2019–2020 学年第一学期期终考试试题

考试科目：线性代数 B1　　考试时间：2020.01.14

学生所在系：____________　　姓名：____________

学号：____________　　得分：____________

一. 填空题 (每题 4 分, 共 24 分)

1. 设三维向量 α, β 满足 $\alpha^T\beta = 2$. 则 $\beta\alpha^T$ 的特征值为 0, 2.

2. 设 4 阶矩阵 A 与 B 相似, I 为单位矩阵. 若矩阵 A 的特征值为 $1, 2, 3, 4$, 则行列式 $|B^{-1} - I| =$ 0.

3. 已知矩阵

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

相似. 则 $a + b =$ -2.

4. 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

且 A 的秩为 2. 则 $a =$ 6.

6. 设三阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 满足 $A^* = A^T$, 且 $a_{11} = a_{12} = a_{13}$. 则 $a_{11} =$ 0 或 $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

二. 判断题 (每题 5 分, 共 20 分)

1. 下列两矩阵是否相似? 是否相合? 说明理由.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$|\lambda I-A| = \lambda(\lambda-3)^2$$

$$|\lambda I-B| = \lambda(\lambda-1)^2$$

$\Rightarrow \begin{cases} A.\ B \text{ 不相似} \\ A.\ B \text{ 相合.} \end{cases}$

2. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, B 为 $n\times m$ 的矩阵, $AB=I$, 其中 I 为 m 阶单位矩阵. 则秩 (A) 是否一定等于秩 (B)? 说明理由.

$\because$ 秩$(I)=m$

$\therefore$ 秩$(A)=$ 秩$(B)=m$.

3. 设 $a_{ij}=\frac{i}{j}$, $i,j=1,...,n$. 二次型 $f(x_1,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1+...+a_{in}x_n)^2$ 的符号差是否为 n? 说明理由.

令 $A=(a_{ij})$

则 $f=X^TA^TAX$

$\because$ 秩$(A)=1$

$\therefore$ f 的符号差 $=1$

4.(6 分) 设 K 为集合 $\{c_1 + c_2 x + c_3 \cos x : c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$ 在通常的函数加法和数乘下构成的线性空间. 定义内积 $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx$. 从 $1, x, \cos x$ 出发, 构造 K 的一个标准正交基.

$\xi_1 = 1$

$\xi_2 = x - \dfrac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} = x - 0 = x$

$\xi_3 = \cos x - \dfrac{\langle \cos x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} - \dfrac{\langle \cos x, x\rangle}{\langle x, x\rangle} x = \cos x$

∴ 有如下标准正交基:

$\alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\langle 1, 1\rangle}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$\alpha_2 = \dfrac{x}{\sqrt{\langle x, x\rangle}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}\pi^3}} x$

$\alpha_3 = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\langle \cos x, \cos x\rangle}} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x$

5.(8 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 10 & 3 & x \\ 3 & 1 & 3 & 10 & x \\ 3 & 0 & x & x & 10 \end{pmatrix}.$$

证明: 当 $|x| < 3$ 时, $|A| < 10^5$.

$|x| < 3$ 时 A 的顺序主子式 > 0.

∴ $|A| < a_{11} \cdots a_{nn} = 10^5$

6.(8 分) 设 t 为参数. 讨论以下二次曲面的类型: $x_1^2+x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+x_3-10=0$.

$f=(x_1+2x_2+x_3)^2-3x_2^2+(t-1)x_3^2+x_3-10$

$\therefore$ $t\neq 1$ 时, 为 双曲面.

$t=1$ 时 为 双曲抛物面 (马鞍面).

7.(10 分) 设 K 是次数小于 3 的实系数多项式在通常的数乘及加法运算下构成的线性空间.

(1) 证明 $1, x+2, x^2+x+3$ 是 K 的一个基;

(2) 求线性变换

$$Tf := f'' - f$$

在这个基底下的矩阵;

(3) 求 T 的特征向量.

