线性代数与解析几何作业答案

第 1 次作业答案

2. 设 O 为一定点，A,B,C 为不共线的三点．证明：点 M 位于平面 ABC 上的充要条件是存在实数 k_1,k_2,k_3，使得

$$\overrightarrow{OM}=k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}\text{，且 } k_1+k_2+k_3=1.$$

证明：由 A,B,C 三点不共线，则 M 位于平面 ABC 上 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$ 共面 $\Leftrightarrow$ 存在 a_1,a_2,a_3 不全为零，使得

$$a_1\overrightarrow{MA}+a_2\overrightarrow{MB}+a_3\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$$

即

$$a_1(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM})+a_2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})+a_3(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM})=\vec{0}.$$

整理，得

$$(a_1+a_2+a_3)\overrightarrow{OM}=a_1\overrightarrow{OA}+a_2\overrightarrow{OB}+a_3\overrightarrow{OC}.$$

若 $a_1+a_2+a_3=0$，则易证 A,B,C 共线．于是可设

$$k_1=\frac{a_1}{a_1+a_2+a_3}\text{，}\quad k_2=\frac{a_2}{a_1+a_2+a_3}\text{，}\quad k_3=\frac{a_3}{a_1+a_2+a_3}$$

结论得证．

3．证明：向量 $a-b+c$，$-2a+3b-2c$，$2a-b+2c$ 线性相关．　　(P28)

证明：设 λ,μ,υ，使得

$$\lambda(a-b+c)+\mu(-2a+3b-2c)+\upsilon(2a-b+2c)=0$$

化简

$$(\lambda-2\mu+2\upsilon)a+(-\lambda+3\mu-\upsilon)b+(\lambda-2\mu+2\upsilon)c=0$$

设

$$\begin{cases}\lambda-2\mu+2\upsilon=0\\-\lambda+3\mu-\upsilon=0\\\lambda-2\mu+2\upsilon=0\end{cases}$$

计算得：$\lambda=4$，$\mu=1$，$\upsilon=-1$ 为此方程组的一组非零解．因此，三向量线性相关．

4. 证明三维空间中四个或四个以上的向量一定线性相关．　　(P28)

证明：设三维空间内的任意四个向量 a_1、a_2、a_3、a_4．

1）　若 a_1、a_2、a_3 线性相关，则存在 k_1、k_2、k_3 不全为零，使 $k_1\mathrm{a}_1+k_2\mathrm{a}_2+k_3\mathrm{a}_3=0$．

从而，可得

$$k_1\mathrm{a}_1+k_2\mathrm{a}_2+k_3\mathrm{a}_3+0\mathrm{a}_4=0.$$

由 $k_1,k_2,k_3,0$ 不全为零，所以，a_1、a_2、a_3、a_4 线性相关．

2）若 a_1、a_2、a_3 线性无关 $\Rightarrow$ a_1、a_2、a_3 不共面，其可作为空间的一组基，从而，$\mathrm{a}_4=x_1\mathrm{a}_1+x_2\mathrm{a}_2+x_3\mathrm{a}_3$，而 x_1、x_2、x_3、-1 不全为零，故 a_1、a_2、a_3、a_4 线性相关．

对于三维空间中四个以上的向量，可以从中任取四个向量进行上述讨论，而后将其余向量前系数取为 0，可以得到不全为零的系数使得这些向量的线性组合为零向量．

5. 设 e_1,e_2,e_3 为一组基，　　(P28)

(1) 证明：$a=e_1+2e_2-e_3$，$b=2e_1+e_2+e_3$，$c=3e_1+2e_3$ 为一组基；

(2) 设 $\tilde{c}=3e_1+xe_2+2e_3$，当 x 取何值时，$a,b,\tilde{c}$ 共面？

解：

(1)　证明：只需证明 a,b,c 线性无关即可．

设 λ,μ,υ，使得　$\lambda a+\mu b+\upsilon c=0$．整理，得

$$(\lambda+2\mu+3\upsilon)e_1+(2\lambda+\mu)e_2+(-\lambda+\mu+2\upsilon)e_3=0$$

则令 $\begin{cases}\lambda+2\mu+3\upsilon=0\\2\lambda+\mu=0\\-\lambda+\mu+2\upsilon=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\lambda=\upsilon\\\lambda=\dfrac{2}{3}\upsilon\\u=-2\lambda\end{cases}$ 即 $\lambda=\mu=\upsilon=0$.

则知 a,b,c 线性无关.

(2) 解：$a,b,\tilde{c}$ 共面 $\Leftrightarrow$ $a,b,\tilde{c}$ 线性相关

设 λ,μ,υ，使得

$$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\upsilon\vec{\tilde{c}}=\vec{0}$$

整理，得

$$(\lambda+2\mu+3\upsilon)e_1+(2\lambda+\mu+x\upsilon)e_2+(-\lambda+\mu+2\upsilon)e_3=0.$$

则令 $\begin{cases}\lambda+2\mu+3\upsilon=0\\2\lambda+\mu+x\upsilon=0\\-\lambda+\mu+2\upsilon=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}3\lambda-\upsilon=0\\3\lambda+(x-2)\upsilon=0\end{cases}$.

若 $x=1$，可以取 $\lambda=1,\mu=5,\upsilon=3$ 的非零解．若 $x\neq1$，则必有 $\lambda=\mu=\upsilon=0$．从而，知 $x=1$ 时，$a,b,\tilde{c}$ 共面.

方法 2　因为，a 、b 不共线，则要使得 $a,b,\tilde{c}$ 共面，只需 $\tilde{c}$ 可由 a 、b 表示即可.

设 $\tilde{c}=x_1a+x_2b$ 整理，得 $(x_1+2x_2-3)e_1+(2x_1+x_2-x)e_2+(-x_1+x_2-2)e_3=0$.

则 $\begin{cases}x_1+2x_2=3\\-x_1+x_2=2\end{cases}$，及 $2x_1+x_2-x=0$．方程组的解为 $x_1=-\dfrac{1}{3}$ 、$x_2=\dfrac{5}{3}\Rightarrow x=1$.

6. 已知三点 $A(2,1,-1),B(3,5,1),C(1,-3,-3)$，问 A,B,C 是否共线？　　(P28)

解：A,B,C 共线 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 线性相关.

$\overrightarrow{AB}=(1,4,2)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,-8,-4)$，设 $\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{BC}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}\lambda-2\mu=0\\4\lambda-8\mu=0\\2\lambda-4\mu=0\end{cases}\Rightarrow\lambda=2\mu$．$\lambda=2$，$\mu=1$ 为其中一个非零解，

则由 $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$，所以知 A,B,C 共线.

8. 已知向量 a 与 Ox 轴和 Oy 轴的夹角为 $\alpha=60^0,\beta=120^0$，且 $|a|=2$．求 a 的坐标．(P28)

解：设 $a=(x,y,z)$，则 $x=a\cdot i=|a||i|\cos\alpha=1$，$y=a\cdot j=|a||j|\cos\beta=-1$，又由 $|a|=2$，即

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2 \quad\Rightarrow\quad z=\pm\sqrt{2}.$$

10. 设三个向量 a,b,c 两两的夹角为 45^0，且 $|a|=1,|b|=2,|c|=3$．求向量 $a+2b-c$ 的模．(P28)

解：$|a+2b-c|^2=(a+2b-c)\cdot(a+2b-c)=|a|^2+4|b|^2+|c|^2+4ab-2ac-4bc=26-11\sqrt{2}=(3-\sqrt{2})(8-\sqrt{2})$.

所以，$|a+2b-c|=\sqrt{26-11\sqrt{2}}$.

11. 设 a,b,c 满足 $a+b+c=0$ 的单位向量，试求 $a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a$ 的值.　　(P28)

解：由 $0=|a+b+c|^2=(a+b+c)\cdot(a+b+c)=|a|^2+|b|^2+|b|^2+2(a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a)$，得到

$$a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a=-\frac{3}{2}.$$

第 2 次作业答案

12. 设向量 a,b 的夹角为 60^0，且 $|a|=1,|b|=2$，试求 $(a\times b)^2$，$|(a+b)\times(a-b)|$. (P28)

解：$(a\times b)^2=|a\times b|^2=(|a||b|\sin\alpha)^2=3$；

$|(a+b)\times(a-b)|=|a\times(a-b)+b\times(a-b)|=|a\times a-a\times b+b\times a-b\times b|=|0-2a\times b-0|=2\sqrt{3}$.

14. 设一个四面体的顶点为 $A(1,2,3)$，$B(-1,0,2)$，$C(2,4,5)$，$D(0,-3,4)$，求它的体积. (P29)

解：$\overrightarrow{BA}=(2,2,1)$，$\overrightarrow{BC}=(3,4,3)$，$\overrightarrow{BD}=(1,-3,2)$，于是，四面体的体积

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|\left|\frac{\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|}\cdot\overrightarrow{BD}\right|=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{BD}|=\frac{1}{6}\cdot 15=\frac{5}{2}.$$

15. 判断下列结论是否成立，不成立时请举例说明： (P29)

(1)若 $a\cdot b=0$，则 a = 0 或 b = 0；

(2)若 $a\times \boldsymbol{b}=a\times c$，则必有 $b=c$；

(3) $(a\cdot b)c=a(b\cdot c)$；

(4) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$；

(5) $(a+b)\times(a+b)=a\times a+2a\times b+b\times b$；

(6) $(a+b)\cdot c=a\times(b\cdot c)$.

解：

(1) 否，$a\cdot b=0 \Leftrightarrow \ a\perp b$.

例如：$a=(1,0,0),b=(0,1,0)$，则 $a\cdot b=0$，但 a ≠ 0 及 $b\neq 0$；

(2) 否，原式化为：$a\times(b-c)=0$，即 $\mathrm{b}-\mathrm{c}=k\mathrm{a}$.

例如：$a=(1,0,0),b=(1,1,0),c=(0,1,0)$，则 $a\times b=(0,0,1)=a\times c=(0,0,1)$，但是 $b\neq c$.

(3) 否，原式意义为 $k_1\mathrm{c}=\mathrm{a}k_2$，但是 a 与 c 可能不平行.

例如：$a=(1,0,0),c=(0,1,0),b=(1,1,1)$，但 $(a\cdot b)c\neq a(b\cdot c)$.

(4) 否，因为 $(a\cdot b)^2=|a|^2|b|^2\cos^2\theta$，当 $\theta\neq 0$ 或 π（a,b 不共线）.

例如：略.

(5) 否，$(a+b)\times(a+b)=a\times a+a\times b+b\times a+b\times b\xrightarrow{若} a\times a+2a\times b+b\times b$，即 $a\times b=b\times a=-a\times b$，得 $a\times b=0$，所以要求 a,b 共线.

(6) 否，等式右边的运算不成立.

16. 证明下列等式： (P29)

(1) $(a\times b)^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(a\cdot b)^2$

解：因为 $(a\times b)^2+(a\cdot b)^2=|a|^2|b|^2\sin^2\theta+|a|^2|b|^2\cos^2\theta=|a|^2|b|^2$ ，从而结论得证.

19. 求下列和式： (P29)

(1) $1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta$；

(2) $\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta$.

解：

当 $\theta=2k\pi$ 时，$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta=n+1$ 及 $\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta=0$.

当 $\theta\neq 2k\pi$ 时，

$$\begin{aligned}&(1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta)+i(\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta)\\&=1+(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)+\cdots+(\cos n\theta+i\sin n\theta)\\&=1+e^{i\theta}+e^{i2\theta}+\cdots+e^{in\theta}=\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{2n+1}{2}\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}+i\left(\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{2n+1}{2}\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\right).$$

所以

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta=\begin{cases} n+1 & \theta=2k\pi, \\ \frac{1}{2}+\frac{\sin(\frac{2n+1}{2}\theta)}{2\sin\frac{\theta}{2}} & \theta\neq 2k\pi. \end{cases}$$

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta=\begin{cases} 0 & \theta=2k\pi, \\ \frac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos(\frac{2n+1}{2}\theta)}{2\sin\frac{\theta}{2}} & \theta\neq 2k\pi. \end{cases}$$

注：$\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$

$$=\frac{1-[\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta]}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$$

$$=\frac{\{1-[\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta]\}(1-\cos\theta+i\sin\theta)}{(1-\cos\theta-i\sin\theta)(1-\cos\theta+i\sin\theta)}$$

$$=\frac{1-\cos\theta-\cos(n+1)\theta+\cos\theta\cos(n+1)\theta+\sin\theta\sin(n+1)\theta}{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}+i\frac{-\sin(n+1)\theta+\cos\theta\sin(n+1)\theta+\sin\theta-\sin\theta\cos(n+1)\theta}{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}$$

$$=\frac{[\cos n\theta-\cos(n+1)\theta-\cos\theta+1]+i[\sin n\theta-\sin(n+1)\theta+\sin\theta]}{2(1-\cos\theta)}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{2n+1}{2}\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}+i\left(\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{2n+1}{2}\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\right).$$

方法 2 （因子法）

(1) $1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta$

$$=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}(1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta)\qquad(\theta\neq 2k\pi)$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left\{2\sin\frac{\theta}{2}+[\sin(\theta+\frac{\theta}{2})-\sin(\theta-\frac{\theta}{2})]+[\sin(2\theta+\frac{\theta}{2})-\sin(2\theta-\frac{\theta}{2})]+\cdots+[\sin(n\theta+\frac{\theta}{2})-\sin(n\theta-\frac{\theta}{2})]\right\}$$ 当 $\theta=2k\pi$ 时，

$$=\frac{\sin\frac{\theta}{2}+\sin(\frac{2n+1}{2}\theta)}{2\sin\frac{\theta}{2}}.$$

原式$=n+1$.

$$故原式=\begin{cases} n+1 & \theta=2k\pi, \\ \frac{1}{2}+\frac{\sin(\frac{2n+1}{2}\theta)}{2\sin\frac{\theta}{2}} & \theta\neq 2k\pi. \end{cases}$$

(2) $\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta$

$$=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}(\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta) \qquad (\theta\neq 2k\pi)$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left\{[\cos(\theta-\frac{\theta}{2})-\cos(\theta+\frac{\theta}{2})]+[\cos(2\theta-\frac{\theta}{2})-\cos(2\theta+\frac{\theta}{2})]+\cdots+[\cos(n\theta-\frac{\theta}{2})-\cos(n\theta+\frac{\theta}{2})]\right\}$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos(\frac{2n+1}{2}\theta)}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

当 $\theta=2k\pi$ 时，原式 $=0$.

$$故原式=\begin{cases} 0 & \theta=2k\pi, \\ \dfrac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos(\frac{2n+1}{2}\theta)}{2\sin\frac{\theta}{2}} & \theta\neq 2k\pi. \end{cases}$$

20. 证明：$|1+z_1\overline{z}_2|^2+|z_1-z_2|^2=(1+|z_2|^2)(1+|z_1|^2)$. (P29)

证明：

$$\begin{aligned} 原式&=(1+z_1\overline{z}_2)(\overline{1+z_1\overline{z}_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2}) \\ &=(1+z_1\overline{z}_2)(1+\overline{z}_1z_2)+(z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2) \\ &=1+z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2+|z_1|^2|z_2|^2+|z_1|^2+|z_2|^2-z_1\overline{z}_2-z_2\overline{z}_1 \\ &=1+|z_2|^2|z_1|^2+|z_1|^2+|z_2|^2 \\ &=(1+|z_2|^2)(1+|z_1|^2). \end{aligned}$$

1. 求过点 $(4,-1,3)$ 且与直线 $\frac{x-3}{2}=y=\frac{z+1}{-5}$ 平行的直线方程. (P51)

解：所求直线的方向向量可设为：$\vec{n}=(2,1,-5)$，且过点 $(4,-1,3)$，则直线方程为：

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{-5}.$$

2. 求直线 $\begin{cases}2x-3y+z=5, \\ 3x+y-2z=2\end{cases}$ 的点向式方程. (P52)

解：设交成直线的两平面的法向量分别为：$\overrightarrow{n_1}=(2,-3,1),\overrightarrow{n_2}=(3,1,-2)$，则直线的方向向量 $\vec{n}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(5,7,11)$，且容易算出点 $(1,-1,0)$ 在直线上，故可得直线的点向式方程：

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{11}.$$

4. 求原点到直线 $\frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-2}$ 的垂线方程. (P52)

解：垂直直线且经过原点的平面方程为：$4x+3y-2z=0$. 设直线方向向量 $\vec{n}=(4,3,-2)$，直线上点 $P(5,2,-1)$，则 $\overrightarrow{OP}\times\vec{n}=(-1,6,7)$，于是可得到经过直线且过原点的平面方程为：$-x+6y+7z=0$. 于是得到所求直线方程为

$$\begin{cases}4x+3y-2z=0 \\ -x+6y+7z=0\end{cases}.$$

方法 2 （先求交点）

设垂足为 P，则有 $P(4t+5,3t+2,-2t-1)$，又由 $\overrightarrow{OP}\perp\vec{n}$，即 $4(4t+5)+3(3t+2)-2(-2t-1)=0$，得 $t=-\frac{28}{29}$，则得

交点为 $(\frac{33}{29},\frac{-26}{29},\frac{27}{29})$，于是知道要求直线方向向量为 $(33,-26,27)$，得直线

$$\frac{x}{33}=\frac{y}{-26}=\frac{z}{27}.$$

8. 求过点 $(5,-7,4)$ 且在三坐标轴上的截距相等的平面方程． (P52)

解：记三坐标轴截距为 a．

1^0 当 $a=0$ 时，则平面方程可设为：$Ax+By+Cz=0$（A,B,C 不全为零），且 $5A-7B+4C=0$，此时平面有无数个．

2^0 当截距非 0 时，设平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$，代入点 $(5,-7,4)$，得 $a=2$．此时得到平面方程

$$x+y+z-2=0.$$

13. 求点 $(1,2,3)$ 到直线 $\begin{cases}x+y-z=1,\\2x+z=3\end{cases}$ 的距离． (P52)

解：设两平面法向量及直线方向向量分别为：$\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2},\vec{n}$，点 $P(1,2,3)$，则 $\vec{n}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(1,-3,-2)$．

方法 1 （面积法）

设直线上一点 $P_0(0,y_0,z_0)$ 代入直线方程 $\begin{cases}y_0-z_0=1\\z_0=3\end{cases}$，求得点 $P_0(0,4,$，于是 $\overrightarrow{PP_0}=(-1,2,0)$，则 $S_{\Delta PP_0A}=\frac{1}{2}d|\vec{n}|=|\overrightarrow{P_0P}\times\vec{n}|$，即 $d=\frac{|\overrightarrow{PP_0}\times\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{6}}{2}$．

