装订线 答题时不要超过此线

中 国 科 学 技 术 大 学

2009—2010 学年第 1 学期考试试卷

考试科目: 线性代数 得分: ________

学生所在系: ________ 姓名: ________ 学号 ________

一、填空题（每题 5 分，共 40 分）

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$ ________.

（2）向量 $\alpha_1 = (1,2,-1,4), \alpha_2 = (9,100,10,4), \alpha_3 = (-2,-4,2,-8)$ 生成的 R^4 的子空间的维数等于________。

（3）设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - A - 2I = 0$，其中 I 是单位阵，则 $A^{-1} =$ ________.

（4）设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，则 A^{2010} 的全体特征值为________。

（5）设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ 是正定矩阵，则 a 的取值范围是________。

（6）每个元素的绝对值都相等的实二阶正交阵一共有________个。

（7）设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似，则 $a =$ ________， $b =$ ________.

（8）设 R^3 是赋予通常内积的三维欧氏空间, (a,b,c) 是长度为 1 的向量, W 是由方程 $ax + by + cz = 0$ 给定的平面. 设线性变换 $\mathscr{A}$ 把 R^3 中的向量映为它在平面 W 上的投影向量, 那么 $\mathscr{A}$ 在标准正交基 $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ 之下的矩阵是________.

二、解答题（共 60 分）

1（10 分）问 λ 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1\\2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2\\-2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1\end{cases}.$$

有唯一解、无解或有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。

2（10 分）设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是数域 F 上的 n 阶方阵 A 的不同特征值，

$X_1^{(i)},\cdots,X_{m_i}^{(i)}$ 是 A 的属于 λ_i 的线性无关的特征向量，$i=1,\cdots,s$ 。

证明：向量组 $X_1^{(1)},\cdots,X_{m_1}^{(1)},X_1^{(2)},\cdots,X_{m_2}^{(2)},\cdots,X_1^{(s)},\cdots,X_{m_s}^{(s)}$ 线性无关。

3（10 分）设$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$为欧氏空间V中的向量。证明：$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性无关的充分必要条件是矩阵

$$\begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_m) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_m) \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ (\alpha_m,\alpha_1) & (\alpha_m,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_m,\alpha_m) \end{pmatrix}$$

为正定阵，其中$(\cdot,\cdot)$是V中的内积。

4（15 分）用正交变换化二次型

$Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$为标准形，并指出曲面

$Q(x_1,x_2,x_3)=1$ 的类型。

5.（15 分）设$V=\{X\in R^{2\times 2}\mid \operatorname{tr}X=0\}$。

（1）证明V是实数域上的线性空间，并求V的维数。

（2）设线性变换$\mathscr{A}:V\to V$，$\mathscr{A}(X)=2X+X^T$。求V的一组基使$\mathscr{A}$在这组基下的矩阵为对角阵。