第 4 章 二元关系

4.1 基本概念

4.1.1 关系的定义

定义 4.1. 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是集合，$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$的子集$R$称为$A_1$、$A_2$、…、$A_n$间的一个$n$元关系。如果$R = \emptyset$，称$R$为空关系或平凡关系；如果$R = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$，则称$R$为全关系。

如果R是集合A与集合B间的二元关系，则也称作是从A到B的二元关系。此时，R的定义域定义为

$Dom(R) = \{x | x \in A$，且存在$y \in B$，使得$(x, y) \in R\}$.

而R的值域则定义为

$Ran(R) = \{y | y \in B$，且存在$x \in A$，使得$(x, y) \in R\}$.

容易得知，$Dom(R) \subseteq A$，$Ran(R) \subseteq B$。如果$(a, b) \in R$，我们称a与b有关系R，记作aRb；如果$(a, b) \notin R$，我们称a与b没有关系R，记作$a \not R b$。如果$A = B$，则称R为A上的二元关系。

例 4.1. 将整数集合$\mathbb{Z}$上的小于关系记为L。因为$4 < 6$，所以$(4, 6) \in L$，或者$4L6$，但是$(6, 4) \notin L$。

例 4.2. 定义自然数集合$\mathbb{N}$上的整数倍关系M，$(x, y) \in M$当且仅当x是y的整数倍，即

$$xMy \Leftrightarrow \text{存在} k \in \mathbb{N}\text{，使得} x = ky.$$

如果$x \in \mathbb{N}$且$x \not M 2$，则x为奇数。设$p \in \mathbb{N}$且$p > 1$，若任给$q \neq 1$且$q \neq p$，都有$p \not M q$，则意味着p是素数。

例 4.3. 实数集合上的二元关系对应于笛卡尔坐标平面的点集合。例如关系$R = \{(x, y) || x| + |y| \leq 1\}$ 对应于图*4.1*中画阴影的部分。

对比集合A到集合B的映射f与$A \times B$上的二元关系R，尽管它们都可以写成如下的有序对集合的形式：

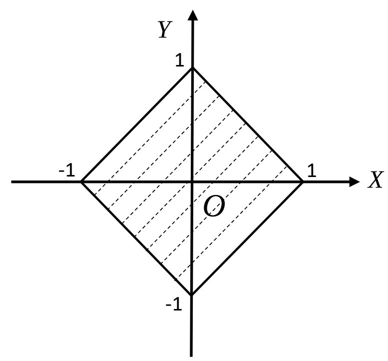

图 4.1: 例4.3对应的图

$$f = \{(x, y)|x \in A, y \in B, \text{并且} f(x) = y\}，$$
$$R = \{(x, y)|x \in A, y \in B, \text{并且} xRy\}。$$

两者看上去非常类似，但是，从映射的定义可知，在f的作用下，A中的每个元素在B中都有一个对应的像。因此，f的定义域是$Dom(f) = A$，但是R的定义域$Dom(R) \subseteq A$。另一方面，对于任给$x \in A$，在f 的作用下，x在B中的像是唯一的，也就说，若$(x, y_1) \in f$且$(x, y_2) \in f$，则有$y_1 = y_2$。但是对于关系R来说，完全有可能存在$x \in A$，$y_1, y_2 \in B$且$y_1 \neq y_2$，使得$(x, y_1) \in R$且$(x, y_2) \in R$。所以，关系是函数的延伸，相对于函数来说，关系表达了集合间更广泛的联系。

由于n元关系可以表达成有序n元组的集合的形式，有些关系也可以采用归纳定义。例如，自然数集合$\mathbb{N}$上的小于关系“L”可以通过下面的形式进行归纳定义：

(1) 基础语句：$(0, 1) \in L$;

(2) 归纳语句：如果$(x, y) \in L$，则$(x, y + 1) \in L$，$(x + 1, y + 1) \in L$;

(3) 终结语句：L由有限次使用规则(1)与(2)生成的有序二元组组成。

4.1.2 关系的性质

定义 4.2. 设R是A上的二元关系，

(1) 如果对于任意$x \in A$，都有xRx，则称R是自反的；

(2) 如果对于任意$x \in A$，都有$x \not R x$，则称R是反自反的；

(3) 如果对于任意$x, y \in A$，若xRy，则一定有yRx，那么称R是对称的；

(4) 如果对于任意$x, y \in A$，若xRy且yRx，则一定有$x = y$，那么称R 是反对称的；

(5) 如果对于任意$x, y, z \in A$，若xRy且yRz，则一定有xRz，那么称R是传递的。

对于集合A上的二元关系R来说，可能存在$x, y \in A$，使得xRx，但$y \not R y$。所以，从上面的定义可以看出，存在二元关系，既不是自反的，也不是反自反的，自反与反自反的性质并不是互补的。其次，对于反对称关系来说，主要指的是，若$x, y \in A$且$x \neq y$，则xRy与yRx不能同时成立。