方法 2 （求交点）

过点 P 且垂直直线的平面方程为：$x-3y-2z+11=0$，则

$\begin{cases}x+y-z=1,\\2x+z=3,\\x-3y-2z=-11\end{cases}$，解得 $x=\frac{1}{2},y=\frac{5}{2},z=2$，即交点为 $\tilde{P}(\frac{1}{2},\frac{5}{2},2)$，从而 $d=|\overrightarrow{\tilde{P}P}|=\frac{\sqrt{6}}{2}$．

方法 3 （极值法）

根据方法 1 求得的点 P_0，可得直线参数方程：$x=t,y=-3t+4,z=-2t+3$，直线上的点可以表示为 $P_t(t,-3t+4,-2t+3)$，设 $f(t)=|\overrightarrow{P_tP}|^2=(1-t)^2+(2+3t-4)^2+(3+2t-3)^2$，于是知道 $d=\min\limits_{t\in R}\sqrt{f(t)}$．令 $f'(t)=0$，求得 $t=1/2$，代入 $f(t)$ 得 $d=\sqrt{6}/2$．

15. 当 a 取何值时，点 $(2,-1,1)$ 和 $(1,-2,2)$ 分别在平面 $5x+3y+z=a$ 的两侧？ (P52)

解：只需将两点代入式子 $5x+3y+z-a$，能使式子值异号即可．

$$[5\cdot2+3\cdot(-1)+1-a]\cdot[5\cdot1+3\cdot(-2)+2-a]<0 \Rightarrow (a-8)(1-a)<0，即得 1<a<8.$$

17. 求两直线 $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=z$ 和 $\begin{cases}x+y-z=0,\\x-y+5z=8\end{cases}$ 的距离． (P52)

解：设两条直线分别为 l_1、l_2．直线 l_1 的方向向量为 $\overrightarrow{\mu_1}=(3,-2,1)$，且过点 $P_1(-2,1,0)$；设直线 l_2 上点 $P_2(x_0,y_0,0)$，代入直线方程得到 $P_2(4,-4,0)$，设交得直线 l_2 的两平面法向量分别为 $\overrightarrow{n_1}=(1,2,-1),\overrightarrow{n_2}=(1,-1,-5)$，则得到直线 l_2 方向向量 $\overrightarrow{\mu_2}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(6,-4,2)$，由 $\overrightarrow{\mu_2}=2\overrightarrow{\mu_1}$，知两直线平行．从而可得两直线间距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{\mu_1}\times\overrightarrow{P_1P_2}|}{|\overrightarrow{\mu_1}|}=\sqrt{5}.$$

注：若两直线不平行，则 $d=\frac{|(\overrightarrow{\mu_1}\times\overrightarrow{\mu_2})\cdot\overrightarrow{P_1P_2}|}{|\overrightarrow{\mu_1}\times\overrightarrow{\mu_2}|}$．

8. 当 a 取何值时，直线 $\dfrac{x-1}{a}=\dfrac{y+4}{5}=\dfrac{z-3}{3}$ 和 $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-9}{-4}=\dfrac{z+14}{7}$ 相交？并求交点坐标和两直线确定的平面方程.

解：设两直线方向向量分别为：$\overrightarrow{n_1}=(a,5,3),\overrightarrow{n_2}=(3,-4,7)$，且易知两直线分别过点 $P_1(1,-4,3),P_2(-3,9,-14)$，由于两直线不平行，故只需要 $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{P_1P_2}$ 共面即可.

即 $(\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2})\overrightarrow{P_1P_2}=0$，即 $\begin{vmatrix} a & 5 & 3 \\ 3 & -4 & 7 \\ -4 & 13 & -17 \end{vmatrix}=0$，　得 $a=8$.

设两直线的参数方程为：$x_1=8t_1+1$，$y_1=5t_1-4$，$z_1=3t_1+3$ 和 $x_2=3t_2-3$，$y_2=-4t_2+9$，$z_2=7t_2-14$，交点满足 $x_1=x_2,y_1=y_2,z_1=z_2$，得 $t_2=\dfrac{124}{47}$，代入得交点 $(\dfrac{231}{47},-\dfrac{73}{47},\dfrac{210}{47})$.

两直线确定的平面法向量 $\vec{n}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(47,-47,-47)$，于是可设平面方程为 $x-y-z+D=0$，又过点 $P_1(1,-4,3)$，可得 $D=-2$，于是得到平面方程 $x-y-z-2=0$.

方法 2　（投影法）

设直线 l_1,l_2 在 yOz 平面的投影直线为 l_1'：$\begin{cases}\dfrac{y+4}{5}=\dfrac{z-3}{3}\\ x=0\end{cases}$，$l_2'$：$\begin{cases}\dfrac{y-9}{-4}=\dfrac{z+14}{7}\\ x=0\end{cases}$，$l_1'$ 与 l_2' 的交点为 $(0,-\dfrac{73}{47},\dfrac{210}{47})$，若 l_1 与 l_2 相交，则交点坐标可设为 $(x_0,-\dfrac{73}{47},\dfrac{210}{47})$，得 $x_0=\dfrac{231}{47}$、$a=8$.

第 3 次作业答案

20. 当 a 取何值时，两平面 $x-2y-az=5$ 和 $x+ay-3z=2$ 相互垂直？ (P52)

解：两平面垂直，只需其法向量相互垂直即可．由法向量分别为 $\overrightarrow{n_1}=(1,-2,-a),\overrightarrow{n_2}=(1,a,-3)$，则 $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$，即

$$1-2a+3a=0\text{，得 } a=-1.$$

21. 求两平行平面 $2x-y+2z=-9$ 和 $4x-2y+4z=21$ 间的距离． (P52)

解：设平面的法向量 $\vec{n}=(2,-1,2)$．容易得到两平面上的点分别为 $P_1(-2,1,-2),P_2(3,\frac{3}{2},3)$，于是平面间距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{39/2}{3}=\frac{13}{2}.$$

注：在直线上找点时只能先预设其中一个元素为零，而在平面上找点时，可以预先假设两个元素为零．如 21 题中可设平面上的点分别为 $P_1(0,0,-9/2),P_2(0,0,21/4)$．

注：设两平行平面 $n_xx+n_yy+n_zz+D_1=0,n_xx+n_yy+n_zz+D_2=0$，其上的点分别设为 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$，平面法向量 $\vec{n}=(n_x,n_y,n_z)$，则平面间距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|n_x(x_2-x_1)+n_y(y_2-y_1)+n_z(z_2-z_1)|}{|\vec{n}|}=\frac{|(n_xx_2+n_yy_2+n_zz_2)-(n_xx_1+n_yy_1+n_zz_1)|}{\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}}=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}}.$$

22.求直线 $x-2=y-3=\frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x-y+z=6$ 的交点和夹角． (P52)

解：设直线方向向量 $\vec{\mu}=(1,1,2)$，平面法向量 $\vec{n}=(2,-1,1)$，由 $\cos\theta=\frac{|\vec{\mu}\cdot\vec{n}|}{|\vec{\mu}||\vec{n}|}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，即 $\vec{\mu}$ 与 $\vec{n}$ 夹角 $\theta=\frac{\pi}{3}$，于是知道直线与平面夹角为 $\frac{\pi}{6}$．

联合直线和平面方程即可求得交点

$$\begin{cases}x-2=y-3\\x-2=\frac{z-4}{2}\\2x-y+z=6\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x-y\qquad=-1\\x\quad-\frac{1}{2}z=0\\2x-y+z=6\end{cases}.$$

计算得 $x=\frac{7}{3}$，$y=\frac{10}{3}$，$z=\frac{14}{3}$，即交点 $(\frac{7}{3},\frac{10}{3},\frac{14}{3})$．

方法 2 （参数法）

设直线的参数方程为：$x=t+2$，$y=t+3$，$z=2t+4$，代入平面方程得

$$2(t+2)-(t+3)+(2t+4)=6,$$

得 $t=\frac{1}{3}$，得交点坐标 $(\frac{7}{3},\frac{10}{3},\frac{14}{3})$．

23. 设动点到原点的距离等于它到平面 $z=1$ 的距离．求动点的轨迹方程．(P52)

解：设动点 $P(x,y,z)$，则满足 $|\overrightarrow{OP}|=|z-1|$，即 $x^2+y^2+z^2=(z-1)^2$，整理得 $x^2+y^2+2z-1=0$ 或 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=-z+\frac{1}{2}$．（设 $\tilde{x}=x,\tilde{y}=y,\tilde{z}=-z+\frac{1}{2}$，则原式化为 $\tilde{z}=\frac{\tilde{x}^2}{2}+\frac{\tilde{y}^2}{2}$，表示旋转抛物面）

25. 求经过四点 $O(0,0,0),A(1,1,0),B(0,1,1),C(1,0,1)$ 的球面的方程． (P52)

解：设球面方程 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$，则满足方程组

$$\begin{cases}x_0^2+y_0^2+z_0^2=r^2\\(x_0-1)^2+(y_0-1)^2+z_0^2=r^2\\x_0^2+(y_0-1)^2+(z_0-1)^2=r^2\\(x_0-1)^2+y_0^2+(z_0-1)^2=r^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0+y_0=1\\y_0+z_0=1\\x_0+z_0=1\\x_0^2+y_0^2+z_0^2=r^2\end{cases}\Rightarrow x_0=y_0=z_0=\frac{1}{2},r=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以，球面方程为：$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$.

方法 2 （一般式）

设球面一般式：$x^2+y^2+z^2+Dx+Ey+Fz+G=0$，将点代入，得

$$\begin{cases}G=0\\E+F+2=0\\D+F+2=0\\D+E+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}E=-1\\F=-1\\D=-1\\G=0\end{cases}$$，即球面一般式为 $x^2+y^2+z^2-x-y-z=0$.

方法 3 （几何法）

若是可以看出给定的四点 O,A,B,C 恰为正三棱锥的四个顶点，则容易知道球心为三棱锥的重心，即

$$P_0=\frac{1}{4}(O+A+B+C)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\quad r=|\overrightarrow{OP_0}|=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

于是得球面方程

$$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}.$$

28. 求准线为 $\begin{cases}y^2+z^2=1,\\x=1,\end{cases}$ 母线方向为 $(2,1,1)$ 的柱面的一般方程. (P53)

解：设母线方向为 $\vec{\mu}$，设柱面上点 $P(x,y,z)$，则对应准线上点 $Q(x_p,y_p,z_p)$，则 $\overrightarrow{PQ}=k\vec{\mu}$，于是得 $Q=P+k\vec{\mu}=(x+2k,y+k,z+k)$，由于 Q 在准线上，则

$$\begin{cases}(y+k)^2+(z+k)^2=1\\x+2k=1\end{cases}\Rightarrow (\frac{1-x}{2}+y)^2+(\frac{1-x}{2}+z)^2=1,$$

整理，得

$$(\frac{1-x}{2}+y)^2+(\frac{1-x}{2}+z)^2-1=0 \text{ 或 } x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2x+2y+2z-2=0.$$

29. 求准线为 $\begin{cases}y^2+z^2=1,\\x=1,\end{cases}$ 顶点坐标为 $(2,1,1)$ 的锥面的一般方程. (P53)

解：记顶点 $A(2,1,1)$，设锥面上点 $P(x,y,z)$，对应准线上点 $Q(x_p,y_p,z_p)$，则 $\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{AQ}$，于是得 $Q=\frac{1}{1-k}(P-kA)=(\frac{x-2k}{1-k},\frac{y-k}{1-k},\frac{z-k}{1-k})$ （$k\neq 1$），由于 Q 在准线上，则

$$\begin{cases}(\frac{y-k}{1-k})^2+(\frac{z-k}{1-k})^2=1\\\frac{x-2k}{1-k}=1\end{cases}\Rightarrow (1+\frac{1-y}{x-2})^2+(1+\frac{1-z}{x-2})^2=1$$ （$x\neq 2$），整理，得

$$(x-y-1)^2+(x-z-1)^2-(x-2)^2=0 \text{ 或 } x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2y+2z-2=0 \ (x\neq 2).$$

当 $x=2$ 时，方程表示的是锥面的顶点，故锥面的一般方程为

$$x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2y+2z-2=0.$$

30. 求直线 $x-1=y=z$ 绕 $x=y=1$ 旋转所得旋转面的参数方程和一般方程. (P53)

解：设旋转曲面上点 $P(x,y,z)$，相应子午线上的点 $Q(t+1,t,t)$，设轴线上点 $O(1,1,0)$，则

$$\begin{cases}|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OQ}| \\ \overrightarrow{PQ}\text{ 垂直轴线}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=t^2+(t-1)^2+t^2 \\ t=z\end{cases} \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=z^2+(z-1)^2.$$

于是得旋转曲面一般方程

$$(x-1)^2+(y-1)^2-2(z-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}=0 \quad \text{或} \quad x^2+y^2-2z^2-2x-2y+2z+1=0.$$

根据第一个旋转曲面方程可以得参数方程

$$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\sec\varphi+1 \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\sec\varphi+1 \\ z=\dfrac{1}{2}\tan\varphi+\dfrac{1}{2}\end{cases} \qquad \begin{matrix}0\le\theta\le 2\pi \\ -\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}.\end{matrix}$$

方法 2 （几何法）

设子午线上点 $Q(t+1,t,t)$，则同一纬线上点 $P(\sqrt{t^2+(t-1)^2}\cos\theta+1,\sqrt{t^2+(t-1)^2}\sin\theta+1,t)$，于是旋转曲面参数方程

$$\begin{cases}x=\sqrt{t^2+(t-1)^2}\cos\theta+1 \\ y=\sqrt{t^2+(t-1)^2}\sin\theta+1 \\ z=t\end{cases} \qquad \begin{matrix}0\le\theta\le 2\pi \\ t\in R.\end{matrix}.$$

31. 求圆 $\begin{cases}(x-2)^2+y^2=1 \\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转所得旋转面的参数方程和一般方程．(P53)

解：设圆上点 Q，则可设为 $Q(\cos\theta+2,\sin\theta,0)$，$P(x,y,z)$ 为 Q 点旋转所得，则

$$\begin{cases}|\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{OP}| \\ \overrightarrow{PQ}\perp y\text{轴}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(\cos\theta+2)^2+\sin^2\theta=x^2+y^2+z^2 \\ y=\sin\theta\end{cases}$$

，于是，可得旋转曲面的参数方程

$$\begin{cases}x=(2+\cos\theta)\cos\varphi \\ y=\sin\theta \\ z=(2+\cos\theta)\sin\varphi\end{cases} \qquad 0\le\theta<2\pi,\ 0\le\varphi<$$

旋转曲面的一般方程

$$x^2-(\pm\sqrt{1-y^2}+2)^2+z^2=0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2-5=\pm4\sqrt{1-y^2} \Rightarrow (x^2+y^2+z^2-5)^2-16(1-y^2)=0.$$

方法 2 （几何法）

设旋转曲面上一点 $P(x,y,z)$，则由旋转可以知道 P 由圆上点 $Q(\sqrt{x^2+z^2},y,0)$ 旋转得到，又 Q 点在圆上，则其一般方程

$$(\sqrt{x^2+z^2}-2)^2+y^2-1=0 \quad \text{或} \quad (x^2+y^2+z^2+3)^2-16(x^2+z^2)=0.$$

由第一个式子可容易得参数方程如上．

32. 通过坐标系的平移，化简二次曲面方程 $x^2-y^2-z^2-2x+2y+z-1=0$，并指出曲面的类型．(P53)

解：原式化简为 $(x-1)^2-(y-1)^2-(z-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$．

设 $\tilde{x}=x-1,\tilde{y}=y-1,\tilde{z}=z-\frac{1}{2}$，则原式可化为：

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2}+\frac{\tilde{y}^2}{a^2}-\frac{\tilde{z}^2}{a^2}=-1，\text{其中 } a=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

于是知将坐标系沿着方向 $\vec{\mu}=(1,1,\frac{1}{2})$ 平移可将原曲面化为标准形式，且易知次二次曲面为旋转双叶双曲面．

注：此二次曲面是经过标准旋转双叶双曲面平移得到（同一个坐标系），其平移向量 $\vec{\mu}=(1,1,\frac{1}{2})$.

36. 选取适当的新坐标系，化二次曲面方程 $xy-x+y+z+1=0$ 为标准方程，并指出曲面的类型.

(P53)

解：由 $z+2=-(x+1)(y-1)=(\frac{x-y+2}{2})^2-(\frac{x+y}{2})^2$.

令 $\tilde{x}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y+2),\tilde{y}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y),\tilde{z}=z+2$ ，得新坐标系 $\tilde{e}_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ ， $\tilde{e}_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ ， $\tilde{e}_3=(0,0,2)$ 及 $\tilde{O}=(-1,1,-2)$ ，因此，曲面在新坐标系 $[\tilde{O};\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\tilde{e}_3]$ 中为： $\tilde{z}=\frac{\tilde{x}^2}{2}-\frac{\tilde{y}^2}{2}$ ，此为双曲抛物面.

注： $ab=(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2})(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2})=(\frac{a+b}{2})^2-(\frac{a-b}{2})^2$.

方法 2

设 $x=\frac{u-v}{\sqrt{2}},y=\frac{u+v}{\sqrt{2}}$ ，则原式化为

$$\frac{u^2-v^2}{2}+\frac{v-u}{\sqrt{2}}+\frac{u+v}{\sqrt{2}}+z+1=0$$

即

$$\frac{u^2}{2}-\frac{(v-\sqrt{2})^2}{2}+z+2=0\text{，}$$

再设 $\tilde{x}=u,\tilde{y}=v-\sqrt{2},\tilde{z}=z+2$ ，可将原式化为： $\tilde{z}=-\frac{\tilde{x}^2}{2}+\frac{\tilde{y}^2}{2}$.

由 $\tilde{x}=\frac{x+y}{\sqrt{2}},\tilde{y}=\frac{-x+y}{\sqrt{2}}-\sqrt{2},\tilde{z}=z+2$, 即新坐标系 $\tilde{e}_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $\tilde{e}_2=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $\tilde{e}_3=(0,0,2)$ 及 $\tilde{O}=(-1,1,-2)$ ，因此，曲面在新坐标系 $[\tilde{O};\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\tilde{e}_3]$ 中为： $\tilde{z}=-\frac{\tilde{x}^2}{2}+\frac{\tilde{y}^2}{2}$ ，此为双曲抛物面.

