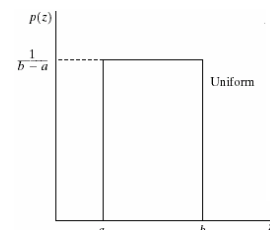
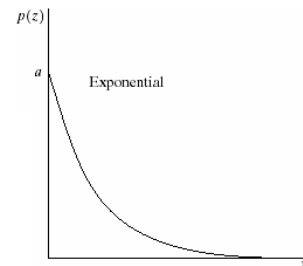
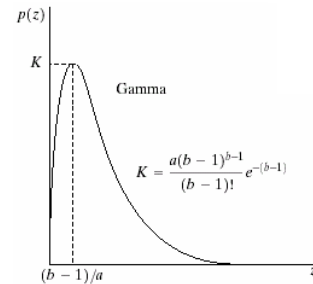
$$\mu = \frac{1}{a} \quad \sigma^2 = \frac{1}{a^2}$$

其中,  $a > 0$

注: 伽马噪声和指数噪声并不会出现在可见光相机拍出的图像里, 而是激光相机、X光等医学影像

【5】均匀分布噪声

$$p(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq z \leq b \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$



$$\mu = \frac{a+b}{2} \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

【6】(双极)脉冲(椒盐)噪声

$$p(z) = \begin{cases} P_a & z = a \\ P_b & z = b \\ 1 - P_a - P_b & \text{other} \end{cases}$$

若  $b > a$ , 灰度值  $b$  显示为一个亮点,  $a$  的值显示为暗点

若  $P_a$  or  $P_b$  为 0, 则称为单极脉冲

不可能均为 0

二者近似相等时, 脉冲噪声值类似于随机分布在图像上的胡椒和面粉细粒

盐粒噪声: 随机分布白像素 (255); 胡椒噪声: 随机分布黑像素 (0)

【7】分辨噪声

- 除了椒盐噪声, 很难从图像的视觉效果上分辨出噪声的类型。
- 只有通过直方图的形状, 能够较好地分辨出不同的噪声类型。
- 实际的图像噪声类型的判断更加困难。

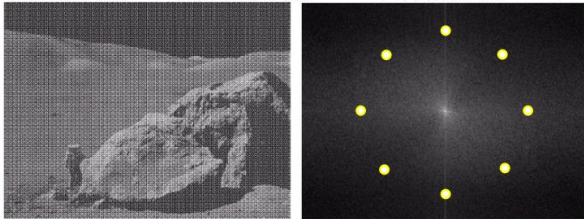
【8】噪声来源

- 高斯噪声: 电子电路噪声、低照明度和/或高温带来的传感器噪声
- 瑞利噪声: 表征深度成像中的噪声
- 指数和伽马噪声: 在激光成像中 useful
- 均匀噪声: 仿真(随机数发生器)(实际并不存在)

【9】周期噪声

- <1>图像中与空间位置相关的周期性干扰。唯一的空间依赖型噪声。
- <2>一般为成像器件、电路系统(电力或机电干扰)或机械系统引入的噪声。
- <3>周期噪声可以通过频率域滤波显著减少。

受正弦噪声污染的图像 图像频谱

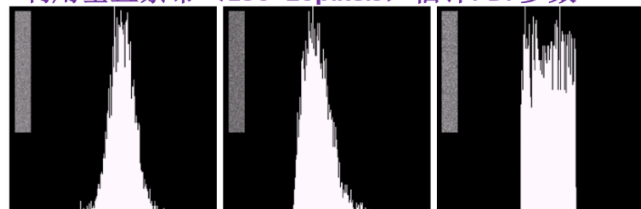


- 正弦的傅里叶变换是位于正弦共轭频率处的一对共轭脉冲。

【10】噪声参数的估计

- <1>周期噪声的参数可以通过检测图像的傅里叶谱来进行估计。
- <2>噪声 PDF 的参数一般可以从图像传感器的技术说明中得到。
- <3>对于特殊的成像装置, 可拍摄特定的测试图像来估计。
- <4>当只有传感器产生的图像可用时, 只能从恒定灰度值的一小部分

• 利用垂直条带 (150\*20pixels) 估计PDF参数



高斯 瑞利 均匀

$$\mu = \sum_{z_i \in S} z_i p(z_i)$$

$$\sigma^2 = \sum_{z_i \in S} (z_i - \mu)^2 p(z_i)$$

→ a, b 等参数

图像（直方图的形状）估计 PDF 的参数。（右图）

(3) 噪声图像的滤波复原

当图像的退化仅为噪声时

$$g(x, y) = f(x, y) + n(x, y)$$
$$G(u, v) = F(u, v) + N(u, v)$$

此时图像增强和图像复原没什么区别

**\*\*仅有加性噪声存在时可以选择空间滤波方法**

**【1】均值滤波器**

<1>算术均值

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)$$

$S_{xy}$ 表示中心点，矩形子图像窗口的尺寸 $m \times n$

**\*\*可以使用系数为 $1/mn$ 的卷积模板实现**

平滑了局部变化，降低了噪声，但模糊了结果（因此适用于平滑区域的噪声去除）

<2>几何均值

$$\hat{f}(x, y) = \left[ \prod_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t) \right]^{\frac{1}{mn}}$$

几何均值滤波器相比算术均值滤波器，平滑效果差不多，但丢失的图像细节更少，不易使图像变得模糊

<3>谐波均值

$$\hat{f}(x, y) = \frac{mn}{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} \frac{1}{g(s, t)}}$$

对盐粒噪声效果好，但不适用于胡椒噪声

善于处理高斯噪声等噪声

<4>逆谐波均值（重点）

$$\hat{f}(x, y) = \frac{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)^{Q+1}}{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)^Q}$$

分母的作用：归一化

Q 称为滤波器的阶数

当 Q 值为正数时，滤波器用于消除“胡椒”噪声；

当 Q 值为负数时，滤波器用于消除“盐”噪声；

当 Q=0 时，逆谐波均值滤波器退化为算术均值滤波器；

当 Q=-1 时，逆谐波均值滤波器退化为谐波均值滤波器。

**【2】统计排序滤波器**

• 中值滤波  $\hat{f}(x, y) = \text{median}_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\}$

• 最大值滤波  $\hat{f}(x, y) = \max_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\}$

• 最小值滤波  $\hat{f}(x, y) = \min_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\}$

图像去噪常用中值滤波

- 经过多次**中值滤波**处理，可逐渐消除噪声，但多次应用中值滤波器，会使图像模糊。
- **最大值滤波器**可以去除“胡椒”噪声，但会从黑色物体边缘移走一些黑色像素。
- **最小值滤波器**可以去除“盐”噪声，但会从亮色物体边缘移走一些白色像素。

#### <1>中点滤波器

在滤波器涉及范围内计算最大值和最小值之间的中点：

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{2} \left[ \max_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\} + \min_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\} \right]$$

- 这种滤波器结合了**顺序统计**和**求平均**，对于**高斯**和**均匀随机分布**这类噪声有最好的效果。

(并非中值滤波器)

#### <2> $\alpha$ 均值滤波器

假设在 $S_{xy}$ 邻域内去掉 $g(s, t)$ 中 $d/2$ 个最高灰度值和 $d/2$ 个最低灰度值的像素。用 $g_r(s, t)$ 来代替剩余的 $mn - d$ 个像素。由这剩余像素点的平均值形成的滤波器称为修正后的阿尔法均值滤波器。

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn - d} \sum_{(s,t) \in S_{xy}} g_r(s, t) \quad 0 \leq d \leq mn - 1$$

当 $d = 0$ 时，修正的 $\alpha$ 均值滤波器退化为算术均值滤波器。

$d = (mn - 1) / 2$ ，修正的 $\alpha$ 均值滤波器退化为中点滤波器。

$d$ 取其他值时，修正的 $\alpha$ 均值滤波器在包括多种噪声的情况

适用处理同时有椒盐和高斯的混合噪声，原理：

去掉最高、最低灰度值的过程适合去除椒盐噪声，而求均值的过程适合去除高斯噪声

### 【3】自适应滤波器

#### <1>步骤

构造窗口，分析图像的频率特性，并根据该特性分析更新参数

#### <2>自适应局部降低噪声滤波器

[1]如何区分各个像素点之间的差异？

考察  $m \times n$  矩形窗口  $S_{xy}$  区域内的统计特性。

随机变量最简单的统计度量是均值和方差。

• 均值给出了计算均值的区域中灰度平均值的度量，而方差给出了这个区域的平均对比度的度量。

->局部均值、局部方差。

(a)  $g(x, y) \rightarrow$  表示噪声图像在点 $(x, y)$ 上的值；

(b)  $\sigma_\eta^2 \rightarrow$  污染 $f(x, y)$ 以形成 $g(x, y)$ 的噪声方差；

(c)  $m_L \rightarrow$  在 $S_{xy}$ 上像素点的局部均值；

(d)  $\sigma_L^2 \rightarrow$  在 $S_{xy}$ 上像素点的局部方差。

滤波器的预期性能如下：

1. 如果 $\sigma_\eta^2 = 0$ ，滤波器应该简单地返回 $g(x, y)$ 的值。

2. 如果 $\sigma_L^2 > \sigma_\eta^2$ ，那么滤波器要返回一个接近 $g(x, y)$ 的值。

3. 如果 $\sigma_L^2 = \sigma_\eta^2$ ，希望滤波器返回区域 $S_{xy}$ 上像素的平均值。

\*\*为什么期望是这样子的?

