6. 商群

xiaoga@mail.ustc.edu.cn

P127

3.

解：

D4 = {e, (13), (24), (12)(34), (14)(23), (13)(24), (1432), (1234)}

eH = {e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)}

(13)H = {(13), (1234), (24), (1432)}

$D_4 = eH \cup (13)H, eH \cap (13)H = \varnothing$,为左倍集分解

He={e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)}

H(24)={(24),(1234),(13),(1432)}

$D_4 = He \cup H(24), He \cap H(24) = \varnothing$,为右倍集分解

5.

证明：

[G:H] = |G|/|H| = m

[G:K] = |G|/|K| = n

设 $H \cap K = S$，[G:S] = |G|/|S| = t

$G = Ha_1 \cup Ha_2 \cup ... \cup Ha_m$

$G = Kb_1 \cup Kb_2 \cup ... \cup Kb_n$

$G = Sc_1 \cup Sc_2 \cup ... \cup Sc_t$

$= (H \cap K)c_1 \cup (H \cap K)c_2 \cup ... \cup (H \cap K)c_t$

$= (Hc_1 \cap Kc_1) \cup (Hc_2 \cap Kc_2) \cup ... \cup (Hc_t \cap Kc_t)$

令 $A = \{a_1, a_2, ...a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, $C = \{c_1, c_2, ..., c_t\}$

构造函数 f(x, y)=z, ($x \in A, y \in B, z \in C$)

且 $f : Hx \cap Ky = (H \cap K)z$

$\forall$ $(H \cap K)z = Hz \cap Kz$

总存在 $Hx \cap Ky = (H \cap K)z$，即 f 是满射

$\therefore |c| \le |A| \cdot |B|$，即 $t \le m \cdot n$，即 $[G : H \cap K] \le m \cdot n$

6.

证明：

$\because$ q 为素数，元素阶数只能为 1，q

设 G 中一个 q 阶子群为：I=$\{e, g, g^2, ..., g^{q-1}\}$（ $g^q = e$ ）

若还有另一个 q 阶元 h，生成子群为 H=$\{e, h, h^2, ..., h^{q-1}\}$

则 $h^i \ne g^j$，否则 H=I。

而此时 $H \times I \subseteq G$，

又 $|H \times I| \ge q^2 > |G|$，矛盾。

$\therefore$群 G 不可能有两个不同的 q 阶子群。

9.

证明：

设群 G 只含有一个 n 阶子群 H

$\forall\ g \in G$，则 Hg 为 H 的一个右倍集，|Hg|=n

且 gH 为 H 的一个左倍集，|gH|=n

又 G 只有一个 n 阶子群

则 gH=Hg=H

$\therefore$H 必是正规子群

11.

证明：

$\because\ H_1 \cdot N$，$H_2 \cdot N \subseteq G$

$\forall\ a \in H_2 \cdot N$

都有 $a \cdot H_1 \cdot N = H_1 \cdot N \cdot a$

所以 $H_1 \cdot N$ 是 G 的正规子群。

又

$H_1 \subseteq H_2$，

$H_1 N \subseteq H_2 N$

$\therefore\ H_1 \cdot N$ 是 $H_2 \cdot N$ 的正规子群。

13.

证明：

$\forall\ f, g \in G$

有(f+g)(x)=f(x)+g(x) $\in G$

且

[(f+g)+h](x)

=(f+g)(x)+h(x)

=f(x)+g(x)+h(x)

=[f+(g+h)](x)

且 e=0，使(f+e)(x)=(e+f)(x)=f(x)

f'=-f，使(f+f')(x)=0=e(x)

$\therefore$G 为群

$\forall\ f, g \in G$

(f+g)(x)=f(x)+g(x)=g(x)+f(x)=(g+f)(x)

$\therefore$<G,+>为交换群

且 $f : z \to z / <2>, z / <2> = \{2, 4, 6, ..., 2n\}, 2^n = e$

$\therefore$对非 0 元素 f，$f^2 = (f + f)(x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$

又 f(x)={2,4,6,…,2n}

$\therefore 2f(x)=f(x)$

$\therefore$ 其阶为 2.