第 4 次作业答案

1. 解下列线性方程组： (P65)

(1) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1 \\ 2x_1+x_2-2x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+2x_2-3x_3=1 \end{cases}$； (4) $\begin{cases} 2x_1+4x_2-6x_3+x_4=2 \\ x_1-x_2+4x_3+x_4=1 \\ -x_1+x_2-x_3+x_4=0 \end{cases}$； (7) $\begin{cases} x_1-x_2 \qquad\qquad -3x_4-x_5=0 \\ x_1-x_2-2x_3-x_4 \qquad\quad =0 \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0 \end{cases}$.

解：

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_1\to r_2,-r_1\to r_3,-r_1\to r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2,-r_2\to r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-7r_3\to r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}$.

从最后一个矩阵的最后一行看出，原方程组无解.

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_2\to r_1,r_2\to r_3,r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -14 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{6}r_2,\frac{1}{3}r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{7}{3}r_3\to r_2,-4r_3\to r_1}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{25}{18} & \frac{7}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\to r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{18} & \frac{4}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{25}{18} & \frac{7}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

令 $x_4=t$，解得

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\frac{5}{18}t+\frac{4}{9},-\frac{25}{18}t+\frac{7}{9},-\frac{2}{3}t+\frac{1}{3},t)\text{，其中 } t\in F .$$

注：相应齐次解： $X=t(5,-25,-12,18)^T$，其中 $t\in F$.

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2r_1\to r_4]{-r_1\to r_2,-4r_1\to r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2\to r_4]{-3r_2\to r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 12 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[4r_3\to r_4,\frac{1}{15}r_4]{-\frac{1}{2}r_2,\frac{1}{12}r_3}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[3r_4\to r_1]{-\frac{3}{4}r_4\to r_3,r_4\to r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[-r_2\to r_1]{-r_3\to r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

令 $x_5=t$，解得

$$X=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T=(7t,5t,0,2t,6t)^T\text{，其中 } t\in F .$$

2. 当 a 为何值时，下列线性方程组有解？有解时求出它的通解. (P66)

(1) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=2 \\ x_1-x_2-2x_3=-3 \\ ax_1-2x_2+2x_3=6 \end{cases}$

解：$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ a & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3r_1\to r_2,-ar_1\to r_3]{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 7 & 11 \\ 0 & a-2 & 2a+2 & 3a+6 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2-a)r_2\to r_3]{\frac{1}{5}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5}a+\frac{24}{5} & \frac{4}{5}a+\frac{52}{5} \end{pmatrix}$.

当$\frac{3}{5}a+\frac{24}{5}=0$且$\frac{4}{5}a+\frac{52}{5}=0$，或$\frac{3}{5}a+\frac{24}{5}\neq 0$时，方程组有解，容易验证前者不成立．故$\frac{3}{5}a+\frac{24}{5}\neq 0$，即$a\neq -8$，此时

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5}a+\frac{24}{5} & \frac{4}{5}a+\frac{52}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{7}{5}r_3\to r_2,2r_3\to r_1]{(\frac{5}{3a+24})r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{-a+32}{3a+24} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-20}{3a+24} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4a+52}{3a+24} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\to r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{a+8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-20}{3a+24} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4a+52}{3a+24} \end{pmatrix}.$$

解得

$$X=(x_1,x_2,x_3)^T=(\frac{4}{a+8},\frac{a-20}{3a+24},\frac{4a+52}{3a+24})^T.$$

4. 求三次多项式$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，使$y=f(x)$的图像经过以下 4 个点：$A(1,2)$，$B(-1,3)$，$C(3,0)$，$D(0,2)$.

解：将四个点代入$y=f(x)$，得

$$\begin{cases} a+b+c+d=2 \\ -a+b-c+d=3 \\ 27a+9b+3c+d=0 \\ d=2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-27r_1\to r_3]{r_1\to r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -18 & -24 & -26 & -54 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}r_2]{9r_2\to r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -24 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-r_4\to r_2,-r_4\to r_1]{-\frac{1}{24}r_3,-\frac{1}{3}r_4\to r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-r_2\to r_1]{-r_3\to r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{24} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

得

$$f(x)=-\frac{5}{24}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{24}x+2.$$

方法 2

由方程组$\begin{cases} a+b+c+d=2 \\ -a+b-c+d=3 \\ 27a+9b+3c+d=0 \\ d=2 \end{cases}$，得等价方程组$\begin{cases} a+b+c=0 \\ -a+b-c=1 \\ 27a+9b+3c=-2 \end{cases}$，及$d=2$．即

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-27r_1 \to r_3]{r_1 \to r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -18 & -24 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}r_2, -\frac{1}{24}r_3]{9r_2 \to r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{24} \end{pmatrix} \xrightarrow[-r_2 \to r_1]{-r_3 \to r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{24} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{24} \end{pmatrix}.$$

于是得

$$f(x) = -\frac{5}{24}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{24}x + 2 .$$

6. 兽医建议某宠物的食谱每天要包含 100 单位的蛋白质，200 单位的糖，50 单位的脂肪．某宠物商店出售四种食品 A,B,C,D．这四种食物每千克含蛋白质、糖、脂肪的含量(单位)如下：

食物	蛋白质	糖	脂肪
A	5	20	2
B	4	25	2
C	7	10	10
D	10	5	6

问是否可以适量配置上述四种食品，满足兽医的建议？ (P66)

解：根据题意设配置食物 A,B,C,D 的份量分别为 x_1, x_2, x_3, x_4 千克，则

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 100 \\ 20x_1 + 25x_2 + 10x_3 + 5x_4 = 200 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 6x_4 = 50 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 & 10 & 100 \\ 20 & 25 & 10 & 5 & 200 \\ 2 & 2 & 10 & 6 & 50 \end{pmatrix} \xrightarrow[-20r_1 \to r_2, -5r_1 \to r_3]{r_1 \leftrightarrow r_3, \frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 & 25 \\ 0 & 5 & -90 & -55 & -300 \\ 0 & -1 & -18 & -5 & -25 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \to r_3]{\frac{1}{5}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 & 25 \\ 0 & 1 & -18 & -11 & -60 \\ 0 & 0 & -36 & -16 & -85 \end{pmatrix} \xrightarrow[18r_3 \to r_2, -5r_3 \to r_1]{-\frac{1}{36}r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{7}{9} & \frac{475}{36} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -\frac{35}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & \frac{85}{36} \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2 \to r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{34}{9} & \frac{1105}{36} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -\frac{35}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & \frac{85}{36} \end{pmatrix}.$$

令 $x_4 = t$，得

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-\frac{34}{9}t + \frac{1105}{36}, 3t - \frac{35}{2}, -\frac{4}{9}t + \frac{85}{36}, t),$$

由于当 $x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ 时，$t \geq 5.83$、$t \leq 5.3125$，矛盾．故满足问题的解不存在．

7. 给定线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

将常数项改为零得到另一个方程组，求解这两个方程组，并研究这两个方程组的解之间的关系．对其他方程组作类似的讨论．

解：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3r_1 \to r_3]{-2r_1 \to r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & -3 \\ 0 & 2 & 8 & -14 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_2 \to r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_2 \to r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11 & 18 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\xrightarrow{-2r_2 \to r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11 & 18 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

令 $x_3=t_1,x_4=t_2$，解得

$$X=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=(11t_1-18t_2+8,-4t_1+7t_2-3,t_1,t_2)^T=t_1(11,-4,1,0)^T+t_2(-18,7,0,1)^T+(8,-3,0,0)^T.$$

当常数项取值为零时，从上述操作中得其解为

$$\tilde{X}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=(11t_1-18t_2,-4t_1+7t_2,t_1,t_2)^T=t_1(11,-4,1,0)^T+t_2(-18,7,0,1)^T.$$

容易看出，解 X 是由 $\tilde{X}$ 加上 $(8,-3,0,0)^T$ 得到的.

2. 证明：每个方阵都可以表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和的形式．(P110)

证明：设矩阵 A，则

$$A=B+C\text{，其中 }B=\frac{A+A^T}{2}\text{，}=\frac{A-A^T}{2}.$$

容易验证矩阵 B 为对称阵，C 为反对称阵.

3. 设 $A=\begin{pmatrix}-3&-1&-2\\1&3&4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&2&-2\\4&-1&-4\\4&3&-3\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&1\\-4&1\\-1&-2\end{pmatrix}$. 计算 AB,BC,ABC,B^2,AC,CA.

解：

$$AB=\begin{pmatrix}-3&-1&-2\\1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&-2\\4&-1&-4\\4&3&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-18&-11&16\\30&11&-26\end{pmatrix};\quad BC=\begin{pmatrix}2&2&-2\\4&-1&-4\\4&3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-4&1\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&8\\12&11\\-5&13\end{pmatrix};$$

$$ABC=\begin{pmatrix}-18&-11&16\\30&11&-26\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-4&1\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&-61\\12&93\end{pmatrix};\quad B^2=\begin{pmatrix}2&2&-2\\4&-1&-4\\4&3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&-2\\4&-1&-4\\4&3&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-4&-6\\-12&-3&8\\8&-4&-11\end{pmatrix};$$

$$AC=\begin{pmatrix}-3&-1&-2\\1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-4&1\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\-15&-4\end{pmatrix};\quad CA=\begin{pmatrix}1&1\\-4&1\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&-1&-2\\1&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2&2\\13&7&12\\1&-5&-6\end{pmatrix}.$$

4. 计算 $\begin{pmatrix}1&x&x^2&\cdots&x^n\\1&y&y^2&\cdots&y^n\\1&z&z^2&\cdots&z^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0&b_0&c_0\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\\vdots&\vdots&\vdots\\a_n&b_n&c_n\end{pmatrix}$.　　　　(P110)

解：原矩阵乘法得

$$\begin{pmatrix}1&x&x^2&\cdots&x^n\\1&y&y^2&\cdots&y^n\\1&z&z^2&\cdots&z^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0&b_0&c_0\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\\vdots&\vdots&\vdots\\a_n&b_n&c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=0}^n x^ia_i&\sum\limits_{i=0}^n x^ib_i&\sum\limits_{i=0}^n x^ic_i\\\sum\limits_{i=0}^n y^ia_i&\sum\limits_{i=0}^n y^ib_i&\sum\limits_{i=0}^n y^ic_i\\\sum\limits_{i=0}^n z^ia_i&\sum\limits_{i=0}^n z^ib_i&\sum\limits_{i=0}^n z^ic_i\end{pmatrix}.$$

5. 计算 $\begin{pmatrix}x_1&x_2&\cdots&x_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$.　　　　(P110)

解：原矩阵乘法得

$$\begin{pmatrix}x_1&x_2&\cdots&x_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^m x_ia_{i1}&\sum\limits_{i=1}^m x_ia_{i2}&\cdots&\sum\limits_{i=1}^m x_ia_{in}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^m x_ia_{ij}y_j.$$

第 5 次作业答案

7. 计算下列方阵的 k 次幂，$k\ge 1$： (P110)

(1) $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$； (3) $\begin{pmatrix}1 & a & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$； (4) $\begin{pmatrix}1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 1\end{pmatrix}$； (5) $\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{pmatrix}$.

解：

(1)由于

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2\theta-\sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta\\ -2\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta\end{pmatrix}.$$

假设当 $n=k-1$（$k\ge 2$）时，$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^{k-1}=\begin{pmatrix}\cos(k-1)\theta & \sin(k-1)\theta\\ -\sin(k-1)\theta & \cos(k-1)\theta\end{pmatrix}$成立.

当 $n=k$ 时，

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^{k}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^{k-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(k-1)\theta & \sin(k-1)\theta\\ -\sin(k-1)\theta & \cos(k-1)\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos(k-1)\theta-\sin\theta\sin(k-1)\theta & \cos\theta\sin(k-1)\theta+\sin\theta\cos(k-1)\theta\\ -\sin\theta\cos(k-1)\theta-\cos\theta\sin(k-1)\theta & -\sin\theta\sin(k-1)\theta+\cos\theta\cos(k-1)\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos k\theta & \sin k\theta\\ -\sin k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}.$$

由数学归纳法，得

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^{k}=\begin{pmatrix}\cos k\theta & \sin k\theta\\ -\sin k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}.$$

(2)当 $a^2+b^2=0$ 时，原式$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$；

当 $a^2+b^2\ne 0$ 时，由 $\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$，其中 $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，于是由(1)得

$$\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}^k=(a^2+b^2)^{k/2}\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^k=(a^2+b^2)^{k/2}\cdot\begin{pmatrix}\cos k\theta & \sin k\theta\\ -\sin k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}.$$

方法 2

由 $\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}^k=\left(aI+b\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)^k=\sum\limits_{i=0}^{k}C_k^i a^{k-i}b^i\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}^i$，其中 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}^i=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi}{2} & \sin\dfrac{\pi}{2}\\ -\sin\dfrac{\pi}{2} & \cos\dfrac{\pi}{2}\end{pmatrix}^i=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{i\pi}{2} & \sin\dfrac{i\pi}{2}\\ -\sin\dfrac{i\pi}{2} & \cos\dfrac{i\pi}{2}\end{pmatrix}$，

所以

$$\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}^k=\sum_{i=0}^{k}C_k^i a^{k-i}b^i\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}^i=\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=0}^{k}C_k^i a^{k-i}b^i\cos\dfrac{i\pi}{2} & \sum\limits_{i=0}^{k}C_k^i a^{k-i}b^i\sin\dfrac{i\pi}{2}\\ -\sum\limits_{i=0}^{k}C_k^i a^{k-i}b^i\sin\dfrac{i\pi}{2} & \sum\limits_{i=0}^{k}C_k^i a^{k-i}b^i\cos\dfrac{i\pi}{2}\end{pmatrix}.$$

方法 3

设 $\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ -b_n & a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}^n$，则 $\begin{cases}a_{n+1}=a\cdot a_n-b\cdot b_n\\ b_{n+1}=b\cdot a_n+a\cdot b_n\end{cases}$

$$\Rightarrow\quad a_{n+2}-(a+ib)a_{n+1}=(a-ib)[a_{n+1}-(a+ib)a_n]=\cdots=(a-ib)^n[a_2-(a+ib)a_1]\quad\Rightarrow\quad a_{n+1}=\frac{1}{2}[(a+ib)^{n+1}+(a-ib)^{n+1}],$$

同理，得 $b_{n+1}=\dfrac{b-ia}{2}(a+ib)^n+\dfrac{b+ia}{2}(a-ib)^n$.

(3)将矩阵分块得

$$B=\begin{pmatrix}1&a&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&a\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&I_2\\O&A\end{pmatrix}，其中 A=\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix},I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

则

$$B^k=\begin{pmatrix}A&I_2\\O&A\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}A^k&kA^{k-1}\\O&A^k\end{pmatrix}，又其中 A^k=\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}1&ka\\0&1\end{pmatrix},$$

得

$$\begin{pmatrix}1&a&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&a\\0&0&0&1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}A^k&kA^{k-1}\\O&A^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&ka&k&k(k-1)a\\0&1&0&k\\0&0&1&ka\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

(4)设

$$\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&1\end{pmatrix}=\left(I_n+B\right)，其中 I_n=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1&&\\&0&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{pmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&1\end{pmatrix}^k=\left(I_n+B\right)^k=\sum_{i=0}^{k}C_k^iB^i,$$

当 $i<n$ 时， $B^i=\begin{pmatrix}O_{(n-i+1)(i-1)}&I_{n-i+1}\\O_{(i-1)(i-1)}&O_{(i-1)(n-i+1)}\end{pmatrix}$ ；当 $i\ge n$ 时， $B^i=O_{n\times n}$.

当 $k<n$ 时，

$$\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&1\end{pmatrix}^k=\sum_{i=0}^{k}C_k^iB^i=\begin{pmatrix}1&C_k^1&\cdots&C_k^k&0&\cdots&0\\&1&C_k^1&&\ddots&\ddots&\vdots\\&&\ddots&\ddots&&\ddots&0\\&&&\ddots&\ddots&&C_k^k\\&&&&\ddots&\ddots&\vdots\\&&&&&1&C_k^1\\&&&&&&1\end{pmatrix};$$

当 $k\ge n$ 时，

$$\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&1\end{pmatrix}^k=\sum_{i=0}^{k}C_k^iB^i=\begin{pmatrix}1&C_k^1&\cdots&C_k^{n-1}\\&\ddots&\ddots&\vdots\\&&\ddots&C_k^1\\&&&1\end{pmatrix}.$$

(5)由

$$A=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1\quad b_2\quad\cdots\quad b_n).$$

则

$$A^k=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1\quad b_2\quad\cdots\quad b_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1\quad b_2\quad\cdots\quad b_n)\cdot A^{k-2}=(\sum_{i=1}^n a_ib_i)\cdot A^{k-1}=\cdots=(\sum_{i=1}^n a_ib_i)^{k-1}\cdot A .$$

9. 证明：两个 n 阶上（下）三角形方阵的乘积仍是上（下）三角形方阵．(P110)

证明：设两上三角方阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&a_{nn}\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&b_{nn}\end{pmatrix}$，设 $C=AB$，于是当 $i>j$ 时，

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=i}^n a_{ik}b_{kj} ,$$

其中等式右侧第一项中由 $i>k$， $a_{ik}=0$，第二项中 $k\ge i>j$，则 $b_{kj}=0$，则 $c_{ij}=0,i>j$． 即矩阵 C 为上三角形矩阵．

注：也可以从 $c_{ij}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&a_{ii}&\cdots&a_{in}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{1j}\\\vdots\\b_{jj}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=0,i>j$ 可以证明结论．

10. 证明：与任意 n 阶方阵都乘法可交换的方阵一定是数量矩阵． (P110)

证明：设满足题设的矩阵为 A，设矩阵 E_{ij} 为只有 (i,j) 元为1，其他元素为0的 n 阶方阵，则 $AE_{ij}=E_{ij}A$，即

$$\begin{pmatrix}O_{n\times(j-1)}&A_i&O_{n\times(n-j)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O_{(i-1)\times n}\\\tilde{A}_j\\O_{(n-i)\times n}\end{pmatrix}，其中 A_i=\begin{pmatrix}a_{1i}\\\vdots\\a_{ni}\end{pmatrix},\tilde{A}_j=\begin{pmatrix}a_{j1}&\cdots&a_{jn}\end{pmatrix}.$$

即

$$\begin{pmatrix}O_{n\times(j-1)}&A_i&O_{n\times(n-j)}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}O_{(i-1)\times n}\\\tilde{A}_j\\O_{(n-i)\times n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}&&&a_{1i}&&\\&&&\vdots&&\\-a_{j1}&\cdots&-a_{ji}&\cdots&a_{ii}-a_{jj}&\cdots&-a_{jn}\\&&&\vdots&&\\&&&a_{ij}&&\\&&&\vdots&&\\&&&a_{ni}&&\end{pmatrix}=O_{n\times n}.$$

最后的矩阵的等式中对应位置元素相等，则得 $\begin{cases}a_{ki}=0,k\ne i,\\a_{jk}=0,k\ne j\end{cases}$，且 $a_i=q_j$ ．取遍 $i=1,2,\cdots,n$， $j=1,2,\cdots,n$，得结论成立．

13. 设方阵 A 满足 $A^k=O$， k 为正整数．证明： $I+A$ 可逆，并求 $(I+A)^{-1}$．(P111)

解：设 $B=-A$，则 $B^k=O$，且

$$(I-B)(I+B+B^2+\cdots+B^{k-1})=I+B+B^2+\cdots+B^{k-1}-B-B^2-\cdots-B^{k-1}-B^k=I-B^k=I .$$

即 $I+A=I-B$ 可逆，且

$$(I+A)^{-1}=(I-B)^{-1}=(I+B+B^2+\cdots+B^{k-1})=\sum_{i=0}^{k-1}B^i=\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^iA^i .$$

方法 2

$$(A+I-I)^k=(-I)^k+\sum_{i=1}^k C_k^i(A+I)^i(-I)^{k-i}=O\ \Rightarrow\ (A+I)\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^iC_n^i(A+I)^{n-i-1}=I .$$

第 6 次作业答案

18. 证明：不存在 n 阶复方阵 A,B 满足： $AB-BA=I$ ．(P111)

证明：由于 $tr(AB)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ik}b_{ki}\right)=tr(BA)$，所以 $tr(AB-BA)=0$，而 $tr(I)=n$，故 $AB-BA\neq I$.

