第5次作业答案

负责人：乐之皓

Ch4 3

> 设 a,b,c,d,R_1,R_2 是 A 上的关系，其中
>
> $$R_1=\{(a,a),(a,b),(b,d)\},$$
> $$R_2=\{(a,d),(b,c),(b,d),(c,b)\}$$
>
> 求 $R_1\circ R_2, R_2\circ R_1, R_1^2, R_1^3$

$$1.R_1\circ R_2=\{(c,d)\}$$

$$2.R_2\circ R_1=\{(a,d),(a,c)\}$$

$$3.R_1^2=\{(a,a),(a,b),(a,d)\}$$

$$4.R_1^3=\{(b,c),(b,d),(c,b)\}$$

> 注意：偏序关系是倒着运算的，有些人把 R_1^3 看成 R_1^2

Ch4 4

> R_1 是集合 B 到集合 C 的关系，R_2 与 R_3 是集合 A 到集合 B 的关系。证明：
>
> $$R_1\circ(R_2\circ R_3)\subseteq(R_1\circ R_2)\cap(R_1\circ R_3)$$

对 $\forall(x,y)\in R_1\circ(R_2\cap R_3)$ 均 $\exists z\in B$, 使得 $x(R_2\cap R_3)z$ 且 zR_1y,

所以有 $x(R_2\cap R_3)z\Rightarrow xR_2z$ 且 xR_3z

$xR_2z,zR_1y\Rightarrow(x,y)\in R_1\circ R_2$

$xR_3z,zR_1y\Rightarrow(x,y)\in R_1\circ R_3$

所以，$(x,y)\in(R_1\circ R_2)\cap(R_1\circ R_3)$

所以，$R_1\circ(R_2\circ R_3)\subseteq(R_1\circ R_2)\cap(R_1\circ R_3)$

Ch4 5

> 设R是集合A上的二元关系，I_A 是A上的恒等关系。证明：$R^{'}=R\cap I_A$ 是R的自反闭包

- $R^{'}$ 具有自反性

  $xR^{'}x\Leftrightarrow xI_Ax$ 或 xRx，而 xI_Ax 恒成立

- $R\subseteq R^{'}$ 显然成立

- 对任意满足 P 有自反性且 $R\subseteq P$ 的集合 P

  $xR^{'}y\Leftrightarrow xI_Ay$ 或 xRy

  若 xI_Ay, 则 $x=y$, 且 P 有自反性 $\Rightarrow xPy$

  若 xRy, 因为 $R\subseteq P$，故 xPy

  综上两种情况，对任意满足 $xR^{'}y$ 的 x，y，都有 $xPy\Rightarrow R^{'}\subseteq P$

Ch4 7

> 设$A=1,2,3,4$，在$\mathscr{P}(A)$上定义关系"$\sim$"。任给$S,T\in\mathscr{P}(A)$，
>
> $$S\sim T, \text{当且仅当} |S|=|T|$$
>
> 证明："$\sim$"是$\mathscr{P}(A)$上的等价关系，并写出他的商集$\mathscr{P}(A)/\sim$

自反性：$\forall S\in\mathscr{P}(A), |S|=|S|$

对称性：$\forall S,T\in\mathscr{P}(A), S\sim T\Rightarrow|S|=|T|\Rightarrow|T|=|S|\Rightarrow T\sim S$

传递性：$\forall S,T,V\in\mathscr{P}(A), S\sim T, T\sim V\Rightarrow|S|=|T|,|T|=|V|\Rightarrow|S|=|V|\Rightarrow S\sim V$

商集：$\{[\phi],[\{1\}],[\{1,2\}],[\{1,2,3\}],[\{1,2,3,4\}]\}$

其中

$[\phi]=\{\phi\}$

$[\{1\}]=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$

$[\{1,2\}]=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$

$[\{1,2,3\}]=\{\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{1,2,4\},\{1,2,3\}\}$

