第 8 章 格与布尔代数

8.1 格的定义与性质

定义 8.1. 在部分序集$\langle A, \preceq \rangle$中，如果对任意$a, b \in A$，$\{a, b\}$都有一个最大下界和最小上界，则称$\langle A, \preceq \rangle$是**格**。

通常$\{a, b\}$的最大下界称为a与b的积，记作$a * b$；$\{a, b\}$的最小上界称为a与b的和，记作$a \oplus b$。

A的任意子集，如果有最大下界和最小上界，则它们是唯一的。在定义8.1中可以看出$*$与$\oplus$是A上的二元运算。格$\langle A, \preceq \rangle$有时也表示为$\langle A, *, \oplus \rangle$。

不是所有的偏序集都是格。例如，图8.1中的每个偏序集都是格。

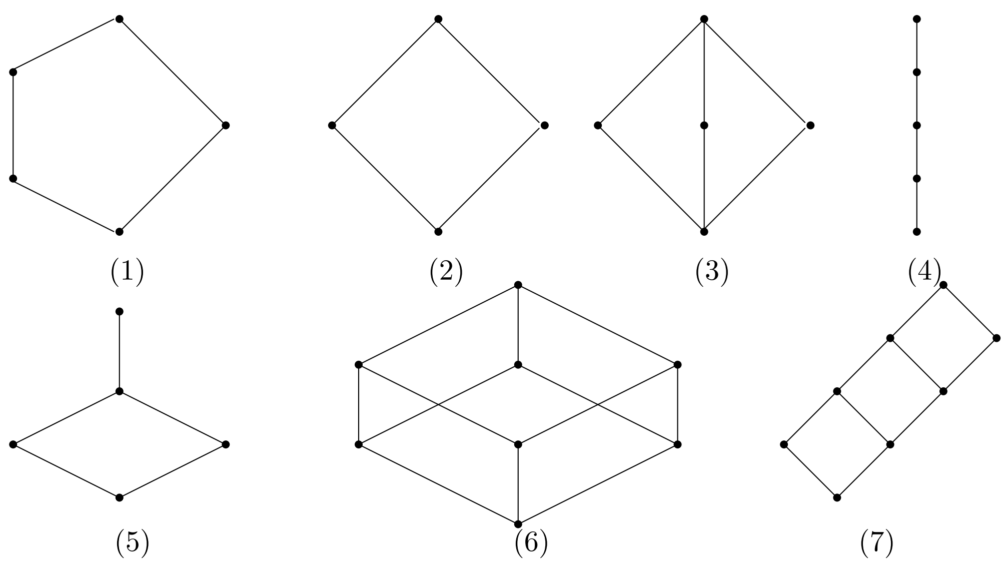


图 8.1: 格的示例

图8.2列出了五个偏序集，其中(1)中$\{x, y\}$没有上界和下界。(2)中$\{x, y\}$有最小上界，无下界。(3)中$\{x, y\}$无上界，有最大下界。(4)中$\{x, y\}$无上界，有下界但无最大下界。(5)中$\{x, y\}$有最小上界，有下界但无最大下界。所以从(1)到(5)都不是格。

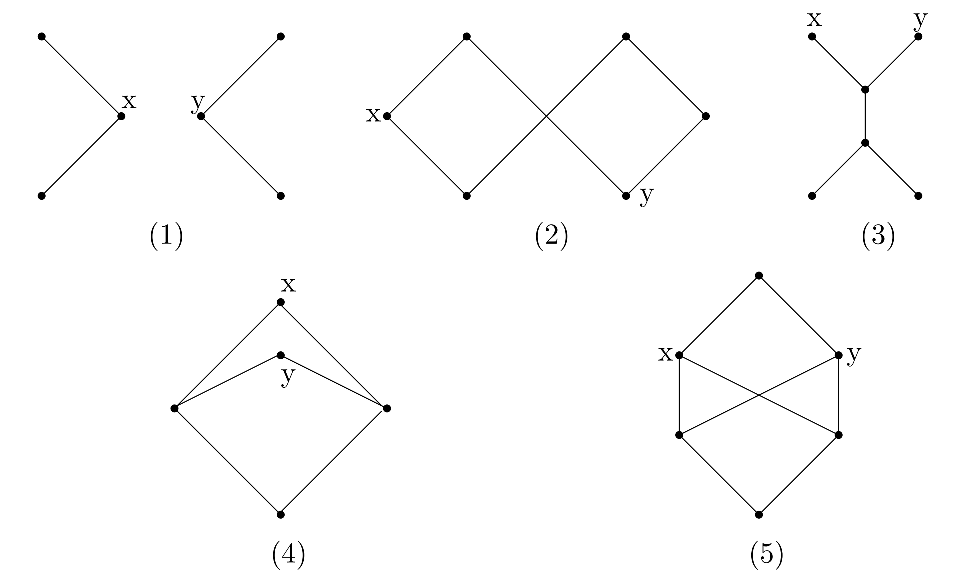


图 8.2: 不是格的偏序集示例

例 8.1. 设A是集合。$\langle \mathscr{P}(A), \subseteq \rangle$是格。格中的运算$*$和$\oplus$分别是$\cap$和$\cup$，原因如下。任取$A_1, A_2 \in \mathscr{P}(A)$。因为$A_1 \cap A_2 \subseteq A_1$，$A_1 \cap A_2 \subseteq A_2$，故$A_1 \cap A_2$是$\{A_1, A_2\}$的下界。设$C$是$\{A_1, A_2\}$ 的任意一个下界，即$C \subseteq A_1$，$C \subseteq A_2$，故$C \subseteq A_1 \cap A_2$。所以$A_1 \cap A_2$是$\{A_1, A_2\}$的最大下界，即$A_1 * A_2 = A_1 \cap A_2$。

因为$A_1 \subseteq A_1 \cup A_2$，$A_2 \subseteq A_1 \cup A_2$，故$A_1 \cup A_2$是$\{A_1, A_2\}$的上界。假设$B$是$\{A_1, A_2\}$的任意一个上界，即$A_1 \subseteq B$，$A_2 \subseteq B$，故$A_1 \cup A_2 \subseteq B$。所以$A_1 \cup A_2$是$\{A_1, A_2\}$的最小上界，即$A_1 \oplus A_2 = A_1 \cup A_2$。

特别地，当$|A| = 2$时，$\langle \mathscr{P}(A), \subseteq \rangle$的*Hasse*图是图*8.1(2)*；当$|A| = 3$时，$\langle \mathscr{P}(A), \subseteq \rangle$的*Hasse*图是图*8.1(6)*。

例 8.2. $\mathbb{Z}$是整数集合。$\langle \mathbb{Z}, | \rangle$是格。格中的运算$*$和$\oplus$分别是求两个整数的最大公约数和最小公倍数运算，原因如下。任取$a, b \in \mathbb{Z}$，a与b 的最大公约数(a, b)满足$(a, b)|a$, $(a, b)|b$，故(a, b)是$\{a, b\}$的下界。若c是$\{a, b\}$的一个下界，即$c|a$，$c|b$，故$c|(a, b)$。所以(a, b)是$\{a, b\}$的最大下界，即$a * b = (a, b)$。

a与b的最小公倍数$[a, b]$满足$a|[a, b]$, $b|[a, b]$，故$[a, b]$是$\{a, b\}$的上界。若c

是$\{a,b\}$的一个上界，即$a|c$，$b|c$，故$[a,b]|c$。所以$[a,b]$ 是$\{a,b\}$的最小上界，即$a\oplus b=[a,b]$。

特别地，图*8.1(2)*是格$\langle\{1,2,3,6\},|\rangle$的$Hasse$图；图*8.1(6)*是格$\langle\{1,2,3,5,6,10,15,30\},|\rangle$的$Hasse$ 图；图*8.1(7)*是格$\langle\{1,2,3,4,6,8,12,24\},|\rangle$的$Hasse$图。

例 8.3. 设G是群，$L(G)=\{H|H\text{是}G\text{的子群}\}$，易见$\langle L(G),\subseteq\rangle$是偏序集。任取$A,B\in L(G)$，$A$与$B$均是$G$的子群，故$A\cap B$ 也是G的子群。与例*8.1*类似，$A\cap B$是$\{A,B\}$的最大下界，即$A*B=A\cap B$。

由于A与B都是G的子群，显然$A=\langle A\rangle\subseteq\langle A\cup B\rangle=\langle A,B\rangle$，$B=\langle B\rangle\subseteq\langle A\cup B\rangle=\langle A,B\rangle$。$\langle A,B\rangle$是由$A\cup B$生成的群，$\langle A,B\rangle\subseteq G$，所以$\langle A,B\rangle$是$G$的子群，即$\langle A,B\rangle\in L(G)$。从而$\langle A,B\rangle$是$\{A,B\}$的上界。假设$C$是$\{A,B\}$的任一上界，即$C$ 是G的子群，且$A\subseteq C$，$B\subseteq C$，那么，$A\cup B\subseteq C$。而$\langle A,B\rangle$是包含$A\cup B$的最小的群，因此$\langle A,B\rangle\subseteq C$。所以，$\langle A,B\rangle$是$\{A,B\}$的最小上界，即$A\oplus B=\langle A,B\rangle$。

综上可知$\langle L(G),\subseteq\rangle$是格，被称为子群格。

例 8.4. 设G是群，$N(G)=\{H|H\lhd G\}$，易见$\langle N(G),\subseteq\rangle$是偏序集。任取$A,B\in N(G)$，$A$与$B$均是$G$的正规子群，故$A\cap B$也是$G$ 的正规子群。与例*8.1*类似，$A\cap B$是$\{A,B\}$的最大下界，即$A*B=A\cap B$。

由于A与B都是G的正规子群，不难证明AB也是G的正规子群，并且$\langle A,B\rangle=AB$。与例*8.3*类似，$\langle A,B\rangle$是$\{A,B\}$ 的最小上界，即$A\oplus B=AB$。

综上可知$\langle N(G),\subseteq\rangle$是格，被称为正规子群格。

下面研究格的性质。

定理 8.1. 设$\langle A,\preceq\rangle$是格，集合A中的任意元素a,b,c满足：

(1) 幂等律：$a*a=a$，$a\oplus a=a$；

(2) 交换律：$a*b=b*a$，$a\oplus b=b\oplus a$；

(3) 结合律：$a*(b*c)=(a*b)*c$，$a\oplus(b\oplus c)=(a\oplus b)\oplus c$；

(4) 吸收律：$a*(a\oplus b)=a$，$a\oplus(a*b)=a$。

证明： 这里只证明(1)和(3)，(2)和(4)的证明方法类似，留作习题。

(1) $\langle A, \preceq \rangle$是格，$\preceq$是$A$上的偏序关系。由$\preceq$的自反性知，对任意$a \in A$均有$a \preceq a$，所以$a$是$\{a,a\}$的下界。设$x$是$\{a,a\}$ 的任一下界，即$x \preceq a$，所以a是$\{a,a\}$的最大下界，所以$a * a = a$。同理可证$a \oplus a = a$。