20. 略.

21. 略.

22. 计算下列矩阵的逆矩阵：(P111)

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$；　　（4）$\begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_k & & & \end{pmatrix}$，$A_i$ 是 n_i 阶方阵.

解：

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 12 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 10 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 14 & -7/3 & -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 14/3 & -7/9 & -1/9 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 124/3 & -65/9 & 1/9 & 8/3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 14/3 & -7/9 & -1/9 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -65/372 & 1/372 & 24/372 & 9/372 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -65/93 & 1/93 & 8/31 & 3/31 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/62 & -21/62 & -4/31 & -3/62 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7/182 & -23/182 & 1/31 & -7/62 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -65/372 & 1/372 & 24/372 & 9/372 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 49/186 & 25/186 & 7/31 & 13/62 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2/93 & -20/93 & -5/31 & 2/31 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7/182 & -23/182 & 1/31 & -7/62 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -65/372 & 1/372 & 2/31 & 3/124 \end{pmatrix}.$

则矩阵逆为 $\begin{pmatrix} 49/186 & 25/186 & 7/31 & 13/62 \\ -2/93 & -20/93 & -5/31 & 2/31 \\ 7/182 & -23/182 & 1/31 & -7/62 \\ -65/372 & 1/372 & 2/31 & 3/124 \end{pmatrix}.$

（4）由于 $\begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_K & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & & I_K \\ & & \iddots & \\ & I_2 & & \\ I_1 & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_K^{-1} \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_K^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_1 & & & \\ & I_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_K \end{pmatrix}.$$

则其逆为 $\begin{pmatrix} & & & A_K^{-1} \\ & & \iddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix}.$

23. 求解下列矩阵方程：

（2）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. (P111)

解：设 $X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 则

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22}-a_{11} & a_{23}-a_{12} \\ a_{31} & a_{32}-a_{21} & a_{33}-a_{22} \\ a_{11} & a_{12}-a_{31} & a_{13}-a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

得 $X = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 14 \\ 1 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & 11 \end{pmatrix}$.

第 7 次作业答案

24. 求以下排列的逆序数，并指出其奇偶性：(P112)

（1）$(6,8,1,4,7,5,3,2,9)$；　　（2）$(6,4,2,1,9,7,3,5,8)$；　　（3）$(7,5,2,3,9,8,1,6,4)$.

解：逆序数=5+6+0+2+3+2+1+0+0=19 为奇排列；

$(6,8,\ 1,\ 4,\ 7,\ 5,\ 3,\ 2,\ 9)$

逆序数=5+3+1+0+4+2+0+0+0=15 为奇排列；逆序数m=6+4+1+1+4+3+0+1+0=20 为偶排列.

$(\ 6,4,\ 2,1,\ 9,\ 7,\ 3,5,\ 8)$　　　　(7 , 5 , 2 , 3 , 9 , 8 ,

25. 计算下列行列式：(P112)

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$；　（2）$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$；　（3）$\begin{vmatrix} x+a & x+b & x+c \\ y+a & y+b & y+c \\ z+a & z+b & z+c \end{vmatrix}$；

（4）$\begin{vmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_k & & & \end{vmatrix}$，$A_i$ 是 n_i 阶方阵；（5）$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & \iddots & a_{2n} \\ & a_{n-1,2} & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$；（6）$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$

（7）$\begin{vmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & c_n & d_n & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_1 & & & & & d_1 \end{vmatrix}$；　（8）$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$.

解：

（1）$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & 12 \\ 0 & 3 & -5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 14 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = -3(12+14\cdot 8) = -372.$$

（2）$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 15 & -7 & -5 \\ -6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & 10 \\ 0 & -6 & -4 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 8 & 10 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} = (-1)(-32+60) = -28.$$

（3）$$\begin{vmatrix} x+a & x+b & x+c \\ y+a & y+b & y+c \\ z+a & z+b & z+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & b-c & x+c \\ a-b & b-c & y+c \\ a-b & b-c & z+c \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x+a & x+b & x+c \\ y+a & y+b & y+c \\ z+a & z+b & z+c \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right| = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x+a & x+b & x+c \\ y+a & y+b & y+c \\ z+a & z+b & z+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & x+a & x+b & x+c \\ 0 & y+a & y+b & y+c \\ 0 & z+a & z+b & z+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ -1 & x & x & x \\ -1 & y & y & y \\ -1 & z & z & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a+x & b+y & c+z \\ -1 & x & x & x \\ 0 & y-x & y-x & y-x \\ 0 & z-x & z-x & z-x \end{vmatrix} = 0.$$

（4）
$$\begin{vmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_k & & & \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} & & & I_{n_1} \\ & & I_{n_2} & \\ & \iddots & & \\ I_{n_k} & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & & I_{n_k} \\ & & \iddots & \\ & I_{n_2} & & \\ I_{n_1} & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_k & & & \end{pmatrix}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} & & & I_{n_1} \\ & & I_{n_2} & \\ & \iddots & & \\ I_{n_k} & & & \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A_k & & & \\ & \ddots & & \\ & & A_2 & \\ & & & A_1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n_1(n_1-1)}{2}+\cdots+\frac{n_k(n_k-1)}{2}} \cdot \prod \det(A_i) \cdot \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}_{\sum n_i \times \sum n_i} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n_1(n_1-1)}{2}+\cdots+\frac{n_k(n_k-1)}{2}+\frac{\sum n_i(\sum n_i-1)}{2}} \cdot \prod \det(A_i) = (-1)^{\sum_{i\neq j} n_i n_j} \cdot \prod \det(A_i).$$

方法 2 归纳法.

（5）
$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & \iddots & a_{2n} \\ & a_{n-1,2} & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{1n} & & & \\ a_{2n} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & a_{n-1,2} & \\ a_{nn} & \cdots & a_{n2} & a_{n1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod a_{ii}.$$

（6）
$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = D_n,$$

按最后一行展开得（或者讨论 a_i 是否为零，然后化第一列为零，直接化成上三角行列式求解）

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{1+n+1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{n-1} & 0 \end{vmatrix} + a_n D_{n-1}$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} a_i + a_n D_{n-1} = \cdots = \sum_{j=2}^{n}\left(\prod_{i=1,i\neq j}^{n} a_i\right) + a_n a_{n-1}\cdots a_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & a_1 \end{vmatrix} = a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1 + \sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1,i\neq j}^{n} a_i\right).$$

方法 2 降阶公式.（注意讨论 a_i 是否有等于零的时候）

（7）按第 n 行展开得

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & c_n & d_n & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_1 & & & & & d_1 \end{vmatrix} = (-1)^{2n} a_n \begin{vmatrix} \ddots & & & & \iddots \\ & a_{n-1} & & b_{n-1} & \\ & & d_n & & \\ & c_{n-1} & & d_{n-1} & \\ \iddots & & & & \ddots \end{vmatrix} + (-1)^{2n+1} b_n \begin{vmatrix} \ddots & & & & \iddots \\ & a_{n-1} & & b_{n-1} & \\ & & c_n & & \\ & c_{n-1} & & d_{n-1} & \\ \iddots & & & & \ddots \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2n+2n} a_n d_n \begin{vmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & & \\ & & c_{n-1} & d_{n-1} & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_1 & & & & & d_1 \end{vmatrix} + (-1)^{2n+2n+1} b_n c_n \begin{vmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & & \\ & & c_{n-1} & d_{n-1} & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_1 & & & & & d_1 \end{vmatrix}$$

$$= (a_n d_n - b_n c_n) D_{n-1} = \cdots = \left(\prod_{i=2}^{n} (a_i d_i - b_i c_i)\right) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (a_i d_i - b_i c_i).$$

方法 2 多项式法.

（8）

当 $n=1$ 时，原式 $=a_1-b_1$；

当 $n=2$ 时，原式 $=(a_1-a_2)(b_1-b_2)$；

当 $n>2$ 时，原式 $=\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -b_1 & -b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right| = 0.$

方法 2 加行加列.

26. 设 A 是奇数阶反对称复方阵，证明：$\det(A)=0$．(P112)

证明：设矩阵 A 阶数为 n，由于 $A^T=-A$，则 $\det(A)=\det(A^T)=\det(-A)=(-1)^n\det(A)$，即

$$(1+(-1)^n)\det(A)=0,$$

所以，当 n 为奇数时，得到矩阵 A 行列式为零.

第 8 次作业答案

28. 设 A,B 是 n 阶方阵，λ 是数，证明：(P112)

（1）$(\lambda A)^* = \lambda^{n-1}A^*$；　　（2）$(AB)^* = B^*A^*$；　　（3）$\det(A^*) = (\det(A))^{n-1}$.

证明：（1）略.

（2）当 A,B 都可逆时，则

$$(AB)^* = |AB|(AB)^{-1} = (|B|B^{-1})(|A|A^{-1}) = B^*A^*.$$

当 A,B 中有至少一个不可逆，令

$$A_t = A+tE, B_t = B+tE,$$

则存在 $\delta>0$，使 $t\in(0,\delta)$ 时，A_t, B_t 均可逆，由上面讨论得 $(A_tB_t)^* = B_t^*A_t^*$，由于该等式左、右矩阵元素均为 t 的多项式，因而当 $t=0$ 时，等式仍成立，即

$$(AB)^* = B^*A^*.$$

注：类似的方法可以证明：$(A^T)^* = (A^*)^T$，其中 A 为 n 阶方阵.

（3）因为 $A^*A = \det(A)I_n$，所以 $|A^*A| = |A|^n$.

当 A 可逆时，有 $\det(A^*) = (\det(A))^{n-1}$ 成立；

当 A 不可逆时，$rank(A)<n$，则 $rank(A^*)=1$ 或 0，故 $\det(A^*) = 0 = (\det(A))^{n-1}$ 成立.

29. 设方阵 A 的逆矩阵 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，求 A^*.（P112)

解：因为 $AA^* = |A|I_n$，则 $A^* = |A|A^{-1} = \dfrac{1}{|A^{-1}|}A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$.

30. 设方阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求 A.（P113)

解：显然 $|A^*|\neq 0$，由 $AA^* = |A|I_n$，及 $|A^*| = |A|^{n-1}$，得

$$A = |A^*|^{\frac{1}{n-1}}(A^*)^{-1} = (-8)^{1/3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

35. 略.

36. 对于 a,b 的各种取值，讨论实矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & a \\ 3 & b & 9 \end{pmatrix}$ 的秩.（P113)

解：由 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & a \\ 3 & b & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a\text{-}6 \\ 0 & b\text{-}6 & 0 \end{pmatrix}$，则知道：

当 $a-6=0$，$b-6=0$ 时，矩阵秩为 1；

当 $a-6=0$，$b-6\neq 0$ 时，矩阵秩为 2；

当 $a-6\neq 0$，$b-6=0$ 时，矩阵秩为 2；

当 $a-6\neq 0$，$b-6\neq 0$ 时，矩阵秩为 3.

第 9 次作业答案

38. 设矩阵 A 是 n 阶方阵，证明：$rank(A^*)=\begin{cases} n, & rnak(A)=n, \\ 1, & rank(A)=n-1, \\ 0, & rank(A)\le n-2. \end{cases}$ (P113)

证明：由于 $AA^*=|A|I_n$，知道若 $rank(A)=n$，则 A 可逆，从而，A^* 可逆，有 $rank(A^*)=n$.
当 $rank(A)=n-1$，则 $AA^*=O_{n\times n}$，则由 Sylvecter 秩不等式，得

$$rank(A)+rank(A^*)\le n,$$

所以 $rank(A^*)\le 1$，又存在 A 的 $n-1$ 阶非零子式，得 $rank(A^*)=1$.
当 $rank(A)\le n-2$ 时， A 不存在的 $n-1$ 阶非零子式，得 $A^*=O_{n\times n}$，即 $rank(A^*)=0$.

39. 设 $A\in F^{m\times n}$，证明：线性方程组 $AX=0$ 有非零解的充分必要条件是 $rank(A)<n$. (P113)

证明：设 $r=rank(A)$，则存在可逆方阵 $P\in F^{m\times m}$，$Q\in F^{n\times n}$，使得
$A=P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$，则方程组变为：$P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}QX=0 \iff \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}QX=0$.
则原方程有非零解的充要条件是 $r<n$（否则上式可写为 $\begin{pmatrix} QX \\ O \end{pmatrix}=0$，显然有 $X=0$）.

40. 证明下列关于秩的等式和不等式：(P113)
（1） $\max\left(rank(A), rank(B), rank(A+B)\right)\le rank(A,B)$；
（2） $rank(A,B)\le rank(A)+rank(B)$；
（3） $rank\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\ge rank(A)+rank(B)$.

证明：

（1）由于 A、B 是矩阵 (A,B) 的子矩阵，则有 $rank(A), rank(B)\le rank(A,B)$. 又 $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \\ I & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A+B & B \end{pmatrix}$，由于初等变换不改变矩阵的秩，所以，$rank(A+B)\le rank(A,B)$，故原不等式成立.

（2）由于 $\begin{pmatrix} I & I \\ & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & I \\ & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & A+B \\ & B \end{pmatrix}$，由于 $rank(A)+rank(B)=rank\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}$，则

$$rank(A,B)\le rank(A)+rank(B).$$

（3）设存在可逆阵 P_1,P_2,Q_1,Q_2，使得 $P_1AQ_1=\begin{pmatrix} I_{r1} & \\ & O \end{pmatrix}, P_2BQ_2=\begin{pmatrix} I_{r2} & \\ & O \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} P_1 & \\ & Q_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_2 & \\ & Q_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_{r1} & & C_{11} & C_{12} \\ & O & C_{21} & C_{22} \\ & & I_{r2} & \\ & & & O \end{pmatrix},$$

进行适当的行初等变换和列初等变换得到 $\begin{pmatrix} I_{r1} & & \\ & I_{r2} & \\ & & * \end{pmatrix}$，则得 $rank\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\ge r1+r2=rank(A)+rank(B)$.

41. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，证明：(P113)

$$m+rank(I_n-BA)=rank\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}=n+rank(I_m-AB).$$

证明：由于$\begin{pmatrix} I_m & \\ -B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_m & A \\ O & I_n-BA \end{pmatrix}$，得

$$m+rank(I_n-BA)=rank\begin{pmatrix} I_m & A \\ & I_n-BA \end{pmatrix}=rank\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix},$$

同理由于$\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & \\ -B & I_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_m-AB & A \\ O & I_n \end{pmatrix}$，得

$$n+rank(I_m-AB)=rank\begin{pmatrix} I_m-AB & A \\ & I_n \end{pmatrix}=rank\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix},$$

结论得证.

42. 设n阶方阵A满足$A^2=I$，证明：$rank(I+A)+rank(I-A)=n$. (P113)

证明：由于

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}I & \\ \frac{1}{4}(A-I) & \frac{1}{2}I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & I \\ & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I+A & \\ & I-A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & I \\ & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \\ -\frac{1}{2}(I+A) & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & I \\ I-A^2 & O \end{pmatrix}.$$

于是知道当$A^2=I$，有$rank(I+A)+rank(I-A)=rank\begin{pmatrix} O & I \\ I-A^2 & O \end{pmatrix}=n$.