(1) 设 $k_1+k_2(x+2)+k_3(x^2+x+3)=0$

则 $k_1=k_2=k_3=0$

(2) $T(1)=-1$, $T(x+2)=-(x+2)$

$T(x^2+x+3)=2-(x^2+x+3)$

$\therefore$ T 的矩阵为 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} := A$

(3) A 的特征向量 $c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\therefore$ T 的特征向量 $c_1 \cdot 1+c_2(x+2)$

一、填空:

1. 0,2

2. 0

3. -2

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. 6

6. 0或$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

二、判断:

1. 不相似 相合

2. $r(A)=r(B)=m$,故相等

3. 不为n,为1

4. 是,行和为1

三、1. 特征值 -1,1,1 (3分)

特征向量 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2分)

$A=P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}P$

求出P (1分)

求A (2分)

计算及证明题

2. $|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-\frac{1}{2})$

$\lambda_1=1,\ \lambda_2=\frac{1}{2}$ - - - - - - - - - 2

λ_1对应特征向量：$\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

λ_2 ~~~~~~ $\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ - - - - - - 4

$\vec{\alpha}=2\vec{\xi}_1-\vec{\xi}_2$，从而.

$A^n\vec{\alpha}=2\vec{\xi}_1-(\frac{1}{2})^n\vec{\xi}_2$ - - - - - 7

$\lim\limits_{n\to+\infty}|A^n\alpha|=\lim\limits_{k\to+\infty}|(2+\frac{1}{2^k},-\frac{1}{2^k},2)|=2\sqrt{2}$ - - 8

注：A不能对角化：因

$$A^k=\begin{pmatrix}\frac{k}{2}+\frac{1}{2^k} & \frac{k}{2} & -\frac{k}{2}-\frac{1}{2^k}+1\\ \frac{2^k-1}{2^k} & 1 & \frac{1-2^k}{2^k}\\ \frac{k}{2} & \frac{k}{2} & \frac{2-k}{2}\end{pmatrix}$$

两者均可通过归纳猜想得到，

但需数学归纳法证明

$$A^k\alpha=\begin{pmatrix}2+\frac{1}{2^k}\\-\frac{1}{2^k}\\2\end{pmatrix}$$

3. (1) 反证. 设 ~ 相关，$\Rightarrow$ ∃不全为0的$(k_1\cdots k_n)$. s.t.

$k_1\vec{\alpha}+\cdots+k_nT^{n-1}\alpha=0\xRightarrow{\text{两端}T^{n-1}\text{作用}}k_1T^{n-1}\vec{\alpha}=0\Rightarrow k_1=0$.

$k_1=0\Rightarrow k_1\vec{\alpha}+\cdots+k_nT^{n-1}\vec{\alpha}=k_2T\vec{\alpha}+\cdots+k_nT^{n-1}\vec{\alpha}=0$

$\xRightarrow{T^{n-2}\text{作用}}k_2=0\Rightarrow$ - - - $k_1\cdots k_n=0$. 矛盾 $\Rightarrow$ 无关. - - 4

(2) 易知(1)中向量组为V的一组基. 且T在其下矩阵为.

$$T(\vec{\alpha},T\vec{\alpha},\cdots T^{n-1}\vec{\alpha})=(\vec{\alpha},T\vec{\alpha},\cdots T^{n-1}\vec{\alpha})\begin{pmatrix}0&&&\\1&\ddots&&\\&\ddots&\ddots&\\&&1&0\end{pmatrix}=(\vec{\alpha}\cdots T^{n-1}\vec{\alpha})\cdot A$$

A特征值均为0. 若可对角化，

则$A=P^{-1}OP=0$ 矛盾 $\Rightarrow$ 不能 - - 8

4. 由内积定义及奇对称函数在对称区间上积分为0，以及 cosx 在一个周期 $=2\pi$ 内积分为0 知：

$\langle 1, x\rangle = 0$. $\langle 1, \cos x\rangle = 0$ $\langle x, \cos x\rangle = 0$.