例 4.4. 将英文字母表记为$\Sigma = \{a, b, \cdots, x, y, z\}$，$\Sigma^*$为$\Sigma$中字母组成的字符串集合，假定$\alpha, \beta \in \Sigma^*$，定义$\Sigma^*$上的二元关系$R_1$、$R_2$、$R_3$，其中：

$\alpha R_1 \beta$，当且仅当α与β长度相等，

$\alpha R_2 \beta$，当且仅当α比β长，

$\alpha R_3 \beta$，当且仅当α的某个真前缀是β的一个真后缀。

例如，设$\alpha = abc$，$\beta = xyz$，$\gamma = xyzab$，则有$\alpha R_1 \beta$，$\alpha \not R_1 \gamma$，$\gamma R_2 \beta$，$\alpha \not R_2 \beta$，$\alpha R_3 \gamma$，$\alpha \not R_3 \beta$。其中，ab是α的真前缀，同时又是γ的真后缀。

由定义知，R_1是自反的；R_2是反自反的；R_3既不是自反的，也不是反自反的。比如说，aaR_3aa，但是$ab \not R_3 ab$。

例 4.5. Σ^*的定义如例*4.4*。设$\alpha, \beta \in \Sigma^*$，定义$\Sigma^*$ 上的二元关系R_4、R_5、R_6，其中：

$\alpha R_4 \beta$，当且仅当α是β的子串，

$\alpha R_5 \beta$，当且仅当α与β有一个相同的非空前缀，

$\alpha R_6 \beta$，当且仅当α与β相等。

例如，设$\alpha = abc$，$\beta = xyz$，$\gamma = xyzab$，$\delta = xyz$，则有$\alpha R_4 \alpha$，$\beta R_4 \gamma$，$\alpha \not R_4 \beta$，$\beta R_5 \gamma$，$\alpha \not R_5 \beta$，$\beta R_6 \delta$，$\alpha \not R_6 \beta$。

由定义知，R_4是反对称的；R_5是对称的；R_6既是对称的，也是反对称的。假设二元关系R 既是对称的，也是反对称的，那么若$\alpha \neq \beta$，则α与β一定不满足关系R，即$\alpha \not R \beta$。

例 4.6. Σ^*的定义如例4.4。设$\alpha,\beta\in\Sigma^*$，定义Σ^* 上的二元关系R_7、R_8、R_9，其中：

$\alpha R_7\beta$，当且仅当α是β的前缀，

$\alpha R_8\beta$，当且仅当α是β的子字，

$\alpha R_9\beta$，当且仅当α与β有相同的字符。

由定义知，R_7与R_8是传递的；但R_9不是传递的。例如，设$\alpha=abc$，$\beta=xyzab$，$\gamma=xyz$，则有$\alpha R_9\beta$，$\beta R_9\gamma$，但是，$\alpha \not R_9\gamma$。

4.1.3 关系的表示

在关系的定义中，我们曾用有序二元组的形式来表示二元关系。假设R是集合A到B上的二元关系，可以将R表示为

$$R=\{(x,y)|x\in A,y\in B,xRy\}.$$

本节介绍另外两种二元关系的表达形式，即关系矩阵与关系图。

定义 4.3. 设R是从有限集合A到有限集合B的二元关系，其中$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$、$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，定义矩阵$M_R=(m_{ij})_{m\times n}$，其中

$$m_{ij}=\begin{cases}0 & \text{当}a_i\not R b_j\text{时},\\ 1 & \text{当}a_iRb_j\text{时}.\end{cases}$$

我们称M_R是关系R的关系矩阵，M_R的行数与列数分别为集合A中的元素个数与集合B中的元素个数。

例 4.7. 设$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$、$B=\{b_1,b_2,b_3\}$，R是集合A到集合B上的关系，

$$R=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_2),(a_3,b_1),(a_3,b_3),(a_4,b_1),(a_4,b_2)\}.$$

R的关系矩阵M_R是4×3阶矩阵，

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

例 4.8. 设R是$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$上的二元关系，$R=\{(a_1,a_1),(a_1,a_2),(a_1,a_4),(a_2,a_2),(a_2,a_3),(a_3,a_1),(a_3,a_3),(a_3,a_4),(a_4,a_1),(a_4,a_2),(a_4,a_3)\}$，则$R$的关系矩阵$M_R$是4阶方阵，

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}.$$

从关系矩阵的定义可以看出：对于有限集合$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$上的二元关系R，如果R 是自反的，那么M_R的主对角线上所有元素都是1；如果R是反自反的，那么M_R 的主对角线上所有元素都是0；如果R是对称的，那么M_R是对称矩阵；如果R是反对称的，那么M_R中关于主对角线对称的两个位置不能同时为1，即在$i\neq j$时，若$m_{ij}=1$，一定有$m_{ji}=0$。但是，关系R 的传递性不容易从M_R中直接看出。

定义 4.4. 给定有限集合$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$上的二元关系R，我们可以用一个有向图G_R来表示R。G_R 的定义是：用n个点分别表示A中的每个元素，其中代表a_i的点标记为a_i，也称为节点a_i；如果$a_iRa_j(i\neq j)$，那么从节点a_i向节点a_j画一条有向弧；如果a_iRa_i，则在节点a_i上画一条有向圈。