第 10 次作业答案

1. 证明：对线性方程组作初等变换后得到的线性方程组中的每一个方程都是原方程的线性组合．(P154)

证明：设原方程组为：$\beta_1,\cdots,\beta_n$，初等变换后方程组为$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$．

（1）交换第i个方程和第j个方程，则

$$\alpha_k=\begin{cases}\beta_i, & k=j,\\ \beta_j, & k=i,\\ \beta_k, & other.\end{cases}$$

（2）将第i个方程乘以非零数λ，则

$$\alpha_k=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}\beta_i, & k=i,\\ \beta_k, & other.\end{cases}$$

（3）将第i个方程乘以数λ加到第j个方程，则

$$\alpha_k=\begin{cases}\beta_j-\lambda\beta_i, & k=j,\\ \beta_k, & other.\end{cases}$$

2. 设$b_1,\cdots,b_s$中每一个向量是n维数组向量$a_1,\cdots,a_r$的线性组合．证明：$b_1,\cdots,b_s$的任何线性组合都是$a_1,\cdots,a_r$的线性组合．

证明：由题意可表示：$(b_1,\cdots,b_s)=(a_1,\cdots,a_r)A_{r\times s}$，设$\alpha=(b_1,\cdots,b_s)X_{s\times 1}$，则有

$$\alpha=(b_1,\cdots,b_s)X_{s\times 1}=(a_1,\cdots,a_r)A_{r\times s}X_{s\times 1},$$

设$Y=A_{r\times s}X_{s\times 1}$，则向量$\alpha$也可由向量$a_1,\cdots,a_r$线性组合．(P154)

3. 设$a_1=(1,2,-1),a_2=(2,0,3),a_3=(2,1,0)$是三维几何空间中的三个向量．能否将其中某一个向量写成其他两个向量的线性组合？这三个向量是否共面？(P154)

解：设$k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3=0$，则由对应元素相等可得线性方程组

$$\begin{cases}k_1+2k_2+2k_3=0\\ 2k_1\qquad+k_3\ =0\\ -k_1+3k_2\qquad=0\end{cases},$$

其只有零解，则知道向量a_1,a_2,a_3线性无关，故其中任意一个向量不能写成其他两个向量的线性组合．这三个向量不共面．

4. 设$a_1=(0,1,-2),a_2=(2,1,3),a_3=(4,5,0)$是三维几何空间中的三个向量．能否将其中某一个向量写成其他两个向量的线性组合？这三个向量是否共面？(P154)

解：设$k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3=0$，则由对应元素相等可得线性方程组

$$\begin{cases}\qquad 2k_2+4k_3=0\\ k_1\ +k_2+5k_3=0\\ -2k_1+3k_2\qquad=0\end{cases}$$，其中一个非零解为：$X=\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}$，则知$a_3=3a_1+2a_2$，显然这三个向量共面．

6. 设$a_1=(1,0,0,0),a_2=(1,1,0,0),a_3=(1,1,1,0),a_4=(1,1,1,1)$．证明：$F^4$中任何向量可以写成$a_1,a_2,a_3,a_4$的线性组合，且表示唯一．(P154)

证明：只要证明a_1,a_2,a_3,a_4是F^4中的一组基即可．

若有$k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3+k_4a_4=0$，则由对应坐标量相等，得$k_i=0,i=1,2,3,4$，故所以$a_1,a_2,a_3,a_4$线性无关．

设F^4中标准基e_1,e_2,e_3,e_4，有

$$(e_1,e_2,e_3,e_4)=(a_1,a_2,a_3,a_4)\begin{pmatrix}1&-1&&\\&1&-1&\\&&1&-1\\&&&1\end{pmatrix},$$

即e_1,e_2,e_3,e_4可由向量a_1,a_2,a_3,a_4线性表示，从而F^4中任意向量都可由a_1,a_2,a_3,a_4线性表示，即a_1,a_2,a_3,a_4可作为F^4中

的一组基.

8. 设 a_1,a_2,a_3,a_4 是三维几何空间中的四个向量．证明它们必线性相关．(P155)

证明：设 $A=\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)$，$k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3+k_4a_4=0$，则有 $AK=0$，其中 $K=\begin{pmatrix}k_1 & k_2 & k_3 & k_4\end{pmatrix}^T$，此线性方程组个数小于未知量个数，故必有非零解，即 a_1,a_2,a_3,a_4 线性相关.

9. 判断下列线性方程组是否线性相关：(P155)

（1）$\begin{cases}-x_1+2x_2+3x_3=4,\\ 5x_1-x_3=-1,\\ 8x_1-6x_2-10x_3=-13.\end{cases}$

解：设三个方程为 a_1,a_2,a_3，并有 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3=0，$$

则由其系数矩阵为 $\begin{pmatrix}-1 & 5 & 8\\ 2 & 0 & -6\\ 3 & -1 & -10\\ 4 & -1 & -13\end{pmatrix}$，经适当的初等行变换，可得 $\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，当 $k_3=1$ 时，$k_1=3,k_2=-1$，此即 $a_2=3a_1+a_3$，即线性方程组线性相关.

10. 判断下列向量是否线性相关：(P155)

（1）$a_1=(1,1,1),a_2=(1,-2,3),a_3=(1,4,9)$；

（3）$a_1=(-2,1,0,3),a_2=(1,-3,2,4),a_3=(3,0,2,-1),a_4=(2,-2,4,6)$.

解：（1）设 $k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3=0$，则由

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{vmatrix}=-30，$$

即必有 $k_1=k_2=k_3=0$，所以 a_1,a_2,a_3 线性无关.

（3）设 $k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3+k_4a_4=0$，则由

$$\begin{vmatrix}-2 & 1 & 3 & 2\\ 1 & -3 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 2 & 4\\ 3 & 4 & -1 & 6\end{vmatrix}=0，$$

则存在不全为零的 k_1,k_2,k_3,k_4，使 $k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3+k_4a_4=0$ 成立，即 a_1,a_2,a_3,a_4 线性相关.

第 11 次作业答案

11. 证明：任何一个经过一下两个平面 (P155)

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0，\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

的交线的平面的方程能写成：

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 .$$

其中 λ,μ 为不全为零的常数.

证明：若是两平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 重合，则结论显然成立.

假设两平面不重合，又由于两平面相交，则知道 $rank\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}=2$．设要求的平面为 $Ax+By+Cz+D=0$，则有 $\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$ 有无穷多解，所以 $rank\begin{pmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}\le 2$，由 $rank\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}=2$，知道方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 可由方程 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 线性表示，即有

$$Ax+By+Cz+D=\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 .$$

方法（2）

三个平面交到一条直线，这三个平面的法向量共面，且知道 $rank\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}=2$，则 (A,B,C) 可由 (A_1,B_1,C_1) 和 (A_2,B_2,C_2) 线性表示，设为 $(A,B,C)=\lambda(A_1,B_1,C_1)+\mu(A_2,B_2,C_2)$，又由于三平面有无穷多个公共点，可推出

$$Ax+By+Cz+D=\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 .$$

14. 证明向量表示基本定理：设 $a_1,\cdots,a_n\in F^n$ 线性无关，则任意向量 $b\in F^n$ 可以表示为 $a_1,\cdots,a_n$ 的线性组合，且表示唯一.

证明：类似习题 8 的证明方法，可以得证对 $\forall c\in F^n$，$a_1,\cdots,a_n,c$ 线性相关，即得到 c 可由 $a_1,\cdots,a_n$ 线性表示，又 $a_1,\cdots,a_n$ 线性无关，所以可构成 F^n 的一组基．故结论得证．(P155)

15. 证明：非零向量组 $a_1,\cdots,a_s$ 线性无关的充要条件是，每个 $a_i(1<i\le s)$ 都不能用它前面的向量线性表示．(P155)

证明：必要性显然成立，以下证明充分性.

若假设向量组 $a_1,\cdots,a_s$ 线性相关，则存在不全为零的数 $k_1,\cdots,k_s$，使得

$$k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_sa_s=0，$$

设 k_i 是 $k_1,\cdots,k_s$ 中最后一个不为零的数（显然 $i\ne 1$，否则会与非零向量组的假设矛盾），则有 $k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_ia_i=0$，得

$$a_i=\tfrac{k_1}{k_i}a_1+\tfrac{k_2}{k_i}a_2+\cdots+\tfrac{k_{i-1}}{k_i}a_{i-1}，$$

即 a_i 可由其前面的向量线性表示，与假设矛盾，故结论成立.

17. 设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 可以由向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性表示，则 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 也线性无关．(P156)

证明：$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 可以由向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性表示，则极大无关组的秩不等式：

$$r=rank\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}\le rank\{\beta_1,\cdots,\beta_r\}\le r .$$

所以 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 也线性无关.

19. 求下列向量组的极大无关组与秩：(P156)

（1）$a_1=(3,-2,0),a_2=(27,-18,0),a_3=(-1,5,8)$；

（3）$a_1=(0,1,2,3),a_2=(1,2,3,4),a_3=(3,4,5,6),a_4=(4,3,2,1)$.

解：(1) 假设 $k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3=0$，其系数矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & 27 & -1 \\ -2 & -18 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ 进行行初等变换，得 $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 a_1,a_2,a_3 秩为 2，且则 $a_2=9a_1+0a_3$，即 a_2,a_3 构成向量组的极大无关组.

（2）假设 $k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3+k_4a_4=0$，其系数矩阵 $\begin{pmatrix}0&1&3&4\\1&2&4&3\\2&3&5&2\\3&4&6&1\end{pmatrix}$ 进行行初等变换，得 $\begin{pmatrix}1&0&-2&-5\\0&1&3&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 a_1,a_2,a_3,a_4 秩为 2，且则 $a_3=-2a_1+3a_2, a_4=-5a_1+4a_2$，即 a_1,a_2 构成向量组的极大无关组.

21. 证明：若向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，则 β 可以由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的极大无关组表示.（P156）

证明：由于向量组与其极大无关组是等价的，则结论显然成立.

22. 设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的秩为 r，则其中任何 r 个线性无关的向量构成 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的极大无关组.（P156）

证明：设 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 中任意 r 个线性无关的向量，则由于任意的向量 $\alpha\in\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$，都有 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r},\alpha$ 线性相关（否则与向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的秩为 r 矛盾），则 α 可由 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表示，则 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的极大无关组.

23. 设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的秩为 r，如 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 可以由它的 r 个向量线性表示，则这 r 个向量构成 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的极大无关组.

证明：设这 r 个向量为 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$，则只要证明它们是线性无关的即可.

由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 可以由 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 向量线性表示，则 $r=rank\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}\le rank\{\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}\}\le r$，则知道 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关.

24. 证明：$rank(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_s)\le rank(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)+rank(\beta_1,\cdots,\beta_s)$.（P156）

证明：设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 的极大无关组为 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_p}$，$\beta_1,\cdots,\beta_s$ 的极大无关组为 $\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_q}$，则

$$rank\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_s\}=rank\{\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_p},\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_q}\}\le p+q=rank(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)+rank(\beta_1,\cdots,\beta_s).$$

从而，$rank(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_s)\le rank(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)+rank(\beta_1,\cdots,\beta_s)$.

27. 设 A,B 是同阶矩阵．证明：$rank(A+B)\le rank(A)+rank(B)$.（P156）

证明：设矩阵 A 的各列表示为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，B 各列表示为 $B_1,B_2,\cdots,B_n$，并设其列的极大无关组分别为：$A_{i_1},\cdots,A_{i_r}$，$B_{i_1},\cdots,B_{i_t}$，于是显然有 $A_1+B_1,A_2+B_2,\cdots,A_n+B_n$，可由 $A_{i_1},\cdots,A_{i_r},B_{i_1},\cdots,B_{i_t}$ 线性表示，于是有

$$rank\{A_1+B_1,A_2+B_2,\cdots,A_n+B_n\}\le rank\{A_{i_1},\cdots,A_{i_r},B_{i_1},\cdots,B_{i_t}\}\le r+t=rank\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}+rank\{B_1,B_2,\cdots,B_n\},$$

于是得结论：

$$rank(A+B)\le rank(A)+rank(B).$$

30. 证明：线性方程组 $x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n=b$ 有解，当且仅当 $b\in\langle a_1,\cdots,a_m\rangle$，当且仅当 $\langle a_1,\cdots,a_m\rangle=\langle a_1,\cdots,a_m,b\rangle$.（P156）

证明：循环证明.

若线性方程组 $x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n=b$ 有解，则 b 可由 $a_1,\cdots,a_m$ 线性表示，即 $b\in\langle a_1,\cdots,a_m\rangle$；

若 $b\in\langle a_1,\cdots,a_m\rangle$，首先易知 $\langle a_1,\cdots,a_m\rangle\subseteq\langle a_1,\cdots,a_m,b\rangle$，且存在 $x_1,\cdots,x_n$，使得 $b=x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n$，则

$$\langle a_1,\cdots,a_m,b\rangle\subseteq\langle a_1,\cdots,a_m\rangle,$$

从而，有 $\langle a_1,\cdots,a_m\rangle=\langle a_1,\cdots,a_m,b\rangle$.

若 $\langle a_1,\cdots,a_m\rangle=\langle a_1,\cdots,a_m,b\rangle$，则有 $b\in\langle a_1,\cdots,a_m\rangle$，即存在 $x_1,\cdots,x_n$，使得

$$b=x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n.$$

31. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 F^n 的基，向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 有关系式（P156）

$$(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)T.$$

证明：$\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为 F^n 的基当且仅当 T 为可逆方阵.

证明：假设 T 可逆，则 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)T^{-1}$，则 $\forall\alpha\in F^n$，存在 $\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)X$，于是有

$$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)X=(\beta_1,\cdots,\beta_n)T^{-1}X,$$

设 $Y=T^{-1}X$，则有 $\alpha=y_1\beta_1+\cdots+y_n\beta_n$．$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 也可以由 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 线性表示，所以得到 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为 F^n 的一组基.

反之，由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 都为 F^n 的基，则 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 和 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ 为可逆方阵，则得 $T=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)^{-1}(\beta_1,\cdots,\beta_n)$

可逆.（必要性另证：若 T 是不可逆的，则存在 $X \neq 0$，使得 $TX = 0$，则 $(\beta_1, \cdots, \beta_n)X = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)TX = 0 \Rightarrow X = 0$ 矛盾）

34. 以向量组 $\alpha_1 = (3,1,0), \alpha_2 = (6,3,2), \alpha_3 = (1,3,5)$ 为基，求 $\beta = (2,-1,2)$ 的坐标.（P157）

解：设 $\beta = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)X$，得方程组 $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$， 解得 $X = (-76, 41, -16)^T$.

35. 设 $\alpha_1 = (3,2,-1,4), \alpha_2 = (2,30,-1)$.（P157）

（1）将 α_1, α_2 扩充为 R^4 的一组基；

（2）给出标准基在该组基下的表示；

（3）求 $\beta = (1,3,4,-2)$ 在该基下的坐标.

解：设标准基为 e_1, e_2, e_3, e_4.

（1）显然 $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$，即令 $\alpha_3 = e_3, \alpha_4 = e_4$，则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 构成 R^4 的一组基.

（2）由 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (e_1, e_2, e_3, e_4)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则

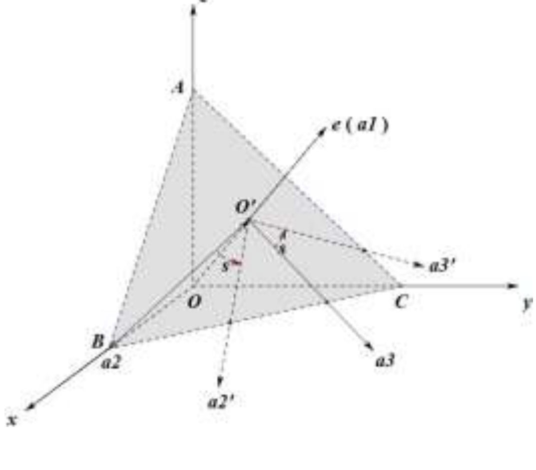
$$(e_1, e_2, e_3, e_4) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{14}{5} & \frac{11}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

（3）由 $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{14}{5} & \frac{11}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{17}{5} \\ \frac{9}{5} \end{pmatrix}$.

即 $\beta = (1,3,4,-2)$ 在该基下的坐标为 $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{17}{5} \\ \frac{9}{5} \end{pmatrix}$.

36. 将三维几何空间中的直角坐标系 $[O; e_1, e_2, e_3]$ 绕单位向量 $e = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ 旋转 θ 角，求新坐标与原坐标之间的关系.（P157）

解：题目中给出的是一个旋转变换，记为 $\mathscr{A}$，则易知 $\mathscr{A}$ 为线性变换. 设 $[O; \beta_1, \beta_2, \beta_3]$ 为旋转后的坐标系，则设 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \mathscr{A}(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3)P$. 设 $\alpha \in F^3$，在坐标系 $[O; e_1, e_2, e_3]$ 下的坐标为 $X = (x_1, x_2, x_3)^T$，则其在新坐标系下的坐标为 $Y = PX$. 以下求矩阵 P.



如图：设 O' 为平面 $\pi: x + y + z = 1$ 与向量 e 的交点，并且设平面与坐标轴交点分别为 A, B, C. 设 $\alpha_1 = e = \frac{1}{3}(1,1,1)$，$\alpha_2 = \overrightarrow{O'B} = \frac{1}{3}(2,-1,-1)$，易知 $\alpha_1 \perp \alpha_2$，在平面 π 上找与向量 α_2 线性无关的向量 $\beta = \overrightarrow{O'C} = \frac{1}{3}(-1,2,-1)$，应用施密特正交化方法

$$\beta' = \beta - \frac{(\alpha_1, \beta)}{|\alpha_1|^2}\alpha_1 - \frac{(\alpha_2, \beta)}{|\alpha_2|^2}\alpha_2 = \frac{1}{2}(0,1,-1),$$

单位化，得

$$\alpha_3 = -\frac{\beta'}{|\beta'|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1).$$

于是有

$$\mathscr{A}(\alpha_1)=\alpha_1\ \mathscr{A}(\alpha_2)=\cos\theta\cdot\alpha_2+\sin\theta\cdot\alpha_3\ \mathscr{A}(\alpha_3)=-\sin\theta\cdot\alpha_2+\cos\theta\cdot\alpha_3$$

即

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)Q\text{，其中 }Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix},$$

又

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(e_1,e_2,e_3)T\text{，其中 }T=\begin{pmatrix}\frac13&\frac23&0\\\frac13&-\frac13&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac13&-\frac13&-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix},$$

得

$$\mathscr{A}(e_1,e_2,e_3)=\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)T^{-1}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)QT^{-1}=(e_1,e_2,e_3)TQT^{-1}.$$

从而，得

$$P=TQT^{-1}=\begin{pmatrix}\frac13&\frac23&0\\\frac13&-\frac13&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac13&-\frac13&-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac13&\frac23&0\\\frac13&-\frac13&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac13&-\frac13&-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}^{-1}.$$

方法（2）

可以设 $A'(x_1',x_2',x_3')$ 为点 $A(0,0,1)$ 旋转变换后的点，则有关系式

$$\begin{cases}|OA'|=|OA|\\ e\cdot\overrightarrow{AA'}=0\\ \cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA'}||\overrightarrow{OA}|}.\end{cases}$$

由三个方程可求解三个未知数（求解细节略）．同理可求解 B,C 变换后的点．

40. 求下列齐次线性方程组的基解系与通解：(P157)

（1）$\begin{cases}x_1-3x_2+x_3-2x_4=0\\-5x_1+x_2-2x_3+3x_4=0\\-x_1-11x_2+2x_3-5x_4=0\\3x_1+5x_2+x_4=0;\end{cases}$

（2）$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4-4x_5=0\\x_1-2x_2+3x_3-4x_4+2x_5=0\\-x_1+3x_2-5x_3+7x_4-4x_5=0\\x_1+2x_2-x_3+4x_4-6x_5=0.\end{cases}$

解：

（1）系数矩阵 $\begin{pmatrix}1&-3&1&-2\\-5&1&-2&3\\-1&-11&2&-5\\3&5&0&1\end{pmatrix}$，进行行初等变换，得 $\begin{pmatrix}1&0&\frac{5}{14}&-\frac12\\0&1&-\frac{3}{14}&\frac12\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则得基础解系

$$X_1=(-\tfrac{5}{14},\tfrac{3}{14},1,0)^T,X_2=(\tfrac12,-\tfrac12,0,1)^T.$$

其通解 $X=t_1X_1+t_2X_2,\forall t_1,t_2\in F$.