若 $\sigma_n^2 = 0$ , 说明无噪声

若 $\sigma_L^2 > \sigma_n^2$ , 说明这里有像素突变, 是边缘区域, 要防止过于模糊边缘, 需要返回一个近似 $g(x,y)$ 的值

若 $\sigma_L^2 = \sigma_n^2$ , 说明是平缓区域, 直接使用均值滤波效果最佳。

$\sigma_n^2 \leq \sigma_L^2$ 这种情况不存在, 在不存在噪声时 $\sigma_n^2$ 为 0, 而 $\sigma_L^2$ 不会为 0, 因为图像自身也会有变化

[2]自适应表达式

$$f(x,y) = g(x,y) - \frac{\sigma_n^2}{\sigma_L^2} [g(x,y) - m_L]$$

注意:  $\sigma_n^2$ 需要估计; 一般假设 $\sigma_n^2 \leq \sigma_L^2$

### <3>自适应中值滤波器

[1]它的性能期望是:

- 平滑非脉冲噪声时可以保存细节。
- 可以处理更大概率的脉冲噪声。

[2] 如何区分各个像素点之间的差异?

考察  $m \times n$  矩形窗口  $S_{xy}$  区域内的统计排序值。

$z_{\min} = S_{xy}$  中灰度级的最小值;

$z_{\max} = S_{xy}$  中灰度级的最大值;

$z_{\text{med}} = S_{xy}$  中灰度级的中值;

$z_{xy}$  = 坐标 $(x,y)$ 处的灰度值;

$S_{\max}$  =  $S_{xy}$  允许的最大尺寸。

自适应中值滤波器的参数是: 窗口的尺寸

伪代码如下:

自适应中值滤波器算法工作在两个层次, 定义为A层和B层:

A层: 确定中值滤波的输出 $z_{\text{med}}$ 是否是一个脉冲噪声

$$A_1 = z_{\text{med}} - z_{\min}$$

$$A_2 = z_{\text{med}} - z_{\max}$$

若 $A_1 > 0$ 且 $A_2 < 0$ , 转到B层 不是一个脉冲噪声

否则增大窗口尺寸 若中值是一个噪声, 增大窗口尺寸, 直到找到非噪声  
如果窗口尺寸  $\leq S_{\max}$ , 重复A层

否则输出 $z_{\text{med}}$

B层: 检测中心点 $z_{xy}$ 本身是否是一个脉冲噪声

$$B_1 = z_{xy} - z_{\min}$$

$$B_2 = z_{xy} - z_{\max}$$

若 $B_1 > 0$ 且 $B_2 < 0$ , 输出 $z_{xy}$  不是脉冲噪声, 直接输出

否则输出 $z_{\text{med}}$  此时 $z_{xy} = z_{\min}$ 或 $z_{xy} = z_{\max}$

对付高水平  
噪声的秘诀

### <4>去噪保边的自适应滤波器——双边滤波器

(因为已经作为大作业考核, 考试权重估计不大)

[1]高斯滤波器的不足:

模糊边缘十分严重

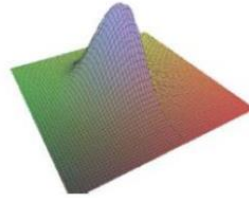
[2]双边滤波: 双边滤波 (Bilateral filter) 是一种非线性的滤波方法, 是结合图像的空间邻近度和像素值相似度的一种折衷处理, 同时考虑空域信息和灰度相似性, 达到保边去噪的目的

[3]如何区分边缘与噪声?

从空间角度和亮度角度同时考虑, 若只考虑空间距离而不考虑亮度变化, 就是高斯滤波器

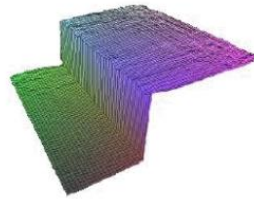
### • 双边滤波器

$$w(i, j, k, l) = \exp\left(-\frac{(i-k)^2 + (j-l)^2}{2\sigma_d^2} - \frac{\|f(i, j) - f(k, l)\|^2}{2\sigma_r^2}\right)$$



滤波输出

$$g(i, j) = \frac{\sum_{k,l} f(k, l)w(i, j, k, l)}{\sum_{k,l} w(i, j, k, l)}$$



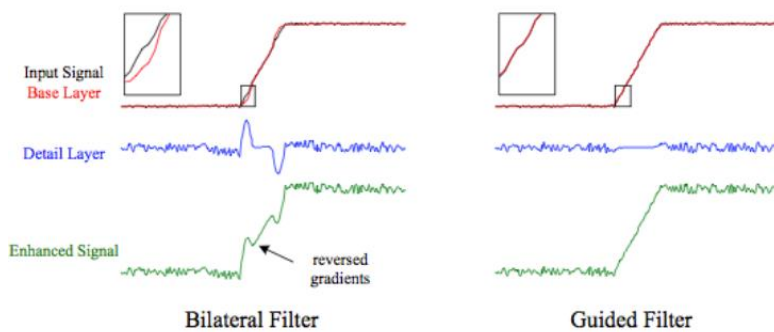
双边滤波 (Bilateral filter) 其综合了高斯滤波器 (Gaussian Filter) 和  $\alpha$ -截尾均值滤波器 (Alpha-Trimmed mean Filter) 的特点, 同时考虑了空间域与值域的差别, 而 Gaussian Filter 和  $\alpha$  均值滤波分别只考虑了空间域和值域差别。高斯滤波器只考虑像素间的欧式距离, 其使用的模板系数随着和窗口中心的距离增大而减小;  $\alpha$ -截尾均值滤波器则只考虑了像素灰度值之间的差值, 去掉  $\alpha\%$  的最小值和最大值后再计算均值。

### <5>去噪保边的自适应滤波器——引导滤波器

(因为已经作为大作业考核, 考试权重估计不大)

[1]双边滤波的缺陷:

输入信号与输出信号之差被作为细节加强时图像发生的现象, 表现为图像边缘有一层光晕



这是因为它们周围的像素很少有相似的, 颜色和高斯加权平均值几乎没有统计数据, 细节层有很大的波动, 重组后的信号有反向梯度

[2]引导滤波

导向滤波就是尽可能让输出图像的梯度和导向图相似, 同时让输出图像的灰度(亮度)与输入图像相似, 以此来保留边缘并且滤除噪声。

**Algorithm 1. Guided Filter.**

**Input:** filtering input image  $p$ , guidance image  $I$ , radius  $r$ , regularization  $\epsilon$

**Output:** filtering output  $q$ .

- 1:  $\text{mean}_I = f_{\text{mean}}(I)$   
 $\text{mean}_p = f_{\text{mean}}(p)$   
 $\text{corr}_I = f_{\text{mean}}(I \cdot I)$   
 $\text{corr}_{Ip} = f_{\text{mean}}(I \cdot p)$
- 2:  $\text{var}_I = \text{corr}_I - \text{mean}_I \cdot \text{mean}_I$   
 $\text{cov}_{Ip} = \text{corr}_{Ip} - \text{mean}_I \cdot \text{mean}_p$
- 3:  $a = \text{cov}_{Ip} / (\text{var}_I + \epsilon)$   
 $b = \text{mean}_p - a \cdot \text{mean}_I$
- 4:  $\text{mean}_a = f_{\text{mean}}(a)$   
 $\text{mean}_b = f_{\text{mean}}(b)$
- 5:  $q = \text{mean}_a \cdot I + \text{mean}_b$

/\*  $f_{\text{mean}}$  is a mean filter with a wide variety of  $O(N)$  time methods. \*/