例 4.9. 例*4.8*中关系对应的关系图参见图*4.2*。

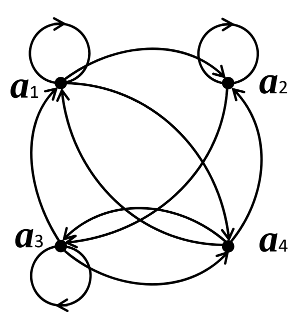

图 4.2: 例4.8对应的关系图

有限集合上的二元关系可以用关系图来表示，从关系图可以直观地看出关系的一些性质。如果关系R 是自反的，那么关系图中的每个节点都有

一个圈。如果一个关系是反自反的，则关系图中的每个节点上都没有圈。设a_i 与a_j 是两个不同的节点，如果关系是对称的，a_i 到a_j有有向弧，则a_j到a_i 一定有向弧；如果关系是反对称的，a_i到a_j 有有向弧，则a_j 到a_i 一定没有有向弧。设a_i 、a_j 与a_k 是三个不同的节点，如果关系是传递的，a_i到a_j、a_j到a_k 都有有向弧，则a_i到a_k 一定有有向弧。

关系矩阵可以表示有限集合A到有限集合B上的二元关系，也可以表示有限集合A上的二元关系。关系图用来表示有限集合A上的二元关系。一般情况下，不用关系图表示有限集合A到另一个有限集合B上的二元关系。

4.1.4 关系的运算

从集合A到集合B的二元关系R，等价于$A \times B$的一个子集。集合之间的相等与包含等关系，以及集合间的并、交与补等运算，都可以直接定义成关系之间的相互关系以及关系的运算。

定义 4.5. 设R_1与R_2都是集合A到集合B的二元关系。作为$A \times B$的子集而言，如果$R_1 \subseteq R_2$，则称R_1小于等于R_2，记作$R_1 \leq R_2$。

如果$R_1 \leq R_2$且$R_1 \neq R_2$，则称R_1小于R_2，记作$R_1 < R_2$。

类似地，可以定义关系间的“大于等于”与“大于”关系，分别记作“$\geq$”与“$>$”。

对于两个集合A与B而言，若满足$A \subseteq B$，其含义是：任给$a \in A$，则必有$a \in B$。而对于集合A到集合B的两个二元关系R_1与R_2而言，若满足$R_1 \leq R_2$，可以刻划成：若xR_1y，则必有xR_2y；类似地，若满足$R_1 < R_2$，可以刻划成：若xR_1y，则必有xR_2y，并且存在$x_0 \in A$、$y_0 \in B$，使得$x_0 \not R_1 y_0$，但是$x_0R_2y_0$。

定义 4.6. 设R、R_1与R_2都是集合A到集合B的二元关系。定义R的补$\overline{R}$、R_1与R_2的并$R_1 \cup R_2$，以及R_1与R_2的交$R_1 \cap R_2$如下：

（*1*）任给$x \in A$、$y \in B$，若$x\overline{R}y$，当且仅当$x \not R y$；

（*2*）任给$x \in A$、$y \in B$，若$x(R_1 \cup R_2)y$，当且仅当xR_1y或xR_2y；

（*3*）任给$x \in A$、$y \in B$，若$x(R_1 \cap R_2)y$，当且仅当xR_1y且xR_2y。

例 4.10. 设R_1与R_2是实数集合$\mathbb{R}$上的二元关系。它们的定义分别为：任给$x, y \in \mathbb{R}$，（*1*）xR_1y，当且仅当$x = y$；（*2*）xR_2y，当且仅当$x = -y$。那么

$x(R_1 \cup R_2)y$，当且仅当$|x| = |y|$。

例 4.11. 设R_1与R_2是实数集合$\mathbb{R}$上的二元关系。它们的定义分别为：任给$x, y \in \mathbb{R}$，（*1*）xR_1y，当且仅当$x \geq y$；（*2*）xR_2y，当且仅当$x \leq y$。那么

$x(R_1 \cap R_2)y$，当且仅当$x = y$，

$x\overline{R}_1y$，当且仅当$x < y$。

因为从集合A到集合B的二元关系R等价于$A \times B$的一个子集，所以集合间运算"$\cup$"、"$\cap$"、"$\overline{A}$"所满足的基本规则也完全适合于关系间的运算。例如，

（1）交换律：$R_1 \cup R_2 = R_2 \cup R_1$，$R_1 \cap R_2 = R_2 \cap R_1$；

（2）结合律：$(R_1 \cup R_2) \cup R_3 = R_1 \cup (R_2 \cup R_3)$，$(R_1 \cap R_2) \cap R_3 = R_1 \cap (R_2 \cap R_3)$。