（2）系数矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&1&1&-4\\1&-2&3&-4&2\\-1&3&-5&7&-4\\1&2&-1&4&-6\end{pmatrix}$，进行行初等变换，得 $\begin{pmatrix}1&0&0&1&-2\\0&1&0&1&-2\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，等价方程组 $\begin{cases}x_1=-x_4+2x_5\\x_2=-x_4+2x_5\\x_3=x_4\end{cases}$，则得

基础解系

$$X_1=(-1,-1,1,1,0)^T,X_2=(2,2,0,0,1)^T.$$

其通解 $X=t_1X_1+t_2X_2,\forall t_1,t_2\in F$.

43. 判断下列集合关于规定的运算是否构成线性空间：(P157)

（1）V 是所有实数对 (x,y) 的集合，数域 $E=R$．定义

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)\text{，}\ \lambda(x,y)=(x,y)\text{；}$$

（3）V 是所有满足 $f(0)\neq 0$ 的实函数的集合，数域 $F=R$．定义加法为函数的加法，数乘为数与函数的乘法．

解：（1）由于对 $\forall\lambda,\mu\in F$，

$$(\lambda+\mu)(x,y)=(x,y)\neq(2x,2y)=(x,y)+(x,y)=\lambda(x,y)+\mu(x,y)\ \text{（当 } x\neq 0\text{）}$$

与第五条矛盾．故V 不是线性空间．

（3）存在 $f_1,f_2\in V$，使得 $f_1(0)=-f_2(0)$，则 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)\notin V$，即加法在集合$V$ 中不封闭，故不可构成线性空间．

第 12 次作业答案

44.设V 是所有实函数全体在实数域上构成的线性空间，判断V 中下列函数组是否线性相关：(P157)

（1）$1,x,\sin x$；　（2）$1,x,e^x$；　（3）$1,\cos 2x,\cos^2 x$；　（4）$1,x^2,(x-1)^3,(x+1)^3$；（5）$\cos x,\cos 2x,\cdots,\cos(nx)$；

解：

一般的方法：判断函数组 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 是否线性相关.

设存在 $k_1,k_2,\cdots,k_n\in R$，使得 $k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+\cdots+k_nf_n(x)=0$，将两边对 x 分别求 $i_1,\cdots,i_n$（$i_1,\cdots,i_n$ 是互不相等的整数）阶导数，得

$$\begin{cases} k_1f_1^{(i_1)}(x)+k_2f_2^{(i_1)}(x)+\cdots+k_nf_n^{(i_1)}(x)=0\\ k_1f_1^{(i_2)}(x)+k_2f_2^{(i_2)}(x)+\cdots+k_nf_n^{(i_2)}(x)=0\\ \cdots\\ k_1f_1^{(i_n)}(x)+k_2f_2^{(i_n)}(x)+\cdots+k_nf_n^{(i_n)}(x)=0. \end{cases}$$

看成是关于 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 的线性方程组，则其只有零解等价于存在 $x_0\in R$，使得

$$f(x)=\begin{vmatrix} f_1^{(i_1)}(x_0) & f_2^{(i_1)}(x_0) & \cdots & f_n^{(i_1)}(x_0)\\ f_1^{(i_2)}(x_0) & f_2^{(i_2)}(x_0) & \cdots & f_n^{(i_2)}(x_0)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f_1^{(i_n)}(x_0) & f_2^{(i_n)}(x_0) & \cdots & f_n^{(i_n)}(x_0) \end{vmatrix}\neq 0. \qquad (*)$$

此即 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 线性无关.

一般当$i_1=0,i_2=1,\cdots,i_n=n-1$时，称（*）中的行列式为函数 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 的朗斯基行列式.

（1）由于$1,x,\sin x$ 的朗斯基行列式 $f(x)=\begin{vmatrix}1 & x & \sin x\\ 0 & 1 & \cos x\\ 0 & 0 & -\sin x\end{vmatrix}=-\sin x$，存在 $x_0=\frac{\pi}{2}$，使得 $f(x_0)=-1\neq 0$，则知道$1,x,\sin x$ 线性无关.

（2）由于$1,x,e^x$ 的朗斯基行列式 $f(x)=\begin{vmatrix}1 & x & e^x\\ 0 & 1 & e^x\\ 0 & 0 & e^x\end{vmatrix}=e^x$，存在 $x_0=0$，使得 $f(x_0)=1\neq 0$，则知道$1,x,e^x$ 线性无关.

（3）由于$1,\cos 2x,\cos^2 x$ 的朗斯基行列式 $f(x)=\begin{vmatrix}1 & \cos 2x & \cos^2 x\\ 0 & -2\sin 2x & -\sin 2x\\ 0 & -4\cos 2x & -2\cos 2x\end{vmatrix}=2\sin 4x-4\sin 4x\equiv 0$，则知道$1,\cos 2x,\cos^2 x$ 线性相关.

（4）由于$1,x^2,(x-1)^3,(x+1)^3$ 的朗斯基行列式

$$f(x)=\begin{vmatrix}1 & x^2 & (x-1)^3 & (x+1)^3\\ 0 & 2x & 3(x-1)^2 & 3(x+1)^2\\ 0 & 2 & 6(x-1) & 6(x+1)\\ 0 & 0 & 6 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x & -12x & 3(x+1)^2\\ 2 & -12 & 6(x+1)\\ 0 & 0 & 6\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}2x & -12x\\ 2 & -12\end{vmatrix}\equiv 0,$$

则知道$1,x^2,(x-1)^3,(x+1)^3$ 线性相关.

（5）取 $i_1=0,i_2=2,\cdots,i_n=2(n-1)$，则

$$f(x)=\begin{vmatrix}\cos x & \cos 2x & \cdots & \cos nx\\ -\cos x & -2^2\cos 2x & \cdots & -n^2\cos nx\\ \cos x & 2^4\cos 2x & \cdots & n^4\cos nx\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (-1)^{n-1}\cos x & (-1)^{n-1}2^{2(n-1)}\cos x & \cdots & (-1)^{n-1}n^{2(n-1)}\cos x\end{vmatrix}=C\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdots\cdots\cos nx.$$

其中 $C=(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2^2 & \cdots & n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & (2^2)^{n-1} & \cdots & (n^2)^{n-1}\end{vmatrix}\neq 0$，则存在 $x_0=0$，使得 $f(x_0)=C\neq 0$，则知道 $\cos x,\cos 2x,\cdots,\cos(nx)$ 线性无关.

方法（2）

设 $k_0,k_1,\cdots,k_n\in F$，使得

$$k_1\cos x+k_2\cos 2x+\cdots+k_n\cos nx=0,$$

对于任意的 k_i，等式两边同时乘以 $\cos k_i x$ 并在 $[-\pi,\pi]$ 上积分，得

$$0=\int_{-\pi}^{\pi}[k_1\cos x\cdot\cos k_ix+\cdots+k_i\cos k_ix\cdot\cos k_ix+\cdots+k_n\cos nx\cdot\cos k_ix]dx=k_i\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 k_ixdx=\tfrac{1}{\pi}k_i,$$

得 $k_i=0$，即得证 $\cos x,\cos 2x,\cdots,\cos(nx)$ 线性无关.

46. 设 $F^n[x]$ 是次数小于或等于 n 的多项式全体构成的线性空间.（P158)

（1）证明：$S=\{1,x-1,(x-1)^2,\cdots,(x-1)^n\}$ 构成 $F^n[x]$ 的一组基；

（2）求 S 到基 $T=\{1,x,\cdots,x^n\}$ 的过渡矩阵；

（3）求多项式 $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in F^n[x]$ 在基 S 下的坐标.

解：

（1）由于

$$(1,x+1,(x+1)^2,\cdots,(x+1)^n)=(1,x,\cdots,x^n)A,\ \text{其中 } A=\begin{pmatrix}C_0^0 & C_1^0 & C_2^0 & \cdots & C_n^0\\ & C_1^1 & C_2^1 & \cdots & C_n^1\\ & & C_2^2 & \cdots & C_n^2\\ & & & \ddots & \vdots\\ & & & & C_n^n\end{pmatrix},$$

则将上式中 x 取成 $x-1$，得 $(1,x,x^2,\cdots,x^n)=(1,x-1,\cdots,(x-1)^n)A$，即 T 可由 S 线性表示，并且 T 中只有 $n+1$ 个元素，因此构成 $F^n[x]$ 的一组基.

（2）由（1）求解过程知道过渡矩阵为 $A=\begin{pmatrix}C_0^0 & C_1^0 & C_2^0 & \cdots & C_n^0\\ & C_1^1 & C_2^1 & \cdots & C_n^1\\ & & C_2^2 & \cdots & C_n^2\\ & & & \ddots & \vdots\\ & & & & C_n^n\end{pmatrix}$.

（3）由

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=(1,x,x^2,\cdots,x^n)\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=(1,x-1,\cdots,(x-1)^n)\begin{pmatrix}C_0^0 & C_1^0 & C_2^0 & \cdots & C_n^0\\ & C_1^1 & C_2^1 & \cdots & C_n^1\\ & & C_2^2 & \cdots & C_n^2\\ & & & \ddots & \vdots\\ & & & & C_n^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$$

$$=(1,x-1,\cdots,(x-1)^n)\left(\sum_{i=0}^n a_iC_i^0\quad \sum_{i=1}^n a_iC_i^1\quad \cdots\quad \sum_{i=n}^n a_iC_i^n\right)^T.$$

则多项式 $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在基 S 下的坐标为：$\left(\sum_{i=0}^n a_iC_i^0\quad \sum_{i=1}^n a_iC_i^1\quad \cdots\quad \sum_{i=n}^n a_iC_i^n\right)^T$.

47. V 是数域 F 上 n 阶对称方阵全体，定义加法为矩阵的加法，数乘为矩阵的数乘．证明：V 是线性空间，并求 V 的一组基及维数.（P158)

证明：设 $\forall\lambda,\mu\in F$，$A,B\in V$，即 $A^T=A,B^T=B$，则

$$(\lambda A+\mu B)^T=\lambda A^T+\mu B^T=\lambda A+\mu B,$$

即 $\lambda A+\mu B\in V$，所以 V 可以是 n 阶矩阵全体构成空间的子空间，故是线性空间.

设 E_{ij} 为只有 (i,j) 元为 1，其他元素为 0 的 n 阶方阵，令 $A_{ij}=E_{ij}+E_{ji},1\le i\le j\le n$，则显然 $A_{ij}\in V$，且线性无关．$\forall A=(a_{ij})\in V$，则有 $A=\sum\limits_{1\le i\le j\le n}a_{ij}A_{ij}$，即证明了 $A_{ij},1\le i\le j\le n$ 构成了线性空间的一组基．且 $\dim(V)=\dfrac{n(n+1)}{2}$．

48. 给定矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\4&-2&1\end{pmatrix}$，令 V 是与 A 乘法可交换的三阶实方阵的全体．证明：V 在矩阵加法与乘数下构成实数域上的线性空间，并求 V 的一组基与维数．(P158)

解：设任意三阶实方阵 P,Q，及 $\forall a,b\in R$，则

$$(aP+bQ)A=aPA+bQA=aAP+bAQ=A(aP+bQ),$$

即 $aP+bQ\in V$，则证明了 V 构成线性空间．

设任意三阶实方阵 $B=(b_{ij})$，则

$$AB=\begin{pmatrix}b_{31}&b_{32}&b_{33}\\b_{11}&b_{12}&b_{13}\\4b_{11}-2b_{21}+b_{31}&4b_{12}-2b_{22}+b_{32}&4b_{13}-2b_{23}+b_{33}\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}b_{12}+4b_{13}&-2b_{13}&b_{11}+b_{13}\\b_{22}+4b_{23}&-2b_{23}&b_{21}+b_{23}\\b_{32}+4b_{33}&-2b_{33}&b_{31}+b_{33}\end{pmatrix},$$

由 $AB=BA$，得

$$\begin{cases}b_{31}=b_{12}+4b_{13}\\b_{32}=-2b_{13}\\b_{33}=b_{11}+b_{13}\\b_{11}=b_{22}+4b_{23}\\b_{12}=-2b_{23}\\b_{13}=b_{21}+b_{23}\\4b_{11}-2b_{21}+b_{31}=b_{32}+4b_{33}\\4b_{12}-2b_{22}+b_{32}=-2b_{33}\\4b_{13}-2b_{23}+b_{33}=b_{31}+b_{33}\end{cases}$$

，解得 $A=\begin{pmatrix}\frac{b_{32}}{2}+b_{33}&2b_{32}+b_{31}&-\frac{b_{32}}{2}\\\frac{b_{32}}{2}+\frac{b_{31}}{2}&\frac{9}{2}b_{32}+b_{33}+2b_{31}&-b_{32}-\frac{b_{31}}{2}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}$，其中 b_{31},b_{32},b_{33} 是满足 A 的三个自由度，分别取 $(b_{31},b_{32},b_{33})=(4,-2,1)$，$(b_{31},b_{32},b_{33})=(0,1,0)$，$(b_{31},b_{32},b_{33})=(0,0,1)$，得 A，A^{-1} 和单位阵 I．于是知道 V 的一组基 A,A^{-1},I，$\dim(V)=3$．

1. 判断下面所定义的变换，哪些是线性的，哪些不是线性的：(P193)

（1）在 R^2 中，$\mathscr{A}(a,b)=(a+b,a^2)$；

（2）在 R^3 中，$\mathscr{A}(a,b,c)=(a-b,c,a+1)$；

（3）取定 $A,B\in M_n(F)$，对每个 $X\in M_n(F)$，$\mathscr{A}(X)=AX-XB$；

（4）在线性空间 V 中，$\mathscr{A}(X)=\alpha$，其中 α 为 V 中的一个固定的向量．

解：

（1）由于

$$\mathscr{A}(1,1)+\mathscr{A}(1,1)=(2,1)+(2,1)=(4,2)\ne(4,4)=\mathscr{A}\big((1,1)+(1,1)\big)$$

则 $\mathscr{A}$ 是非线性变换的．

（2）由于

$$\mathscr{A}\big((0,0,0)-(0,0,0)\big)=(0,0,1)\ne(0,0,0)=\mathscr{A}(0,0,0)-\mathscr{A}(0,0,0)$$

则 $\mathscr{A}$ 是非线性变换的．

（3）$\forall\lambda,\mu\in F$，$P,Q\in M_n(F)$，有

$$\mathscr{A}(\lambda P+\mu Q)=A(\lambda P+\mu Q)-(\lambda P+\mu Q)B=\lambda AP-\lambda PB+\mu AQ-\mu QB=\lambda\mathscr{A}(P)+\mu\mathscr{A}(Q).$$

即得 $\mathscr{A}$ 是线性变换的．

（4）当 $\alpha=0$ 时，$\mathscr{A}$ 是零变换，故是线性变换．

当 $\alpha\ne0$ 时，$\mathscr{A}(X-X)=\alpha\ne0=\mathscr{A}(X)-\mathscr{A}(X)$，故 $\mathscr{A}$ 是非线性变换的．

第 13 次作业答案

2. 求下列线性变换在所指定的基下的矩阵：(P193)

（1） R^3 中的投影变换 $\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,0)$，在自然基下；

（3）以四个线性无关的函数

$$\alpha_1=e^{ax}\cos bx，\ \alpha_2=e^{ax}\sin bx，\ \alpha_3=xe^{ax}\cos bx，\ \alpha_4=xe^{ax}\sin bx，$$

为基的四维空间中，线性变换为微分变换；

（4）给定 2 阶实方阵 A，求 2 阶实方阵构成的线性空间上的线性变换 $\mathscr{A}(X)=AX-XA$ 在基

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

下的矩阵．

解：（1）由 $\mathscr{A}(e_1)=e_1$，$\mathscr{A}(e_2)=e_2$，$\mathscr{A}(e_3)=0$，得

$$\mathscr{A}(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}.$$

（3）由 $\mathscr{A}(\alpha_1)=(e^{ax}\cos bx)'=e^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)=a\alpha_1-b\alpha_2$，

$$\mathscr{A}(\alpha_2)=(e^{ax}\sin bx)'=e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)=b\alpha_1+a\alpha_2,$$

$$\mathscr{A}(\alpha_3)=(xe^{ax}\cos bx)'=e^{ax}(\cos bx+ax\cos bx-bx\sin bx)=\alpha_1+a\alpha_3-b\alpha_4,$$

$$\mathscr{A}(\alpha_4)=(xe^{ax}\sin bx)'=e^{ax}(\sin bx+ax\sin bx-bx\cos bx)=\alpha_2+b\alpha_3+a\alpha_4,$$

得

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}a&b&1&0\\-b&a&0&1\\0&0&a&b\\0&0&-b&a\end{pmatrix}.$$

（4）由 $\mathscr{A}(e_1)=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-x_{12}\\x_{21}&0\end{pmatrix}=-x_{12}e_2+x_{21}e_3$，

$$\mathscr{A}(e_2)=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_{21}&x_{11}-x_{22}\\0&x_{21}\end{pmatrix}=-x_{21}e_1+(x_{11}-x_{22})e_2+x_{21}e_4$$

$$\mathscr{A}(e_3)=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{12}&0\\x_{22}-x_{11}&-x_{12}\end{pmatrix}=x_{12}e_1+(x_{22}-x_{11})e_3-x_{12}e_4,$$

$$\mathscr{A}(e_4)=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&x_{12}\\-x_{21}&0\end{pmatrix}=x_{12}e_2-x_{21}e_3,$$

得

$$\mathscr{A}(e_1,e_2,e_3,e_4)=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}0&-x_{21}&x_{12}&0\\-x_{12}&x_{11}-x_{22}&0&x_{12}\\x_{21}&0&x_{22}-x_{11}&-x_{21}\\0&x_{21}&-x_{12}&0\end{pmatrix}.$$

3. 在 R^3 中定义线性变换 (P194)

$$\mathscr{A}(x,y,z)=(x+2y,x-3z,2y-z).$$

求 $\mathscr{A}$ 在基 $e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)$ 下的矩阵．

解：由 $\mathscr{A}(e_1)=(1,1,0)=e_1+e_2$，$\mathscr{A}(e_2)=(2,0,2)=2e_1+2e_3$，$\mathscr{A}(e_3)=(0,-3,-1)=-3e_2-e_3$，得

$$\mathscr{A}(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&-3\\0&2&-1\end{pmatrix}.$$

4. 设 R^3 中的线性变换 $\mathscr{A}$ 将 (P194)

$$\alpha_1=(0,0,1)^T,\quad \alpha_2=(0,1,1)^T,\quad \alpha_3=(1,1,1)^T$$

变换到

$$\beta_1=(2,3,5)^T,\quad \beta_2=(1,0,0)^T,\quad \beta_3=(0,1,-1)^T.$$

求 $\mathscr{A}$ 在自然基和 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵.

