HW 10

7.11

> 求出环$\mathbb{Z}_6$的所有理想

解：$\mathbb{Z}_6=\{[0],[1],[2],[3],[4],[5]\}$，若
I是$\mathbb{Z}_6$的理想,则I一定是加群$<\mathbb{Z}_6,+>$的一个子群,由于加群$<\mathbb{Z}_6,+>$是循环群，所以I也一定是循环群

接下来，我们首先求出$<\mathbb{Z}_6,+>$的所有循环子群：

$$G_1=([0])=\{[0]\}$$
$$G_2=([1])=([5])=<\mathbb{Z}_6,+>$$
$$G_3=([2])=([4])=\{[0],[2],[4]\}$$
$$G_4=([3])=\{[0],[3]\}$$

通过验证G_1,G_2,G_3,G_4均是$\mathbb{Z}_6$的理想

> 先求出所有循环子群，再逐一验证是否为理想

7.12

> 若I_1和I_2是环R的理想，则$I_1\bigcap I_2$，$I_1\bullet I_2$，I_1+I_2都是R的理想，并且$I_1\bullet I_2\subseteq I_1\bigcap I_2$

1. $I_1\bigcap I_2$
   - $I_1\bigcap I_2$是环的非空子集
   - 对$\forall x,y\in I_1\bigcap I_2,\forall r\in R$
     - 减法封闭性
       - $x,y\in I_1\Rightarrow x-y\in I_1$
       - $x,y\in I_2\Rightarrow x-y\in I_2$
       - 故$x-y\in I_1\bigcap I_2$
     - 乘法封闭性
       - $x\in I_1\Rightarrow x\bullet r\in I_1$且$r\bullet x\in I_1$
       - $x\in I_2\Rightarrow x\bullet r\in I_2$且$r\bullet x\in I_2$
       - 故$x\bullet r\in I_1\bigcap I_2$且 $r\bullet x\in I_1\bigcap I_2$
2. $I_1\bullet I_2$
   - $I_1\bullet I_2$是环的非空子集
   - 对$\forall x,y\in I_1\bullet I_2,\forall z\in R$

     不妨设

     $$x=\sum_{k=1}^{n_1}a_{1k}a_{2k}\quad(a_{1k}\in I_1,a_{2k}\in I_2)$$

     $$y=\sum_{i=1}^{n_2}b_{1i}b_{2i}\quad(b_{1i}\in I_1,b_{2i}\in I_2)$$

     - 减法封闭性

$$
\begin{aligned}
x-y &= \sum_{k=1}^{n_1} a_{1k}a_{2k} - \sum_{i=1}^{n_2} b_{1i}b_{2i} \\
&= \sum_{k=1}^{n_1} a_{1k}a_{2k} + \sum_{i=1}^{n_2} (-b_{1i})b_{2i} \\
&= \sum_{j=1}^{n_1+n_2} l_{1j}l_{2j} \in I_1 \bullet I_2
\end{aligned}
$$

$$
l_{1j} = \begin{cases} a_{1j}, & 1 \le j \le n_1 \\ -b_{1(j-n_1)}, & n_1+1 \le j \le n_1+n_2 \end{cases}
$$

$$
l_{2j} = \begin{cases} a_{2j}, & 1 \le j \le n_1 \\ b_{2(j-n_1)}, & n_1+1 \le j \le n_1+n_2 \end{cases}
$$

- 乘法封闭性

$$
x \bullet z = (\sum_{k=1}^{n_1} a_{1k}a_{2k}) \bullet z = \sum_{k=1}^{n_1} a_{1k}(a_{2k} \bullet z) = \sum_{k=1}^{n_1} a_{1k}\tilde{a}_{2k}
$$

$$
z \bullet x = z \bullet (\sum_{k=1}^{n_1} a_{1k}a_{2k}) = \sum_{k=1}^{n_1} (z \bullet a_{1k})a_{2k} = \sum_{k=1}^{n_1} \tilde{a}_{1k}a_{2k}
$$

$$
\text{其中}\tilde{a}_{2k} = a_{2k} \bullet z \in I_2, \tilde{a}_{1k} = z \bullet a_{2k} \in I_1, \text{因此} x \bullet z \in I_1 \bullet I_2, z \bullet x \in I_1 \bullet I_2
$$

3. $I_1 + I_2$
   - $I_1 + I_2$是环的非空子集
   - 对$\forall x, y \in I_1 + I_2, \forall z \in R$

     不妨设

$$
\begin{aligned}
x &= a + b (a \in I_1, b \in I_2) \\
y &= c + d (c \in I_1, d \in I_2)
\end{aligned}
$$

   - 减法封闭性
     - $x - y = (a+b) - (c+d) = (a-c) + (b-d)$
     - $a - c \in I_1, b - d \in I_2$
     - 故$x - y \in I_1 + I_2$
   - 乘法封闭性
     - $x \bullet z = (a+b) \bullet z = az + bz$
     - $z \bullet x = z \bullet (a+b) = za + zb$
     - 因为I_1, I_2都是理想，所以$az, za \in I_1; bz, zb \in I_2$，进而推出 $x \bullet z \in I_1 + I_2$且$z \bullet x \in I_1 + I_2$
4. $I_1 \bullet I_2 \subseteq I_1 \bigcap I_2$
   - 对$\forall r_1 \in I_1, \forall r_2 \in I_2$，因为 I_1, I_2均为理想，所以$r_1 \bullet r_2 \in I_1; r_1 \bullet r_2 \in I_2 \Rightarrow r_1 \bullet r_2 \in I_1 \bigcap I_2$

     而对$\forall x \in I_1 \bullet I_2$, 设$x = \sum_{k=1}^{n} r_{1k}r_{2k}$，由上可知 $r_{1k} \bullet r_{2k} \in I_1 \bigcap I_2$, 而 $< I_1 \bigcap I_2, + >$ 是群,

     由封闭性可知$x \in I_1 \bigcap I_2$，故$I_1 \bullet I_2 \subseteq I_1 \bigcap I_2$

> 注:
>
> 1. 证明理想的步骤
>   - I是环R的非空子集

> - 减法封闭性
> - 乘法封闭性
>
> 2. $I_1 \bullet I_2$的定义

7.13

> 证明$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{Z} \right\}$是$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$的理想。商环$R/I$是由哪些元素构成的？

解：

1. 证明I是R的理想
   - I是R的非空子集
   - 对$\forall \begin{pmatrix} 0 & 2x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$; $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R$
     - $\begin{pmatrix} 0 & 2x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2(x-y) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$
     - $\begin{pmatrix} 0 & 2x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2xc \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$
     - $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2xa \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$
   - 综上I是R的理想
2. 商环R/I是由哪些元素构成的？
   - 商环R/I中的等价类满足 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \in R, \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ 0 & c_1 - a_2 \end{pmatrix} \in I$。即 $a_1 = a_2; c_1 = c_2; b_1, b_2$同奇偶
   - 则$R/I = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + I \middle| a, c \in \mathbb{Z} \right\} \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & c \end{pmatrix} + I \middle| a, c \in \mathbb{Z} \right\}$

> 1. 求商环，就是找等价类，等价类中的任意元素相减属于I，从而确定等价类满足的性质
> 2. 商环的每个元素是一个等价类，是一个集合