<https://blog.csdn.net/gongdianbin/article/details/118888114>

**[4] 频域滤波削减周期噪声——最佳陷波滤波器**

<1>带阻（通）滤波器

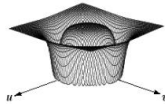
– 理想带阻滤波器

$$H(u, v) = \begin{cases} 1, & D(u, v) < D_0 - \frac{W}{2} \\ 0, & D_0 - \frac{W}{2} \leq D(u, v) \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 1, & D(u, v) > D_0 + \frac{W}{2} \end{cases}$$



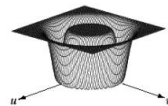
– N阶巴特沃斯带阻滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[ \frac{D(u, v)W}{D^2(u, v) - D_0^2} \right]^{2n}}$$



– 高斯带阻滤波器

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{D^2(u, v) - D_0^2}{D(u, v)W} \right]^2}$$



– 带通滤波器

– 带通滤波器执行与带阻滤波器相反的操作。

带通滤波器的传递函数  $H_{bp}(u, v)$  可根据相应的带阻滤波器的传递函数  $H_{br}(u, v)$  得到:

$$H_{bp}(u, v) = 1 - H_{br}(u, v)$$

**带通滤波器用来提取噪声模式**

\*\*把提取出的周期噪声从被污染的图像中减去，能否达到滤除周期噪声的效果呢？

可以，但这种方法是有误差的，去噪不干净并可能误伤原图像的信息。

<2>陷波滤波器、陷波带阻（通）滤波器

• 频域滤波削减周期噪声

– 陷波带阻滤波器

半径为 $D_0$ ，中心在 $(u_0, v_0)$ 且在 $(-u_0, -v_0)$ 对称的理想陷波滤波器的传递函数：

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & D_1(u, v) \leq D_0 \text{ 或 } D_2(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $D_1(u, v) = [(u - M/2 - u_0)^2 + (v - N/2 - v_0)^2]^{1/2}$   
 $D_2(u, v) = [(u - M/2 + u_0)^2 + (v - N/2 + v_0)^2]^{1/2}$



– 陷波带阻滤波器

阶数为 $n$ 的巴特沃思陷波带阻滤波器的传递函数为：

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[ \frac{D_0}{D_1(u, v)} \right]^{2n}} \cdot \frac{1}{1 + \left[ \frac{D_0}{D_2(u, v)} \right]^{2n}}$$



高斯陷波带阻滤波器的传递函数为：

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{D_1(u, v) D_2(u, v)}{D_0^2} \right]}$$



– 陷波带通滤波器

$$H_{np} = 1 - H_{nr}$$

<3>最佳陷波滤波器

[1]从被干扰图像中分离出周期性干扰噪声的主要成分

• 观察频谱图，选定干扰频点，交互式创建陷波带通滤波器

• 利用陷波带通滤波器，提取出各个噪声成分  
 [2]从被干扰图像中按权重减去各个干扰频谱的成分。

交互式：其实就是人工选择

**第一步：**在每个尖峰处设置一陷波带通滤波器 $H(u, v)$

干扰噪声模式的傅立叶变换为： $N(u, v) = H(u, v)G(u, v)$

选中一个滤波器后，空间域相应的噪声模式可由下式获得：

$$\eta(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{ H(u, v)G(u, v) \}$$

$\therefore G(u, v) = F(u, v) + N(u, v)$

$\therefore$  若 $\eta(x, y)$ 完全已知，则可从 $g(x, y)$ 减去模式得到 $f(x, y)$ 。

但是， $N(u, v)$ 是通过交互式过程估计 $H(u, v)$ 得到的，滤波过程只会得到真实 $f(x, y)$ 的估计。

$$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - w(x, y)\eta(x, y)$$

选取 $w(x, y)$ 使估计值 $\hat{f}(x, y)$ 在每一点 $(x, y)$ 的指定邻域上方差最小。

**加权函数或调制函数**

考虑点 $(x, y)$ 的尺寸为 $(2a+1) \times (2b+1)$ 的邻域。

在坐标 $(x, y)$ 处， $\hat{f}(x, y)$ 的局部方差可根据以下方法估计：

$$\sigma^2(x, y) = \frac{1}{(2a+1)(2b+1)} \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b [\hat{f}(x+s, y+t) - \bar{\hat{f}}(x, y)]^2$$

求 $\sigma^2(x, y)$ 的极小值点，解：计算 $\hat{f}(x, y)$ 时，先计算 $w(x, y)$ 。

$$\frac{\partial \sigma^2(x, y)}{\partial w(x, y)} = 0$$

若假定 $w(x, y)$ 在某一邻域内为常量，则在每一个非重叠邻域的一点计算 $w(x, y)$ 值，然后处理该邻域内包含的所有图像点。

$w(x, y)$ 的解为：

$$w(x, y) = \frac{\overline{g(x, y)\eta(x, y)} - \bar{g}(x, y)\bar{\eta}(x, y)}{\bar{\eta}^2(x, y) - \bar{\eta}(x, y)^2}$$



### 3. 图像复原

#### (1) 线性位置不变系统退化函数的估计

#### 线性位置不变系统

#### (Linear Position-Invariant System)

$$H[af_1(x, y) + bf_2(x, y)] = aH[f_1(x, y)] + bH[f_2(x, y)]$$

$$H[f(x - \alpha, y - \beta)] = g(x - \alpha, y - \beta)$$

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta + \eta(x, y)$$

$h(x, \alpha, y, \beta)$  为系统  $H$  的冲激响应。

(点扩散函数)

(Point Spread Function)

$H$  就是退化函数 (点扩散函数)

- 退化模型

$$\begin{cases} g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y) \\ G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v) \end{cases}$$

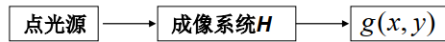
#### 【1】观察法

- 收集图像自身的信息来估计退化函数。
- 从局部推断整体
  - 选择高信噪比区域;
  - 观察特定结构的频谱特点;
  - 推断退化函数的形状、参数。

$$H_s(u, v) = \frac{G_s(u, v)}{\hat{F}_s(u, v)}$$

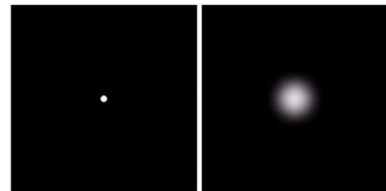
#### 【2】试验估计法

- 使用成像系统自身或与之相似的系统, 通过试验测试得到准确的退化估计。



- 由于冲激的傅里叶变换为常数  $A$ , 可得:

$$H(u, v) = \frac{G(u, v)}{A}$$



输入点光源

输出点扩散斑

\*\*这两种方法的区别?

#### 【3】数学模型估计法举例

- 光学散焦的物理模型

$$\begin{aligned} H(u, v) &= J_1(\pi d \rho) / \pi d \rho \\ \rho &= (u^2 + v^2)^{1/2} \end{aligned}$$

- 大气湍流的物理模型

$$H(u, v) = e^{-k(u^2 + v^2)^{5/6}}$$

- 其中  $k$  为常数, 与湍流特性相关。

- 其中  $d$  是散焦点扩展函数的直径,  $J_1(\bullet)$  是第一类贝塞尔函数。

#### 【4】估计出噪声模式和退化函数后, 图像复原的方法?

- 逆滤波

- 维纳滤波
- 约束最小二乘法滤波器
- 几何均值滤波

(2) 逆滤波

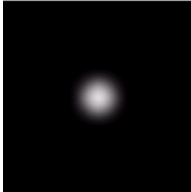
$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$

↓

$$\hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)}$$

$$= \frac{H(u, v)F(u, v) + N(u, v)}{H(u, v)}$$

$$= F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)}$$



随机函数

当退化为零或很小时， $N(u, v)/H(u, v)$ 会变得很大

避免为零值，应限制滤波频率使其接近原点值。

(3) 最小均方误差滤波——维纳滤波

逆滤波没有说明怎样处理噪声。维纳滤波综合考虑退化函数和噪声统计特征。

**思路：**认为图像和噪声是随机函数，

目标是找原图像 $f$ 的估计值 $\hat{f}$ ，使它们之间的均方误差最小。

$$e^2 = E\{(f - \hat{f})^2\}$$

**准则：**

$$\min : e^2 = E\{[f(x, y) - \hat{f}(x, y)]^2\}$$

**维纳滤波** 求  $\hat{f}(x, y)$ 。

当 $\hat{F}(u, v)$ 在频域满足下式时， $e^2$ 取最小值：

$$\hat{F}(u, v) = \left[ \frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + S_n(u, v) / S_f(u, v)} \right] G(u, v)$$

$H(u, v)$	退化函数
$H^*(u, v)$	$H(u, v)$ 的复共轭
$ H(u, v) ^2$	$H^*(u, v)H(u, v)$
$S_n(u, v) =  N(u, v) ^2$	噪声的功率谱
$S_f(u, v) =  F(u, v) ^2$	未退化图像的功率谱