$[\{1,2,3,4\}]=\{\{1,2,3,4\}\}$

Ch4 9

> $\mathbb{R}$是实数集合，在$\mathbb{R}$上定义关系R. 任给$x,y\in\mathbb{R}$
>
> $$xRy, \text{当且仅当} x \text{与} y \text{相差一个整数}$$
>
> 证明：R是$\mathbb{R}$上的等价关系，列出所有等价类的代表元

自反性：$\forall x\in R, x\text{与}x\text{相差}\ \Rightarrow x\rho x$

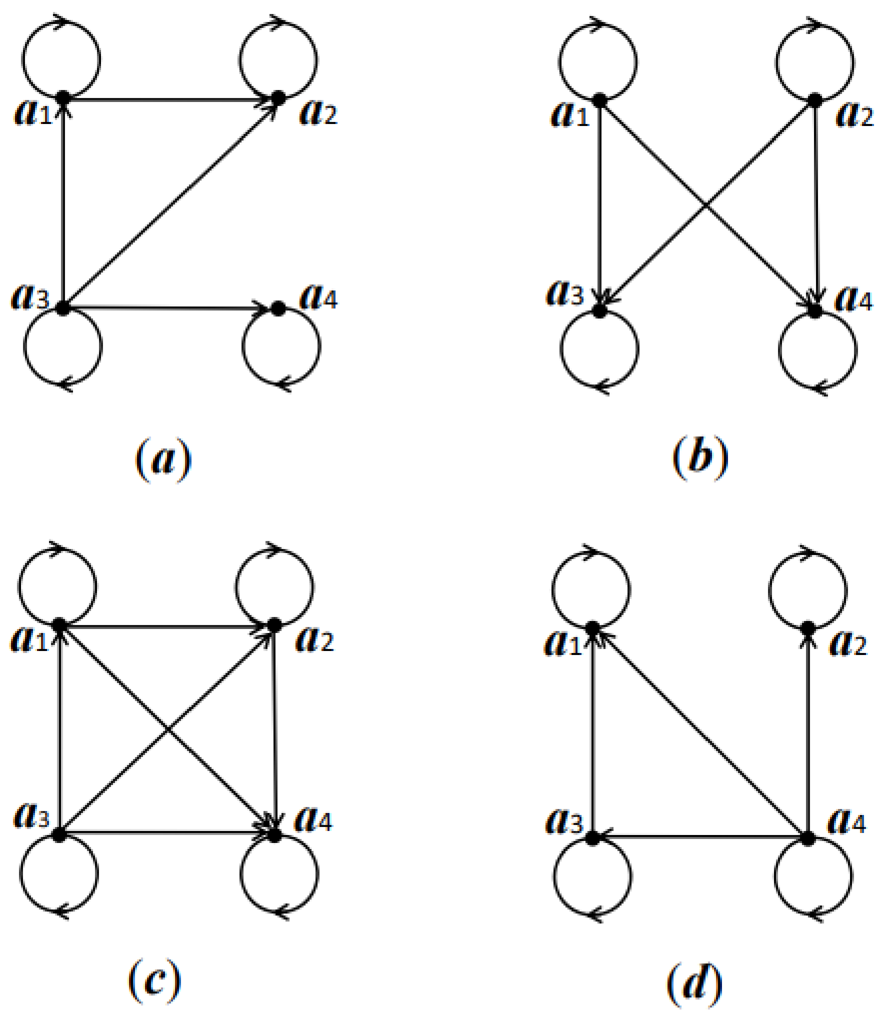
对称性：$\forall x,y\in R, x\rho y\Rightarrow|x-y|=k=|y-x|, k\in\mathbb{N}\Rightarrow y\rho x$