(3) 令$d = a * (b * c)$，$d' = (a * b) * c$。所以d是$\{a, b * c\}$的最大下界，故$d \preceq a$，$d \preceq b * c$。后者说明d是$\{b,c\}$的下界，故$d \preceq b$，$d \preceq c$。由$d \preceq a$和$d \preceq b$ 知，$d \preceq a * b$。再由$d \preceq a * b$和$d \preceq c$知，$d \preceq (a * b) * c = d'$。同理可证$d' \preceq d$。由偏序关系的反对称性可得$d = d'$，即$a*(b*c) = (a*b)*c$。

同理可证$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$。证毕。

定理 8.2. 设$\langle A, \preceq \rangle$是格。对于集合$A$中的任意元素$a, b$，以下三个命题是等价的：

(1) $a \preceq b$;

(2) $a * b = a$;

(3) $a \oplus b = b$。

证明： (1) $\Rightarrow$ (2) 已知$a \preceq b$，又由$\preceq$的自反性知$a \preceq a$，所以a是$\{a,b\}$的下界。而$a * b$是$\{a,b\}$的最大下界，所以$a \preceq a * b$。另一方面，由$a * b$ 的定义知$a * b \preceq a$。由偏序关系$\preceq$的反对称性知$a * b = a$。

(2) $\Rightarrow$ (3) 已知$a * b = a$。由定理8.1知，$b = b \oplus (b * a) = b \oplus (a * b) = b \oplus a = a \oplus b$，即$a \oplus b = b$。

(3) $\Rightarrow$ (1) 已知$a \oplus b = b$。由$a \oplus b$的定义知，b是$\{a,b\}$的最小上界，所以$a \preceq b$。

以上证明了三个命题的等价性。证毕。

定理 8.3. 设$\langle A, \preceq \rangle$是格。对于集合$A$中的任意元素$a, b, c$，如果$b \preceq c$，则$a * b \preceq a * c$，$a \oplus b \preceq a \oplus c$。这个性质称为保序性。

证明： 由定理8.2知$b \preceq c$等价于$b * c = b$。另外，格中$*$运算满足幂等律、结合律和交换律，故有

$$(a * b) * (a * c) = (a * a) * (b * c) = a * (b * c) = a * b.$$

由定理8.2知，$a * b \preceq a * c$。

同理可证$a \oplus b \preceq a \oplus c$。证毕。

定理 8.4. 设$\langle A, \preceq \rangle$是格。集合$A$中的任意元素$a, b, c$满足下面的分配不等式：

$$a \oplus (b * c) \preceq (a \oplus b) * (a \oplus c),$$
$$a * (b \oplus c) \succeq (a * b) \oplus (a * c).$$

证明： 由$\oplus$的定义知$a \preceq a \oplus b$，$a \preceq a \oplus c$。再由$*$的定义可得$a \preceq (a \oplus b) * (a \oplus c)$。又因为

$$b * c \preceq b \preceq a \oplus b,$$
$$b * c \preceq c \preceq a \oplus c,$$

和$*$的定义可得，$b * c \preceq (a \oplus b) * (a \oplus c)$。这说明$(a \oplus b) * (a \oplus c)$是$\{a, b * c\}$的上界，而$a \oplus (b * c)$是$\{a, b * c\}$的最小上界，因此

$$a \oplus (b * c) \preceq (a \oplus b) * (a \oplus c).$$

同理可证$a * (b \oplus c) \succeq (a * b) \oplus (a * c)$。证毕。

定理 8.5. 设$\langle A, \preceq \rangle$是格。对于集合$A$中的任意元素$a, b, c$，

$$a \preceq b \Leftrightarrow a \oplus (b * c) \preceq b * (a \oplus c).$$

证明： 已知$a \preceq b$。在定理8.4的第一个分配不等式$a \oplus (b * c) \preceq (a \oplus b) * (a \oplus c)$中代入与$a \preceq b$等价的$a \oplus b = b$，得到$a \oplus (b * c) \preceq b * (a \oplus c)$。

反之，已知$a \oplus (b * c) \preceq b * (a \oplus c)$，由

$$a \preceq a \oplus (b * c),$$
$$b * (a \oplus c) \preceq b,$$

以及偏序关系$\preceq$的传递性知$a \preceq b$。证毕。

定理 8.6. 设$\langle A, \preceq \rangle$是格。集合$A$的任意有限子集$S$均有最大下界和最小上界。

证明： 对A的有限子集S中的元素个数作归纳证明。

(1) 当$|S| = 2$时，因为$\langle A, \preceq \rangle$是格，所以任意二元子集$\{a, b\}$均有最大下界和最小上界，命题成立。

(2) 假设$|S|=n-1$时命题成立。当$|S|=n$时，不妨假设$S=\{a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n\}$。令$S'=\{a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}\}$，$|S'|=n-1$。由归纳假设，$S'$有最小上界$b'$。因为$\langle A,\preceq\rangle$是格，$\{b',a_n\}$有最小上界$b$，即$b'\preceq b$，$a_n\preceq b$。而$a_i\preceq b'$，$i=1,2,\cdots,n-1$，所以$b$是$S$的上界。若$c$也是$S$的上界，$a_i\preceq c$，$1\leq i\leq n$，所以$c$也是$S'$的上界；而$b'$是$S'$的最小上界，故$b'\preceq c$。又$a_n\preceq c$，$b$是$\{b',a_n\}$的最小上界，故$b\preceq c$，即$b$是$S$的最小上界。

同理可证S有最大下界。证毕。

定理8.6的证明实际上给出了一种求集合A的有限子集最大下界和最小上界的方法。这种证明叫做构造性证明。

设$\langle A,\preceq\rangle$是偏序集。在集合A上定一个新的关系$\preceq_1$，对于$a,b\in A$，

$$a\preceq_1 b\Leftrightarrow b\preceq a.$$

显然，$\langle A,\preceq_1\rangle$也是偏序集。$\langle A,\preceq_1\rangle$的Hasse图恰好是把$\langle A,\preceq\rangle$的Hasse图上下颠倒过来。$A$的二元子集$\{a,b\}$在$\langle A,\preceq_1\rangle$中的最大下界和最小上界分别是它在$\langle A,\preceq\rangle$中的最小上界和最大下界。如果$\langle A,\preceq\rangle$是格，那么$\langle A,\preceq_1\rangle$也是格。前者的二元运算分别记为$*$和$\oplus$，后者的二元运算分别记为$*'$和$\oplus'$。在$\langle A,\preceq\rangle$中的命题

$$a\preceq b\Leftrightarrow a\oplus b=b,$$

在$\langle A,\preceq_1\rangle$中表示成

$$a\preceq_1 b\Leftrightarrow a\oplus' b=b.$$

把它翻译成$\langle A,\preceq\rangle$中的语言，则是

$$a\succeq b\Leftrightarrow a*b=b.$$

从这个例子，可以看出如下的对偶原理：一个在所有格中都成立的命题，将其中的$\succeq,\preceq,*,\oplus$分别换成$\preceq,\succeq,\oplus,*$，则得到该命题的对偶命题，对偶命题在所有格中也都成立。例如，分配不等式$a\oplus(b*c)\preceq(a\oplus b)*(a\oplus c)$的对偶命题是分配不等式$a*(b\oplus c)\succeq(a*b)\oplus(a*c)$，两者同时成立。

8.2 几种特殊的格

8.2.1 完全格和有界格

定义 8.2. 如果在格$\langle A, \preceq\rangle$中，对于集合$A$的任意子集都有最大下界和最小上界，则称该格是**完全格**。

显然，当A是有限集合时，定理8.6保证了格$\langle A, \preceq\rangle$时完全格。

定义 8.3. 在格$\langle A, \preceq\rangle$中，若存在最大元和最小元，分别记为1和0，即$A$中的任意元素$a$都满足$0 \leq a \leq 1$，则称该格是**有界格**，记为$\langle A, \preceq, 0, 1\rangle$。

显然，完全格必是有界格。

在有界格$\langle A, \preceq, 0, 1\rangle$中，对于$A$的任意元素$a$，

$$a \oplus 0 = a, \qquad a * 0 = 0,$$
$$a \oplus 1 = 1, \qquad a * 1 = a.$$

在有界格中，可以引进元素补元的概念。

定义 8.4. 在有界格$\langle A, \preceq, 0, 1\rangle$中，对于$A$中的元素$a, b$，如果$a * b = 0$，$a \oplus b = 1$，则称$a$是$b$的**补元** *(*$b$*也是*$a$*的补元)*。

一般地，在有界格中，一个元素可能没有补元，也可能有多个补元。例如图8.3中，左图里的a_1, a_2, a_3都没有补元；右图里的a_1, a_2, a_3互为补元，a_1有两个补元a_2, a_3。

在有界格中，最大元1是最小元0的唯一补元，最小元0是最大元1的唯一补元。这是因为1是有界格$\langle A, \preceq, 0, 1\rangle$的最大元，对于$A$中的任意元素$a$，$a \oplus 1 = 1$，$a * 1 = a$。特别地，取$a = 0$，$0 \oplus 1 = 1$，$0 * 1 = 0$，所以0与1互为补元。又若$b \in A$也是0的补元，即$0 \oplus b = 1$；而0是最小元，故有$0 \preceq b$，$0 \oplus b = b$。因此$b = 1$，所以1是0的唯一补元。

8.2.2 有补格

定义 8.5. 在有界格$\langle A, \preceq, 0, 1\rangle$中，如果$A$中每个元素都至少有一个补元，则称该格是**有补格**。

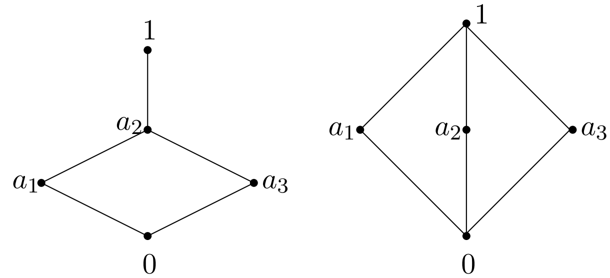


图 8.3: 有界格示例

例 8.5. 令$L = \{0, 1\}$。在集合L^3上定义关系$\preceq_3$，对任意$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in L$，

$$(a_1, a_2, a_3) \preceq_3 (b_1, b_2, b_3) \Leftrightarrow a_1 \preceq b_1, a_2 \preceq b_2, a_3 \preceq b_3.$$

$\langle L^3, \preceq_3 \rangle$是有序数组格，其最小元和最大元分别为$(0, 0, 0)$和$(1, 1, 1)$。$L^3$中元素$(a_1, a_2, a_3)$的补元为$(b_1, b_2, b_3)$，其中

$$b_i = \begin{cases} 1 & a_i = 0, \\ 0 & a_i = 1, \end{cases} \quad 1 \leq i \leq 3.$$