令  $H_w = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + S_n(u, v) / S_f(u, v)}$

- **维纳滤波**
- 当无噪声或存在噪声且信噪比较高时，即  $S_f(u, v) \gg S_n(u, v)$ ，则  $S_n(u, v)/S_f(u, v)$  很小，此时， $H_w(u, v) \rightarrow 1/H(u, v)$ ，即 **Wiener滤波器变成了逆滤波器**。
- 当噪声较大时， $S_n(u, v) \gg S_f(u, v)$ ，则  $H_w(u, v) \rightarrow 0$ ，此时实现了对噪声放大的抑制。
- 对于衍射受限的光学系统，由于其截止频率之外的  $H(u, v) = 0$ ，但由于  $S_n(u, v)$  和  $S_f(u, v)$  项的存在，因而使  $H_w(u, v) = 0$ 。

(4) 约束最小二乘滤波

【1】维纳滤波应用中的困难:

- 原图像和噪声的功率谱需要已知
- K 值的简化, 忽略了图像功率谱的分布。
- 相比之下, 约束最小二乘方滤波器只要求知道噪声的方差和均值

约束最小二乘方滤波是以复原后图像的平滑程度作为评价准则的约束滤波方法。

- 常用的平滑评价准则包括图像的拉普拉斯变换最小, 即二阶导数最小:

$$C = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\nabla^2 f(x, y)]^2$$



- 那么约束条件怎么选择呢?

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \boldsymbol{\eta} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}\|^2 = \|\boldsymbol{\eta}\|^2$$

$\mathbf{g}, \hat{\mathbf{f}}, \boldsymbol{\eta}$  为向量  
 $\|\mathbf{w}\|^2 = \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{w}$  表示范数

1. 设定  $\gamma$ , 计算 
$$\hat{F}(u, v) = \left[ \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \gamma |P(u, v)|^2} \right] G(u, v)$$

2. 计算 
$$\|\mathbf{r}\|^2 = \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}\|^2$$
  

$$\|\boldsymbol{\eta}\|^2 = MN [\sigma_\eta^2 - m_\eta]$$

3. 判断是否满足  $\|\mathbf{r}\|^2 = \|\boldsymbol{\eta}\|^2 \pm a$

4. 调整  $\gamma$ , 重新计算

## 第八章 小波变换

(因为已经作为大作业考核, 考试权重估计不大)

1. 导论

(1) 小波:

在有限时间范围内变化且其平均值为零的数学函数

- 具有有限的持续时间和突变的频率和振幅
- 在有限的时间范围内, 它的平均值等于零

(2)  $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$  傅里叶变换只有一个变量  $\omega$ , 对应频率上的变化

\*\*傅里叶变换的致命缺陷: 【1】 丢失了时域信息 (时间分辨率); 【2】 丢失了信号时频域的局部特性

$WT(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt$  小波变换有两个变量, 尺度  $a$  和平移  $\tau$ , 分别控制小波的伸缩和平移。 尺度对应频率上的变化, 平移对应时间上的变化。

(3) 小波分析/小波变换：变换目的是获得时间和频率域之间的相互关系

- 小波变换
- 对一个函数在空间和时间上进行局部化的一种数学变换
- 通过**平移母小波**(mother wavelet)获得信号的时间信息，通过**缩放母小波的宽度(或称尺度)**获得信号的频率特性
- **对母小波的平移和缩放操作是为计算小波的系数**，这些系数代表局部信号和小波之间的相互关系
- 对比傅立叶变换
- 提供了频率域的信息，但丢失了时间域的局部化信息

(4) 小波分析中常用的三个基本概念

- 连续小波变换
- 离散小波变换
- 小波重构

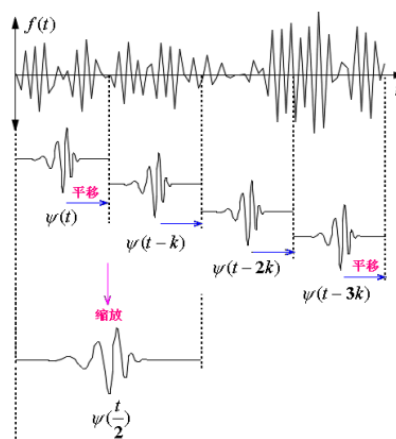
(5) 连续小波变换 (CWT)

### 连续小波变换(continuous wavelet transform, CWT)

- 傅立叶分析
  - 用一系列不同频率的正弦波表示一个信号
  - 一系列不同频率的正弦波是傅立叶变换的基函数
- 小波分析
  - 用母小波通过移位和缩放后得到的一系列小波表示一个信号
  - 一系列小波可用作表示一些函数的基函数
- 凡能用傅立叶分析的函数都可用小波分析
  - 小波变换可理解为用经过缩放和平移的一系列函数代替傅立叶变换用的正弦波
- 用不规则的小波分析变化激烈的信号比用平滑的正弦波更有效，或者说对信号的基本特性描述得更好

CWT的变换过程示例，见右图，可分如下5步

1. 小波  $\psi(t)$  和原始信号  $f(t)$  的开始部分进行比较
2. 计算系数  $C$ ——该部分信号与小波的近似程度； $C$  值越高表示信号与小波相似程度越高
3. 小波右移  $k$  得到的小波函数为  $\psi(t-k)$ ，然后重复步骤1和2，……直到信号结束
4. 扩展小波，如扩展一倍，得到的小波函数为  $\psi(t/2)$
5. 重复步骤1~4



连续小波变换的过程

(6) 离散小波变换 (DWT)

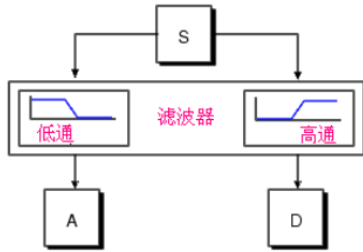
用小波的基函数(basis functions)表示一个函数的方法

小波的基函数序列或称子小波(baby wavelets)函数是由单个小波或称为母小波函数通过缩放和平移得到的

缩放因子和平移参数都选择  $2^j$  ( $j > 0$  的整数)的倍数，这种变换称为双尺度小波变换(dyadic wavelet transform)

## 执行DWT的有效方法

- 用Mallat在1988年开发的滤波器，称为Mallat算法
- DWT的概念见下图。S表示原始的输入信号；通过两个互补的滤波器产生A和D两个信号



双通道滤波过程

- A表示信号的近似值 (approximations)，大的缩放因子产生的系数，表示信号的低频分量
- D表示信号的细节值 (detail)，小的缩放因子产生的系数，表示信号的高频分量

(7) 小波分解树与小波包分解树

(8) 小波重构与重构滤波器

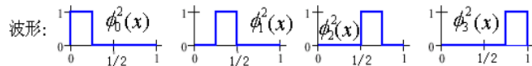
## 2.哈尔小波变换

(1) 哈尔基函数

- 生成向量空间  $\mathcal{V}^2$  的常值函数

$$\phi_0^2(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \phi_1^2(x) = \begin{cases} 1, & 1/4 \leq x < 1/2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\phi_2^2(x) = \begin{cases} 1, & 1/2 \leq x < 3/4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \phi_3^2(x) = \begin{cases} 1, & 3/4 \leq x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



- 为了表示向量空间中的矢量，每一个向量空间都需要定义一个基(basis)，哈尔基定义为

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

- 为生成向量空间而定义的基函数也叫做尺度函数 (scaling function)。哈尔基尺度函数定义为

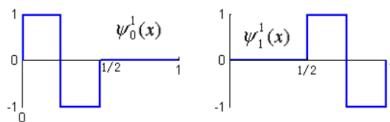
$$\phi^j(x) = \phi(2^j x - i), \quad i = 0, 1, \dots, (2^j - 1)$$

- 其中，j为尺度因子，使函数图形缩小或放大  
i为平移参数，使函数沿x轴方向平移

(2) 哈尔小波函数

- 生成向量空间  $\mathcal{W}^1$  的哈尔小波

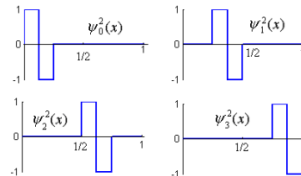
$$\psi_0^1(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/4 \\ -1 & 1/4 \leq x < 1/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad \psi_1^1(x) = \begin{cases} 1 & 1/2 \leq x < 3/4 \\ -1 & 3/4 \leq x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



