HW 13

8.18

> 证明：在布尔代数中，$x \preceq y \Leftrightarrow y' \preceq x'$。

解：布尔代数$\langle A,*,\oplus,',0,1\rangle$对应的$\langle A,*,\oplus\rangle$是格布尔格，因此由定理8.2得

- $x \preceq y \Leftrightarrow x * y = x$;
- $y' \preceq x' \Leftrightarrow y' \oplus x' = x'$

因此只需证，$x * y = x \Leftrightarrow y' \oplus x' = x'$，即证$y' \oplus x' = (x * y)'$，

又因为布尔代数满足交换律故即证$x' \oplus y' = (x * y)'$，由定理8.9，即摩根定律可得。

> 注：布尔代数就是由有补分配格(布尔格)诱导出来的代数系统，所以它满足格的性质，同时满足分配律，有界性，有补元

8.19

> $\langle A_1,*,\oplus,',0,1\rangle$与$\langle A_2,\wedge,\vee,^-,\tilde{0},\tilde{1}\rangle$是两个布尔代数。证明他们的直积$\langle A_1 \times A_2,\tilde{*},\tilde{\oplus},^\circ,0,1\rangle$是布尔代数

1. 证明交换律：$(a_1,a_2)\tilde{*}(b_1,b_2) = (b_1,b_2)\tilde{*}(a_1,a_2); (a_1,a_2)\tilde{\oplus}(b_1,b_2) = (b_1,b_2)\tilde{\oplus}(a_1,a_2)$
   - $(a_1,a_2)\tilde{*}(b_1,b_2) = (a_1 * b_1, a_2 \wedge b_2) = (b_1 * a_1, b_2 \wedge a_2) = (b_1,b_2)\tilde{*}(a_1,a_2)$
   - 同理可证，$(a_1,a_2)\tilde{\oplus}(b_1,b_2) = (b_1,b_2)\tilde{\oplus}(a_1,a_2)$
2. 证明分配律：$(a_1,a_2)\tilde{*}(b_1,b_2)(\tilde{\oplus}(c_1,c_2)) = [(a_1,a_2)\tilde{*}(b_1,b_2)]\tilde{\oplus}[(a_1,a_2)\tilde{*}(c_1,c_2)]$
   - $(a_1,a_2)\tilde{*}(b_1,b_2)(\tilde{\oplus}(c_1,c_2)) = (a_1 * b_1, a_2 \wedge b_2)\tilde{\oplus}(c_1,c_2) = (a_1 * b_1 \oplus c_1, a_2 \wedge b_2 \vee c_2)$
   - $[(a_1,a_2)\tilde{*}(b_1,b_2)]\tilde{\oplus}[(a_1,a_2)\tilde{*}(c_1,c_2)] = (a_1 * b_1, a_2 \wedge b_2)\tilde{\oplus}(a_1 * c_1, a_2 \wedge c_2) = ((a_1 * b_1) \oplus (a_1 * c_1), (a_2 \wedge b_2) \vee (a_2 \wedge c_2)) = (a_1 * b_1$
   - 另一条分配律同理可证
3. $(0,\tilde{0}),(1,\tilde{1}) \in A_1 \times A_2$, 对于$A_1 \times A_2$中的任意元素$(x,y)$
   - $(x,y)\tilde{*}(1,\tilde{1}) = (x,y)$
   - $(x,y)\tilde{\oplus}(0,\tilde{0}) = (x,y)$
4. 对于$A_1 \times A_2$中的任意元素(x,y), 存在$(x,y)^\circ = (x',\bar{y}) \in A_1 \times A_2$, 使得$(x,y)\tilde{*}(x',\bar{y}) = (0,\tilde{0}); (x,y)\tilde{\oplus}(x',\bar{y}) = (1,\tilde{1})$
5. 综上直积$\langle A_1 \times A_2,\tilde{*},\tilde{\oplus},^\circ,0,1\rangle$是布尔代数

> 注：证明布尔代数的步骤：
>
> 1. 证明交换律
> 2. 证明分配律
> 3. 找到乘法单位元和加法单位元
> 4. 找到元素的补元(**注意不是逆元**)

8.22

> $\langle\{1,2,3,4,6,12\},|\rangle$和$\langle\{1,2,3,4,6,8,12,24\},|\rangle$是布尔代数吗?

解：

1. 不是。整除关系的$*,\oplus$分别代表着最大公因子和最小公倍数，即$a,b \in A, a * b = (a,b); a \oplus b = [a,b]$，单位元分别为$12$和$1$，但是2没有补元，故不是布尔代数。
2. 不是。同上。

> 对于整除关系来说，$*,\oplus$分别代表着最大公因子和最小公倍数，即最大下界和最小上界