

P185——5

$$1 \ (a*b) \oplus (c*d) \leq ((a*b) \oplus c) * ((a*b) \oplus d)$$

$$((a*b) \oplus c) \leq a \oplus c$$

$$((a*b) \oplus d) \leq b \oplus d$$

$$(a*b) \oplus (c*d) \leq (a \oplus c) * (b \oplus d)$$

$$2 \ (a*b) \oplus (b*c) \leq b * (a \oplus c)$$

$$(a*b) \oplus (b*c) \oplus (c*a) \leq (b * (a \oplus c)) \oplus (a*c)$$

$$a*c \leq a \oplus c$$

$$(b * (a \oplus c)) \oplus (a*c) \leq (b * (a \oplus c)) \oplus (a*c)$$

$$(a \oplus b) * (b \oplus c) \geq b \oplus (a * c)$$

$$(a \oplus b) * (b \oplus c) * (c \oplus a) \geq (b \oplus (a * c)) * (c \oplus a)$$

$$(a*b) \oplus (b*c) \oplus (c*a) \leq (a \oplus b) * (b \oplus c) * (c \oplus a)$$

P185——8

1 和 75 互为补元, 3 和 25 互为补元, 5 和 15 没有补元

P185——10

线性序有三个或更多元素

则存在 a , 且 $a \neq 0, 1$

对 a , 存在 b , 使得 $a*b=0$, 有 $b=0$

又 $a \oplus b=1$, 则 $a=1$, 与 $a \neq 1$ 矛盾

得出此线性序不是有补格

P185——13

$$1) \text{ 充分性 } a \leq b \text{ 有 } a*b' = (a*b)*b' = a*(b*b') = 0$$

$$\text{必要性 } a = a*(b \oplus b') = (a*b) \oplus (a*b') = (a*b) \oplus 0 = a*b \text{ 有 } a \leq b$$

$$2) \text{ 充分性 } b' \leq a' \text{ 有 } a' \oplus b = (a' \oplus b') \oplus b = a' \oplus (b \oplus b') = 1$$

$$\text{必要性 } a' \oplus (b * b') = a' \oplus 0 = a' = (a' \oplus b) * (a' \oplus b') = a' \oplus b' \text{ 有 } b' \leq a'$$

P185——14

$\{\varphi(B), \subseteq\}$ 是格, 可知其上两个运算为 \cup 和 \cap

$$\forall f(a), f(b) \in S$$

$$f(a) \cup f(b) = f(a \cup b), \text{ 而 } a \cup b \in \varphi(A) \text{ 即 } f(a \cup b) \in S$$

$\therefore S$ 上 \cup 运算封闭

$$f(a) \cap f(b) = f(a \cap b), \text{ 而 } a \cap b \in \varphi(A) \text{ 即 } f(a \cap b) \in S$$

$\therefore S$ 上 \cap 运算封闭

f 为从 A 到 B 的映射

$$\therefore \forall f(c) \in S, f(c) \in \varphi(B), \therefore S \subseteq \varphi(B)$$

$\therefore \{S, \subseteq\}$ 是 $\{\varphi(B), \subseteq\}$ 的子格

P185——15

$$a < b, f(x) = (x \oplus a) * b$$

由定理 8.5 $b^*(x \oplus a) \geq a \oplus (b * x) \geq a$

又 $b^*(x \oplus a) \leq b$

$\therefore \forall x \in A, a \leq f(x) \leq b$, 且 $f(x) \in A$

$\therefore f(x) = (x \oplus a) * b$ 是从 A 到 B 的映射

$\forall x, y \in A$

$$f(x) * f(y) = (x \oplus a) * b * (y \oplus a) * b = ((x * y) \oplus a) * b = f(x * y)$$

$$\begin{aligned} f(x) \oplus f(y) &= ((x \oplus a) * b) \oplus ((y \oplus a) * b) = (x * b) \oplus (y * b) \oplus a = (b^*(x \oplus y)) \oplus a \\ &= ((x \oplus y) \oplus a) * b = f(x \oplus y) \end{aligned}$$

$\therefore f$ 是同态映射