因此，$\langle L^3, \preceq_3 \rangle$是有补格，它的*Hasse*图如图*8.4*所示。

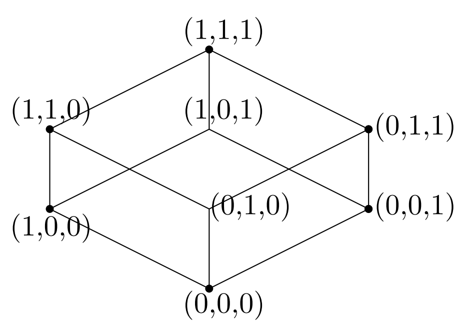


图 8.4: 有序数组格$\langle L^3, \preceq_3 \rangle$

例 8.6. 设A是集合，$\langle \mathscr{P}(A), \subseteq \rangle$是有界格，其最小元和最大元分别是$\emptyset$和$A$，$\mathscr{P}(A)$的任意元素$B$的补元是$A - B$。所以$\langle \mathscr{P}(A), \subseteq \rangle$是有补格。

8.2.3 分配格

定义 8.6. 在格$\langle A, \preceq \rangle$中，如果$A$中任意元素$a, b, c$有

$$a * (b \oplus c) = (a * b) \oplus (a * c),$$
$$a \oplus (b * c) = (a \oplus b) * (a \oplus c),$$

则称$\langle A, \preceq \rangle$是**分配格**。

例 8.7. 设A是集合，$\langle \mathscr{P}(A), \subseteq \rangle$的二元运算$*$和$\oplus$分别是集合的交$\cap$和并$\cup$运算。集合的交和并运算满足分配律，故$\langle \mathscr{P}(A), \subseteq \rangle$是分配格。

例 8.8. $\mathbb{Z}^+$是正整数集合，$\langle \mathbb{Z}^+, | \rangle$的二元运算$*$和$\oplus$分别是求最大公因子和最小公倍数运算，它们满足分配律，故$\langle \mathbb{Z}^+, | \rangle$是分配格。

例 8.9. 图*8.5*中，左图是有补格，但不是分配格。这是因为

$$a_1 * (a_2 \oplus a_3) = a_1 * 1 = a_1,$$
$$(a_1 * a_2) \oplus (a_1 * a_3) = 0 \oplus 0 = 0,$$

不满足分配律等式$a_1 * (a_2 \oplus a_3) = (a_1 * a_2) \oplus (a_1 * a_3)$。

图*8.5*的右图是有界分配格，但不是有补格，因为a_1没有补元。

所以，有补格不一定是分配格，分配格也不一定是有补格。

定理 8.7. 任意线性序集都是分配格。

证明： 设$\langle A, \preceq \rangle$是线性序集，$A$中的任意两个元素$a, b$，或者$a \preceq b$，或者$b \preceq a$。故

$$a * b = \begin{cases} a & \text{如果} a \preceq b, \\ b & \text{如果} b \preceq a; \end{cases} \quad a \oplus b = \begin{cases} b & \text{如果} a \preceq b, \\ a & \text{如果} b \preceq a. \end{cases}$$

因此，$\langle A, \preceq \rangle$是格。

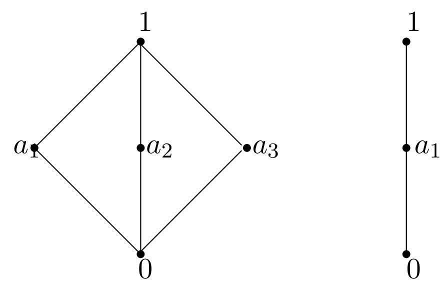


图 8.5: 有补格与分配格示例

对于A的任意元素a,b,c，它们之间的关系可能有以下两种情况:

(1) $a \succeq b$且$a \succeq c$。即a是$\{b,c\}$的上界，所以$b \oplus c \preceq a$。于是，$a*(b \oplus c) = b \oplus c$。又由$a \succeq b$和$a \succeq c$知，$a*b=b$，$a*c=c$，所以$(a*b)\oplus(a*c) = b\oplus c$。因此，$a*(b\oplus c) = (a*b)\oplus(a*c)$。

(2) $a \preceq b$或$a \preceq c$。即a是$\{b,c\}$的下界，所以$a \preceq b*c \preceq b\oplus c$。于是，$a*(b\oplus c) = a$。又由$a \preceq b$和$a \preceq c$知，$a*b=a$，$a*c=a$，所以$(a*b)\oplus(a*c)=a$。因此，$a*(b\oplus c)=(a*b)\oplus(a*c)$。

同理可证$a\oplus(b*c)=(a\oplus b)*(a\oplus c)$。证毕。

定理 8.8. 设$\langle A, \preceq\rangle$是分配格。对于$A$的任意元素$a,b,c$，如果$a*c=b*c$，$a\oplus c=b\oplus c$，则$a=b$。

证明: $\langle A, \preceq\rangle$是分配格。根据$*$和$\oplus$运算的吸收律，分配律和交换律，有

$$\begin{aligned} a &= a*(a\oplus c) = a*(b\oplus c) = (a*b)\oplus(a*c) \\ &= (a*b)\oplus(b*c) = b*(a\oplus c) = b*(b\oplus c) = b. \end{aligned}$$

所以$a=b$。证毕。

推论 8.1. 在有界分配格$\langle A, \preceq, 0, 1\rangle$中，如果$A$的元素$a$有补元，则它的补元是唯一的。

证明: 假设a'和a''都是元素a的补元，则

$$a\oplus a' = 1, \qquad a*a' = 0,$$
$$a\oplus a'' = 1, \qquad a*a'' = 0.$$

所以，$a \oplus a' = a \oplus a''$，$a * a' = a * a''$。由定理8.8知，$a' = a''$，即$a$的补元是唯一的。证毕。

定理 8.9. **（摩根律）** 设$\langle A, \preceq \rangle$是有界分配格，若集合$A$中的元素$a, b$的补元分别为$a', b'$，则

$$(a * b)' = a' \oplus b',$$
$$(a \oplus b)' = a' * b'.$$

证明： 因为

$$(a * b) \oplus (a' \oplus b') = ((a * b) \oplus a') \oplus b' = (a' \oplus b) \oplus b' = 1,$$
$$(a * b) * (a' \oplus b') = a * (b * (a' \oplus b') = a * (b * a') = 0.$$

所以$a' \oplus b'$是$a * b$的补元，再由推论8.1知$a * b$的补元是唯一的，故$(a * b)' = a' \oplus b'$。同理可证，$(a \oplus b)' = a' * b'$。证毕。

定义 8.7. 有补分配格称为**布尔格**。

8.2.4 模格

定义 8.8. 在格$\langle A, \preceq \rangle$中，对于$A$的任意元素$a, b, c$，如果$a \preceq b$均使$a \oplus (b * c) = b * (a \oplus c)$，则称$\langle A, \preceq \rangle$是**模格**。

特别地，在分配格$\langle A, \preceq \rangle$中，若$a \preceq b$，则$a \oplus b = b$，故有

$$a \oplus (b * c) = (a \oplus b) * (a \oplus c) = b * (a \oplus c).$$

所以每个分配格都是模格。

定理 8.10. $\langle A, \preceq \rangle$是模格的充要条件是对于$A$的任意元素$a, b, c$，如果$a \preceq b$且$a * c = b * c$，$a \oplus c = b \oplus c$，则必有$a = b$。

证明： 已知$\langle A, \preceq \rangle$是模格，对于$A$的任意元素$a, b, c$，如果$a \preceq b$且$a * c = b * c$，$a \oplus c = b \oplus c$，那么必有

$$a = a \oplus (a * c) = a \oplus (b * c) = b * (a \oplus c) = b * (b \oplus c) = b.$$

反之，令$x = a \oplus (b * c)$，$y = b * (a \oplus c)$。因为$a \preceq b$，由定理8.5知，$x \preceq y$。下面证明$x \oplus c = y \oplus c$，$x * c = y * c$。

$$x \oplus c = (a \oplus (b * c)) \oplus c = a \oplus ((b * c) \oplus c) = a \oplus c,$$
$$y \oplus c = (b * (a \oplus c)) \oplus c.$$

由于$a \preceq b$和$a \preceq a \oplus c$，所以$a \preceq b * (a \oplus c) \preceq a \oplus c$，从而有

$$a \oplus c \preceq (b * (a \oplus c)) \oplus c \preceq (a \oplus c) \oplus c,$$

即

$$a \oplus c \preceq y \oplus c \preceq a \oplus c.$$

由偏序关系$\preceq$的反对称性知，$y \oplus c = a \oplus c$，因此$x \oplus c = y \oplus c$。

我们已经证明了在格中，当$a \preceq b$时，

$$(a \oplus (b * c)) \oplus c = (b * (a \oplus c)) \oplus c.$$

它的对偶命题是：当$a \succeq b$时，

$$(a * (b \oplus c)) * c = (b \oplus (a * c)) * c.$$

把后者的a与b互换位置，即得，当$b \succeq a$时，

$$(b * (a \oplus c)) * c = (a \oplus (b * c)) * c.$$

这就是说，当$a \preceq b$，$x * c = y * c$。

现在有了$x \preceq y$，$x \oplus c = y \oplus c$，$x * c = y * c$，由已知条件知$x = y$。也就是说，当$a \preceq b$时，$a \oplus (b * c) = b * (a \oplus c)$，所以$\langle A, \preceq \rangle$ 是模格。证毕。

8.3 格——代数系统

集合以及集合上的一个或多个运算所组成的系统叫做代数系统，前几章介绍了群、环、域等代数系统，本章介绍的格是与它们不同的一个新的代数系统。

8.3.1 基本定义

定义 8.9. $*$和$\oplus$是集合A上的两个二元运算。如果集合A的任意元素a, b, c满足下述条件，则称代数系统$\langle A, *, \oplus\rangle$是**格**：

(1) 结合律：$a * (b * c) = (a * b) * c$，$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$;

(2) 交换律：$a * b = b * a$，$a \oplus b = b \oplus a$;

(3) 吸收律：$a * (a \oplus b) = a$，$a \oplus (a * b) = a$。

定理 8.11. 定义*8.1*和定义*8.9*中定义的格是等价的。

证明： 设$\langle A, \preceq\rangle$是定义8.1中定义的格，即对集合$A$中的任意二元子集$\{a, b\}$有唯一的最大下界和最小上界，分别记作$a * b$和$a \oplus b$。$*$和$\oplus$是$A$上的两个二元运算。定理8.1证明了这两个运算满足结合律、交换律和吸收律，所以$\langle A, *, \oplus\rangle$也是定义8.9中定义的格。

