

代数结构第九次习题答案

朱平

zhuping@mail.ustc.edu.cn

I. 习题一

- (1)不是群, 不满足封闭性;
(3)是交换群, 单位元为 I , A 的逆元为 A^{-1} ;
(4)是交换群, 单位元为 γ , $\alpha^{-1} = \delta$, $\beta^{-1} = \beta$, $\gamma^{-1} = \gamma$, $\delta^{-1} = \alpha$;
(5)是群, 但不是交换群, 单位元是 1 , 当 $x > 0$ 时, $x^{-1} = \frac{1}{x}$, 当 $x < 0$, $x^{-1} = x$.

II. 习题二

- (1)证明 $\langle S, * \rangle$ 是群
封闭性:

$$a * b = a + b + ab = (a + 1)(b + 1) - 1 \neq -1 \in S$$

结合律:

$$(a * b) * c = a + b + c + ab + bc + ac + abc = a * (b * c)$$

单位元:0

逆元:

$$a^{-1} = -\frac{a}{1+a}$$

- (2)解方程 $2 * x * 3 = 7$

$$\begin{aligned} 2 * x * 3 &= 12x + 11 = 7 \\ \implies x &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

III. 习题四

G 是交换群

$$\Leftrightarrow b * a = a * b$$

$$\Leftrightarrow a * b * a * b = a * a * b * b$$

$$\Leftrightarrow (a * b)^2 = a^2 * b^2$$

IV. 习题六

证明在群 G 中, $a*b$ 与 $b*a$ 同阶

- (1)设 $a*b$ 的阶为 n , $b*a$ 的阶为 m ,

$$(a * b)^n = e$$

$$\Rightarrow (b * a)^{n-1} = a^{-1}b^{-1}$$

$$\Rightarrow (b * a)^n = e$$

$$\Rightarrow n|m$$

同理可得: $m|n$

$$\Rightarrow n = m.$$

- (2)若 $a*b$ 为无限阶, 则 $b*a$ 也为无限阶

反正法, 设 $b*a$ 的阶为 k , 则 $(b * a)^k = e$

$$\Rightarrow (a * b)^k = e, \text{矛盾!}$$