代数结构第十一次习题参考答案

金海旻
jhm1213@mail.ustc.edu.cn

5-25.证明：无限循环群的子群，除{e}外都是无限循环群。

证明：设无限循环群为<g>，其子群为皆为循环群。显然{e}为其子群。

由于其余的子群为循环群不妨设其中某一子群是<a>，$a=g^r$.

若子群<a>是有限群，则存在n>0 使得$a^n=a$,

则有$g^{nr}=g^r$，这与<g>是无限循环群矛盾。

所以<a>是无限循环群。

证毕。

5-26．在群<G,*>中定义新的二元运算•，a•b=b*a。证明<G，•> 是群，并且<G,*> 与<G，•>同构。

证明：1. $\forall a,b\in G, a\cdot b=b*a\in G$

2. $\forall a,b,c\in G, a\cdot b\cdot c=c*(a\cdot b)=c*b*a=b\cdot c*a=a\cdot(b\cdot c)$

3. $\forall a\in G$，群<G,*>中的单位元 e 使得 $a*e=e\cdot a=a$，所以$\exists e$ 使得 $a\cdot e=e\cdot a=a$

4. $\forall a\in G$，群<G,*>中$\exists a'$使得 $a*a'=a'\cdot a=e=a'*a=a\cdot a'$.

综上，<G，•>是群

在群$<G_1,*>$和$<G_2,\ \cdot>$定义映射f（a）=a'．以下证明f：$G_1\text{-->}G_2$是双射且满足$f(a*b)=f(a)\cdot f(b)$.

1.$f(a*b)=(a*b)'=b'*a'=a'\cdot b'=f(a)\cdot f(b)$

2.f是满射，对于G_2中的任一元素a 都能在G_1中找到a'使得f(a')=a''=a.

f是单射，对于$a\neq b\in G_1$,若f(a)=a'=f(b)=b',则a'=b'=>a=b矛盾

综上，群$<G_1,*>$和$<G_2,\ \cdot>$同构

6-1． H 是交换群 G 的子群，证明 H 的每个左陪集也是一个右陪集。

证明： $aH=\{a*h|h\in H\}=\{h*a|h\in H\}=Ha$

6-3. 写出 A4 关于 H={e,(12)(34),(14)(23),(14)(23)} 的左陪集分解和右陪集分解。

解：A4={e,(12)(34),(13)(24),(14)(23),(2 4 3), (2 3 4),(1 2 3), (1 2 4), (1 3 2), (1 3 4), (1 4 2), (1 4 3)}

H 的左陪集分解为：

H, {(1 2 3), (1 3 4), (1 4 2), (2 4 3)}, {(1 2 4), (1 3 2), (1 4 3), (2 3 4)}

6-5. H,K 是 G 的两个子群， [G:H]=m, [G:K]=n, 证明子群$H\cap K$在 G 中的指数<=m*n

证明：将 H 的左陪集 $a_iH=$\{h1,h2…,hr\}分解为集合 p1,p2,..pj，其中集合 $p_i\subseteq b_iK$ 既 pi 是关于$H\cap K$的一个等价类。每一个 aiH 可以分解为之多 n 个这样的 pi，且一共有 m 个这样的 aiH，因此之多有 mn 个这样的等价类。证毕

6-7. H 是 G 的正规子群。如果 a 和 b 属于 H 的同一陪集中，c 和 d 属于 H 的同一个陪集中，那么 a*c 和 b*d 属于 H 的同一个陪集

证明： $a*c*(b*d)'=a*c*d'*b'=a*h_1*b'=a*h_1*b'$ ----------（$h_1,h_2,h_3\in H$）

$h_1=b'*h_2*b$

所以$a*c*(b*d)'=a*b'*h_2=h_3*h_2\in H$

证毕

6-10. H_1和H_2是G的正规子群。证明：$H_1\cap H_2$，$H_1 \cdot H_2$也是正规子群

证明：设$H_1\cap H_2$={h1,h2,....hk}，由H1 和H2 是子群可知，$e\in H_1\cap H_2$。

又由于$hi*hj\in H_1\cap H_2$， 且 由于$hi\in H_1$，所以$hi'\in H_1$。同理$hi'\in H_2$

所以$hi'\in H_1\cap H_2$

所以$H_1\cap H_2$是子群。

又由于$\forall g\in G$ 有 $g*h1=h1*g$ （由 H1 是正规群可知）即

$g\,H_1\cap H_2=H_1\cap H_2\,g$.

综上$H_1\cap H_2$是正规子群

易知$H_1\cdot H_2$={ h1,h2,....hk }是子群。$\forall g\in G$, $g*hi*g'=g*ai*bj*g'(ai\in H1$且$bj\in H2)$

$=ak*g*g'*br(ak\in H1$且$br\in H2)=ak*br\in H_1\cdot H_2$

综上$H_1\cdot H_2$是正规子群。

6-12.H,K 都是群 G 的正规子群并且$H\cap K=\{e\}$。证明：对于任意 $h\in H,k\in K$,都有 $h*k=k*h$

证明：

设 h1,h2,h3 属于 H，k1,k2,k3 属于 K

且满足 h1'*k1*h1=k2---（1）

k1*h1*k1'=h2，

K2=k1*h1=h1'*h2*k1=h3*k1,

所以有 h3=k2*k1'易知 h3 属于$H\cap K$，又由于$H\cap K=\{e\}$，所以 h3=e，

所以 k2=k1

由等式（1）有 k1*h1=k1*h1.