- 生成向量空间  $\mathcal{W}^2$  的哈尔小波

$$\psi_0^2(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/8 \\ -1 & 1/8 \leq x < 2/8 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad \psi_1^2(x) = \begin{cases} 1 & 2/8 \leq x < 3/8 \\ -1 & 3/8 \leq x < 4/8 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\psi_2^2(x) = \begin{cases} 1 & 4/8 \leq x < 5/8 \\ -1 & 5/8 \leq x < 6/8 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad \psi_3^2(x) = \begin{cases} 1 & 6/8 \leq x < 7/8 \\ -1 & 7/8 \leq x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



### (3) 哈尔小波分解计算 (大题)

步骤:

步骤 1: 求均值(averaging)。计算相邻像素对的平均值，得到一幅分辨率比较低的新图像，它的像素数目变成了 2 个，即新的图像的分辨率是原来的 1/2

步骤 2: 求差值(differencing)。为能从 2 个像素组成的图像重构由 4 个像素组成的原始图

像，就需要存储一些图像的细节系数(detail coefficient)

方法是把像素对的第一个像素值减去这个像素对的平均值

然后原始图像用两个均值和两个细节系数表示

步骤 3: 重复步骤 1 和 2, 把由第一步分解得到的图像进一步分解成分辨率更低的图像和细节系数。

把由 4 个像素组成的一幅图像用一个平均像素值和三个细节系数表示, 这个过程称为哈尔小波变换(Haar wavelet transform), 也称哈尔小波分解(Haar wavelet decomposition)。

例: 设一副一维图像只有四个相邻像素, 对应的像素值为[9 7 3 5]

计算该图像的哈尔小波变换系数

【1】求均值[8 4]

【2】求差值[1 -1]

因此原始图像用两个均值和两个细节系数表示为

[8 4 1 -1]

【3】再次求均值和差值

用一个平均像素值和三个细节系数表示: [6 2 1 -1]

分辨率	平均值	细节系数
4	[9 7 3 5]	
2	[8 4]	[1 -1]
1	[6]	[2]

(4) 哈尔小波分解的特点

特点: (1) 变换过程中没有丢失信息, 因为能够从所记录的数据中重构出原始图像。(2) 对这个给定的变换, 可从所记录的数据中重构出各种分辨率的图像。(3) 通过变换之后产生的细节系数的幅度值比较小, 为图像压缩提供了一种途径, 如去掉微不足道的系数

在例 1 中的求均值和差值的过程实际上就是一维小波变换的过程, 现在用数学方法重新描述哈尔小波变换

•  $I(x)$  图像用  $L^2$  中的哈尔基表示

$$I(x) = 9\phi_0^2(x) + 7\phi_1^2(x) + 3\phi_2^2(x) + 5\phi_3^2(x) \quad I(x) = c_0^1\phi_0^1(x) + c_1^1\phi_1^1(x) + d_0^1\psi_0^1(x) + d_1^1\psi_1^1(x)$$

$$I(x) = 9 \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \hline \end{array} \phi_0^2(x) \\ + 7 \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \hline \end{array} \phi_1^2(x) \\ + 3 \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \hline \end{array} \phi_2^2(x) \\ + 5 \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \hline \end{array} \phi_3^2(x)$$

$$I(x) = 8 \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \hline \end{array} \phi_0^1(x) \\ + 4 \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \hline \end{array} \phi_1^1(x) \\ + 1 \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \hline \end{array} \psi_0^1(x) \\ + -1 \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \hline \end{array} \psi_1^1(x)$$

$$I(x) = 6 \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \hline \end{array} \phi_0^0(x) \\ + 2 \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \hline \end{array} \psi_0^0(x) \\ + 1 \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \hline \end{array} \psi_0^1(x) \\ + -1 \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \hline \end{array} \psi_1^1(x)$$

### 3. 二维小波变换

(1) 用小波对图像进行变换

标准分解(standard decomposition)

- 首先使用一维小波对图像每一行的像素值进行变换, 产生每一行像素的平均值和细节系数, 然后使用一维小波对这个经过行变换的图像的列进行变换, 产生这个图像的平均值和细节系数

非标准分解(nonstandard decomposition)

- 用一维小波交替地对每一行和每一列像素值进行变换。
- 对每一行计算像素对的均值和差值, 然后对每一列计算像素对的均值和差值
- 对包含均值的 1/4 像素计算行和列的均值和差值, 依此类推

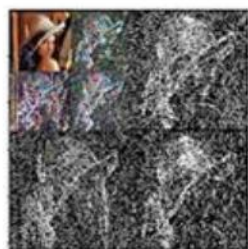
## (2) 图像的多分辨率显示



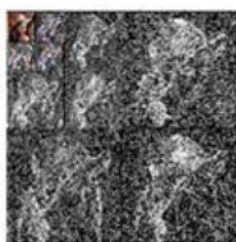
(a) 原始图像



(b) 1/4分辨率图像



(c) 1/16分辨率图像



(d) 1/64分辨率图像

图像金字塔就是一系列以金字塔形状排列的分辨率逐步降低的图像的集合。

## (3) 小波变换在图像处理中的应用

(后略)

# 第九章 图像压缩

## 1. 数据压缩与信息论基础

### (1) 为什么要进行图像压缩

数字图像通常要求很大的比特数, 这给图像的传输和存储带来相当大的困难。要占用很多的资源, 花很高的费用。

图像像素之间存在相邻性

### (2) 图像数据压缩的可能性

【1】一般原始图像中存在很大的冗余度。

【2】用户通常允许图像失真。

【3】当信道的分辨率不及原始图像的分辨率时, 降低输入的原始图像的分辨率对输出图像分辨率影响不大。

【4】用户对原始图像的信号不全都感兴趣, 可用特征提取和图像识别的方法, 丢掉大量

无用的信息。 提取有用的信息， 使必须传输和存储的图像数据大大减少

### (3) 数据冗余

描述信源的数据是信息量（信源熵）和信息冗余量之和。

设： $n_1$ 和 $n_2$ 是在两个表达相同信息的数据集中，所携带的单位信息量。

- **压缩率**：——描述压缩算法性能

$$C_R = n_1 / n_2$$

其中， $n_1$ 是压缩前的数据量， $n_2$ 是压缩后的数据量

- **相对数据冗余**：

$$R_D = 1 - 1/C_R$$

例： $C_R=20$ ； $R_D = 19/20$

#### 【1】常见的数据冗余——编码冗余

为表达图像数据需要用一系列符号，用这些符号根据一定的规则来表达图像就是对图像编码。

对每个信息或事件所赋的符号序列称为码字，而每个码字里的符号个数称为码字的长度。

#### 【2】常见的数据冗余——像素冗余：

由于任何给定的像素值，原理上都可以通过它的邻居预测到，单个像素携带的信息相对是小的。

对于一个图像，很多单个像素对视觉的贡献是冗余的。这是建立在对邻居值预测的基础上。原始图像越有规则，各像素之间的相关性越强，它可能压缩的数据就越多。

#### 【3】常见的数据冗余——视觉心理冗余

一些信息在一般视觉处理中比其它信息的相对重要程度要小，这种信息就被称为视觉心理冗余。

### (4) 图像压缩的指标

【1】压缩比：图像压缩前后所需的信息存储量之比，压缩比越大越好。

【2】压缩算法：利用不同的编码方式，实现对图像的数据压缩。

【3】失真性：压缩前后图像存在的误差大小。

### (5) 图像编码中的保真度原则

【1】客观保真度原则：通常使用的客观保真度准则有输入图像和输出图像的均方根误差；输入图像和输出图像的均方根信噪比两种。

【2】主观保真度原则

### (6) 信息论（略）

#### 【1】一些概念

<1>信息：事物运动状态或存在方式的不确定性的描述；

<2>信源空间：随机符号及其出现概率的空间；

<3>信源的分类：

连续信源—离散信源—混合信源；

无记忆信源—有记忆信源（相关信源）—有限长度记忆信源（Markov 信源）

#### 【2】信息的度量



<1>信息由不确定性程度进行度量；确定事件的信息量为零。

<2>不确定性程度越高信息量越大；

<3>相互独立性与信息量可加性；独立事件的联合信息等于两个独立事件的信息总和。

满足上述公理的函数为： $I(a) = -\log P(a)$

### 【3】离散无记忆信源

<1>自信息量 $I(a) = -\log P(a)$

信息量的单位：

底为 2 时——单位为：比特（bit）

底为 e 时——单位为：奈特（Nat）

底为 10 时——单位为：哈特

<2>信源平均自信息量（信息熵） $H(A) = -\sum_{i=1}^m P(a_i) \log P(a_i)$

## 2.图像压缩编码

### (1) 无损压缩编码与有损压缩编码

无损压缩算法中删除的仅仅是图像数据中冗余的信息，因此在解压缩时能精确恢复原图像，无损压缩的压缩比很少有能超过 3: 1 的,常用于要求高的场合。

无损压缩：霍夫曼、算术、行程

有损压缩是通过牺牲图像的准确率以实现较大的压缩率，如果容许解压图像有一定的误差，则压缩率可显著提高。有损压缩在压缩比大于 30: 1 时仍然可重构图像，而如果压缩比为 10:1 到 20:1，则重构的图像与原图几乎没有差别

