P152——3

设 <R,+> 为 a 生成的循环群，则 R 中任意元素 x，y 可表示成 x=ma，y=na

∴x·y = ma·na = mna = na·ma = y·x

∴<R,+,·>是交换环

P152——5

（1） 零元（0，0）Z×Z 中非零元素（1，0）·（0，1）=（0，0）有零因子

∴<Z×Z,+,·>不是整环也不是域

（2） 显然<{a+b$\sqrt{2}$|a,b∈Z},+,·> 为非平凡交换群

∀a_1、b_1、a_2、b_2 ∈Z

若（a_1+$b_1\sqrt{2}$）·（a_2+$b_2\sqrt{2}$）=0，则 a_1=b_1=a_2=b_2=0

∴无零因子，即<{a+b$\sqrt{2}$|a,b∈Z},+,·>是整环

若（a_1+$b_1\sqrt{2}$）·（a_2+$b_2\sqrt{2}$）=1，则 $a_2=a_1/a_1^2-2b_1^2$，$b_2=-b_1/a_1^2-2b_1^2$

a_2、b_2 不一定∈Z 即<{a+b$\sqrt{2}$|a,b∈Z},+,·>不是域

（3） 显然<{a+b$\sqrt{3}$|a,b∈Q},+,·> 是整环

又 a/(a^2-3b^2)- b·$\sqrt{3}$/(a^2-3b^2) 是 a+b$\sqrt{3}$的逆元

∴<{a+b$\sqrt{3}$|a,b∈Q},+,·> 是域

P152——6

（1） 设 a·a'=1_R ,a' ∈R

∴a'有负元 - a' ∈R

（-a）·（-a'）= a·a' =1_R

∴（-a）'= -a' ∈R

∴ -a 也是可逆元

（2） 若 a 是零因子

a·a'=0_R ,又 a·a'=1_R

∴R={0_R } |R|=1

与 a，-a∈R 矛盾

∴a 不是零因子

P153——9

证明：设<R,+,·>的两个子环<P,+,·>和<Q,+,·>

P∩Q=S，易证 <S,+>是<R,+>的子群

∀a,b∈S，∴a,b∈P, a,b∈Q

a·b∈P, a·b∈Q, ∴a·b∈S

∴S 对乘法·运算封闭

又环 R 的乘法单位元 1_R∈P，1_R∈ Q，∴ 1_R∈ S

∴<S,+, ·>是<R,+,·>的子环，得证

P153——1 1

{[0]}、{[0]、[3]} {[0]、[2]、[4]}、 Z_6

P153——1 5

证明：∀ x , y ∈I, r∈R

令 x=$\begin{pmatrix} 2m_1 & 2n_1 \\ 2k_1 & 2l_1 \end{pmatrix}$ y=$\begin{pmatrix} 2m_2 & 2n_2 \\ 2k_2 & 2l_2 \end{pmatrix}$ r=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

∴x-y=$\begin{pmatrix} 2(m_1-m_2) & 2(n_1-n_2) \\ 2(k_1-k_2) & 2(l_1-l_2) \end{pmatrix}$ ∈I x·r=$\begin{pmatrix} 2(am_1+cn_1) & 2(bm_1+dn_1) \\ 2(ak_1+cl_1) & 2(bk_1+dl_1) \end{pmatrix}$∈I，同理 r·x∈I

∴I 是 R 的一个理想

R/I={I，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$+I，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$+I，$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$+I，$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$+I，$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$+I，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$+I，

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$+I，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$+I，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$+I，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$+I，$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$+I，$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$+I，

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$+I，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$+I，$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$+I }