解：设

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(e_1,e_2,e_3)A,\quad (\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(e_1,e_2,e_3)B,$$

则

$$\mathscr{A}(e_1,e_2,e_3)=\mathscr{A}\left((\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A^{-1}\right)=\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A^{-1}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)A^{-1}=(e_1,e_2,e_3)BA^{-1},$$

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\mathscr{A}\left((e_1,e_2,e_3)A\right)=\mathscr{A}(e_1,e_2,e_3)A=(e_1,e_2,e_3)BA^{-1}A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A^{-1}B,$$

$$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列初等变换}}\begin{pmatrix}I\\BA^{-1}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行初等变换}}\begin{pmatrix}I & A^{-1}B\end{pmatrix}$$

可计算得，

$$BA^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 1 & -3 & 3\\ -1 & -5 & 5\end{pmatrix},\quad A^{-1}B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

5. 设 V 为 n 维线性空间，$\mathscr{A}:V\to V$ 为线性变换．若存在 $\alpha\in V$，使得 $\mathscr{A}^{n-1}(\alpha)\neq 0$，但是 $\mathscr{A}^{n}(\alpha)=0$．证明：$\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵为 (P194)

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & \ddots & 0\\ & & & 0 & 1\\ & & & & 0\end{pmatrix}.$$

证明：$\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1=\mathscr{A}^{n-1}(\alpha),\alpha_2=\mathscr{A}^{n-2}(\alpha),\cdots,\alpha_{n-1}=\mathscr{A}(\alpha),\alpha_n=\alpha$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}O_{(n-1)\times 1} & I_{n-1}\\ 0 & O_{1\times(n-1)}\end{pmatrix}$．以下证明此结论．

若假设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关，则存在不全为零 $k_1,\cdots,k_n\in F$，使得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0,$$

设 k_t 为 $k_1,\cdots,k_n$ 中最后一个非零数，则用 $\mathscr{A}$ 作用上式 $t-1$ 次，则 $k_t\mathscr{A}^{n-1}(\alpha)=0$，得到 $\mathscr{A}^{n-1}(\alpha)=0$ 与题设矛盾．

故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关．从而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 可作为线性空间 V 的一组基，且易得

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}O_{(n-1)\times 1} & I_{n-1}\\ 0 & O_{1\times(n-1)}\end{pmatrix}.$$

12. 设方阵 A 与 B 相似，证明： (P195)

（1）对每个正整数 k，A^k 相似于 B^k；

证明：设 $A=P^{-1}BP$，则

$$A^k=(P^{-1}BP)^k=P^{-1}BPP^{-1}BP\cdots P^{-1}BP=P^{-1}B^kP,$$

即 A^k 相似于 B^k．

13. 设 A 是可逆方阵．证明： (P195)

（1）A 的特征值一定不为 0；

（2）若 λ（$\lambda\neq 0$）是 A 的一个特征值，则 λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值，且对应的特征向量相同．

证明：（1）若 0 是矩阵 A 的一个特征值，设属于矩阵 A 的特征值 0 的特征向量为 X，则

$$AX=0\cdot X=O\Rightarrow X=A^{-1}O=O,$$

矛盾于特征向量 X 不为零向量．故 A 的特征值一定不为 0．

（2）设 $AX=\lambda X$，则 $\lambda^{-1}X=A^{-1}X$，则 λ^{-1} 为 A^{-1} 的一个特征值，且 X 也为 A^{-1} 属于特征值 λ^{-1} 的特征向量．

14.（1）若 $A^2=I$，证明：A 的特征值只能是 ± 1；　(P195)

（2）设 n 阶实方阵 A 满足 $A^T=-A$，A 的特征值为零或纯虚数.

证明：（1）设 A 特征值为 λ，相应特征向量 X，则

$$X=A^2X=\lambda AX=\lambda^2X\Rightarrow(\lambda^2-1)X=0\Rightarrow\lambda=\pm1.$$

（2）设 $AX=\lambda X$，则

$$\bar{X}^TAX\left(=-\bar{X}^TA^TX\right)=\lambda\bar{X}^TX,$$

又

$$\bar{X}^TA^T=\bar{\lambda}\bar{X}^T\Rightarrow\bar{X}^TA^TX=\bar{\lambda}\bar{X}^TX\Rightarrow(\lambda+\bar{\lambda})\bar{X}^TX=\bar{X}^TX,$$

因为

$$X\neq0,\ \Rightarrow\bar{X}^TX\neq0\Rightarrow(\lambda+\bar{\lambda})=0,$$

即 λ 为零或纯虚数.

15. 设 λ_1,λ_2 是方阵 A 的两个不同的特征值，x_1,x_2 是分别属于 λ_1,λ_2 的特征向量. 证明：x_1+x_2 不是 A 的特征向量. (P195)

证明：反证，假设 x_1+x_2 是 A 的特征向量，对应的特征值为 λ，则

$$A(x_1+x_2)=\lambda(x_1+x_2),$$

又

$$A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,$$

得

$$\lambda(x_1+x_2)=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2\Rightarrow(\lambda-\lambda_1)x_1+(\lambda-\lambda_2)x_2=0,$$

因为不同特征值对应的特征向量线性无关，即 x_1 与 x_2 线性无关，得 $\lambda-\lambda_1=\lambda-\lambda_2=0$，矛盾.

16. 求下列矩阵的全部特征值和特征向量：(P195)

（2）$\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix},\alpha\in(0,\pi)$；　　（3）$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

解：矩阵特征多项式：

$$p(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\lambda-\cos\alpha\end{vmatrix}=\lambda^2-2\cos\alpha\cdot\lambda+1,$$

得 $\lambda_1=\cos\alpha+i\sin\alpha$，$\lambda_2=\cos\alpha-i\sin\alpha$.

当 $\lambda=\cos\alpha+i\sin\alpha$ 时，解方程

$$\begin{pmatrix}i\sin\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&i\sin\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ 得\ X_1=\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda=\cos\alpha-i\sin\alpha$ 时，解方程

$$\begin{pmatrix}-i\sin\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&-i\sin\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ 得\ X_2=\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}.$$

（3）矩阵特征多项式：

$$p(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\0&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1),\ 得\ \lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=-1.$$

当 $\lambda=1$ 时，解方程

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ 得\ X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda=-1$ 时，解方程

$$\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-2&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ 得\ X_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

第 14 次作业答案

19. 判断下列矩阵 A 是否可对角化？若可以，试求变换矩阵 T，使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵.（P195）

解：（1）矩阵特征多项式：

$$p(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda+2 & 0 & 0\\ -3 & \lambda-1 & -1\\ -2 & -2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda+2)\text{，得 }\lambda_1=2,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2.$$

由于矩阵 A 有三个互不相同的特征值，故可对角化.

当 $\lambda=2$ 时，$(2I-A)X=0\Rightarrow X_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$；当 $\lambda=-1$ 时，$(-I-A)X=0\Rightarrow X_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$；

当 $\lambda=-2$ 时，$(-2I-A)X=0\Rightarrow X_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

于是，令 $T=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$，使得

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & -1 & \\ & & -2\end{pmatrix}.$$

（3）矩阵特征多项式：

$$p(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 0 & -1\\ -4 & \lambda+2 & 8\\ 4 & 0 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2\text{，得 }\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1.$$

对于 $\lambda_2=\lambda_3=1$，由于 $rank(\lambda_2 I-A)=2$，即属于特征值 1 的特征子空间维数小于其代数重数，故矩阵 A 不可对角化.

20. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ x & 1 & y\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，求 x 和 y 应满足的条件.（P196）

解：矩阵 A 的特征多项式：

$$p(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -1\\ -x & \lambda-1 & -y\\ -1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)\text{，得 }\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1.$$

只需判断对于特征值 1 的几何维数是否等于其代数重数即可.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=1$，由于 $I-A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -x & 0 & -y\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，经过初等行变换，得 $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -y-x\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 A 可对角化 $\Leftrightarrow$ $rank(I-A)=1$，

即 $x+y=0$.

21. 设矩阵 A 和 B 相似，其中 （P196）

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 2 & x & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\text{ ，}\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}.$$

（1）求 x 和 y 的值；

（2）求可逆矩阵 T，使得 $T^{-1}AT=B$.

解：由于

$$f_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda+2 & 0 & 0\\ -2 & \lambda-x & -2\\ -3 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)[\lambda^2-(x+1)\lambda+x-2],$$

$$f_B(\lambda)=\det(\lambda I-B)=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-y),$$

因为相似矩阵的特征多项式相等，则 $x=0, y=-2$.

（2）当 $\lambda=-1$ 时，$(-I-A)X=0\Rightarrow X_1=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$；当 $\lambda=2$ 时，$(-I-A)X=0\Rightarrow X_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda=-2$ 时，$(-2I-A)X=0\Rightarrow X_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，则令 $T=\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$，使得 $T^{-1}AT=B$.

24. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2=I$，证明：A 相似于 $\begin{pmatrix}I_r & \\ & -I_{n-r}\end{pmatrix}$，其中 $0\le r\le n$．(P196)

证明：$A^2=I\Rightarrow (A-I)(A+I)=0\Rightarrow rank(A-I)+rank(A+I)\le n$，

又

$$n=rank((A+I)-(A-I))\le rank(A+I)+rank(A-I),$$

则

$$rank(A+I)+rank(A-I)=n.$$

设 $r=rank(I+A)$，则当 $r=0$，$A=-I$，结论得证；当 $r=n$，$A=I$，结论得证；下证 $0<r<n$.

由于 $rank(A+I)<n$ 和 $rank(A-I)<n$，得知 A 有特征值 1 和 -1.

令 V_1 表示矩阵 A 以 1 为特征值对应的特征子空间，V_{-1} 表示矩阵 A 以 -1 为特征值对应的特征子空间，由于

$$\dim(V_1)+\dim(V_{-1})=(n-rank(I-A))+(n-rank(I+A))=n,$$

则可以找到 n 线性无关的特征向量，适当排列这些特征向量的位置得到的可逆矩阵记为 T，可使得

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}I_r & \\ & -I_{n-r}\end{pmatrix}，其中\ r=\dim(V_1).$$

26. 求下列矩阵的若尔当标准形：(P196)

（1）$\begin{pmatrix}2&-2&3\\1&1&1\\1&3&-1\end{pmatrix}$；　　（3）$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

解:（1）$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2&2&-3\\-1&\lambda-1&-1\\-1&-3&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)$，则 A 可对角化，则其若尔当标准形为 $\begin{pmatrix}1&&\\&3&\\&&-2\end{pmatrix}$.

（3）$\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^4$，

则可能的若尔当标准形为：$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&1&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&&\\&&1&1\\&&&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&1&\\&&1&1\\&&&1\end{pmatrix}$.

由于 $rank(I-A)=3$，故得 A 的若尔当标准形为 $\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&1&\\&&1&1\\&&&1\end{pmatrix}$.

27. 设 $A=\begin{pmatrix}2&-2&3\\10&-4&5\\5&-4&6\end{pmatrix}$，求方阵 T，使 $T^{-1}AT$ 为若尔当标准形．(P196)

解：$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2&2&-3\\-10&\lambda+4&-5\\-5&4&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$.

对于特征值为1可能的若尔当标准形为：$\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1\\&1\end{pmatrix}$，由于 $rank(I-A)=2$，得 $\lambda=1$对应的若尔当标准形为$\begin{pmatrix}1&1\\&1\end{pmatrix}$.

设 $A(T_1,T_2,T_3)=(T_1,T_2,T_3)\begin{pmatrix}2&&\\&1&1\\&&1\end{pmatrix}$，即

$$\begin{cases}(2I-A)T_1=0,\\(I-A)T_2=0,\\(I-A)T_3=-T_2.\end{cases}\Rightarrow\ T_1=\begin{pmatrix}4\\15\\10\end{pmatrix},T_2=\begin{pmatrix}2\\10\\6\end{pmatrix},T_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

于是，令 $T=(T_1,T_2,T_3)$ 即为所求．

29. 设 $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$，求解常微分方程组　(P197)

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x-2y+3z,\\\dfrac{dy}{dt}=10x-4y+5z,\\\dfrac{dz}{dt}=5x-4y+6z.\end{cases}$$

解：设 $A=\begin{pmatrix}2&-2&3\\10&-4&5\\5&-4&6\end{pmatrix}$，则由第27题结论，$T=\begin{pmatrix}4&2&1\\15&10&1\\10&6&1\end{pmatrix}$，使得 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}2&&\\&1&1\\&&1\end{pmatrix}$.

于是，设 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\\\tilde{z}\end{pmatrix}$，则原微分方程组变为

$$\begin{pmatrix}\frac{d\tilde{x}}{dt}\\\frac{d\tilde{y}}{dt}\\\frac{d\tilde{z}}{dt}\end{pmatrix}=T^{-1}\begin{pmatrix}\frac{dx}{dt}\\\frac{dy}{dt}\\\frac{dz}{dt}\end{pmatrix}=T^{-1}AT\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\\\tilde{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&&\\&1&1\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\\\tilde{z}\end{pmatrix},$$

即

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}=2\tilde{x}\Rightarrow\tilde{x}=c_1e^{2t},\quad\frac{d\tilde{y}}{dt}=\tilde{y}\Rightarrow\tilde{y}=c_2e^t,\quad\frac{d\tilde{z}}{dt}=\tilde{y}+\tilde{z}=\tilde{z}+c_2e^t\Rightarrow\tilde{z}=(t+\tilde{c}_3)c_2e^t=(c_2t+c_3)e^t.$$

于是

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\\\tilde{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2&1\\15&10&1\\10&6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1e^{2t}\\c_2e^t\\(c_2t+c_3)e^t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4c_1e^{2t}+(2c_2+c_2t+c_3)e^t\\15c_1e^{2t}+(10c_2+c_2t+c_3)e^t\\10c_1e^{2t}+(6c_2+c_2t+c_3)e^t\end{pmatrix}.$$

第 15 次作业答案

1. 设 x,y,z 是欧氏空间中的元素，证明以下不等式：(P225)

（1）$|x-y|\geq|x|-|y|$；　　（2）$|x-y|+|y-z|\geq|x-z|$.

证明：由三角不等式：$|\alpha_1+\alpha_2|\leq|\alpha_1|+|\alpha_2|$.

（1）取 $\alpha_1=x-y,\alpha_2=y$，则 $\alpha_1+\alpha_2=x$，得 $|x-y|\geq|x|-|y|$.

（2）取 $\alpha_1=x-y,\alpha_2=y-z$，则 $\alpha_1+\alpha_2=x-z$，得 $|x-y|+|y-z|\geq|x-z|$.

3. 一直 $\alpha_1=(1,2,-1,1),\alpha_2=(2,3,1,-1),\alpha_3=(-1,-1,-2,2)$，(P225)

（1）求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的长度及彼此间的夹角.

（2）求与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都正交的向量.

解：（1）$|\alpha_1|=\sqrt{(\alpha_1,\alpha_1)}=\sqrt{1+4+1+1}=\sqrt{7}$，$|\alpha_2|=\sqrt{(\alpha_2,\alpha_2)}=\sqrt{4+9+1+1}=\sqrt{15}$，

$|\alpha_3|=\sqrt{(\alpha_3,\alpha_3)}=\sqrt{1+1+4+4}=\sqrt{10}$.

$$<\alpha_1,\alpha_2>=\arccos\frac{(\alpha_1,\alpha_2)}{|\alpha_1||\alpha_2|}=\arccos\frac{2+6-1-1}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{15}}=\arccos\frac{2\sqrt{105}}{35},$$

$$<\alpha_2,\alpha_3>=\arccos\frac{(\alpha_2,\alpha_3)}{|\alpha_2||\alpha_3|}=\arccos\frac{-2-3-2-2}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{10}}=\arccos\frac{-3\sqrt{6}}{20},$$

$$<\alpha_3,\alpha_1>=\arccos\frac{(\alpha_3,\alpha_1)}{|\alpha_3||\alpha_1|}=\arccos\frac{-1-2+2+2}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{7}}=\arccos\frac{\sqrt{70}}{70}.$$

（2）设与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都正交的向量为 $\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)$，得

$$\begin{cases}(\alpha,\alpha_1)=\ \ x_1+2x_2-x_3+x_4=0\\(\alpha,\alpha_2)=2x_1+3x_2+x_3-x_4=0\\(\alpha,\alpha_3)=-x_1-x_2-2x_3+2x_4=0.\end{cases}$$

解得其基础解系为 $X_1=(-5,3,1,0),X_2=(5,-3,0,1)$，于是

$$X=t_1X_1+t_2X_2,\quad \forall t_1,t_2\in F$$

与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都正交.

4. 用 Schmidt 正交化方法构造表准正交向量组：(P225)

（2）$(1,1,1,2),(1,1,-5,3),(3,2,8,-7)$.

解：设 $\alpha_1=(1,1,1,2),\alpha_2=(1,1,-5,3),\alpha_3=(3,2,8,-7)$.

令 $e_1=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=\frac{1}{\sqrt{7}}(1,1,1,2)$，

$\beta_2=\alpha_2-(\alpha_2,e_1)e_1=(1,1,-5,3)-\frac{3}{7}(1,1,1,2)=\frac{1}{7}(4,4,-38,15)$，$e_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{1}{9\sqrt{21}}(4,4,-38,15)$.

$\beta_3=\alpha_3-(\alpha_3,e_1)e_1-(\alpha_3,e_2)e_2=(3,2,8,-7)-\frac{-1}{7}(1,1,1,2)-\frac{389}{1701}(4,4,-38,15)=\frac{1}{1701}(6902,5201,-931,-5586)$，$e_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=\cdots$.