除了与集合运算类比的几个关系运算"$\cup$"、"$\cap$"、"$\overline{A}$"之外，还有两个特殊的关系运算：关系的合成与关系的闭包。

定义 4.7. 设R_1是从集合A到集合B上的关系，R_2是从集合B到集合C上的关系，定义R_1与R_2 的复合关系$R_2 \circ R_1$为从集合A到集合C上的关系，具体定义如下：

任给$x \in A$、$z \in C$，$x(R_2 \circ R_1)z$，当且仅当存在$y \in B$，使得xR_1y且yR_2z。

例 4.12. 设R与S都是集合$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$上的关系，其中，

$R = \{(1, 2), (2, 2), (3, 4)\}$，

$S = \{(1, 3), (2, 5), (3, 1), (4, 2)\}$，

那么

$R \circ S = \{(1, 4), (3, 2), (4, 2)\}$，

$S \circ R = \{(1, 5), (2, 5), (3, 2)\}$。

$R \circ S$与$S \circ R$都是集合A到其自身上的二元关系，但是$R \circ S \neq S \circ R$，可见关系的复合运算不满足交换律。

定理 4.1. 关系的复合运算满足结合律。

证明： 设R_1是从集合A到集合B上的关系，R_2是从集合B到集合C上的关系，R_3 是从集合C到集合D上的关系。我们要证明$R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1$。

先证明$R_3 \circ (R_2 \circ R_1) \subseteq (R_3 \circ R_2) \circ R_1$。任给$a \in A$、$d \in D$，若$(a, d) \in R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$，根据复合关系的定义可知，存在$c \in C$，使得$(a, c) \in R_2 \circ R_1$且$(c, d) \in R_3$。又由于$(a, c) \in R_2 \circ R_1$，由复合关系定义知，存在$b \in B$，使得$(a, b) \in R_1$且$(b, c) \in R_2$。而由$(b, c) \in R_2$和$(c, d) \in R_3$，可知$(b, d) \in R_3 \circ R_2$，再由$(b, d) \in R_3 \circ R_2$和$(a, b) \in R_1$ 知，$(a, d) \in (R_3 \circ R_2) \circ R_1$。因此，$R_3 \circ (R_2 \circ R_1) \subseteq (R_3 \circ R_2) \circ R_1$。

同理可证，$(R_3 \circ R_2) \circ R_1 \subseteq R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$。因此，$(R_3 \circ R_2) \circ R_1 = R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$。证毕。

利用关系的复合运算，以及关系复合运算满足的结合律，可以构成关系的幂运算。设R是集合A 上的二元关系，可以递归定义R的幂：$R^1 = R$、$R^2 = R \circ R$、$R^3 = R^2 \circ R = R \circ R^2$、...、$R^n = R^{n-1} \circ R = R \circ R^{n-1}$、...。由关系复合运算满足结合律可知，对于$n > m > 0$，满足

$$R^n = R^m \circ R^{n-m}.$$

注意，R必须是某个集合A到其自身上的二元关系，才可以定义R的幂。

定义 4.8. 设R是集合A上的二元关系，如果存在A上的二元关系R_1，R_1满足以下三个条件：

（*1*）R_1是自反的，

（*2*）$R \subseteq R_1$，

（*3*）任给A上的二元关系R_2，若R_2是自反的，且$R \subseteq R_2$，则一定有$R_1 \subseteq R_2$，

那么称R_1是R的自反闭包。

事实上，R的自反闭包就是包含R且满足自反性质的最小关系。类似地，可以定义R的对称闭包与传递闭包。但是，仿照定义4.8，不能定义R的反自反闭包与反对称闭包。

定理 4.2. 设R是集合A上的二元关系，定义集合A上的二元关系R^+：任给$a_1, a_2 \in A$，

$$a_1 R^+ a_2\text{，当且仅当存在}n > 0\text{，使得}a_1 R^n a_2\text{，}$$

则R^+是关系R的传递闭包。

证明： 首先证明R^+是传递的。任给$a, b, c \in A$，如果aR^+b且bR^+c，则存在$n_1 > 0$、$n_2 > 0$，使得$aR^{n_1}b$、$bR^{n_2}c$，由复合关系的定义知，$a(R^{n_2} \circ R^{n_1})c = aR^{n_1+n_2}c$，所以$aR^+c$，从而$R^+$是传递的。

再证明$R \leq R^+$。任给$a, b \in A$，若aRb，即aR^1b，所以aR^+b。因此，$R \leq R^+$。

最后证明R^+是包含R的最小传递关系。假设R^*是A上任意一个包含R的传递关系。任给$b, c \in A$，若cR^+b，那么存在着某个$n > 1$，使得cR^nb。由幂关系的定义知，存在$a_1, a_2, \cdots, a_{n-1} \in A$，使得

$$cRa_1, a_1Ra_2, \cdots, a_{n-2}Ra_{n-1}, a_{n-1}Rb,$$

因为$R \leq R^*$，所以有

$$cR^*a_1, a_1R^*a_2, \cdots, a_{n-2}R^*a_{n-1}, a_{n-1}R^*b.$$

因为R^*满足传递性，所以cR^*b。从而$R^+ \leq R^*$，R^+是包含R的最小传递关系。

综上分析知，R^+是关系R的传递闭包。证毕。

定理 4.3. 设R是集合A上的二元关系，则$R' = I_A \cup R$是关系R的自反闭包。其中，I_A是A 上的恒等关系，即对任给$a \in A$，都有aI_Aa，而对于任给$a, b \in A$且$a \neq b$，aI_Ab都不成立。