若$\langle A, *, \oplus\rangle$是定义8.9中定义的格，我们在集合$A$上定义关系$\preceq$:

$$a \preceq b \Leftrightarrow a * b = a.$$

当$a * b = a$时，$a \oplus b = (a * b) \oplus b = b$(根据定义8.9中的吸收律)，当$a \oplus b = b$时，$a * b = a * (a \oplus b) = a$。故$a * b = a \Leftrightarrow a \oplus b = b$，因此有

$$a \preceq b \Leftrightarrow a * b = a \Leftrightarrow a \oplus b = b.$$

易证如此定义的关系$\preceq$是集合A上的偏序关系。

任取A中的元素a, b，由于$a * (a \oplus b) = a$和$b * (a \oplus b) = b$知，$a \preceq a \oplus b$，$b \preceq a \oplus b$。因此，$a \oplus b$是$\{a, b\}$的上界。如果A中的元素c 也是$\{a, b\}$的上界，即$a \preceq c$，$b \preceq c$，那么$a \oplus c = c$，$b \oplus c = c$。

$$(a \oplus b) \oplus c = (a \oplus c) \oplus (b \oplus c) = c \oplus c = c.$$

这意味着$a \oplus b \preceq c$，从而$a \oplus b$是$\{a, b\}$的最小上界。同理可证，$a * b$是$\{a, b\}$的最大下界。因此，$\langle A, \preceq\rangle$是定义8.1中定义的格。综上所述，定义8.1和定义8.9是等价的。证毕。

8.3.2 子格和格的直积

定义 8.10. 设$\langle A, *, \oplus\rangle$是格，$B$是$A$的非空子集。如果集合$B$对$*$和$\oplus$运算是封闭的，则称$\langle B, *, \oplus\rangle$是$\langle A, *, \oplus\rangle$ 的**子格**。

易证，子格本身也是格。

例 8.10. 设$\mathbb{Z}^+$是正整数集合。在$\mathbb{Z}^+$上定义二元运算：

$$a * b = (a, b) \qquad a \oplus b = [a, b].$$

$\langle \mathbb{Z}^+, *, \oplus\rangle$是格。令$T$是正偶数集合。两个偶数的最大公因子仍是偶数，两个偶数的最小公倍数也是偶数，所以$\langle T, *, \oplus\rangle$ 是$\langle \mathbb{Z}^+, *, \oplus\rangle$的子格。

例 8.11. 设$\langle A, *, \oplus\rangle$是格。对$A$中的两个元素$a, b$，$a \preceq b$。令

$$I[b, a] = \{x | x \in A, a \preceq x \preceq b\}.$$

任取$x_1, x_2 \in I[b, a]$，即$a \preceq x_1, x_2 \preceq b$，故有

$$\begin{aligned} a * x_i &= a, \qquad x_i * b = x_i, \\ a \oplus x_i &= x_i, \qquad x_i \oplus b = b,\ 1 \leq i \leq 2. \end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned} a * (x_1 * x_2) &= (a * x_1) * x_2 = a * x_2 = a, \\ (x_1 * x_2) * b &= x_1 * (x_2 * b) = x_1 * x_2, \end{aligned}$$

即$a \preceq x_1 * x_2 \preceq b$，因此$x_1 * x_2 \in I[b, a]$。

同理可证$a \preceq x_1 \oplus x_2 \preceq b$，因此$x_1 \oplus x_2 \in I[b, a]$。所以，$\langle I[b, a], *, \oplus\rangle$是$\langle A, *, \oplus\rangle$的子格。

例 8.12. $\langle \mathscr{P}(\{1, 2, 3\}), \cap, \cup\rangle$是格。令

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}, \\ A_2 &= \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}, \\ A_3 &= \{\emptyset, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}, \end{aligned}$$

$\langle A_1, \cap, \cup\rangle$和$\langle A_2, \cap, \cup\rangle$是$\langle \mathscr{P}(\{1, 2, 3\}), \cap, \cup\rangle$的子格。而$A_3$中$\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\} \notin A_3$，所以$A_3$不是$\mathscr{P}(\{1, 2, 3\})$的子格。由此可见，并非$A$的每个子集都是$\langle A, *, \oplus\rangle$的子格。

定义 8.11. 设$\langle A_1,*,\oplus\rangle$和$\langle A_2,\wedge,\vee\rangle$是两个格。构造一个新的代数系统$\langle A_1\times A_2,\cdot,+\rangle$，其中$\cdot$和$+$运算的定义是：$(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in A_1\times A_2$，

$$(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2)=(a_1*b_1,a_2\wedge b_2),$$
$$(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1\oplus b_1,a_2\vee b_2).$$

称$\langle A_1\times A_2,\cdot,+\rangle$是$\langle A_1,*,\oplus\rangle$和$\langle A_2,\wedge,\vee\rangle$的**直积**。

在此定义中，$A_1\times A_2$中的$\cdot$和$+$运算是由第一分量按A_1中的$*$和$\oplus$运算，第二分量按A_2中的$\wedge$和$\vee$运算来实现的。$\langle A_1,*,\oplus\rangle$和$\langle A_2,\wedge,\vee\rangle$是格，所以$A_1\times A_2$中的$\cdot$和$+$运算也满足结合律、交换律和吸收律。因此两个格的直积也是格，并且是用小规模的格构造成的大规模格。

例 8.13. 设$A=\{0,1\}$。在A上定义关系$\preceq_1$，$a,b\in A$，

$$a\preceq_1 b\Leftrightarrow a\preceq b.$$

$\langle A,\preceq_1\rangle$是格。在$A^2$上定义关系$\preceq_2$，$(a,b),(c,d)\in A^2$，

$$(a,b)\preceq_2(c,d)\Leftrightarrow a\preceq_1 c,b\preceq_1 d.$$

$\langle A^2,\preceq_2\rangle$是两个格$\langle A,\preceq_1\rangle$与$\langle A,\preceq_1\rangle$的直积。类似地在$A^3$上定义关系$\preceq_3$，$(a,b,c),(d,e,f)\in A^3$，

$$(a,b,c)\preceq_3(d,e,f)\Leftrightarrow a\preceq_1 d,b\preceq_1 e,c\preceq_1 f.$$

$\langle A^3,\preceq_2\rangle$是两个格$\langle A,\preceq_1\rangle$与$\langle A^2,\preceq_2\rangle$ 的直积。它们的*Hasse*图如图*8.6*所示。

8.3.3 格的同态与同构

定义 8.12. 设$\langle A_1,*,\oplus\rangle$和$\langle A_2,\wedge,\vee\rangle$是两个格。如果存在从$A_1$到$A_2$的映射$f:A_1\to A_2$，对于$A_1$中的任意元素$a,b$，

$$f(a*b)=f(a)\wedge f(b),$$
$$f(a\oplus b)=f(a)\vee f(b),$$

则称f是从A_1到A_2的**格同态映射**。

若f是从A_1到A_2的格同态映射，并且为双射，则称f是从A_1到A_2的格同构映射。如果两个格之间存在格同构映射，则称这两个格是同构的。

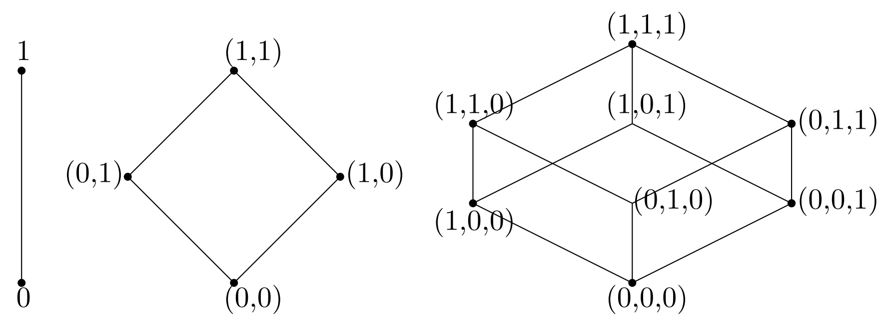


图 8.6: 格的直积示例

设f是从$\langle A_1, *, \oplus\rangle$到$\langle A_2, \wedge, \vee\rangle$的格同态映射，对于$a, b \in A_1$，$a \preceq_1 b$，由于$a \preceq_1 b \Leftrightarrow a * b = a$，故

$$f(a) = f(a * b) = f(a) \wedge f(b).$$

所以$f(a) \preceq_2 f(b)$，即格的同态映射是一种保序映射。反之则不一定成立。例如，令$A_1 = A_2 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$，$\langle A_1, |\rangle$和$\langle A_2, \preceq\rangle$ 是格，它们的Hasse图如图8.7所示。令$f : A_1 \to A_2$，$f(x) = x$是保序映射，但不是格同态映射。这是因为

$$f(3 * 4) = f(1) = 1,$$
$$f(3) \wedge f(4) = 3 \wedge 4 = 3,$$

即$f(3 * 4) \neq f(3) \wedge f(4)$。

定理 8.12. f是从集合A_1到集合A_2的双射。f是从格$\langle A_1, \preceq_1\rangle$到格$\langle A_2, \preceq_2\rangle$的同构映射当且仅当对于$A_1$的元素$a, b$,

$$a \preceq_1 b \Leftrightarrow f(a) \preceq_2 f(b).$$

证明： 已知f是从$\langle A_1, \preceq_1\rangle$到$\langle A_2, \preceq_2\rangle$的格同构映射。在格$\langle A_1, \preceq_1\rangle$中，对$a, b \in A_1$，$a \preceq_1 b \Leftrightarrow a * b = a$。

当$a * b = a$时，$f(a * b) = f(a) \cdot f(b) = f(a)$，故$f(a) \preceq_2 f(b)$。而当$f(a) \preceq_2 f(b)$ 时，$f(a) = f(a) \cdot f(b) = f(a * b)$。因为$f$是单射，所以$a =$

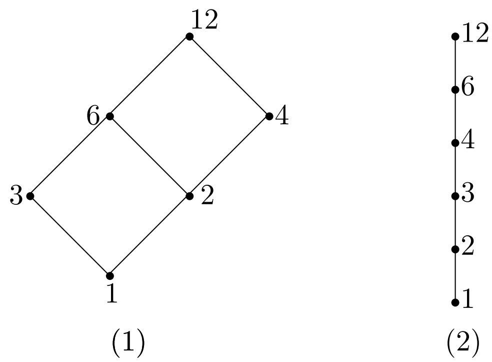


图 8.7: $\{1,2,3,4,6,12\}$上的两个格

$a*b$。从而

$$a*b=a \Leftrightarrow f(a) \preceq_2 f(b).$$

故，$a \preceq_1 b \Leftrightarrow f(a) \preceq_2 f(b)$。

反之，已知$f: A_1 \to A_2$是双射。任取$a,b \in A_1$，$a*b \preceq_1 a$，$a*b \preceq_1 b$。由f的保序性可得，$f(a*b) \preceq_2 f(a)$，$f(a*b) \preceq_2 f(b)$。从而$f(a*b) \preceq_2 f(a) \cdot f(b)$。任取$x,y \in A_2$，由于$f$是满射，存在$a,b \in A_1$，使得$f(a)=x$，$f(b)=y$。$A_2$是格，$x \cdot y = f(a) \cdot f(b) \in A_2$，因此存在$c \in A_1$使$f(c) = x \cdot y = f(a) \cdot f(b)$。于是有$f(c) \preceq_2 f(a)$，$f(c) \preceq_2 f(b)$，由于$f$是保序的，所以$c \preceq_1 a$，$c \preceq_1 b$，从而$c \preceq_1 a*b$。再由$f$的保序性可得$f(a) \cdot f(b) = f(c) \preceq_2 f(a*b)$。综上可得，$f(a) \cdot f(b) = f(a*b)$。同理可证$f(a)+f(b)=f(a \oplus b)$。所以$f$是格同构映射。证毕。