则得 e_1,e_2,e_3 为正交向量组.

6. 验证下列各组向量是正交的，并添加向量改造为标准正交基：(P225)

（1）$(2,1,2),(1,2,-2)$；　　（2）$(1,1,1,2),(1,2,3,-3)$.

解：（1）设 $\alpha_1=(2,1,2),\alpha_2=(1,2,-2)$，由于 $(\alpha_1,\alpha_2)=2+2-4=0$，正交，显然 $\alpha_3=(0,0,1)$ 得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1-\frac{(\alpha_3,\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)}\alpha_2=(0,0,1)-\tfrac{2}{9}(2,1,2)-\tfrac{-2}{9}(1,2,-2)=\tfrac{1}{9}(-2,2,1),$$

令 $e_1=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=\frac{1}{3}(2,1,2),e_2=\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}=\frac{1}{3}(1,2,-2),e_2=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=\frac{1}{3}(-2,2,1)$，得 e_1,e_2,e_3 为标准正交基.

（2）设 $\alpha_1=(1,1,1,2),\alpha_2=(1,2,3,-3)$，$(\alpha_1,\alpha_2)=1+2+3-6=0$，则 α_1,α_2 正交．
显然添加 $\alpha_3=(0,0,1,0),\alpha_4=(0,0,0,1)$ 后，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关．

$$e_1=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=\tfrac{1}{\sqrt{7}}(1,1,1,2)\text{，}\quad e_2=\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}=\tfrac{1}{\sqrt{23}}(1,2,3,-3)\text{，}$$

$\beta_3=\alpha_3-(\alpha_3,e_1)e_1-(\alpha_3,e_2)e_2=(0,0,1,0)-\frac{1}{7}(1,1,1,2)-\frac{3}{23}(1,2,3,-3)=\frac{1}{161}(-44,-65,75,17)$，$e_3=\dfrac{\beta_3}{|\beta_3|}=\frac{1}{5\sqrt{483}}(-44,-65,75,17)$，

$\beta_4=\alpha_4-(\alpha_4,e_1)e_1-(\alpha_4,e_2)e_2-(\alpha_4,e_3)e_3=\frac{1}{12075}(-1127,805,0,161)$，$e_4=\dfrac{\beta_4}{|\beta_4|}=\cdots$．得 e_1,e_2,e_3,e_4 为标准正交基．

11. 若 α 是一个单位向量，证明：$Q=I-2\alpha\alpha^T$ 是一个正交矩阵．当 $\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$ 时，具体求出 Q．(P226)

解：$QQ^T=(I-2\alpha\alpha^T)(I-2\alpha\alpha^T)=I-2\alpha\alpha^T-2\alpha\alpha^T+4\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=I-4\alpha\alpha^T+4\alpha\alpha^T=I$．
即 Q 为正交矩阵．

当 $\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$，则 $Q=I-2\alpha\alpha^T=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$．

15. 设　(P226)

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix},$$

求正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵．由此求 A^k，k 是正整数．

解：矩阵 A 的特征多项式：

$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&0\\2&\lambda-2&2\\0&2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda-2)(\lambda+1)$，得 A 的特征值 $\lambda_1=5,\lambda_2=2,\lambda_3=-1$．

由 $\lambda_1=5$，$(\lambda_1I-A)X=0\Rightarrow X_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$，

由 $\lambda_2=2$，$(\lambda_2I-A)X=0\Rightarrow X_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$，

由 $\lambda_3=-1$，$(\lambda_3I-A)X=0\Rightarrow X_3=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$．

易验证 X_1,X_2,X_3 已经两两正交，以下单位化，即

$$e_1=\frac{X_1}{|X_1|}=\tfrac{1}{3}(1,-2,2)^T\text{，}\quad e_2=\frac{X_2}{|X_2|}=\tfrac{1}{3}(-2,1,2)^T\text{，}\quad e_3=\frac{X_3}{|X_3|}=\tfrac{1}{3}(2,2,1)^T\text{，}$$

从而

$$A^k=\left(P\begin{pmatrix}5&&\\&2&\\&&-1\end{pmatrix}P^{-1}\right)^k=P\begin{pmatrix}5^k&&\\&2^k&\\&&(-1)^k\end{pmatrix}P^{-1}.$$

16. 略．(P226)

17. 设 $e_1,e_2,\cdots e_n$ 是 R^n 的标准正交基，$x_1,x_2,\cdots,x_k$ 是 R^n 中任意 k 个向量，试证：$x_1,x_2,\cdots,x_k$ 两两正交的充要条件是

$$\sum_{s=1}^{n}(x_i,e_s)(x_j,e_s)=0\text{，}\quad i,j=1,2,\cdots,k\text{，}\quad i\neq j\,.$$

证明：设 $(x_1,\cdots,x_k)=(e_1,\cdots,e_n)A_{n\times k}$，则 $x_i=\sum_{t=1}^{n}a_{ti}e_t$，则 $(x_i,e_s)=a_{si}$.

$(\Rightarrow)$ 由 $x_1,\cdots,x_k$ 两两正交，得

$$0=(x_i,x_j)=\left(\sum_{t=1}^{n}a_{ti}e_t,\sum_{t=1}^{n}a_{tj}e_t\right)=\sum_{s=1}^{n}a_{si}a_{sj}=\sum_{s=1}^{n}(x_i,e_s)(x_j,e_s)\text{，}\quad \forall i\neq j\,.$$

$(\Leftarrow)$ 易知以上推导过程是可逆的，故结论得证.

18. 求正交矩阵 T，使 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵：(P226)

（2）$A=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$；　　（3）$A=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&-2&2\\4&2&1\end{pmatrix}$.

解：（2）矩阵 A 的特征多项式：

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)\text{．得 }A\text{ 的特征值 }\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-2\,.$$

由 $\lambda=1$，$(\lambda I-A)X=0\Rightarrow X_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$,

由 $\lambda=-2$，$(\lambda I-A)X=0\Rightarrow X_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Schmidt 正交化单位化：

$e_1=\dfrac{X_1}{|X_1|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T$，$\beta_2=X_2-(X_2,e_1)e_1=\frac{1}{2}(-1,-1,2)^T$，$e_2=\dfrac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)^T$.

由于 X_3 与 X_1,X_2 正交，只需将其单位化，即 $e_3=\dfrac{X_3}{|X_3|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$.

令 $T=(e_1,e_2,e_3)$ 为正交矩阵，且有 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}$.

（3）矩阵 A 的特征多项式：

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-4\\-2&\lambda+2&-2\\-4&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-6)(\lambda+3)^2\text{，得 }A\text{ 的特征值 }\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=-3\,.$$

由 $\lambda=6$，$(\lambda I-A)X=0\Rightarrow X_2=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

由 $\lambda=-3$，$(\lambda I-A)X=0\Rightarrow X_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},X_3=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$,

Schmidt 正交化单位化：

由于 X_1 与 X_2,X_3 正交，只需将其单独单位化，将 X_2,X_3 进行 Schmidt 正交化单位化.

$e_1=\dfrac{X_1}{|X_1|}=\frac{1}{3}(2,1,2)^T$,

$$e_2=\frac{X_2}{|X_2|}=\tfrac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0)^T,$$

$$\beta_3=X_3-(X_3,e_2)e_2=\tfrac{1}{5}(-4,-2,5)^T,\quad e_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=\tfrac{1}{3\sqrt{5}}(-4,-2,5)^T.$$

令 $T=(e_1,e_2,e_3)$ 为正交矩阵，且有 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}6&&\\&-3&\\&&-3\end{pmatrix}$.

1. 将下列二次型表示成矩阵形式： (P248)

（1） $Q(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2+x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2+3x_1x_3+4x_2x_3$；

（4） $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n-2}(x_i-x_{i+2})^2$.

解：（1）

$$\begin{aligned}Q(x_1,x_2,x_3)&=-x_1^2+x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2+3x_1x_3+4x_2x_3\\&=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}-1&2&\frac{3}{2}\\2&1&2\\\frac{3}{2}&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

（2）当 $n\geq 4$ 时，

$$\begin{aligned}Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=\sum_{i=1}^{n-2}(x_i-x_{i+2})^2=\sum_{i=1}^{n-2}x_i^{\ 2}+\sum_{i=1}^{n-2}x_{i+2}^{\ \ 2}+\sum_{i=1}^{n-2}-2x_ix_{i+2}=x_1^2+x_2^2+\sum_{i=3}^{n-2}2x_i^{\ 2}+x_{n-1}^2+x_n^2+\sum_{i=1}^{n-2}-2x_ix_{i+2}\\&=(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n)\begin{pmatrix}1&0&-1&&&&\\0&1&0&\ddots&&&\\-1&0&2&\ddots&\ddots&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&2&0&-1\\&&&\ddots&0&1&0\\&&&&-1&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

当 $n=3$ 时， $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_3^2-2x_1x_3=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

2. 写出下列对称矩阵对应的二次型：(P248)

（1） $A=\begin{pmatrix}1&3&5\\3&2&6\\5&6&4\end{pmatrix}$；　　（2） $A=\begin{pmatrix}a&b&0\\b&a&b\\0&b&a\end{pmatrix}$.

解：（1） $Q(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&3&5\\3&2&6\\5&6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+6x_1x_2+10x_1x_3+12x_2x_3$.

（2） $Q(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a&b&0\\b&a&b\\0&b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=ax_1^2+ax_2^2+ax_3^2+2bx_1x_2+2bx_2x_3$.

3. 求正交变换化下列实二次型为标准形：(P249)

（1） $Q=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$.

解：（1）此二次型矩阵为： $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}$.

矩阵 A 的特征多项式：

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda-4 & 4\\ -2 & 4 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-9)$$，矩阵特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=9$.

$\lambda=0,(\lambda I-A)X=0\Rightarrow X_1=(2,1,0)^T,X_2=(-2,0,1)^T$.

$\lambda=9,(\lambda I-A)X=0\Rightarrow X_3=(1,-2,2)^T$.

Schmidt 正交化单位化 X_1,X_2：

$e_1=\frac{X_1}{|X_1|}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0)^T$.

$\beta_2=X_2-(X_2,e_1)e_1=\frac{1}{5}(-2,4,5)^T$， $e_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{1}{3\sqrt{5}}(-2,4,5)^T$.

由于实对称矩阵属于不同特征值的特征向量正交，则 X_3 与 e_1,e_2 正交，则只需将 X_3 单位化即可：

$e_3=\frac{X_3}{|X_3|}=\frac{1}{3}(1,-2,2)^T$.

令 $T=(e_1,e_2,e_3)$，则 $T^TAT=T^{-1}AT=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 9\end{pmatrix}$，即

$$Q\Big|_{X=TY}=X^TAX=Y^TT^TATY=9y_3^2 .$$

4. 用配方法将下列二次型化为标准形，并求相应的可逆线性变换：(P249)

（3）$Q=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1$.

解：设 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2,\\ x_2=y_1-y_2,\\ x_3=y_3+y_4,\\ x_4=y_3-y_4.\end{cases}$

得

$$\hat{Q}=y_1^2-y_2^2+y_1y_3+y_1y_4-y_2y_3-y_2y_4+y_3^2-y_4^2+y_1y_3-y_1y_4+y_2y_3-y_2y_4=(y_1+y_3)^2-(y_2+y_4)^2.$$

再设

$\begin{cases}z_1=y_1+y_3,\\ z_2=y_2+y_4,\\ z_3=y_3,\\ z_4=y_4.\end{cases}$，即 $\begin{cases}y_1=z_1-z_3,\\ y_2=z_2-z_4,\\ y_3=z_3,\\ y_4=z_4.\end{cases}$，

得

$$\tilde{Q}(z_1,z_2,z_3,z_4)=Q(x_1,x_2,x_3x_4)\Big|_{X=PQZ}=z_1^2-z_2^2，其中 P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix},Q=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

得到变换矩阵 $T=PQ$，使得 $Q\Big|_{X=TZ}=z_1^2-z_2^2$.

5. 用初等变换法将下列二次型化成标准形，并求相应的可逆线性变换：(P249)

（3）$Q=X^T\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}X$.

解：$\begin{pmatrix} A \\ \hdashline I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\cdot c_2\to c_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\cdot r_2\to r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}\cdot c_1\to c_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hdashline 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}\cdot r_1\to r_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hdashline 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{-2\cdot c_2\to c_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ \hdashline 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2\cdot r_2\to r_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \hdashline 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D \\ \hdashline P \end{pmatrix}$.

则 $P^TAP=D$.

7. 设 A 是 n 阶实对称矩阵，且 $A^2=A$，求 A 的相合标准形．(P249)

解：由 $A^2=A\Rightarrow A(I-A)=0\Rightarrow rank(A)+rank(I-A)\le n$． 又 $n=rank[A+(I-A)]\le rank(A)+rank(I-A)$，则 $rank(A)+rank(I-A)=n$.

设 $r=rank(A)$.

当 $r=0$ 时，得 $A=0$ ，即 A 相合标准形为零方阵；

当 $r=n$ 时，得 $A=I$ ，即 A 相合标准形为单位阵；

当 $0<r<n$ ，则知道方程组 $AX=0$ 与 $(I-A)X=0$ 都有非零解，即 $\lambda=0$ 与 $\lambda=1$ 都是矩阵 A 的特征值，设 V_0 ，V_1 为特征值为 0 和 1 的特征子空间，则 $\dim(V_0)=n-r,\dim(V_1)=r$ ，于是设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 分别是特征子空间 V_0 与 V_1 上的一组标准正交基，又由于 A 是实对称矩阵，则知道 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 是相互正交的，则令 $T=(\beta_1,\cdots,\beta_r,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r})$，则 T 正交，且有 $T^TAT=T^{-1}AT=\begin{pmatrix} I_r & \\ & O_{n-r} \end{pmatrix}$，即 A 相合标准形为单位阵 $\begin{pmatrix} I_r & \\ & O_{n-r} \end{pmatrix}$.

12. 问参数 t 满足什么条件时，下列二次型正定？(P250)

（1）$Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_1x_3$；

解：此二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{t}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{t}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则由 $2>0$ ，$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1>0$ ，$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \frac{t}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{t}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix}=1-\dfrac{t^2}{4}$． 则

$$A>0\Leftrightarrow 1-\frac{t^2}{4}>0\Leftrightarrow -2<t<2 .$$

17. 证明：若 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶正定矩阵，则 $\det(A)\le a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$． (P250)

证明：用数学归纳法．

对于 $n=1$ 情况，结论显然成立；假设结论对小于 n（$n\ge 2$）的情况成立，即若 $B\in M_n(F),B>0$，有 $\det(B)\le b_{11}b_{22}\cdots b_{n-1,n-1}$.

对于 n 阶正定矩阵 A ，有分块 $A=\begin{pmatrix} A_{n-1} & C \\ C^T & a_{nn} \end{pmatrix}$，则 A_{n-1} 是 $n-1$ 阶正定方阵，则存在可逆 $n-1$ 阶方阵 P_{n-1} ，使得

$$P_{n-1}^TA_{n-1}P_{n-1}=I_{n-1}\text{，且 }\det((P_{n-1}^T)^{-1})\det(P_{n-1}^{-1})=\det(A_{n-1})\le a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1} .$$

令

$$R=\begin{pmatrix} P_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}C \\ O & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$R^TAR=\begin{pmatrix} I_{n-1} & O \\ O & a_{nn}-C^TA_{n-1}^{-1}C \end{pmatrix},$$

两边取行列式得：

$$\det(A)=\det((R^T)^{-1})\cdot\det(R^{-1})\cdot(a_{nn}-C^{-1}A_{n-1}^{-1}C)=\det((P_{n-1}^T)^{-1})\cdot\det(P_{n-1}^{-1})\cdot(a_{nn}-C^{-1}A_{n-1}^{-1}C)$$
$$\le a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}\cdot(a_{nn}-C^{-1}A_{n-1}^{-1}C).$$

又 $A_{n-1}>0$，则 $C^{-1}A_{n-1}^{-1}C\ge 0$，则 $\det(A)\le a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}\cdot(a_{nn}-C^{-1}A_{n-1}^{-1}C)\le a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.
即结论对 n 也成立，则由数学归纳法得证结论成立.

21. 设实向量 $\alpha_1,\cdots\alpha_m$ 为 n 维列向量，定义 $(\alpha_i,\alpha_j)=\alpha_i^T\alpha_j$ ，证明矩阵 (P250)

$$\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1)&(\alpha_1,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_1,\alpha_m)\\(\alpha_2,\alpha_1)&(\alpha_2,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_2,\alpha_m)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\(\alpha_m,\alpha_1)&(\alpha_m,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_m,\alpha_m)\end{pmatrix}$$

为正定矩阵的充分必要条件是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

证明：设 $e_1,\cdots,e_n$ 为 F^n 中一组标准正交基.

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=(e_1,\cdots,e_n)A\text{，}\qquad(*)$$

即 $\alpha_i=\sum_{k=1}^n a_{ki}e_k$.

则

$$(\alpha_i,\alpha_j)=\left(\sum_{k=1}^n a_{ki}e_k,\sum_{k=1}^n a_{kj}e_k\right)=\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj}\Rightarrow\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1)&(\alpha_1,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_1,\alpha_m)\\(\alpha_2,\alpha_1)&(\alpha_2,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_2,\alpha_m)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\(\alpha_m,\alpha_1)&(\alpha_m,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_m,\alpha_m)\end{pmatrix}=\left(\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj}\right)_{n\times n}=A^TA\,.$$

$(\Rightarrow)$ 若 $(\alpha_i,\alpha_j)_{n\times n}$ 正定，则 A^TA 为可逆方阵 $\Rightarrow$ $rank(A)=m$ ，且 $m\le n$ ，即由 $(*)$ 式知道 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

$(\Leftarrow)$ 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，则 $m\le n$. 反证，若 $(\alpha_i,\alpha_j)_{n\times n}$ 非正定，即 A^TA 非正定，则存在 $X_0\ne 0$ 使得 $X_0{}^TA^TAX_0\le 0$ ，设 $Y=AX_0=(y_1,\cdots,y_n)^T$ ，则 $X_0{}^TA^TAX_0=y_1^2+\cdots+y_n^2\le 0$ ，即 $y_1=\cdots=y_n=0$ ，得 $AX=0$ 有非零解 X_0 ，从而 $rank(A)<m$ ，由 $(*)$ 式知道这与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关矛盾.