### (2) 哈夫曼编码（大题）

等长码：对于一个消息集合中的不同消息，用相同长度的不同码字表示，编解码简单，编码效率不高。

变长码：与等长码相对应，对于一个消息集合中的不同消息，也可以用不同长度的码字表示，编码效率高，编解码复杂

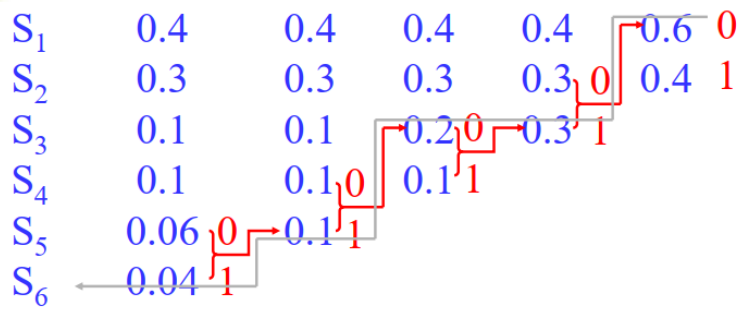
哈夫曼编码是一种利用信息符号概率分布特性的变字长的编码方法。

对于出现概率大的信息符号编以短字长的码，对于出现概率小的信息符号编以长字长的码。

- I. 将信源符号按出现概率从大到小排成一列，然后把最末两个符号的概率相加，合成一个概率。
- II. 把这个符号的概率与其余符号的概率按从大到小排列，然后再把最末两个符号的概率加起来，合成一个概率。
- III. 重复上述做法，直到最后剩下两个概率为止。
- IV. 从最后一步剩下的两个概率开始逐步向前进行编码。每步只需对两个分支各赋予一个二进制码，如对概率大的赋予码0，对概率小的赋予码1。

例

输入 输入概率 第一步 第二步 第三步 第四步



$S_6=01011$

(2) 算术编码

从理论上分析，采用哈夫曼编码可以获得最佳信源字符编码效果；但在实际应用中，由于信源字符出现的概率并非满足 2 的负幂次方，因此往往无法达到理论上的编码效率和信息压缩比；

以信源字符序列 {x, y} 为例

- 设字符序列 {x, y} 对应的概率为 {1/3, 2/3},  $N_x$  和  $N_y$  分别表示字符 x 和 y 的最佳码长，则根据信息论有：

$$N_x = -\log_2\left(\frac{1}{3}\right) = 1.58$$

$$N_y = -\log_2\left(\frac{2}{3}\right) = 0.588$$

字符 x、y 的最佳码长分别为 1.58bit 和 0.588bi；

- 这表明，要获得最佳编码效果，需要采用小数数字长度，这是不可能实现的；
- 即采用哈夫曼方法对 {x, y} 的码字分别为 0 和 1，也就是两个符号信息的编码长度都为 1。对于出现概率大的字符 y 并未能赋予较短的码字；
- 实际编码效果往往不能达到理论效率；
- 为提高编码效率，Elias 等人提出了算术编码算法。

Source Symbol	Probability	Initial Subinterval
$a_1$	0.2	[0.0, 0.2)
$a_2$	0.2	[0.2, 0.4)
$a_3$	0.4	[0.4, 0.8)
$a_4$	0.2	[0.8, 1.0)

TABLE 8.6 Arithmetic coding example.

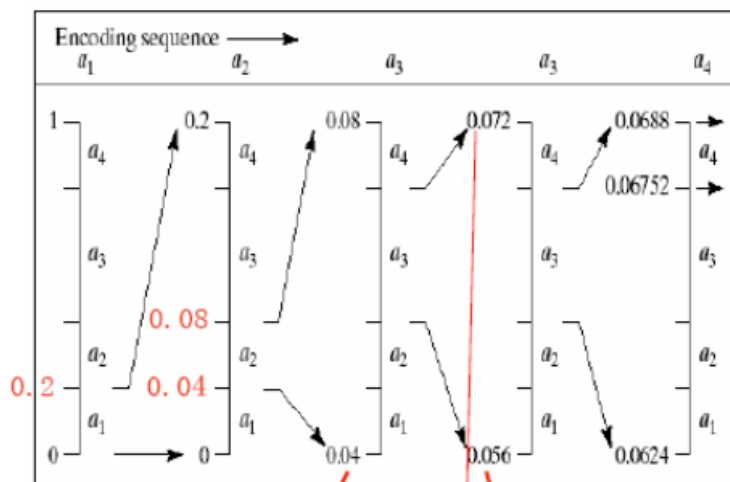


FIGURE 8.13 Arithmetic coding procedure.

$$0.04 = 0 + (0.2 - 0) / 5 \times 1$$

$$0.08 = 0 + (0.2 - 0) / 5 \times 2$$

$$0.056 = 0.04 + (0.08 - 0.04) / 5 \times 2$$

$$0.072 = 0.04 + (0.08 - 0.04) / 5 \times 4 = 0.04 + 0.032$$

最后，在 [0.06752, 0.0688] 的区间的任何数字可以表示信息 “a1, a2, a3, a3, a4”

(3) 行程编码 (大题)

【1】行程: 具有相同灰度值的像素序列。

【2】编码思想: 去除像素冗余。用行程的灰度和行程的长度代替行程本身。

例:

常用第一种编码

0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1

1的游程: (2,2) (6,3) (13,6) (20,1)  
 (4,6) (11,10)  
 (1,5) (11, 1) (17, 4)  
 1和0的游程长度: 0, 1, 2, 2, 3, 4, 6, 1, 1  
 0, 3, 6, 1, 10  
 1, 5, 5, 1, 5, 4

【3】分析:

- 对于有大面积色块的图像, 压缩效果很好直观, 经济, 是一种无损压缩
- 对于纷杂的图像, 压缩效果不好, 最坏情况下, 会加倍图像

(4) 无损预测编码

编码思想

1) 去除像素冗余。

2) 认为相邻像素的信息有冗余。当前像素值可以用以前的像素值来获得。

3) 当前像素值  $f_n$ , 通过预测器得到一个预测值, 对当前值和预测值求差, 对残差编码, 作为压缩数据流中的下一个元素。由于残差比原数据要小, 因而编码要小, 可用变长编码。大多数情况下,  $f_n$  的预测是通过  $m$  个以前像素的线性组合来生成的。