引理 8.1. 格$\langle A,*,\oplus \rangle$是模格当且仅当$A$的每个$I[b,a]=\{x|x \in A, a \preceq x \preceq b\}$中，如果有两个元素可比较且有公共补元，那么这两个元素必相等。

证明： 如果在格$\langle A,*,\oplus \rangle$中，$u \preceq v$，$I[v,u]$中有两个可比较但不相等的元素$a_0,b_0$，不妨假设$a_0 \prec b_0$，它们有一个公共补元$c$，即

$$a_0 * c = b_0 * c = u,$$

$$a_0 \oplus c = b_0 \oplus c = v,$$

那么

$$a_0 \oplus (b_0 * c) = a_0 \oplus u = a_0 \prec b_0 = b_0 * v = b_0 * (a_0 \oplus c),$$

也就是说$a_0 \prec b_0$，但是$a_0 \oplus (b_0 * c) \neq b_0 * (a_0 \oplus c)$，所以$\langle A, *, \oplus \rangle$不是模格。这意味着，如果格$\langle A, *, \oplus \rangle$ 是模格，则A的每个$I[b, a]$中，若有两个元素可比较并且有公共补元，则这两个元素必相等。

如果格$\langle A, *, \oplus \rangle$不是模格，那么必存在$a_0, b_0 \in A$，且$a_0 \prec b_0$，使得$a_0 \oplus (b_0 * c) \prec b_0 * (a_0 \oplus c)$。令$x = a_0 \oplus (b_0 * c)$，$y = b_0 * (a_0 \oplus c)$，显然$a_0 \preceq x, y \preceq b_0$，$b_0 * c \preceq x \prec y \preceq a_0 \oplus c$，$b_0 * c \preceq c \preceq a_0 \oplus c$，

$$c * y = c * (b_0 * (a_0 \oplus c)) = c * b_0.$$

由于$y \preceq a_0 \oplus c$，$a_0 \prec y$，

$$c \oplus y \preceq c \oplus (a_0 \oplus c) = a_0 \oplus c \preceq y_0 \oplus c,$$

得到

$$c \oplus y = a_0 \oplus c.$$

同理可证$x * c = b_0 * c$，$x \oplus c = a_0 \oplus c$。这说明在$I[a_0 \oplus c, b_0 * c]$中$x \prec y$，$x$与$y$有公共补元$c$，与题设矛盾，所以假设不成立，即$\langle A, *, \oplus \rangle$是模格。证毕。

利用引理8.1可以证明下面的定理。

定理 8.13. 格是模格当且仅当它不包含一个与图*8.8(1)*同构的五元子格。

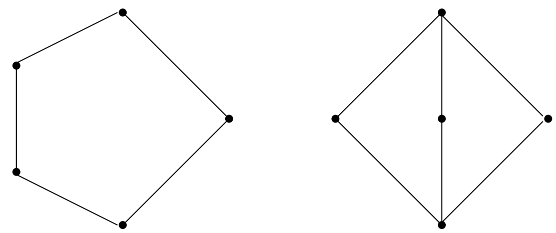
与此定理类似的还有如下定理，其证明略去。

定理 8.14. 格是分配格当且仅当它是模格且不包含一个与图*8.8(2)*同构的五元子格。

8.4 布尔代数

8.4.1 布尔代数

在格中可以定义两个$*$和$\oplus$二元运算。在有补分配格中，每个元素有补元且补元唯一，这样就可以在有补分配格中定义求补元的运算。另外，有补



(1) (2)

图 8.8: 两个五阶格

分配格有最大元1和最小元0。所以布尔格可以看作代数系统$\langle A, *, \oplus, ', 0, 1\rangle$，并称为由布尔格$\langle A, \preceq\rangle$ 诱导出来的代数系统。

定义 8.13. 设A是至少有两个元素的集合，$*$和$\oplus$是集合A上的二元运算。如果集合A的任意元素a, b, c满足下述条件：

(1) $a * b = b * a$，$a \oplus b = b \oplus a$；

(2) $a * (b \oplus c) = (a * b) \oplus (a * c)$，$a \oplus (b * c) = (a \oplus b) * (a \oplus c)$；

(3) $0, 1 \in A$，对A中任意元素a，$a * 1 = a$，$a \oplus 0 = a$；

(4) 对A中任意元素a，存在$a' \in A$，使得$a * a' = 0$，$a * a' = 1$。

则称$\langle A, *, \oplus, ', 0, 1\rangle$为**布尔代数**。

显然，由布尔格诱导出来的代数系统为布尔代数。

定理 8.15. 与布尔代数$\langle A, *, \oplus, ', 0, 1\rangle$相应的$\langle A, *, \oplus\rangle$是布尔格。

证明： 由布尔代数定义可看出，要证明$\langle A, *, \oplus\rangle$是布尔格，只需证明$\langle A, *, \oplus\rangle$是格，并且0和1分别是该格的最小元和最大元。

已知$\langle A, *, \oplus, ', 0, 1\rangle$是布尔代数，在代数系统$\langle A, *, \oplus\rangle$中，二元运算$*$和$\oplus$满足交换律。任取$a, b \in A$，

$$\begin{aligned} a * (a \oplus b) &= (a \oplus 0) * (a \oplus b) = a \oplus (0 * b) = a \oplus ((0 * b) \oplus (b' * b)) \\ &= a \oplus ((0 \oplus b') * b)) = a \oplus (b' * b) = a \oplus 0 = a. \end{aligned}$$

同理可证$a \oplus (a * b) = a$。所以二元运算$*$和$\oplus$满足吸收律。

令$x = a * (b * c)$，$y = (a * b) * c$，显然

$$x = x \oplus 0 = x \oplus (a * a') = (x \oplus a) * (x \oplus a'),$$
$$y = y \oplus 0 = y \oplus (a * a') = (y \oplus a) * (y \oplus a'),$$

其中

$$x \oplus a = (a * (b * c)) \oplus a = a,$$
$$y \oplus a = ((a * b) * c) \oplus a = ((a * b) \oplus a) * (c \oplus a) = a * (a \oplus c) = a,$$
$$x \oplus a' = (a * (b * c)) \oplus a' = (b * c) \oplus a',$$
$$y \oplus a' = ((a * b) * c) \oplus a' = ((a * b) \oplus a') * (c \oplus a') = (b \oplus a') * (c \oplus a') = (b * c) \oplus a'.$$

于是，由$x \oplus a = y \oplus a$和$x \oplus a' = y \oplus a'$推出$x = y$，即

$$a * (b * c) = (a * b) * c.$$

同理可证，$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$。所以二元运算$*$和$\oplus$满足结合律。从而$\langle A, *, \oplus \rangle$是格。

在布尔代数$\langle A, *, \oplus, ', 0, 1 \rangle$中，对任意元素$a \in A$均有

$$a * 1 = a, \qquad a \oplus 0 = a.$$

在$\langle A, *, \oplus \rangle$中的偏序关系是，对$a, b \in A$，

$$a \preceq b \Leftrightarrow a \oplus b = b \Leftrightarrow a * b = a.$$

于是在格$\langle A, *, \oplus \rangle$中，$0 \preceq a \preceq 1$，即0和1分别是该格的最小元和最大元。

综上分析知，$\langle A, *, \oplus \rangle$是布尔格。证毕。

从这个定理可以看出在有补分配格中，存在最小元和最大元，每个元素有补元，二元运算满足交换律和结合律是其最核心的性质。

8.4.2 布尔代数的子代数

定义 8.14. 设A_1是布尔代数$\langle A, *, \oplus, ', 0, 1 \rangle$中集合$A$的子集。如果$0, 1 \in A_1$，并且$A_1$对于$*, \oplus, '$运算是封闭的，那么称$\langle A_1, *, \oplus, ', 0, 1 \rangle$是$\langle A, *, \oplus, ', 0, 1 \rangle$的**子代数**。

例 8.14. $A=\{1,2,3\}$，$\langle\mathscr{P}(A),\subseteq\rangle$是有补分配格，其上的$*,\oplus,'$运算分别为$\cap,\cup,^-$运算，最小元和最大元分别为$\emptyset$和$A$，故$\langle\mathscr{P}(A),\cap,\cup,^-,\emptyset,A\rangle$是布尔代数。令$A_1=\{\emptyset,\{1\},\{2,3\},A\}$，则$A_1$是$A$的子代数。

例 8.15. $\langle A,*,\oplus,',0,1\rangle$是布尔代数。$a,b\in A$且$a\preceq b$，定义$A$的子集$I[b,a]=\{x|x\in A,a\preceq x\preceq b\}$。易证，$I[b,a]$对运算$*$和$\oplus$是封闭的。由于$\langle A,*,\oplus\rangle$是分配格，所以$\langle I[b,a],*,\oplus\rangle$也是分配格。但是$I[b,a]$的最大元是$b$，最小元是$a$，与布尔代数$A$的最大元和最小元不同。另外，$I[b,a]$对求补元运算不一定封闭，所以$I[b,a]$不是$A$的子代数。

对$I[b,a]$中的任意元素x，定义$\overline{x}=(a\oplus x')*b$。显然$\overline{x}\preceq b$。

$$\overline{x}*a=(a\oplus x')*b*a=a,$$

故$a\preceq\overline{x}$。而

$$\overline{x}\oplus x=((a\oplus x')*b)\oplus x=x\oplus b=b,$$
$$\overline{x}*x=((a\oplus x')*b)*x=a*x*b=a,$$

所以$\overline{x}$是x在$I[b,a]$中的补元，因此$\langle I[b,a],*,\oplus,^-,a,b\rangle$是布尔代数，但不是$\langle A,*,\oplus,',0,1\rangle$的子代数。