证明： 留作习题5。

定理 4.4. 设R是集合A上的二元关系，定义A上的二元关系R'如下

$$R' = \{(y, x) | x, y \in A\text{且}(x, y) \in R\},$$

则$\widetilde{R} = R \cup R'$是$R$的对称闭包。

证明： 首先，由于$\widetilde{R} = R \cup R' \supseteq R$，所以$R \leq \widetilde{R}$。

下面证明$\widetilde{R}$是对称的。任给$a, b \in A$，若$a\widetilde{R}b = a(R \cup R')b$，由关系的并运算的定义可知，$aRb$或$aR'b$。若$aRb$，由$R'$的定义知，$bR'a$，所以$b(R \cup R')a$，即$b\widetilde{R}a$；若$aR'b$，由$R'$的定义知，$bRa$，同样也可以得到$b(R \cup R')a$，即$b\widetilde{R}a$。所以，无论是$aRb$或$aR'b$，都可以得到$b\widetilde{R}a$。所以$\widetilde{R}$是对称的。

最后证明$\widetilde{R}$是包含R的最小对称关系。假设R^*是包含R的对称关系。任给$a, b \in A$，若$a\widetilde{R}b$，则有aRb或$aR'b$。（1）若aRb，因为R^* 包含了R，所以aR^*b;（2）若$aR'b$，则由R'的定义知，bRa。因为R^*包含了R，所以bR^*a。再因为R^*是对称关系，可得aR^*b。所以，无论是aRb，还是$aR'b$，都有aR^*b。因此，aR^*b。R^*包含了$\widetilde{R}$。

综上可知，$\widetilde{R}$是R的对称闭包。证毕。

4.2 等价关系

定义 4.9. 设R是集合A上的二元关系，如果R是自反的、对称的、传递的，则称R是等价关系。

设R是集合A上的等价关系，$a, b \in A$。如果aRb，则称a与b等价。如果aRb，由R 的对称性可知，bRa，我们称a与b彼此等价。由R的自反性可知，任给$a \in A$，aRa，所以A 中每个元素与其自身等价。又由R的传递性可知，若a与b等价，且b与c等价，则a与c等价。

定义 4.10. 设R是集合A上的等价关系。任给$a \in A$，记$[a]_R$为A中所有与a等价的元素构成的集合，即

$$[a]_R = \{x | x \in A, aRx\}.$$

由于a与其自身等价，$a \in [a]_R$，称$[a]_R$为元素a所属的等价类，也称元素a是等价类$[a]_R$的代表元。

定理 4.5. 设R是集合A上的等价关系，则等价类满足：

（*1*）任给$a, b \in A$，要么$[a]_R = [b]_R$，要么$[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$。

（*2*）$\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$。

证明： （1）任给$a, b \in A$，要么aRb，要么$a\not R b$，两者必居其一。

先看aRb的情况。由R的对称性可知，bRa。任取$x \in [a]_R$，由等价类的定义知，aRx，再由R的传递性知，bRx，所以$x \in [b]_R$。故$[a]_R \subseteq [b]_R$。同理可得，$[b]_R \subseteq [a]_R$。所以$[a]_R = [b]_R$。

再看$a\not R b$的情况。如果$[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$，则存在$x \in [a]_R \cap [b]_R$，即$x \in [a]_R$且$x \in [b]_R$。由等价类的定义知，$aRx$且$bRx$。因为$R$是对称的，由$bRx$得出$xRb$。又因为$R$是传递的，由$aRx$和$xRb$得出$aRb$。与假设$a\not R b$ 矛盾，故$[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$。

由上面的证明可知，彼此等价的元素属于同一个等价类，彼此不等价的元素所属的等价类没有公共元素。

（2）任取$x \in \bigcup_{a\in A}[a]_R$，存在$a \in A$，使得$x \in [a]_R$。因为$[a]_R$是$A$ 的子集，故$x \in A$。由此得出，$\bigcup_{a\in A}[a]_R \subseteq A$。

反之，任取$x \in A$，显然$x \in [x]_R \subseteq \bigcup_{a\in A}[a]_R$。所以，$A \subseteq \bigcup_{a\in A}[a]_R$。

综上可得，$A = \bigcup_{a\in A}[a]_R$。证毕。

定义 4.11. 设A是一个非空集合。如果集合族$\mathbb{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots\}$满足：

（*1*）任给i，$A_i \subseteq A$，即A_i是A的子集，

（*2*）任给$i \neq j$，$A_i \cap A_j = \emptyset$或者$A_i = A_j$，

（*3*）$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = A$，

则称集合族$\mathbb{A}$是A的一个划分。

若R是集合A上的等价关系，则由定理4.5知，等价类集合$\{[a]_R | a \in A\}$是集合A的一个划分，我们称之为集合A关于等价关系R的商集，记作A/R。