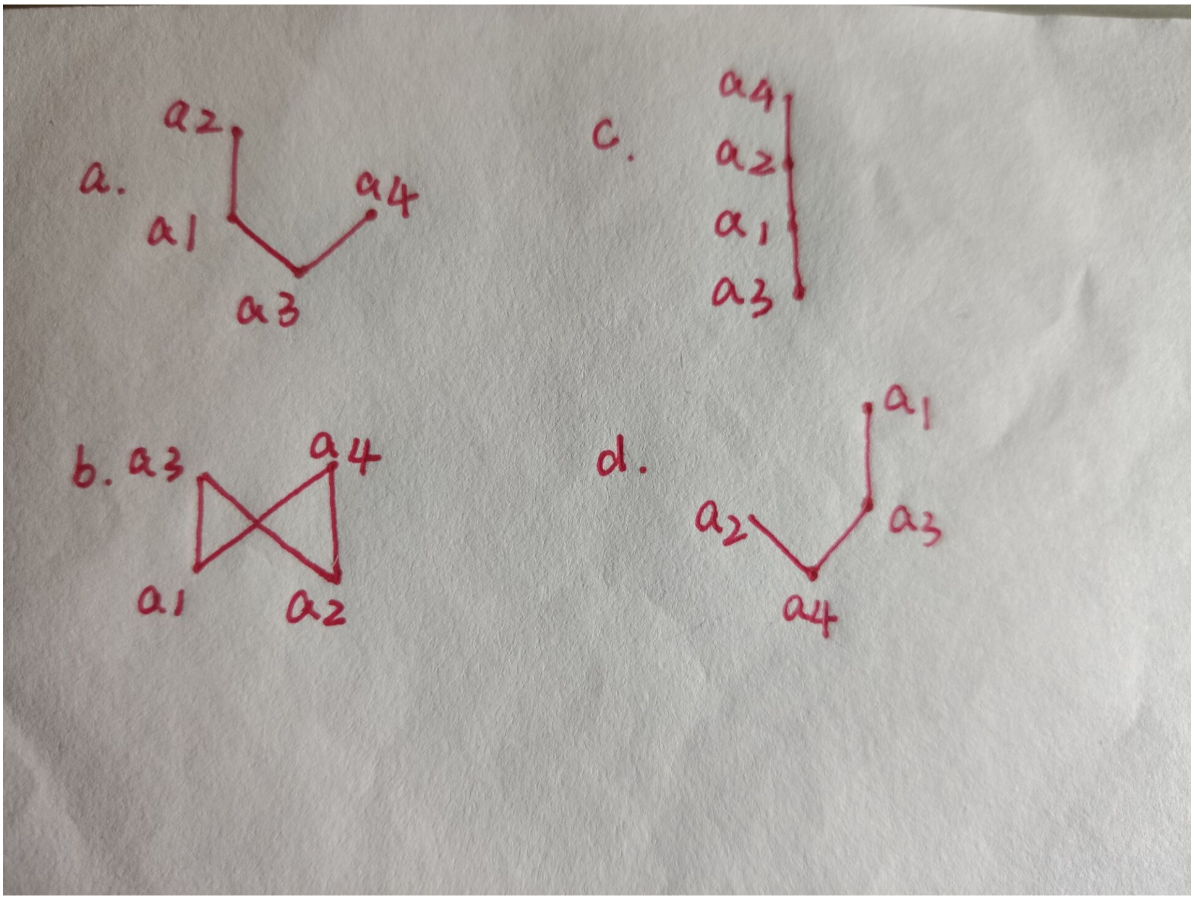
传递性：$\forall x,y,z\in R, x\rho y, y\rho z\Rightarrow x-y=k_1, y-z=k_2(k_1,k_2\in\mathbb{Z})\Rightarrow x-z=k_1+k_2\Rightarrow x\rho z$

