代数结构第十次习题参考答案

梁后军

ahlhj@mail.ustc.edu.cn

page113， 10

证：1）对任 $g\in G$ 有 $e*g=g*e \Rightarrow e\in H$, 即 H 是 G 的非空子集。

2）对任 $a,b \in H$, $(a*b)*g=a*(b*g)=a*(g*b)=(a*g)*b=(g*a)*b=g*(a*b) \Rightarrow a*b \in H$

即 H 是封闭的。

3） 若 $a\in H$,则对于 $g\in G$, 有 $a*g=g*a \Rightarrow g=a^{-1}*g*a \Rightarrow g*a^{-1}=a^{-1}*g*a*a^{-1}=a^{-1}*g$ $\Rightarrow a^{-1}\in H$

由 1）2）3）知<H,*> 是 <G, *>的子群。

page113， 12

<{ e }, *>, <{ e, a }, *>, <{ e, b }, *>, <{ e, c }, *>,

<{ e, a ,b,c}, *>

page114， 15

设 $G=\{ g^0 =e , g^1 , g^2 , g^3 , g^4 , g^5 \}$

由 104 页定理 5.12 知子群 $H(H=<g^s>)$的阶$|H|=n/(n,s)$

g^s 是 G 的生成元$\Leftrightarrow(n,s)=1 \Rightarrow g^1 , g^5$ 为 G 的 6 阶生成元。

各子群：

$<\{ g^0 =e \}, *>$, $<\{ g^0 =e , g^3\},*>$, $<\{ g^0 =e , g^2 , g^4\},*>$, G

page114， 18

证：设 n=dm, G=<a> ,则 a^m 的阶为 d,$\{ a^m , a^{2m} , a^{3m} ,\ldots, a^{(d-1)m} , e \}$是 G 的一个 d 阶子群。

设 H 是 G 的任一 d 阶子群，由于 $H\subseteq G \Rightarrow H$ 中的元素都是 a 的幂次方。若能证明 H 中的元素都是由 a^m 所生成的，则 H 就只能是$\{ a^m , a^{2m} , a^{3m} ,\ldots, a^{(d-1)m} , e \}$了。

若 d=1,则必有唯一的平凡子群<{e},*>.

若 d>1. 则 H 中必有 a^s ,其中 s 是 H 中元素的最小幂次且 $s\neq 1$, 即 H 中的元素都是由 a^s 生成的。设 n=st+r, $0\leq r<s$.

$a^r = a^n a^{-st} = (a^s)^{(-t)} \in H \Rightarrow r=0 \Rightarrow$ s|n. 故 a^s 的阶为 $d=n/s \Rightarrow s=n/d=m \Rightarrow H$ 是以 a^m 为生成 元的 d 阶子群 .

由 H 的任意性知原命题成立。

page114 , 21

证：1）由于偶置换与偶置换的合成仍为偶置换=>Sn 的某些子群可以全部由偶置换构成。

2）由于奇置换与奇置换的合成为偶置换，

若某子群含有奇置换则必含偶置换。设此子群为 $D=\{p_1,p_2, \ldots, p_m, q_1,q_2,..,q_n\}$；

p_i , $i=1,2,.., m$, 为 奇置换 q_j ,$j=1,2,.., n$, 为偶置换。
令 $A=\{ p_1,p_2, \ldots, p_m\}$为 奇置换的集合， $B=\{ q_1,q_2,..,q_n \}$为偶置换 的 集合。
因奇置换与奇置换的合成为偶置换=> $p_1 \circ p_i \in B$.
由 $p_1 \circ p_i$ 各不相同且 D 是群=>m<=n
因奇置换与偶置换的合成仍为奇置换=> $p_1 \circ q_j \in A$
由 $p_1 \circ q_j$ 各不相同且 D 是群=>n<=m
于是 m=n， 即奇置换与偶置换各占一半。