例 4.13. 设$\mathbb{Z}$是整数集合，R_n是$\mathbb{Z}$上的模n同余关系，即任给$a, b \in \mathbb{Z}$，

$$xR_ny, \quad \text{当且仅当} \quad n|x-y\text{，也即}x \equiv y \mod n.$$

我们曾经在第二章介绍过，同余关系是自反的、对称的与传递的，所以R_n是$\mathbb{Z}$上的等价关系。$[0]_{R_n}, [1]_{R_n}, \cdots, [n-1]_{R_n}$是$R_n$所确定的全部等价类。

例 4.14. 设R是复数集合$\mathbb{C}$上的二元关系，任给$x, y \in \mathbb{C}$，xRy当且仅当$|x| = |y|$，其中$|x|$、$|y|$分别为复数x与y的模。则R是$\mathbb{C}$上的等价关系。任给$x \in \mathbb{C}$，x所在的等价类$[x]_R$就是以坐标原点O为圆心，半径为$|x|$的圆，参见图*4.3*。所有以O 为圆心的圆构成$\mathbb{C}$关于R的所有等价类。正数轴$[0, +\infty)$上所有的数是所有等价类的代表元，这是因为每个等价类中都有且仅有一个元素在正数轴上。

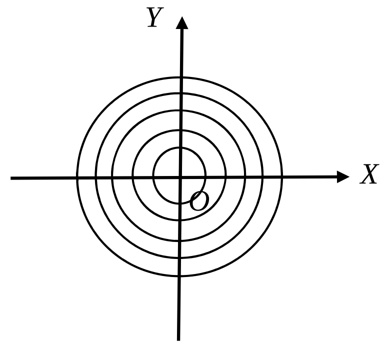

图 4.3: 例4.14中等价类的示意图

例 4.15. 在平面几何中，设A是各种几何图形构成的集合，如果一个几何图形经过平移或旋转，可以与另一个几何图形完全重合，则称这两个几何图形“全等”。这种“全等”关系是等价关系。彼此全等的几何图形构成一个等价类。

如果一个几何图形经过成比例放大或缩小，可以与另一个几何图形完全重合，则称这两个几何图形“相似”。几何图形间的“相似”关系也是等价关系。彼此相似的几何图形构成一个等价类。例如，所有的圆就是属于同一个相似的等价类。

由定理4.5知，集合A上的等价关系决定了A的一个划分，该划分由各个不同的等价类构成。反过来，给定集合A的一个划分，也决定了集合A的一个等价关系。

定理 4.6. 设集合族$\mathbb{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots\}$是非空集合$A$的一个划

分。定义集合A上的二元关系R，任给$x, y \in A$，

$$xRy \quad \text{当且仅当存在} i\text{，使得} x \in A_i \text{且} y \in A_i,$$

则关系R是集合A上的等价关系。

证明： 因为$\mathbb{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots\}$是集合$A$的一个划分，所以$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = A$，任给$x \in A$，存在$i$，使得$x \in A_i$。由$R$的定义知，$xRx$，所以$R$是自反的。任给$x, y \in A$，如果$xRy$，则存在$i$，使得$x \in A_i$ 且$y \in A_i$，所以yRx，故R是对称的。任给$x, y, z \in A$，若xRy且yRz。由xRy得知，存在i，使得$x \in A_i$且$y \in A_i$；而由yRz 又可以得知，存在j，使得$y \in A_j$且$z \in A_j$。因为$\mathbb{A}$是A的划分，所以A中每个元素只能属于某一个A_i。因为y 在A_i与A_j中，所以$i = j$。从而$x, y, z \in A_i = A_j$。由R的定义知，xRz，所以R是传递的。

综上分析知，R是集合A上的等价关系，它所确定的等价类集合就是$\mathbb{A}$。证毕。

在一个集合上，用不同方式定义的两个等价关系可能产生同一个集合划分。例如，设$A = \{1, 2, \cdots, 9\}$。在A上定义等价关系R_1和R_2，其中R_1的定义为：任给$x, y \in A$，

$$xR_1y \quad \text{当且仅当} 3|x - y.$$

而R_2则通过下面的矩阵来定义

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}。$$

任给$x, y \in A$，xR_2y当且仅当x与y在上述矩阵的同一列中。则R_1与R_2都是集合A 上的等价关系，它们产生的等价类都是

$$[1]_{R_1} = [1]_{R_2} = \{1, 4, 7\}, [2]_{R_1} = [2]_{R_2} = \{2, 5, 8\}, [3]_{R_1} = [3]_{R_2} = \{3, 6, 9\}.$$

这时我们称$R_1 = R_2$。事实上，集合的划分与集合上的等价关系一一对应，两个等价关系对应的集合划分相同，意味着两个等价关系本质上相同。

4.3 序关系

序关系是另一类重要的二元关系。

4.3.1 偏序关系

定义 4.12. 设$\preceq$是集合A上的二元关系，如果$\preceq$是自反的、反对称的、传递的，则称$\preceq$ 是集合A上的偏序关系，或叫偏序。集合A和A上的一个偏序$\preceq$构成偏序集，记作$< A, \preceq >$。

