第11次作业答案

7.14

> 在高斯整数环$\mathbb{Z}[i]=\{a+bi|a,b\in\mathbb{Z}\}$中,$I=(2+i)$含有哪些元素？$\mathbb{Z}[i]/(2+i)$含有哪些元素？

$I=(2+i)=\{(a+bi)(2+i)|a+bi\in Z[i]\}=\{(2a-b)+(a+2b)i|a,b\in Z\}$

方法1：取I中极小元进行分析

由于$(2+i)(2-i)=5,(2+i)(1+2i)=5i$可知，$5,5i\in I$,从而将Z[i]的实部虚部分割成5的同余类$a+bi,a\in\{[0],[1],[2],[3],[4]\},b\in\{[0],[1],[2],[3],[4]\}$,

再考虑到$2+i\in I$,针对$Z[i]=\{x+yi|x,y\in Z\}$中每个元素，在2+i模的意义下又可以将其分割成5组，如下图所示

	y=[0]	y=[1]	y=[2]	y=[3]	y=[4]
x=[0]	0	3	1	4	2
x=[1]	1	4	2	0	3
x=[2]	2	0	3	1	4
x=[3]	3	1	4	2	0
x=[4]	4	2	0	3	1

方法二

$I=(2+i)=\{(a+bi)(2+i)|a+bi\in Z[i]\}=\{(2a-b)+(a+2b)i|a,b\in Z\}$

显然$0\in I$,当$x+yi\in I$时，$x+yi-0\in I$

若$x+yi\notin I$方程组
$\begin{cases}2a-b=x\\a+2b=y\end{cases}$

无整数解，

解得

$$\begin{cases}a=\dfrac{2x+y}{5}\\b=\dfrac{2y-x}{5}\end{cases}$$

从而$x-2y=r\equiv 1,2,3,4 \pmod 5$

有$(x-r)+yi\in I$ 其中$r\equiv 1,2,3,4 \pmod 5$

而对$x+yi\in I$ 有$r\equiv 0 \pmod 5$

这样就将Z中元素分成5个同余类，分别为

$I,1+I,2+I,3+I,4+I$

7.17

> $F[x]$是数域F上的多项式环。在$F[x]$上定义运算$f(x)\cdot g(x)=f(g(x))$. 则 $<F[x],x,\cdot>$ 是否是环？为什么？

不是环，不满足分配律，可以任意举例

$$f(x)=x^2,g(x)=1,h(x)=1$$
$$f(x)(g(x)+h(x))=f(g(x)+h(x))=f(2)=4$$
$$f(x)g(x)+f(x)h(x)=f(g(x))+f(h(x))=2$$

两者不相等，故不是环

7.22

> 证明：$(3)/(6)$是$\mathbb{Z}/(6)$的理想，并且
>
> $$\frac{\mathbb{Z}/(6)}{(3)/(6)}\cong\mathbb{Z}/(3)$$

$\forall x,y\in(3),r\in Z$，因为$(3)=\{3k|k\in Z\}$,设$m=3k_1,n=3k_2\in(3)(k_1,k_2\in Z)$,则

$m-n=3(k_1-k_2)\in(3)$，由于Z中乘法可交换，任取$r\in Z$所以$rm=3rk_1=3k_1r=mr\in(3)$

所以(3)是Z的理想，同理(6)是Z的理想，又因为$(6)\subseteq(3)$，所以根据电子版书定理7.17得证

7.24

> 令ϕ：$R[x]\to R,\phi(f(x))=\phi(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)=a_0$.
>
> (1)证明ϕ是从环$R[x]$到环R的满同态映射
>
> (2)求$Ker\phi$，并找出与$R[x]/Ker\phi$同构的环。

1

令$f(x)=\sum_{i=0}^n a_ix^i,g(x)=\sum_{i=0}^n b_ix^i$

则$\phi(f(x)+g(x))=\phi(\sum_{i=0}^n(a_i+b_i)x^i)=a_0+b_0=\phi(f(x))+\phi(g(x))$

由由于$\phi(f(x)g(x))=\phi(a_0b_0+(a_1b_0+a_0b_1)x\ldots)=a_0b_0=\phi(f(x))\phi(g(x))$

在$R[x]$中,$1_R=1+\sum_{i=1}^n a_ix^i$,因此有$\phi(1_R)=1$

同时对$\forall a_0\in R$,总有$f(x)=a_0+\sum_{i=1}^n a_ix^i$,$\phi(f(x))=a_0$所以$\phi$是$R[x]\to R$的满同态映射

2

$Ker\phi=\{f(x)|\phi(f(x))=0\}=\{\sum_{i=1}^n a_ix^i|a_1\ldots a_n\in R\}$

所以由环同态基本定理

$R[x]/Ker\phi\cong R$

> 注意：满同态映射单位元不要忘记