8.4.3 布尔代数的同态与同构

定义 8.15. $\langle A_1,*,\oplus,',0,1\rangle$与$\langle A_2,\wedge,\vee,^-,\widetilde{0},\widetilde{1}\rangle$是布尔代数。对于映射$f:A_1\to A_2$，如果对于$A_1$中的任意元素$a,b$，

$$f(a*b)=f(a)\wedge f(b),$$
$$f(a\oplus b)=f(a)\vee f(b),$$
$$f(a')=\overline{f(a)}$$

则称f是从布尔代数A_1到布尔代数A_2的**同态映射**。特别地，当f是双射时，称f是同构映射，并称布尔代数A_1与A_2同构。

定理 8.16. $\langle A_1,*,\oplus,',0,1\rangle$是布尔代数，对于$A$的任意元素$a$，布尔代数$I[a',0]$与布尔代数$I[1,a]$是同构的。

证明： 任取$a \in A$，有$a' \in A$且$0 \preceq a' \preceq 1$。

$$I[a', 0] = \{x | x \in A, 0 \preceq x \preceq a'\},$$
$$I[1, a] = \{x | x \in A, a \preceq x \preceq 1\}.$$

当$x \in I[a', 0]$时，$0 \preceq x \preceq a'$，由于$\oplus$运算是保序的，$0 \oplus a \preceq x \oplus a \preceq a' \oplus a$，故$a \preceq x \oplus a \preceq 1$，所以$x \oplus a \in I[1, a]$。令$f : I[a', 0] \to I[1, a]$，$f(x) = x \oplus a$。任取$y \in I[1, a]$，令$x = y * a'$，因为$a \preceq y \preceq 1$并且$*$是保序的，故$a * a' \preceq x = y * a' \preceq 1 * a'$，即$0 \preceq x \preceq a'$。$f(x) = x \oplus a = (y * a') \oplus a = y \oplus a = y$，这表明$x$是$y$的原像，所以$f$是满射。又若$x_1, x_2 \in I[a', 0]$都是$y \in I[1, a]$的原像，即$f(x_1) = x_1 \oplus a = x_2 \oplus a = f(x_2)$。

$$x_1 = x_1 * a' = (x_1 \oplus a) * a' = (x_2 \oplus a) * a' = x_2 * a' = x_2,$$

所以f是单射。从而，f是从$I[a', 0]$ 到$I[1, a]$的双射。

任取$x_1, x_2 \in I[a', 0]$，

$$f(x_1 * x_2) = (x_1 * x_2) \oplus a = (x_1 \oplus a) * (x_2 \oplus a) = f(x_1) * f(x_2),$$
$$f(x_1 \oplus x_2) = (x_1 \oplus x_2) \oplus a = (x_1 \oplus a) \oplus (x_2 \oplus a) = f(x_1) \oplus f(x_2),$$
$$f(\overline{x_1}) = f((0 \oplus x_1') * a') = (x_1' * a') \oplus a = x_1' \oplus a,$$
$$\overline{f(x_1)} = \overline{x_1 \oplus a} = (a \oplus (x_1 \oplus a)') * 1 = a \oplus (x_1' * a') = x_1' \oplus a.$$

所以，f是布尔代数$I[a', 0]$与布尔代数$I[1, a]$的同构映射，且$I[a', 0] \cong I[1, a]$。证毕。

定义 8.16. $\langle A_1, *, \oplus, ', 0, 1\rangle$与$\langle A_2, \wedge, \vee, ^-, \widetilde{0}, \widetilde{1}\rangle$是布尔代数。在$A_1 \times A_2$上定义$\widetilde{*}, \widetilde{\oplus}, ^\circ$运算，对$(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in A_1 \times A_2$，

$$(a_1, a_2)\widetilde{*}(b_1, b_2) = (a_1 * b_1, a_2 \wedge b_2),$$
$$(a_1, a_2)\widetilde{\oplus}(b_1, b_2) = (a_1 \oplus b_1, a_2 \vee b_2),$$
$$(a_1, a_2)^\circ = (a_1', \overline{a_2}),$$

称$\langle A_1 \times A_2, \widetilde{*}, \widetilde{\oplus}, ^\circ, (0, \widetilde{0}), (1, \widetilde{1})\rangle$是布尔代数$A_1$和$A_2$的**直积**。

容易证明，两个布尔代数的直积仍是布尔代数。证明留作习题。

定理 8.17. $\langle A,*,\oplus,',0,1\rangle$是布尔代数，$a\in A$，则$A$与直积$\widetilde{(A)}=I[a,0]\times I[1,a]$同构。

证明： 任取$x\in A$，即$0\preceq x\preceq 1$。由于$*$和$\oplus$运算是保序的，故$0=0*a\preceq x*a\preceq 1*a=a$，$a=0\oplus a\preceq x\oplus a\preceq 1\oplus a=1$。定义$f:A\to I[a,0]\times I[1,a]$，$f(x)=(x*a,x\oplus a)$。任取$x_1,x_2\in A$，

$$\begin{aligned}
f(x_1\oplus x_2)&=((x_1\oplus x_2)*a,(x_1\oplus x_2)\oplus a)\\
&=((x_1*a)\oplus(x_2*a),(x_1\oplus a)\oplus(x_2\oplus a))\\
&=(x_1*a,x_1\oplus a)\oplus(x_2*a,x_2\oplus a)=f(x_1)\oplus f(x_2),\\
f(x_1*x_2)&=((x_1*x_2)*a,(x_1*x_2)\oplus a)\\
&=((x_1*a)*(x_2*a),(x_1\oplus a)*(x_2\oplus a))\\
&=(x_1*a,x_1\oplus a)*(x_2*a,x_2\oplus a)=f(x_1)*f(x_2),\\
\overline{f(x_1)}&=(\overline{x_1*a},\overline{x_1*a})=((0\oplus(x_1*a)')*a,(a\oplus(x_1\oplus a)')*1)\\
&=((x_1'\oplus a')*a,a\oplus(x_1'*a'))\\
&=(x_1'*a,x_1'\oplus a)=(f(x_1))',
\end{aligned}$$

所以f是同态映射。

任取$(y,z)\in I[a,0]\times I[1,a]$，$0\preceq y\preceq a$，$a\preceq z\preceq 1$，令$x=y\oplus(z*a')\in A$，

$$\begin{aligned}
f(x)=f(y\oplus(z*a'))&=((y\oplus(z*a'))*a,(y\oplus(z*a'))\oplus a)\\
&=(y*a,y\oplus z\oplus a)=(y,z),
\end{aligned}$$

即x是(y,z)的原像，故f是满射。

设$x_1,x_2\in A$都是$(y,z)\in I[a,0]\times I[1,a]$的原像，即

$$f(x_1)=(x_1*a,x_1\oplus a)=(x_2*a,x_2\oplus a)=f(x_2),$$

所以，

$$\begin{aligned}
x_1&=x_1*(a\oplus a')=(x_1*a)\oplus(x_1*a')\\
&=(x_1*a)\oplus((x_1\oplus a)*a')=(x_2*a)\oplus((x_2\oplus a)*a')\\
&=x_2*(a\oplus a')=x_2,
\end{aligned}$$

即f是单射，所以f是双射，故A与$\widetilde{A}$是同构的。证毕。

例 8.16. 设$A=\{1,2,\cdots,n\}$，$A_1=\{1,2,\cdots,k\}$，$\overline{A_1}=\{k+1,k+2,\cdots,n\}$，$\langle\mathscr{P}(A),\cap,\cup,^-,\emptyset,A\rangle$是布尔代数。

$$I[A_1,\emptyset]=\{x|x\in\mathscr{P}(A),\emptyset\subseteq x\subseteq A_1\}=\mathscr{P}(A_1),$$
$$I[A,A_1]=\{x|x\in\mathscr{P}(A),A_1\subseteq x\subseteq A\}=\mathscr{P}(\overline{A_1}).$$

由定理*8.16*知，$I[\overline{A_1},\emptyset]\cong I[A,A_1]$。由定理*8.17*知，$\mathscr{P}(A)\cong I[A_1,\emptyset]\times I[A,A_1]=\mathscr{P}(A_1)\times\mathscr{P}(\overline{A_1})$。

定理 8.18. 设A是有限布尔代数，$|A|=2^n$。令$B=\{1,2,\cdots,n\}$，则布尔代数A与$\langle\mathscr{P}(B),\cap,\cup,^-,\emptyset,B\rangle$ 是同构的。

证明： 对集合A的元素个数进行归纳证明。

(1) 当$|A|=2$时，$A=\{0,1\}$，$f:A\to\mathscr{P}(\{1\})$，$f(0)=\emptyset$，$f(1)=\{1\}$。易证，f是同构映射，所以$A\cong\mathscr{P}(\{1\})$。

(2) 假设$|A|<k$时命题成立。现设$|A|=k$。取$a\in A$，且$0\prec a\prec 1$。由定理8.17知，$A\cong I[a,0]\times I[1,a]$。再由定理8.16，$A\cong I[a,0]\times I[a',0]$。注意到$|I[a,0]|<k$，$|I[a',0]|<k$，有归纳假设知，布尔代数$I[a,0]$和$I[a',0]$分别与$\mathscr{P}(B_1)$ 和$\mathscr{P}(B_2)$同构，其中$|B_1|=k_1$，$|B_2|=k_2$。由例8.16知，如果$A\cong\mathscr{P}(B_1)\times\mathscr{P}(B_2)$，那么存在$k_1+k_2$个元素的集合$B$使得$A\cong\mathscr{P}(B)$。证毕。

从这个定理可以看出，$|A|=n$，$\langle\mathscr{P}(A),\cap,\cup,^-,\emptyset,A\rangle$是有$2^n$个元素的布尔代数，它穷尽了所有的有限布尔代数。

8.4.4 布尔代数的原子表示

如果在格$\langle A,\preceq\rangle$中有最小元0，那么最小元的控制元素称为**原子**。

在格$\langle A,\preceq\rangle$的Hasse图(图8.9)中$a_1,a_2,\cdots,a_k$是原子。显然，$a_i*a_j=0(i\neq j)$。

引理 8.2. 格$\langle A,\preceq\rangle$是有限格，0是它的最小元。对于A中任意非零元素b，至少存在一个原子a使得$a\preceq b$。

证明： 对于A中任意非零元素b，有以下两种情况:

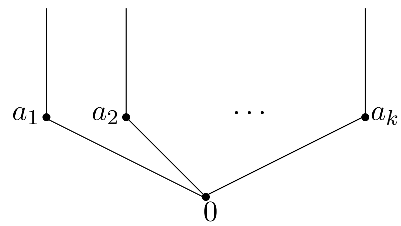


图 8.9: 原子示例图

(1) b是原子。那么显然$b \preceq b$，取$a = b$即可。

(2) b不是原子。0是有限格$\langle A, \preceq \rangle$的最小元，即$0 \prec b$，$b$不是0的控制元素，所以必存在$b_1 \in A$使得$0 \prec b_1 \prec b$。$b_1$又有两种情况:

(2.1) b_1是原子。取$a = b_1$即可。

(2.2) b_1不是原子。0是$\langle A, \preceq \rangle$的最小元，即$0 \prec b_1$，$b_1$不是0的控制元素，那么必存在$b_2 \in A$使得$0 \prec b_2 \prec b_1 \prec b$。这里$b_2 \neq b_1, b$。$b_2$又有两种情况，$\cdots\cdots$。

由于A是有限集合，这个过程不可能无限地进行下去。也就是说，在有限步之后b_i本身就是原子，取$a = b_i$即可。证毕。

引理 8.3. 设$\langle A, *, \oplus, ', 0, 1 \rangle$是有限布尔代数。$b$是$A$中的非零元素，假设$a_1, a_2, \cdots, a_k$是$A$中满足$a_i \preceq b$的所有原子，则$b = a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k$。

证明: $a_1, a_2, \cdots, a_k$是A的原子并且$a_i \preceq b$，$1 \preceq i \preceq k$。显然，$a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k \preceq b$。下面证明$b \preceq a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k$。由于在有补分配格中$c \preceq d \Leftrightarrow c * d' = 0$ (证明留作习题)，所以只需证明$b * (a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k)' = 0$。

用反证法进行证明。假设$b * (a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k)' \neq 0$。由引理8.2知，存在原子$a$使得$a \preceq b * (a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k)'$。这里$a$是原子，且$a \preceq b$，$a \preceq (a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k)'$，而$a_1, a_2, \cdots, a_k$是小于等于$b$的全部原子，所以$a \in \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$。故$a \preceq a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k$。因此，$a \preceq (a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k) * (a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k)' = 0$，这与$a$是原子矛盾，所以假设不成立，因此$b * (a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k)' = 0$。

以上证明表明A的任意非零元素b都可以表示成满足$a_i \preceq b$的所有原子$a_1, a_2, \cdots, a_k$之和。下面证明这种表示形式是唯一的。假设$b_1, b_2, \cdots, b_l$是原子并且$b = b_1 \oplus b_2 \oplus \cdots \oplus b_l$。由$\oplus$的定义知$b_1, b_2, \cdots, b_l \preceq b$且$b_1, b_2, \cdots, b_l$是原子，而$a_1, a_2, \cdots, a_k$是小于等于$b$的全部原子，故$\{b_1, b_2, \cdots, b_l\} \subseteq \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$。如果$l < k$，即存在$a_m \notin \{b_1, b_2, \cdots, b_l\}$，

$$\begin{aligned} a_m = a_m * b &= a_m * (b_1 \oplus b_2 \oplus \cdots \oplus b_l) \\ &= (a_m * b_1) \oplus (a_m * b_2) \oplus \cdots \oplus (a_m * b_1), \end{aligned}$$

其中a_m, b_i都是原子，且$a_m \neq b_i$，故$a_m * b_i = 0$，$1 \leq i \leq l$。从而得出，$a_m = 0$，这与a_m是原子矛盾，故假设不成立，所以$l = k$，即b表示成原子之和的形式是唯一的。证毕。

引理 8.4. 在布尔格$\langle A, \preceq \rangle$中若任取非零元素$b$和原子$a$，则$a \preceq b$ 和$b \preceq a$，两者必有一个且只有一个成立。

证明： b和a分别是A的非零元素和原子。显然，$0 \preceq a * b \preceq a$。由于$a$是原子，即$a$是0的控制元素，不可能存在非零元素$b$使得$0 \prec a * b \prec a$。所以$a * b = a$或0。如果$a * b = a$，则$a \preceq b$。又在布尔格中$a \preceq b'$当且仅当$a * (b')' = 0$，即$a * b = 0$。所以当$a * b = 0$ 时，必有$a \preceq b'$。而$a \preceq b$和$a \preceq b'$不可能同时成立，否则$a \preceq b * b' = 0$，与a是原子矛盾。所以$a \preceq b$和$b \preceq a$两者必居其一且只有一个成立。证毕。

定理 8.19. 设$\langle A, *, \oplus, ', 0, 1 \rangle$是有限布尔代数。若$S$是$A$中所有原子构成的集合，那么布尔代数$\langle A, *, \oplus, ', 0, 1 \rangle$与$\langle \mathscr{P}(S), \cap, \cup, ^{-}, \emptyset, S \rangle$同构。

证明： 在两个布尔代数A与$\mathscr{P}(S)$之间构造映射$f : A \to \mathscr{P}(S)$，对任意$a \in A$，

$$f(a) = \begin{cases} \emptyset & 若 a = 0, \\ \{a_1, a_2, \cdots, a_k | a_i \in S, a_i \preceq a, 1 \leq i \leq k\} & 若 a \neq 0. \end{cases}$$

由引理8.2知，A中非零元素a的像$f(a)$是唯一确定的。任取$\{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_p}\} \subseteq S$，$\{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_p}\} \neq \emptyset$，令$b = a_{i_1} \oplus a_{i_2} \oplus \cdots \oplus a_{i_p}$。显然，$b \in A$，且$f(b) = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_p}\}$，故$b$是$\{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_p}\}$的原像。所以，$f$是满

射。假设a,b都是$\{a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_p}\}$的原像，由引理8.3知，$a=a_{i_1}\oplus a_{i_2}\oplus\cdots\oplus a_{i_p}=b$，所以$f$是单射。因此，$f$是双射。下面证明$f$保持$*,\oplus,'$运算。

(1) $f(a*b)=f(a)\cap f(b)$： 当$a=0$或$b=0$时，$f(a*b)=f(0)=\emptyset$；另一方面，$a=0$或$b=0$意味着$f(a)=\emptyset$或$f(b)=\emptyset$，所以，$f(a)\cap f(b)=\emptyset=f(a*b)$。

当$a\neq 0$且$b\neq 0$时，$f(a)=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，$f(b)=\{b_1,b_2,\cdots,b_l\}$。也就是说，$a_1,a_2,\cdots,a_k$是小于等于$a$的所有原子，$b_1,b_2,\cdots,b_l$是小于等于$b$的所有原子。如果$a*b=0$，则有$f(a*b)=\emptyset$。假若$f(a)\cap f(b)\neq\emptyset$，则存在$x\in f(a)\cap f(b)$，即$x$是小于等于$a$ 的原子，同时也是小于等于b的原子，所以$x\preceq a*b=0$，这与x是原子矛盾，故$f(a)\cap f(b)=\emptyset=f(a*b)$。如果$a*b\neq 0$，令$f(a*b)=\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}$，所以原子$c_i\preceq a*b\preceq a$，$c_i\preceq a*b\preceq b$，故有$c_i\in\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$且$c_i\in\{b_1,b_2,\cdots,b_l\}$，$1\le i\le m$。从而，

$$\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}\subseteq\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}\cap\{b_1,b_2,\cdots,b_l\}.$$

反之，任取$x\in\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}\cap\{b_1,b_2,\cdots,b_l\}$，$x\preceq a$且$x\preceq b$，于是$x\preceq a*b$。所以$x\in\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}$。这表明

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}\cap\{b_1,b_2,\cdots,b_l\}\subseteq\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}.$$

综上，$\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}\cap\{b_1,b_2,\cdots,b_l\}$，即

$$f(a*b)=f(a)\cap f(b).$$

(2) $f(a\oplus b)=f(a)\cup f(b)$： 当$a=0$或$b=0$时，$a\oplus b=b$或$a\oplus b=a$，故$f(a\oplus b)=f(b)$或$f(a\oplus b)=f(a)$；另一方面，$a=0$或$b=0$意味着$f(a)=\emptyset$或$f(b)=\emptyset$，故$f(a)\cup f(b)=f(b)$或$f(a)\cup f(b)=f(a)$。于是$f(a\oplus b)=f(a)\cup f(b)$ 。

当$a\neq 0$且$b\neq 0$时，令$f(a\oplus b)=\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$，$d_1,d_2,\cdots,d_n$是满足$d_i\preceq a\oplus b(1\le i\le n)$的全部原子。根据引理8.4，对于原子$d_i$和非零元素$a,b$，$d_i\preceq a$和$d_i\preceq a'$有且只有一个成立；$d_i\preceq b$和$d_i\preceq b'$有且只有一个成立。这样就有四种组合：1) $d_i\preceq a$ 且$d_i\preceq b$，2) $d_i\preceq a$且$d_i\preceq b'$，3) $d_i\preceq a'$且$d_i\preceq b$，4) $d_i\preceq a'$且$d_i\preceq b'$。其中第四种组合不可能，否

则由$d_i \preceq a'$和$d_i \preceq b'$，得到$d_i \preceq a' * b' = (a \oplus b)'$，而$d_i \preceq a \oplus b$，故有$d_i \preceq (a \oplus b)' * (a \oplus b) = 0$，与$d_i$是原子矛盾。在其他三种组合中，或者$d_i \preceq a$成立或者$d_i \preceq b$成立，即$d_i \in \{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \cup \{b_1, b_2, \cdots, b_l\}$，所以$\{d_1, d_2, \cdots, d_n\} \subseteq \{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \cup \{b_1, b_2, \cdots, b_l\}$。反之，任取$x \in \{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \cup \{b_1, b_2, \cdots, b_l\}$，显然$x \preceq a \preceq a \oplus b$，$x \preceq b \preceq a \oplus b$，于是$x \in \{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$，从而$\{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \cup \{b_1, b_2, \cdots, b_l\} \subseteq \{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$。因此，$\{d_1, d_2, \cdots, d_n\} = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \cup \{b_1, b_2, \cdots, b_l\}$，即

$$f(a \oplus b) = f(a) \cup f(b).$$

(3) $f(a') = \overline{f(a)}$： 当$a = 1$时，$f(a') = f(0) = \emptyset$；而$\overline{f(a)} = \overline{S} = \emptyset$，所以$f(a') = \overline{f(a)}$。

当$a \neq 1$时，$f(a') \neq \emptyset$。这时对于原子x，

$$x \in f(a') \Leftrightarrow x \preceq a' \Leftrightarrow x \preceq a\text{不成立} \Leftrightarrow x \notin f(a) \Leftrightarrow x \in \overline{f(a)},$$

由此得到$f(a') = \overline{f(a)}$。

由以上讨论可知，f是从布尔代数A到$\mathscr{P}(S)$的同构映射，所以两个布尔代数$\langle A, *, \oplus, ', 0, 1\rangle$与$\langle \mathscr{P}(S), \cap, \cup, ^-, \emptyset, S\rangle$同构。证毕。