例 4.16. 实数集合$\mathbb{R}$上的大于等于关系“$\geq$”和小于等于关系“$\leq$”都是偏序。$< \mathbb{R}, \geq >$ 与$< \mathbb{R}, \leq >$都是偏序集。

例 4.17. 假设A是一个集合，在A的幂集$\mathscr{P}(A)$上定义包含关系“$\supseteq$”与被包含关系“$\subseteq$”，则“$\supseteq$”与“$\subseteq$”都是$\mathscr{P}(A)$上的偏序关系，$< \mathscr{P}(A), \supseteq >$、$< \mathscr{P}(A), \subseteq >$都是偏序集。

设$\preceq$是集合A上的偏序，a与b是A中两个元素。如果$a \preceq b$或者$b \preceq a$，则称a与b是可比较的；若$a \not\preceq b$且$b \not\preceq a$，则称a 与b是不可比较的。由偏序$\preceq$的自反性可知，A中每个元素与其自身都是可比较的。一般来说，集合中任取两个元素a与b，可能a与b不可比较。例如，假设$A = \{1, 2, 3\}$，幂集$\mathscr{P}(A)$上的包含关系“$\supseteq$”是偏序。但是，A的两个子集$\{1, 2\}$与$\{2, 3\}$之间就不可比较。

4.3.2 线序关系

定义 4.13. 设$\preceq$是集合A上的偏序。如果A中任意两个元素a与b都是可比较的，即$a \preceq b$ 或$b \preceq a$成立，那么称$\preceq$是线序关系或完全序关系，简称线序或完全序。$< A, \preceq >$称为线序集。

注意，在定义4.13中，若$a = b$，因为$\preceq$是自反的，当然有$a \preceq b$ 与$b \preceq a$同时成立；但是若$a \neq b$，则$a \preceq b$与$b \preceq a$只能有一个成立。

例4.16中的$< \mathbb{R}, \geq >$与$< \mathbb{R}, \leq >$都是线序集。

例 4.18. 设$< A, \preceq >$是线序集。为了方便，我们用$a \preceq_{\neq} b$表示$a \preceq b$且$a \neq b$。现在定义A^n上的二元关系$\preceq'$。任给$(a_1, a_2, \cdots, a_n), (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in A^n$，$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \preceq' (b_1, b_2, \cdots, b_n)$，当且仅当下面三个条件之一成立：

(*1*) $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$，

(*2*) $a_1 \preceq_{\neq} b_1$，

(*3*) 存在$1 \leq i \leq n-1$，使得对任意$1 \leq j \leq i$，都满足$a_j = b_j$，而且$a_{i+1} \preceq_{\neq} b_{i+1}$。

则$\preceq'$是A^n上的偏序，也是线性序。

证明： 事实上，$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in A^n$等价于$a_1 a_2 \cdots a_n$是$A$中元素构成的长为$n$ 的字符串。如果将$\preceq$看作A中元素之间的一种顺序，则关系$\preceq'$就是由A 中元素构成长为n的字符串之间的字典序。对于非数值字符串来说，这是一种常见的排序方式，在计算机科学中有重要应用。

首先，由条件（1）可知，$\preceq'$是自反的。

其次，若$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \preceq' (b_1, b_2, \cdots, b_n)$，则由定义中的三个条件知，要么$a_1 = b_1$，要么$a_1 \preceq_{\neq} b_1$，都满足$a_1 \preceq b_1$。同理，如果$(b_1, b_2, \cdots, b_n) \preceq' (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，则有$b_1 \preceq a_1$。因为$\preceq$ 是偏序，满足反对称性，可以得出$a_1 = b_1$。在得到$a_1 = b_1$ 之后，条件（2）不成立，因此要么条件（1）成立，得到$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$；要么条件（3）成立，则由$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \preceq' (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 知，$a_2 = b_2$或者$a_2 \preceq_{\neq} b_2$，都可以得出$a_2 \preceq b_2$。同理，由$(b_1, b_2, \cdots, b_n) \preceq' (a_1, a_2, \cdots, a_n)$可以得出，$b_2 \preceq a_2$。由$\preceq$ 的反对称性，知$a_2 = b_2$；...；如此递归可以得出$a_1 = b_1$、$a_2 = b_2$、...、$a_n = b_n$，即$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$。故$\preceq'$是反对称的。

最后证明$\preceq'$是传递的。设$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \preceq' (b_1, b_2, \cdots, b_n)$，则满足前面的三个条件（1）、（2）和（3）。假设$(b_1, b_2, \cdots, b_n) \preceq' (c_1, c_2, \cdots, c_n)$，则满足下面的三个条件之一：

（I）$(b_1, b_2, \cdots, b_n) = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$，

