HW9 参考答案

Ch7

1(3)

非环，因为<R,`*`>中不含单位元e(无法保证a`*`e = |a|·e = a等式成立)。

2(4)

{[1],[5]}

3

证明：设<R,+>的生成元为r, 任取a，b$\in$R，

设$a = r^m$， $b = r^n$

$$a\bullet b = r^m \bullet r^n = \underbrace{(r+r+\cdots\cdots+r)}_{m个r} \bullet \underbrace{(r+r+\quad +r)}_{n个r} = mnr^2$$

$$b\bullet a = r^n \bullet r^m = \underbrace{(r+r+\cdots\cdots+r)}_{n个r} \bullet \underbrace{(r+r+\quad +r)}_{m个r} = mnr^2$$

于是a$\bullet$b =b$\bullet$ a,<R,+,$\bullet$>是交换环，得证！

5(3)

对于$\forall a_1,a_2,b_1,b_2 \in \mathbb{Q}$，若$(a_1+b_1\sqrt{3})\cdot(a_2+b_2\sqrt{3})=0$，则有$a_1=a_2=b_1=b_2=0$，则没有零因子，是整环；

又对于$\forall a_1,a_2,b_1,b_2 \in \mathbb{Q}$，若$(a_1+b_1\sqrt{3})\cdot(a_2+b_2\sqrt{3})=1$，则$a_2=\frac{a_1}{a_1^2-3b_1^2}, b_2=\frac{b_1}{3b_1^2-a_1^2}$，又$a_1+b_1\sqrt{3}$是非零元素，则有$a_1^2\neq 3b_1^2$，则一定有$a_2,b_2\in\mathbb{Q}$，即环的所有非零元素都有逆元，是域。

7

证明：a*b 是零因子，且环是交换环,存在非零 c,d

所以由　c*(a*b)=0 且(a*b)*d=0

可以推出 a*(c*b)=0 且(b*d)*a=0。

反证，若 a 与 b 都不是零因子，则有 c*b 和 b*d 都不为零，则与上式 a*(c*b)=0 且(b*d)*a=0 矛盾。所以或者 b 是零因子。

证毕。