中　国　科　学　技　术　大　学
2013–2014学年第一学期期终考试试题

考试科目：线性代数与解析几何　考试时间：2014.　　　得分：____________

学生所在系：_______________　姓名：_______________　学号：_____________

一、 填空题【每题4分，共20分】

1. 设三维欧氏空间$\mathbb{R}^3$（标准内积）中向量$(1,\lambda,\mu)$与向量$(1,2,3)$和$(1,-2,3)$都正交，则$\lambda=$__________，$\mu=$__________。

2. 设V为2阶复方阵构成的复线性空间，$M=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$，定义$V$上的线性变换$\mathscr{A}$为：$\mathscr{A}(X)=MX,\forall X\in V$，则$\mathscr{A}$的特征值及其重数为________________________。

3. 三维实线性空间$\mathbb{R}^3$中从基$e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,1,1)$到基$f_1=(1,1,1)$, $f_2=(1,1,0)$, $f_3=(0,1,2)$的过渡矩阵是____________________。

4. 若二次型$x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$正惯性指数是2，则$a$的取值范围是__________。

5. 设$\mathscr{A},\mathscr{B}$均为n维欧氏空间V中的线性变换，且对V中任意两个向量α,β，都有$(\mathscr{A}(\alpha),\beta)=(\alpha,\mathscr{B}(\beta))$；如果$\mathscr{A}$在$V$的标准正交基$e_1,e_2,\cdots,e_n$下的矩阵为$A$，则$\mathscr{B}$在此标准正交基$e_1,e_2,\cdots,e_n$下的矩阵为__________。

二、 判断题【判断下列命题是否正确，并简要说明理由。每题6分，共24分】

1. $\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{F}^3|x_1+x_2+x_3=0,\quad x_1-x_2+x_3=1\}$为线性空间$\mathbb{F}^3$的子空间。

2. 设$A=(a_{ij})$为n阶正定的实对称矩阵，则$a_{ii}>0,i=1,2,\cdots,n$。

3. 对任意常数λ,μ，向量组$\alpha_1+\lambda\alpha_3,\alpha_2+\mu\alpha_3$都线性无关的充分必要条件是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关。

4. 若φ是从实线性空间V到$\mathbb{R}^n$的一对一的线性映射(即映射$\varphi:V\to\mathbb{R}^n$满足：对$\forall\alpha,\beta\in V,\lambda\in\mathbb{R}$，有$\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta),\varphi(\lambda\alpha)=\lambda\varphi(\alpha)$；且当$\alpha\neq\beta$时，有$\varphi(\alpha)\neq\varphi(\beta)$)；则$(\alpha,\beta)=(\varphi(\alpha))^T\cdot(\varphi(\beta))$是$V$上的内积。

三、【15分】设$V=\{(a_2x^2+a_1x+a_0)e^x|a_2,a_1,a_0\in\mathbb{R}\}$，按函数通常的数乘与加法构成的实线性空间。定义$V$上的线性变换$\mathscr{A}$为：对任意$p(x)\in V$, $\mathscr{A}(p(x))=\frac{d}{dx}p(x)$。 1. 求$V$的一组基使$\mathscr{A}$在此基下的矩阵为$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$；

2. 求$(x^2-4x+2)e^x$在此基下的坐标。

四、 【15分】设e_1，e_2，e_3为$\mathbb{R}^3$的标准正交基，且$\alpha_1=\frac{1}{3}(2e_1+2e_2-e_3)$，$\alpha_2=\frac{1}{3}(2e_1-e_2+2e_3)$，$\alpha_3=\frac{1}{3}(e_1-2e_2-2e_3)$，$\mathscr{A}$为把$e_1,e_2,e_3$变到$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性变换。

1. 求$\mathscr{A}$在基e_1,e_2,e_3下的矩阵A；　2. 证明$\mathscr{A}$是第一类正交变换。

五、 【15分】用正交变换和平移将下面空间直角坐标系中的二次曲面方程化为标准形，并指出曲面类型：$x^2+y^2+z^2+4xy+4xz+4yz-6x+6y-6z-30=0$。

六、【11分】已知A为元素全是1的n阶矩阵，B为最后一行是$1, 2, \cdots, n$，其余元素全是0的n阶矩阵。证明A与B相似，并求其相似标准形。