代数结构第二次作业答案参考

习题二 3(1),5,9(2) 习题二 18(3),19(4)

注：gcd(x,y)为 x 和 y 的最小公因数

3(1).求 **x** 和 **y** 使得 **314x+159y=1**

解：

由定理 2.3 提供的辗转相除算法得到关系式

314=159*1+155

159=155*1+4

155=4*48+3

4=3*1+1

∵gcd(314,159)=1,

由定理 2.2 知该方程有整数解。

于是 1=4-3*1

=4-(155-4*38)

=(159-155)*39-155

=159*39-40*(314-159)

=79*159-40*314

方程 314x+159y=1 的一个特解为 x=-40,y=79

由定理 2.6 知通解为 x=-40+159t, y=79-314t 其中 t 为整数。

(*不要求给出通解)

完。

5.证明：若对于某个 **m** 有 **10|(3^m+1).**则对所有 **n>0, 10|(3^{m+4n}+1).**

证明如下：

∵ $10|(3^m+1)$

∴ $3^m\equiv 9 \pmod{10}$

又 ∵ $3^{4n}\equiv 81^n \pmod{10} \equiv 1 \pmod{10}$

∴ $3^{m+4n}\equiv 9 \pmod{10}$

∴ $10|(3^{m+4n}+1)$.

证毕。

9(2).求方程 **2x+y=2** 的所有整数解**.**

解：易知其特解为 x=1,y=0.

∵gcd(2,1)|2

∴该方程的通解为 x=1+t,y=-2t.其中 t 为整数.

完。

18(3).解同余方程：**4x≡6(mod 18)**

解：∵gcd(4,18)|6,

∴该方程有通解 $x=x_0+\frac{18}{\gcd(4,18)}t \pmod{18}$

$= x_0+9t \pmod{18}$，其中 $0 \leqq t \leqq 1$,

x_0 是同余方程 $2x \equiv 3 \pmod 9$ 的特解。

易知 $x_0=6$，

该同余方程的解为 $x=6，15 \pmod{18}$.

完。

19(4).求解同余方程组：

$$\begin{cases} 2x \equiv 1 \pmod 5 \\ 3x \equiv 2 \pmod 7 \\ 4x \equiv 1 \pmod{11} \end{cases}$$

解：由 gcd(2,5)=1 可知：$2x \equiv 1 \pmod 5$ 等价于 $x \equiv 3 \pmod 5$

由 gcd(3,7)=1 可知：$3x \equiv 2 \pmod 7$ 等价于 $x \equiv 3 \pmod 7$

由 gcd(4,11)=1 可知：$4x \equiv 1 \pmod{11}$ 等价于 $x \equiv 3 \pmod{11}$

于是变为求解该方程组 $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 5 \\ x \equiv 3 \pmod 7 \\ x \equiv 3 \pmod{11} \end{cases}$

令 M=5*7*11=385，由定理 2.9,

$77b_1 \equiv 1 \pmod 5$

$55b_2 \equiv 1 \pmod 7$

$35b_3 \equiv 1 \pmod{11}$

$b_1=3,\ b_2=6,\ b_3=6$

$a_1=3,\ a_2=3,\ a_3=3$

X=77*3*3+55*6*3+35*6*3=3 (mod 385) 是方程组的解。

完。