第8次作业答案

ch6

6.9

> 如果群G中含有一个某阶子群，那么该群必是正规子群。

对于任意$g \in G$考虑集合$g'Hg$，首先由封闭性，$g'Hg \subseteq G$成立，另外对任意$g'hg \in H$，有$g'h'g \in H$且$g'h'g * g'hg = g'hg * g'h'g = e$成立，所以$g'Hg$是子群，另外对于$h_1, h_2 \in H$，有$g'h_1g = g'h_2g \Rightarrow h_1 = h_2$，所以定义$f: H \to g'Hg$满足$f(h) = g'hg$，则$f$是双射（满射性显然），所以$|H| = |g'Hg|$，即$g'Hg$与$H$同阶，由于$H$唯一，得到$H = g'Hg$，于是对任意$g \in G, h \in H$有$g'hg \in g'Hg = H$，所以$H$是正规子群。

6.13

> 在$G = \{f|f: Z \to Z/(2)\}$ 上定义运算+.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

> 证明：<G,+>是交换群，并且非零元素的阶为2.

对$\forall f, g \in G$,满足对$x \in Z, (f+g)(x) = f(x) + g(x) \in Z/(2)$,有封闭性

对$\forall f, g, h \in G, (f+(g+h))(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x)) = ((f+g)+h)(x)$,满足结合律

存在单位元e，满足对任意$x \in Z, e(x) = [0]$,有对任意$a \in G, e(x) + a(x) = a(x) + e(x)$

对$\forall f \in G$存在逆元为其本身，使得$(f+f)(x) = 2f(x) = [0] = e(x)$

同时又有$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$

所以$< G, + >$为交换群，由逆元的性质可知，非零元素的阶为2

> 注意：证明交换群之前先需要证明群

6.15

> 令$G = \{A|A \in (Q)_n, |A| \neq 0\}$, G对于矩阵乘法构成群. $f: G \to R^*, f(A) = |A|$.证明：f是从群G到非零实数乘群R^*的同态映射。求$f(G)$和$Kerf$。

由线性代数知识知：$\forall A, B \in G, |AB| = |A||B|$,即$\forall f(AB) = f(A)f(B)$,故$f$为同态映射.

$$f(G) = \mathbb{Q}^*$$

$$Ker\ f = \{A \in G|\ |A| = 1\} = SL_n(\mathbb{Q})$$

注：$f(G)$指f的值域，以及不要像“$\{|A| \mid A \in (\mathbb{Q})_n, |A| \neq 0\}$”一样把值域的定义抄一遍，而是要计算出来。

6.17

> $G=<a>$ 是n阶循环群，$G'=<b>$ 是m阶循环群，证明：
>
> $m|nk \leftrightarrow \exists\phi: G\to G'$ 是同态映射并且 $\phi(a)=b^k$.

“$\Leftarrow$”：
若$\exists\varphi: G\to G'$是同态映射且$\varphi(a)=b^k$,则

$$b^{nk}=(\varphi(a))^n=\varphi(a^n)=\varphi(e_G)=e_{G'}$$

而m为循环群$G'=\langle b\rangle$的阶,故$m|nk$
“$\Rightarrow$”：
若$m|nk$,则取$\varphi: G\to G', \varphi(a^i)=b^{ik}$, $i=0,1,...,n-1$,由于

$$\forall a^i,a^j\in G, \varphi(a^i*a^j)=\varphi(a^{i+j})=b^{(i+j)k}=b^{ik}*b^{jk}=\varphi(a^i)*\varphi(a^j)$$

故φ即为所求同态映射.

6.20

> 在群G中，a,b是G中的元素，称$a'*b'*a*b$为G的换位元。证明：
>
> (1)G中的所有有限个换位元乘积构成G'， G'是G的正规子群；
>
> (2)G/G'是交换群；
>
> (3)若N是G的正规子群并且G/N是交换群，那么G'是N的子群.

(1)由于有限个换位元乘积的乘积仍为有限个换位元的乘积,故G'关于G中运算具有封闭性，且$\forall \prod_{i=1}^{n}(a_i'*b_i'*a_i*b_i)\in G'$,有

$$(\prod_{i=1}^{n}(a_i'*b_i'*a_i*b_i))'=\prod_{j=n}^{1}(b_j'*a_j'*b_j*a_j)\in G'$$

故$G'\le G$.

又由于$\forall g\in G, \prod_{i=1}^{n}(a_i'*b_i'*a_i*b_i)\in G'$,都有

$$g'*(\prod_{i=1}^{n}a_i'*b_i'*a_i*b_i)*g=\prod_{i=1}^{n}((g'*a_i*g)'*(g'*b_i*g)'*(g'*a_i*g)*(g'*b_i*g))\in G'$$

故$G'\lhd G$.
(2)即需证明$\forall g,h\in G, gG'\cdot hG'=hG'\cdot gG'$,即只需证明$g*h\in(h*g)G'$.事实上,由于$g'*h'*g*h\in G'$且$g*h=(h*g)*(g'*h'*g*h)$,上式成立.
(3)由于G'由换位元生成，只需证明符合条件的N包含G的所有的换位元：因为G/N为交换群，所以$\forall a,b\in G, (a*b)N=(b*a)N$,故$a'*b'*a*b=(b*a)'*(a*b)\in N$,证毕.

注：这题有些同学误以为(1)中的子集G'是换位元的集合(然后封闭性当然没法证了……)；以及老师上课强调过要证正规子群首先需要证明它是一个子群。
