代数结构第七次习题参考答案

梁后军
ahlhj@mail.ustc.edu.cn

Page 90,　2

设 Ix={(x,x)| x∈Z}

(1)　R1=IxU{　(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)}

R1 具有自反性，对称性，但无传递性。(3,1) ∈ R1，(1,2) ∈ R1 但（3，2）∉ R1

（2）

R2=IxU{（1，2）}，

R1 具有自反性，传递性，但无对称性。例如（1，2）∈ R2 但（2，1）∉ R2。

（3）

R3={（1，1）}

R3 具有对称性，传递性，但无自反性。例如（2，2）∉ R3，（3，3）∉ R3　。

5.　证明 R'=I_AUR,是 R 的自反闭包。

证.对任意 x∈ A,因（x,x）∈I_A,故（x,x）∈ R'，即 R'在 A 上是自反的。

　又 R⊆ I_AUR=> R⊆ R'.

若有自反关系 R''且 R''⊇R,因 R'' 是自反的=> R''⊇I_A,于是 R''⊇ I_AUR= R'。

⇨　R' 是包含 R 的最小自反关系。

Page 90,　7.

证。

1) 对所有 m∈p(A),有|m|=|m|=>m~m=>~是自反的.
2) 若 p,q∈p(A),且 p~q

则|p|=|q|=>|q|=|p|=> q~p=>~是对称的.

3) 若 e,f,g∈p(A),且 e~f, f~g

　则|e|=|f|,|f|=|g|=>|e|=|g||=>e~g=>~是传递的.

4) 由 1）2）3）知~是 p(A)上的等价关系。

Page 90,　8.

证。

　1）对所有 a∈R*,因 a≠0=>a●a>0=>aρa=>ρ是自反的.

2) 若 x,y∈R*,xρy=>x●y>0=>y●x>0=>yρx=>ρ是对称的.

3) 若 x,y,z∈R*, xρy, yρz=> x●y>0, y●z >0=>x 与 y 同号，y 与 z 同号=> x 与 z 同号 => x●z>0=> xρz=>ρ是传递的.

　由 1）2）3）知ρ是 R*上的等价关系。

　两个等价类为正实数集和负实数集，代表元为某一正实数和某一负实数。

Page 91, 9.

证。1）对所有 $x \in R$,有 $x-x=0 \in Z$=> $x \rho x$=> ρ 是自反的.

2) 若 $x,y \in R$,

$x \rho y$=>$x-y=k1(k1 \in Z)$ => $y-x= -k1(-k1 \in Z)$ =>$y \rho x$=> ρ 是对称的.

3) 若 $x,y,z \in R$,

$x \rho y$, $y \rho z$ => $x-y=k1(k1 \in Z)$,$y-z=k2(k2 \in Z)$ =>$x-z=k1+k2=k3(k3 \in Z)$ => $x \rho z$=> ρ 是传递的.

由 1）2）3）知 ρ 是 R 上的等价关系。

代表元为[0,1）.

Page 91, 11.

证。1）对所有 $x,y \in A$,$R_1 \in B$,

若 $x R_1 y$ 则必有 $x R_1 y$=> $R_1 \leq R_1$=>$\leq$是自反的.

2) 对所有 $x,y \in A$, $R_1, R_2, \in B$，$R_1 \leq R_2$ 且 $R_2 \leq R_1$

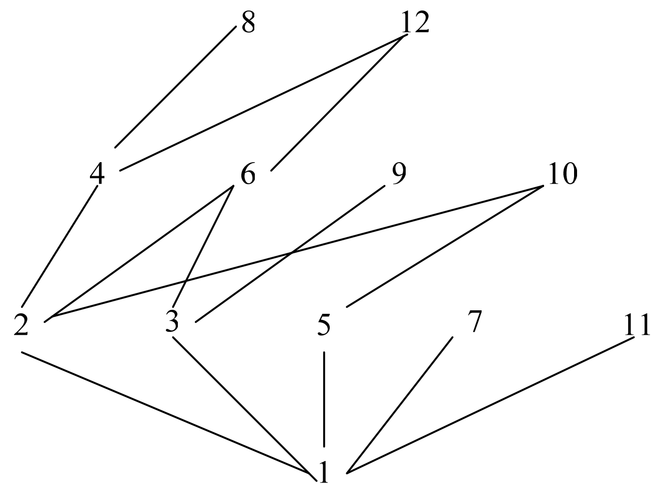
=>若 $x R_1 y$ 则必有 $x R_2 y$ 且若 $x R_2 y$ 则必有 $x R_1 y$=> $R_1= R_2$=>$\leq$是对称的

3) 对所有 $x,y \in A$, $R_1, R_2, \in B$

$R_1 \leq R_2$， $R_2 \leq R_3$ =>若 $x R_1 y$ 则必有 $x R_2 y$, 而 $x R_2 y$ 则必有 $x R_3 y$=>若 $x R_1 y$ 则必有 $x R_3 y$=> $R_1 \leq R_3$=>$\leq$是传递的.

由 1）2）3）知$\leq$是 A 上的等价关系。

Page 91, 12. (2)



Page 91, 13. (3)