第一步: 压缩头处理

第二步: 对每一个符号  $f(x,y)$ , 通过预测器求出预测值  $\hat{f}(x,y)$

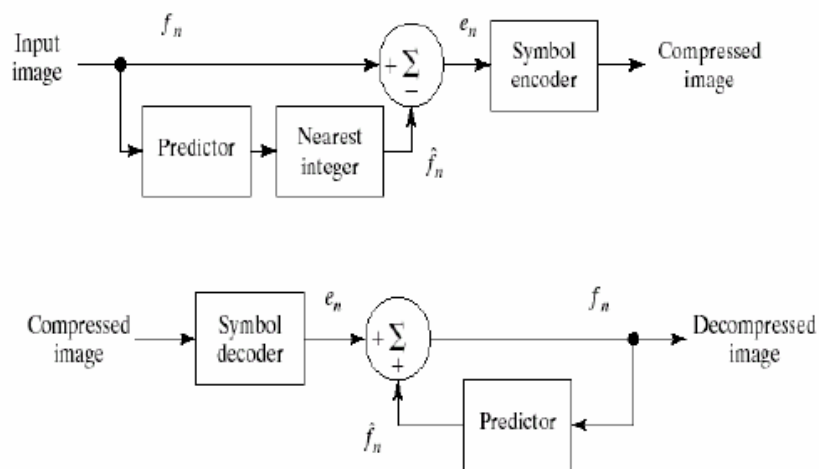
第三步: 求出预测误差

$$e(x, y) = f(x, y) - \hat{f}(x, y)$$

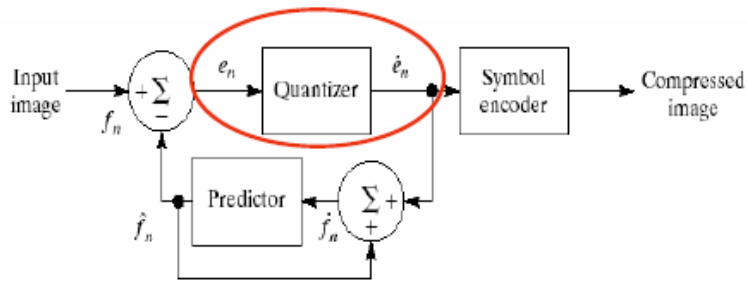
第四步: 对误差  $e(x, y)$  编码, 作为压缩值。

重复二、三、四步

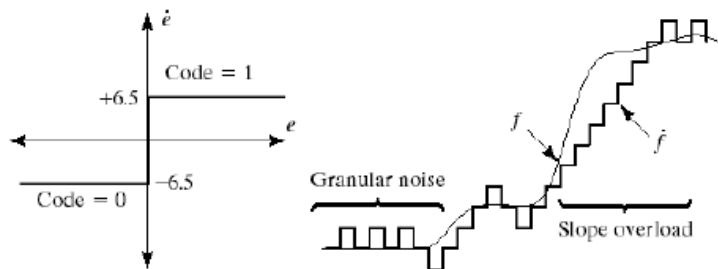
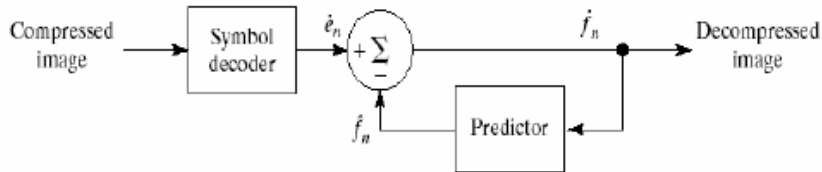
**FIGURE 8.19** A lossless predictive coding model: (a) encoder; (b) decoder.



(5) 有损预测编码



a  
b  
**FIGURE 8.21** A lossy predictive coding model: (a) encoder and (b) decoder.

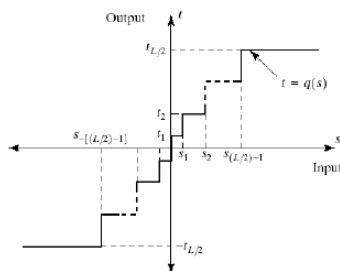


a b  
c  
**FIGURE 8.22** An example of delta modulation.

Input		Encoder			Decoder		Error	
$n$	$f$	$\hat{f}$	$e$	$\hat{e}$	$\hat{f}$	$\hat{f}$	$\hat{f}$	$[f - \hat{f}]$
0	14	—	—	—	14.0	—	14.0	0.0
1	15	14.0	1.0	6.5	20.5	14.0	20.5	-5.5
2	14	20.5	-6.5	-6.5	14.0	20.5	14.0	0.0
3	15	14.0	1.0	6.5	20.5	14.0	20.5	-5.5
·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·
14	29	20.5	8.5	6.5	27.0	20.5	27.0	2.0
15	37	27.0	10.0	6.5	33.5	27.0	33.5	3.5
16	47	33.5	13.5	6.5	40.0	33.5	40.0	7.0
17	62	40.0	22.0	6.5	46.5	40.0	46.5	15.5
18	75	46.5	28.5	6.5	53.0	46.5	53.0	22.0
19	77	53.0	24.0	6.5	59.6	53.0	59.6	17.5
·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·

The residual values should be very small, so

- ▶ Use fewer bits for smaller values (entropy coding), or
- ▶ Use finer quantization (less loss) for smaller values



**FIGURE 8.25** A typical quantization function.

与无损预测编码的区别：对预测误差作了量化

### 3.图像压缩编码主要国际标准

#### 静止图像压缩编码标准-JPEG

JPEG 基本系统其核心属于分块变换编码。JPG 编码时，对原始图像的每一个分量首先分割成互不重叠的  $8 \times 8$  像素块，然后对每个像素块的编码过程可分为二维 DCT 变换。

分块变换编码的优势：

- (1) 使得图像信号的能量更加集中；
- (2) 利用了人类视觉心理冗余性
- (3) 分块变换使得图像的 artifact 不会扩展到整幅图像，保证了图像编码质量。

图像的 artifact: 图像生成中的“合成图片中,不自然的、能让人看出是人为处理过的痕迹、区域、瑕疵等”

自拟题目 (题型: 选择、填空、简答、计算)

#### 一、选择、填空

1.哪种噪声是现实生活中不可能出现的?

- A、椒盐噪声 B、高斯噪声 C、瑞利噪声 D、均匀噪声

D

2. 自适应局部降低噪声滤波器中，可以使用参数\_\_\_\_\_来衡量判断区域像素的对比度。  
局部方差

3.以下的代码描述的是什么自适应滤波器?

```
function [f] = adpfilter(g, nhood ,noiseVar)
    g = im2double(g);
    localMean = filter2(ones(nhood), g) / prod(nhood);
    localVar = filter2(ones(nhood), g.^2) / prod(nhood) - localMean.^2;
    f = g - localMean;
    g = localVar - noiseVar;
    g = max(g, 0);
    f = localMean + ((f ./ max(localVar, noiseVar)) .* g);
end
```

- A、自适应局部降低噪声滤波器  
B、自适应中值滤波器  
C、双边滤波器  
D、引导滤波器

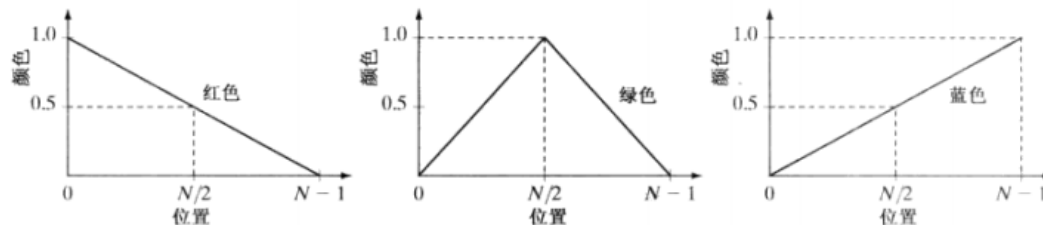
A

4.三大保边滤波器: \_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_、最小二乘滤波  
导向滤波、双边滤波

5.小波变换是对一个函数\_\_\_\_\_的一种数学变换，有两个变量尺度  $a$  和平移  $\tau$ ，分别控制小波的\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_。尺度对应\_\_\_\_\_上的变化，平移对应\_\_\_\_\_上的变化。  
在空间和时间上进行局部化 伸缩和平移 频率 时间

6.小波变换出现是因为傅里叶变化有着一些缺陷，丢失了\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_  
 时域信息（时间分辨率） 信号时频域的局部特性

7. R、G、B 分量图像有下图所示的水平强度分布曲线，那么在图像中间一列的颜色是\_\_\_\_\_



绿色

8.三种图像颜色模型以及对应人类视觉成像区域是\_\_\_\_\_。  
 RGB&CMY 视网膜 YCrCb 视觉通路 HSI 大脑皮层

9.图像中相邻像素的\_\_\_\_\_体现了图像数据压缩的可能性。  
 相关性

10.成像的三个要素\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, 两个过程\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_。  
 光照、相机、场景表面的特性 入射、反射

11.用 Canny 算子提取边缘的步骤为\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_。  
 平滑滤波 边缘检测

## 二、简答

1.设计自适应滤波器的步骤

【1】滤波过程：根据输入信号产生预定的输出信号。

【2】自调整过程：根据外界条件的变化调整滤波器的结构或者参数。

通常会采用信号的均方误差作为目标函数来设计滤波器

2.逆谐波均值滤波适用处理脉冲噪声，Q 的参数和适用滤除的噪声的关系是？简述原因

当 Q 值为正数时，滤波器用于消除“胡椒”噪声；

当 Q 值为负数时，滤波器用于消除“盐”噪声；

首先对原公式进行变形：

$$\hat{f}(x, y) = \frac{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)^Q g(s, t)}{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)^Q} = \sum_{(s,t) \in S_{xy}} \frac{g(s, t)^Q}{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)^Q} g(s, t)$$

上式可以看作求(x,y)邻域内所有 (s, t)点的加权平均值，权重的分母  $\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)^Q$  是一个常数，因此我们只需要考虑分子  $g(s, t)^Q$  的大小。

1. 当  $Q > 0$  时， $g(s, t)^Q$  对  $g(s, t)$  有增强作用，由于“胡椒”噪声值较小 (0)，对加权平均结果影响较小，所以滤波后噪声点处 (x, y) 取值和周围其他值更接近，有利于消除“胡椒”噪声。