即这组基本身正交，仅需标准化 —— 3.

从而：$e_1 = \frac{1}{\sqrt{\langle 1,1\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$$e_2 = \frac{x}{\sqrt{\langle x,x\rangle}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}\pi^3}}$$

$$e_3 = \frac{\cos x}{\sqrt{\langle \cos x, \cos x\rangle}} = \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}$$ —— -6.

5. 利用各种方法，直接算A的行列式.(初等变换"打洞"，分块矩阵)

如设 $A=\left(\begin{array}{c|c} B & C^T \\ \hline C & D\end{array}\right)$ 其中 $B=\begin{pmatrix}10 & 1\\ 1 & 10\end{pmatrix}$，则 $|A|=|B|\cdot|D-CB^{-1}C^T|$

$= \cdots = -1364x^2+1950x+70122$ $|A|_{max}=|A|_{x=\frac{975}{1364}} \doteq 0.7148$

$= \frac{96597033}{1364} \doteq 70818.9 < 10^5$.

或者：A可相似对角化：则 $Tr(A)=\lambda_1+\cdots+\lambda_5=50$ (λ_i为A的特征值)

而 $|A|=\lambda_1\cdots\lambda_5$

本题酌情给分：

而由A正定(需证明)知 $\lambda_i>0$.(利用顺序主子式证明可放缩)

从而 $|A| \le \left(\frac{\lambda_1+\cdots+\lambda_5}{5}\right)^5 = 10^5$.

现需说明等号无法取到：若反证.若可，则 $\lambda_1=\cdots=\lambda_5=10$.

则A有一个五重特征值 $\lambda^*=10$，则 $rank(\lambda^* I - A)=0$.显然不信

故无法取到 $\Rightarrow |A| < 10^5$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \\ 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -3 & \\ & & t+\frac{1}{3} \\ 1 & -2 & \frac{1}{3} \\ & 1 & -\frac{2}{3} \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

从而 $P=\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{3} \\ & 1 & -\frac{2}{3} \\ & & 1 \end{pmatrix}$. $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 1 & \frac{2}{3} \\ & & 1 \end{pmatrix}$

由代换 $\vec{x}=P\vec{y}$ 或 $\vec{y}=P^{-1}\vec{x}$ 可得:

$y_1^2-3y_2^2+(t+\frac{1}{3})y_3^2+y_3-10=0$.

------6.

① $t=-\frac{1}{3}$, 为(双曲)抛物面

② $t\neq-\frac{1}{3} \Rightarrow y_1^2-3y_2^2+(t+\frac{1}{3})\left[y_3+\frac{1}{2(t+\frac{1}{3})}\right]^2=10+\frac{1}{4(t+\frac{1}{3})}$

则 $10+\frac{1}{4(t+\frac{1}{3})}=0 \Rightarrow t=-\frac{1}{3}-\frac{1}{40}$ 时, 其为锥面 $\boxed{二次}$.

$=-\frac{43}{120}$

若 $t\neq-\frac{1}{3}$ 且 $t\neq-\frac{43}{120} \Rightarrow$ 为双曲面型. ------8.

三个分类. 有错扣一分 全错扣两分

7. (1) 设 $k_1+k_2(x+2)+k_3(x^2+x+3)=0$

$\Rightarrow k_1=k_2=k_3=0 \Rightarrow \text{rank}=3=\dim V$.

故是V的一个基, ------3.

(2) $T(1)=-1$. $T(x+2)=-(x+2)$ $T(x^2+x+3)=2-(x^2+x+3)$

矩阵为 $A\triangleq\begin{pmatrix} -1 & & 2 \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ ------7

(3) 由 $|\lambda I-A|=0$ 知 $\lambda=0$. 再由 $(-A)\vec{x}=0$

得: A的特征向量为 $c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ------9.

对应T ~~相似 x+2~~

$c_1+c_2(x+2)$, c_1,c_2 不全为0 ··10.