从以上讨论可知，有限布尔代数中集合A的元素个数是2^n，其中n就是布尔代数A中的原子个数。任何具有2^n个元素的布尔代数都是同构的。

8.4.5 布尔环

在布尔代数$\langle A, *, \oplus, ', 0, 1\rangle$中，现在分别看其中一个二元运算。$\langle A, *\rangle$中，$*$满足交换律和结合律。对于$A$中任意元素$a$均有$a * 1 = a$，所以1是$*$运算的单位元。对于元素$a$，如果存在$b \in A$使$a * b = 1$，那么$a = a \oplus (a * b) = a \oplus 1 = 1$，也就是说集合$A$中只有当$a = 1$时有关于$*$运算的逆元，所以$\langle A, *\rangle$构成含幺半群。$\langle A, \oplus\rangle$中，$\oplus$满足交换律和结合律。对于$A$中任意元素$a$均有$a \oplus 0 = a$，所以0是$\oplus$ 运算的单位元。对于元素a，如果存在$b \in A$使$a \oplus b = 0$，那么$a = a * (a \oplus b) = a * 0 = 0$，也就是说集合$A$中只有当$a = 0$时有关于$\oplus$运算的逆元，所以$\langle A, \oplus\rangle$也是含幺半群。

如果同时看A上的两个二元运算，根据上述分析，$\langle A, *, \oplus\rangle$是布尔格，但不能构成环。为此在$A$上定义新的二元运算$+$，对任意的$a, b \in A$，

$$a + b = (a * b') \oplus (a' * b).$$

易见，$+$运算满足交换律和结合律。0是零元。由于$a+a = (a*a') \oplus (a'*a) = 0 \oplus 0 = 0$，所以$a$是$a$的负元。从而$\langle A, +\rangle$是交换群。又

$$\begin{aligned}
(a+b)*c &= ((a*b') \oplus (a'*b))*c = (a*b'*c) \oplus (a'*b*c),\\
(a*c)+(b*c) &= ((a*c)*(b*c)') \oplus ((a*c)'*(b*c))\\
&= (a*c*(b' \oplus c')) \oplus ((a' \oplus c')*b*c)\\
&= (a*b'*c) \oplus (a'*b*c),
\end{aligned}$$

所以$(a+b)*c = (a*c)+(b*c)$，即$*$对$+$有右分配律。同理可证$c*(a+b) = (c*a)+(c*b)$，即$*$对$+$有左分配律。

因此，$\langle A, +, *\rangle$是环，称之为**布尔环**。在布尔环中，对A中任意元素a，有$a^2 = a*a = a$。

反之，已知$\langle A, +, *\rangle$是布尔环，重新定义二元运算$\oplus$和一元运算$'$，对$a, b \in A$，

$$a \oplus b = a + b + a * b,$$

$$a' = 1 + a,$$

那么$\langle A, *, \oplus, ', \cdots\rangle$构成布尔代数。该布尔代数最小元和最大元的求解留作习题。

8.4.6 布尔表达式

定义 8.17. 布尔代数$\langle A, *, \oplus, ', 0, 1\rangle$上的**布尔表达式**定义为：

(1) A中任何元素都是布尔表达式；

(2) 任何变元是布尔表达式；

(3) 若e_1和e_2是布尔表达式，则e_1'，$(e_1 \oplus e_2)$，$(e_1 * e_2)$是布尔表达式。

有n个不同变元的布尔表达式叫做n元布尔表达式，记作$E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其中$x_1, x_2, \cdots, x_n$是变元。用A中元素代替$x_i (1 \le i \le n)$，则$E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$就

是A中的一个元素。所以E是从A^n到A的映射。如果$f : A^n \to A$，f能用A上的n元布尔表达式表示，那么f就叫做n元**布尔函数**。

$\langle \{0,1\}, \cdot, +, ^-, 0, 1 \rangle$是二元集合上的布尔代数。任何$n$元开关函数$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$，与函数值1对应的$n$元有序数组都能写出小项表达式。因此，每个开关函数都是布尔函数。可以证明，一般的布尔代数$\langle A, *, \oplus, ', 0, 1 \rangle$上的任意布尔表达式$E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可以表示成

$$E(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \oplus_{(a_1, a_2, \cdots, a_n)} E(a_1, a_2, \cdots, a_n) * x_1^{a_1} * x_2^{a_2} * \cdots * x_n^{a_n},$$

其中$a_i = 0$或1，$x_i^0 = x_i'$，$x_i^1 = x_i$，$1 \le i \le n$。

下面举例说明并非所有从A^n到A的映射都是A上的布尔函数。令$A = \{0,1,2,3\}$，布尔代数$\langle A, *, \oplus, ', 0, 1 \rangle$的Hasse图如图8.10，其中2与3互为补元。令映射$g : A^2 \to A$定义如表8.1所示。

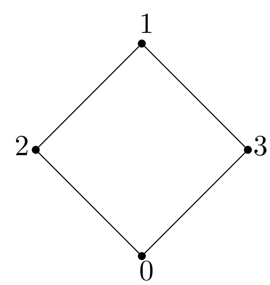


图 8.10: 四阶布尔代数的Hasse图

如果g是布尔函数，应该能有下面的小项表达式

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) &= (g(1,1) * x_1 * x_2) \oplus (g(1,0) * x_1 * x_2') \\ &\quad \oplus (g(0,1) * x_1' * x_2) \oplus (g(0,0) * x_1' * x_2') \\ &= (x_1 * x_2) \oplus (x_1 * x_2') \oplus (x_1' * x_2'). \end{aligned}$$

当$x_1 = x_2 = 3$时，有

$$g(3,3) = (3 * 3) \oplus (3 * 2) \oplus (2 * 2) = 3 \oplus 0 \oplus 2 = 1,$$

与g的定义中$g(3,3) = 2$(见表8.1)不同，矛盾。故g不是布尔函数。

表 8.1: 从A^2到A的映射

g(i, j) \ j, i	0	1	2	3
0	1	0	0	3
1	1	1	0	3
2	2	0	1	1
3	3	0	2	2

习题

1. 令$R_1 = \{x | x \in \mathbb{R}, 0 \preceq x \preceq 1\}$，$\preceq$是$R_1$上的小于等于关系。证明$\langle R_1, \preceq \rangle$是格。该格的$*$和$\oplus$运算是什么？

2. $\langle A, \preceq \rangle$是格，$a, b, c$是$A$中任意元素，证明：

(1) $a * b = b * a$，$a \oplus b = b \oplus a$；

(2) $a * (a \oplus b) = a$，$a \oplus (a * b) = a$。

3. 证明：在格中，如果$a \preceq b$，$c \preceq d$，则有$a * c \preceq b * d$。

4. 证明：在格中，如果$a \preceq b \preceq c$，则有

(1) $a \oplus b = b * c$；

(2) $(a * b) \oplus (b * c) = b = (a \oplus b) * (b \oplus c)$。

5. 证明：在格中，

$$(a * b) \oplus (c * d) \preceq (a \oplus c) * (b \oplus d),$$

$$(a * b) \oplus (b * c) \oplus (c * a) \preceq (a \oplus b) * (b \oplus c) * (c \oplus a).$$

6. $\langle A, \preceq \rangle$是格。取$A$中的元素$a, b$，$a \prec b$。令

$$B = \{x | x \in A, a \preceq x \preceq b\},$$

证明：$\langle B, \preceq \rangle$是格。

7. $\langle A, *, \oplus\rangle$是格，$A$的元素个数大于1。如果该格有最小元0和最大元1，那么它们必然是A的不同元素。

8. 设$S=\{1,3,5,15,25,75\}$，$\langle S, |\rangle$是格。请列出S中有补元的元素并写出它们的补元。

9. 在具有两个或更多个元素的格中，没有元素自身是自身的补元。

10. 具有三个或更多个元素的线性序集不是有补格。

11. 五阶格中哪些是分配格?

12. 证明：格A是分配格当且仅当对任意$a,b,c\in A$，$(a*b)\oplus(b*c)\oplus(c*a)=(a\oplus b)*(b\oplus c)*(c\oplus a)$。

13. 证明：在有补分配格中，

(1) $a\preceq b\Leftrightarrow a*b'=0$;

(2) $b'\preceq a'\Leftrightarrow a'\oplus b=1$。

14. f是从集合A到集合B的映射。令$S=\{f(c)|c\in\mathscr{P}(A)\}$。证明：$\langle S,\subseteq\rangle$是$\langle\mathscr{P}(B),\subseteq\rangle$的子格。

15. $\langle A,\preceq\rangle$是分配格。$a,b\in A$且$a\prec b$。令$B=\{x|x\in A, a\preceq x\preceq b\}$。证明：$f(x)=(x\oplus a)*b$是从$A$到$B$的同态映射。

16. $\langle S,\preceq\rangle$是模格，$a,b\in S$。令

$$X=\{x|x\in S, a*b\preceq x\preceq a\},$$

$$Y=\{y|y\in S, b\preceq y\preceq a\oplus b\},$$

$$f=x\oplus b.$$

证明：f是从X到Y的同构映射。

17. 在布尔代数$\langle A,*,\oplus,',0,1\rangle$中，对$A$中任意元素$a,b$，

(1) $a\oplus(a'*b)=a\oplus b$;

(2) $a*(a'\oplus b)=a*b$。

18. 证明：在布尔代数中，$x\preceq y\Leftrightarrow y'\preceq x'$。

19. $\langle A_1,*,\oplus,',0,1\rangle$与$\langle A_2,\wedge,\vee,^-,\widetilde{0},\widetilde{1}\rangle$是两个布尔代数。证明它们的直积$\langle A_1\times A_2,\widetilde{*},\widetilde{\oplus},^\circ,(0,\widetilde{0}),(1,\widetilde{1})\rangle$是布尔代数。

20. A,B是两个不相交的集合。任取$S\subseteq A$，$T\subseteq B$，令$f(S\cup T)=(S,T)$。证明：f是布尔代数$\langle\mathscr{P}(A\cup B),\subseteq\rangle$ 到$\langle\mathscr{P}(A)\times\mathscr{P}(B),\subseteq\rangle$的同构映射。

21. 找出8阶布尔代数的所有子代数。

22. $\langle\{1,2,3,4,6,12\},|\rangle$和$\langle\{1,2,3,4,6,8,12,24\},|\rangle$是布尔代数吗?

23. 若$a,b_1,b_2,\cdots,b_r$是布尔代数$\langle A,*,\oplus,',0,1\rangle$的原子，证明

$$a\preceq b_1\oplus b_2\oplus\cdots\oplus b_r\Leftrightarrow \text{存在}i,\text{使得}a=b_i,1\le i\le r.$$

24. 若$b_1,b_2,\cdots,b_n$是有限布尔代数中的所有原子，证明:

$$y=0\Leftrightarrow\forall i,y*b_i=0,1\le i\le n.$$

25. $\langle A,+,*\rangle$是布尔环。在A上定义二元运算$\oplus$和一元运算$'$如下，对$a,b\in A$，

$$a\oplus b=a+b+a*b,$$
$$a'=1+a,$$

证明: $\langle A,*,\oplus,',\cdots\rangle$构成布尔代数，并确定其最小元和最大元。

Bibliography