2. 当  $Q < 0$  时， $g(s, t)^Q$  对  $g(s, t)$  有削弱作用，由于“盐”噪声值较大 (255)，取倒数后较小，对加权平均结果影响较小，所以滤波后噪声点处 (x, y) 取值和周围其他值更接近，有利于消除“盐”噪声。

3.处理存在脉冲噪声的图像时，相比算术均值滤波器，中值滤波器和修正的阿尔法均值滤波器的效果更好。为什么前者效果差？为什么后两者效果好？

算术均值滤波器会平均窗口内的像素灰度值，导致正常像素受脉冲噪声像素影响很大  
中值滤波器和修正的阿尔法均值滤波器都会体现去除最高最低灰度值像素的效果，滤除脉冲噪声效果好

4. 修正的阿尔法均值滤波器处理同时存在椒盐、高斯的混合噪声的原理。

去掉最高、最低灰度值的过程适合去除椒盐噪声，而求均值的过程适合去除高斯噪声

5.自适应局部降低噪声滤波器的预期性如下：

1. 如果  $\sigma_n^2=0$ ，滤波器应该简单地返回  $g(x,y)$  的值。
2. 如果  $\sigma_L^2 > \sigma_n^2$ ，那么滤波器要返回一个接近  $g(x,y)$  的值。
3. 如果  $\sigma_L^2 = \sigma_n^2$ ，希望滤波器返回区域  $S_{xy}$  上像素的平均值。

为什么要这么考虑？

若  $\sigma_n^2 = 0$ ，说明无噪声

若  $\sigma_L^2 > \sigma_n^2$ ，说明这里有像素突变，是边缘区域，要防止过于模糊边缘，需要返回一个近似  $g(x,y)$  的值

若  $\sigma_L^2 = \sigma_n^2$ ，说明是平缓区域，直接使用均值滤波效果最佳。

$\sigma_n^2 \leq \sigma_L^2$  这种情况不存在，在不存在噪声时  $\sigma_n^2$  为 0，而  $\sigma_L^2$  不会为 0，因为图像自身也会有变化

6.为什么说最佳陷波滤波器不是一种自适应滤波器？

设计最佳陷波滤波器，需要观察频谱图，交互式选择最佳的陷波带通滤波器。

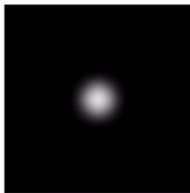
7.为什么图像复原中很少使用逆滤波的方法？

• 观察退化模型：

$$G(u,v) = H(u,v)F(u,v) + N(u,v)$$



$$\begin{aligned} \hat{F}(u,v) &= \frac{G(u,v)}{H(u,v)} \\ &= \frac{H(u,v)F(u,v) + N(u,v)}{H(u,v)} \\ &= F(u,v) + \frac{N(u,v)}{H(u,v)} \end{aligned}$$



随机函数

当退化为零或很小时， $N(u,v)/H(u,v)$  会变得很大

避免为零值，应限制滤波频率使其接近原点值。

8.简述傅里叶变换的三层意义、频域的物理意义、图像卷积的物理意义

傅里叶的三层意义：

- (1) 信号的分解与重构：将复杂信号描述为一组正弦信号的叠加
- (2) 信号的投影与表示：将信号由时域投影到一组正交基函数张成的变换域上，并用响应的系数表示

(3) 描述了输入信号动态变化特性，只度量变化的区域

频域的物理意义（更倾向于称为变换域）

（注意：u 表示信号频率，即信号的动态特性，是图像中灰度变化剧烈程度的指标）

频域是信号的频率分布函数，反应了信号变化的剧烈程度

9.“图像的边缘是有信息的，而非边缘区域是数据冗余的。”这句话是错的，为什么？

图像的信息是具有主观意义的，边缘和非边缘区域都可能有无信息。

10.简述直方图均衡化的目的和原理

目的：增加直方图分布区域，提高图像对比度

原理：观察到：低对比图（较窄的直方图且集中在灰度级的中部），高对比图（覆盖较宽的灰度级范围，较为均匀），可以得到结论：若一幅图像的像素倾向于占据整个可能的灰度级并且分布均匀，则图像的对比度会较高且灰色调会有较大变化。

而直方图均衡化、规定化改变图像的灰度直方图并使其均匀

12.写出对图像进行缩放、平移、旋转的变换矩阵

$$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

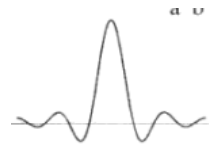
13.振铃现象的原因？

造成的原因：

首先，频域中的门信号对应到时域的辛格函数

而理想低通滤波实际上就是一种时域的辛格函数

若对一个亮点作一次理想低通滤波，亮点可视为冲激信号，与辛格信号卷积得到辛格信号，而辛格信号的时域图如下



因此会得到一种类似水波纹的现象，导致像素“扩散振荡”

14.空域滤波会造成一定程度上的图像模糊，如何处理？

①合理选择模板的尺寸。为避免处理结果过于模糊的情况发生，应选择尺寸相对小一点的模板。

②合理选择各模板元素的权值。例如，使模板中心元素和距离中心较近的元素具有相对大的权值以突出待处理像素点、尽量抑制由平滑化处理引入的模糊。

③使用多模板技术，根据对当前点是否为噪声点的检测结果，选择使用具有不同权值的模板完成计算。

15. 高斯滤波器为什么可以做平滑滤波？

$$h(x, y) = G(x, y, \sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

平滑滤波函数G具有将图像模糊化的功能，可有效地消除图像中尺度小于空间参数σ的强度变化。

由于平滑滤波函数G在空域和频域都是平滑和定域的，使得出现由它而引入的在原图像中没有的变化的可能性最小。



由于 $\nabla^2$ 是各向同性的微分算子，用它可避免沿各个方向的方向导数的计算问题，从而可减少计算开销。

G函数与人类视觉视网膜感受野的响应模型相符合

### 三、计算

#### 1. (哈尔小波变换)

(1) 考虑4点离散函数： $f(0) = 1, f(1) = 4, f(2) = -3, f(3) = 0$ ，作哈尔小波分解

解：【1】求均值和求差： $[2.5, -1.5, -1.5, -1.5]$

【2】求均值和求差： $[0.5, 2, -1.5, -1.5]$

【3】分解获得的小波函数：

$$I(x) = 0.5\phi_0^0(x) + 2\psi_0^0(x) - 1.5\psi_1^1(x) - 1.5\psi_1^1(x)$$

(2) 考虑以下离散函数的小波分解结果：

$$I(x) = 6\phi_0^0(x) + 2\psi_0^0(x) + \psi_1^1(x) - \psi_1^1(x)$$

求出原函数

$$f(0) = 6 * 1 + 2 * 1 + 1 - 0 = 9$$

$$f(1) = 6 * 1 + 2 * 1 + (-1) - 0 = 7$$

$$f(2) = 6 * 1 + 2 * (-1) + 0 - 1 = 3$$

$$f(4) = 6 * 1 + 2 * (-1) + 0 - (-1) = 5$$

$$[9 \ 7 \ 3 \ 5]$$

#### 2. (图像压缩编码)

(1) 给出一段话的字符统计如下

用哈夫曼编码进行编码，列出各个字符对应的编码，并求哈夫曼编码效率

a	b	c	d	e	f
4/22	3/22	2/22	1/22	5/22	7/22

解：

in	P(in)	NO.1	NO.2	NO.3	NO.4
f	7/22	7/22	7/22	9/22	13/22
e	5/22	5/22	3/11	7/22	9/22
a	2/11	2/11	5/22	3/11	
b	3/22	3/22	2/11		
c	1/11	3/22			
d	1/22				

因此，编码如下：

f=00 e=10 a=11 b=010 c=0110 d=0111

信息熵：

$$H(A) = - \sum_{i=1}^m P(a_i) \log P(a_i) = 2.3678 \text{ 比特/符号}$$

平均比特率:

$$\sum_{i=1}^m P(a_i) \text{len}(a_i) = 2.4091 \text{ 比特/符号}$$

哈夫曼编码效率:

$$\eta = \frac{2.3678}{2.4091} = 0.983$$

(2) 用 (1) 获得的编码, 解码编码串 110101011011000  
abeacf

(3) 用行程编码对下列二值图像编码

0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1

**1**的游程: (2,2) (6,3) (13,6) (20,1)  
(4,6) (11,10)  
(1,5) (11, 1) (17, 4)

**1和0**的游程长度: 0, 1, 2, 2, 3, 4, 6, 1, 1  
0, 3, 6, 1, 10  
1, 5, 5, 1, 5, 4