全部等价类的代表元：[0,1)上的所有实数

Ch4 13

> 画出每个偏序关系的对应的哈希图





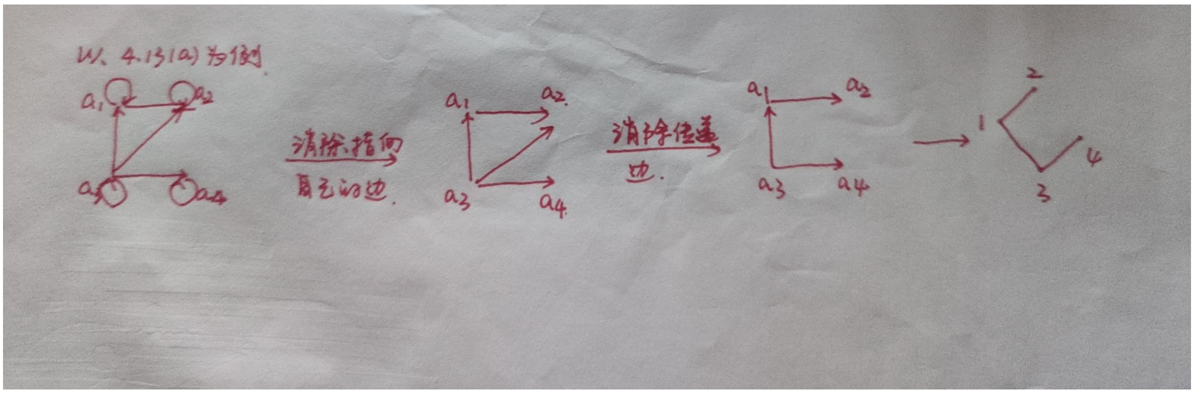
这题错误率比较高，在此给出一些方法：

太长不看版：

第一步：消除指向自己的边

第二步：不断删除走捷径的边，直到不能删除为止

注意:箭头指向控制的元素



在这里copy一下网上正经一点的解法：

[https://www.docin.com/p-598952413.html]:

设集合 $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，$D_A$ 是在 A 上定义的偏序关系，做 $<A, D_A>$ 的哈斯图.

首先， 为 A 中的元素定位.

第一步，

令 $R_1=D_A-I_A$

求 $\mathrm{Ran}(R_1)$

求 $A-\mathrm{Ran}(R_1)$

于是，$A-\mathrm{Ran}(R)$中的元素画在哈斯图的第一层(即哈斯图最下面的层);

第二步，

令 R_2={从 R_1 中去掉以第一层的元素为第一元素的有序对，所剩有序对}

求 $\mathrm{Ran}(R_2)$,

求 $\mathrm{Ran}(R_1)\ -\mathrm{Ran}(R_2)$

于是，$\mathrm{Ran}(R_1)\ -\mathrm{Ran}(R_2)$中的元素画在哈斯图的第二层(自下而上).

第三步

令 R_3={从 R_2 中去掉以第二层的元素为第一元素的有序对，所剩有序对}

求 $\mathrm{Ran}(R_3)$,

求 $\mathrm{Ran}(R_2)-\mathrm{Ran}(R_3)$

于是，$\mathrm{Ran}(R_2)-\mathrm{Ran}(R_3)$中的元素画在哈斯图的第三层.

… … … … … … … …

第 $k-1$ 步

令 R_{k-1}={从 R_{k-2} 中去掉以第 $k-2$ 层的元素为第一元素的有序对，所剩有序对}

求 $\mathrm{Ran}(R_{k-1})$,

求$(R_{k-2})-\mathrm{Ran}(R_{k-1})$

于是，$\mathrm{Ran}(R_{k-2})-\mathrm{Ran}(R_{k-1})$中的元素画在哈斯图的第 $k-1$ 层.

第 k 步，

令 R_k={从 R_{k-1} 中去掉以第 $k-1$ 层的元素为第一元素的有序对，所剩有序对}$=\varnothing$，

于是将 $\mathrm{Ran}(R_{k-1})$中的元素画在第 k 层(最顶层).

其次，将有遮盖关系的顶点连线，就得到$<A$，$D_A>$的哈斯图．

注释：设$<A,\le>$是偏序集，$x,y\in A$，如果 $x<y$，不存在 $z\in A$，使得 $x<z$ 且 $z<y$，则称 y 遮盖 x．

如，在自然数集合 **N** 上的小于关系"＜"，$<1,2>$，$<2,4>\in<$，2 遮盖 1，因为在 1,2 之间不存在另一个自然数 k，使得 $1<k$ 且 $k<2$．而 4 不能遮盖 2，因为存在 $3\in\mathbf{N}$，使得 $2<3$ 且 $3<4$．