5. 群论初步

xiaoga@mail.ustc.edu.cn

P113

12.

解：

K4 的所有子群为：

{e}, {e, a}, {e, b}, {e, c}, {e, a, b, c}

15.

解：

设<G, *> = <a>

$G=\{e,a,a^2,a^3,a^4,a^5\}$

G 的生成元为 a 或 a^5

所有子群为{e}，$\{e,a,a^2,a^3,a^4,a^5\}$，$\{e,a^2,a^4\}$，$\{e,a^3\}$

18.

证明：

设 G=<a>

存在性：

设 m=n/d，

由定理 5.10

a^m 的阶为 d

$\therefore H=\{(a^m)^n \mid n\in Z\}$ 为 G 的 d 阶子群。

唯一性：

设除了 $<a^m>$ 外，还存在 G 的 d 阶子群，

则该子群为循环群，设其为 $<a^{m'}>$

$\therefore$ n/(n,m’)=d，即(n,m’)=n/d

$m'=s\cdot\frac{n}{d}$, (s,d)=1

把 $<a^m>$ 和 $<a^{m'}>$ 展开

$$<a^m>=\left\{a^{1\cdot\frac{n}{d}},a^{2\cdot\frac{n}{d}},\dots,a^{d\cdot\frac{n}{d}}\right\}$$

$$< a^{m'} >= \left\{ a^{1\cdot s\cdot\frac{n}{d}}, a^{2\cdot s\cdot\frac{n}{d}}, \ldots, a^{d\cdot s\cdot\frac{n}{d}} \right\}$$

{1,2,..,d}为模 d 的完系，(s,d)=1

$\therefore$ {1s,2s,..,ds}也为模 d 的完系

对于$< a^m >$和$< a^{m'} >$，存在双射，使对应的$a^i \in < a^m >$和$a^j \in < a^{m'} >$

有$\frac{i}{n/d} \equiv \frac{j}{n/d} (\bmod d)$， $i \equiv j (\bmod n)$

由于 n 为 a 的阶，则$a^i = a^j$

$\therefore < a^m > = < a^{m'} >$

即 G 的 d 阶子群唯一。

21.

证明：

设$H \le S_n$

则$\sigma_I \in H$

若 H 中无奇置换，则 H 全部由偶置换组成。

若$\exists \sigma_o \in H$，且σ_o为奇置换，

则对$\forall$ 偶置换$\sigma \in H$， $\sigma \cdot \sigma_o \in H$ 为奇置换，

对$\forall$ 奇置换$\sigma_* \in H$， $\sigma_* \cdot \sigma_o \in H$ 为偶置换。

$\therefore$ H 中奇偶置换各占一半。

24.

解：

与 K4 同构的 Sn 子群为

$\{\sigma_I, (a,b), (c,d), (a,b)(c,d)\}$，其中$\sigma_I$为恒同映射， $a,b,c,d \in N$ ，a,b,c,d 不等。

25.

证明：

设<G,*>为无限循环群，则可设 G=<a>

且不存在有限的 N，使$a^N = e$。

任取 G 的一个非{e}子群<S,*>,

G 为循环群，

$\therefore$ S 为循环群，设 S=$<a^i>$

若 S 为有限集

则$\{(a^i)^1, (a^i)^2, \ldots, (a^i)^n, \ldots\}$中必有相等的两项。

设$(a^i)^j = (a^i)^k$， 则$a^{ij} = a^{ik}$

$\therefore\ a^{i(k-j)}=e$

这与不存在有限 N 使得 $a^N=e$ 矛盾。

$\therefore$ S 为无限集，<S,*>为无限循环群。