（II）$b_1 \preceq_{\neq} c_1$，

（III）存在$1 \leq i' \leq n-1$，使得对任意$1 \leq j \leq i'$，都满足$b_j = c_j$，而且$b_{i'+1} \preceq_{\neq} c_{i'+1}$。

我们可以综合分析，在满足三个条件（1）、（2）、（3）之一和满足

三个条件（I）、（II）、（III）之一的各种组合，来证明$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \preceq' (c_1, c_2, \cdots, c_n)$。这里，只给出满足条件（3）与（III）时的证明。

假设条件（3）与（III）成立，分两种情况。首先，若$i \geq i' + 1$，那么对任意$1 \leq j \leq i'$，都满足$a_j = b_j = c_j$，而且$a_{i'+1} = b_{i'+1}$、$b_{i'+1} \preceq_{\neq} c_{i'+1}$，所以有$a_{i'+1} \preceq_{\neq} c_{i'+1}$。由$\preceq'$的定义知，$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \preceq' (c_1, c_2, \cdots, c_n)$。再者，若$i < i' + 1$，则对任意的$1 \leq j \leq i$，都满足$a_j = b_j = c_j$，而且$b_{i+1} = c_{i+1}$、$a_{i+1} \preceq_{\neq} b_{i+1}$，从而$a_{i+1} \preceq_{\neq} c_{i+1}$。由$\preceq'$的定义知，$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \preceq' (c_1, c_2, \cdots, c_n)$。所以$\preceq'$满足传递性。

综上可知，$\preceq'$是A^n上的偏序。

事实上，$\preceq'$也是A^n上的线序。任给A中两个元素$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$和$(b_1, b_2, \cdots, b_n)$，我们只需从左至右，逐个比较两个n元组的元素即可。比较过程是：若$a_1 \neq b_1$，由于$\preceq$是线序，必有$a_1 \preceq b_1$或$b_1 \preceq a_1$，所以有$a_1 \preceq_{\neq} b_1$或$b_1 \preceq_{\neq} a_1$，由条件（2）知，$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \preceq' (b_1, b_2, \cdots, b_n)$或者$(b_1, b_2, \cdots, b_n) \preceq' (a_1, a_2, \cdots, a_n)$。如果，$a_1 = b_1$，就比较$a_2$和$b_2$。一般地，若$a_1 = b_1$、$a_2 = b_2$、...、$a_i = b_i$，而$a_{i+1} \neq b_{i+1}$，则$a_{i+1} \preceq_{\neq} b_{i+1}$或$b_{i+1} \preceq_{\neq} a_{i+1}$，从而$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \preceq' (b_1, b_2, \cdots, b_n)$或者$(b_1, b_2, \cdots, b_n) \preceq' (a_1, a_2, \cdots, a_n)$。最后，若$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$，也同样满足$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \preceq' (b_1, b_2, \cdots, b_n)$。所以，$\preceq'$是$A^n$上的线序，是$A^n$中元素的字典序。

4.3.3 极大元与极小元

定义 4.14. 设$< A, \preceq >$为偏序集，$x, y \in A$，如果$x \preceq_{\neq} y$，并且不存在$z \in A$，使得$x \preceq_{\neq} z$且$z \preceq_{\neq} y$，则称元素y控制元素x，或者说元素x 被元素y 控制，记作$x \widehat{\preceq} y$。

在偏序集中，不是每个元素都能控制着某个其它元素，也不是每个元素都被别的元素所控制。例如，偏序集$< \mathbb{R}, \leq >$中，每个元素都不控制别的元素，而且每个元素也不被其它元素所控制。

定理 4.7. 设$< A, \preceq >$为偏序集。当A是有限集合时，对于A中元素a，如果有元素$b \in A$，使得$a \preceq_{\neq} b$，则一定存在b'，使得$a \widehat{\preceq} b'$，即a的控制元素一定存在。

证明： 设$<A,\preceq>$为偏序集，对于$a\in A$，存在$b\in A$，使得$a\preceq_{\neq} b$，则有两种可能。(1) 若b是a的控制元素，$a\widehat{\preceq}b$，取$b'=b$即可；(2) b不是a的控制元素，那么由定义4.14可知，存在$b_1\in A$，使得$a\preceq_{\neq} b_1$且$b_1\preceq_{\neq} b$。这里仍然有两个可能，一个是b_1是a的控制元素，另一个是存在$b_2\neq b_1$，使得$a\preceq_{\neq} b_2$且$b_2\preceq_{\neq} b_1$。这里我们可以得出$b_2\neq b$。否则，若$b_2=b$，那么$b_2\preceq_{\neq} b_1$就是$b\preceq_{\neq} b_1$，再加上$b_1\preceq_{\neq} b$，由$\preceq$的反对称性可知，$b_1=b$。这与$b_1\neq b$矛盾。故$b_2\neq b$。

如果我们一直找不到元素a的控制元素，上述过程就可以无限地进行下去，得到无限序列$b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots$，其中$b_i\in A$，满足$a\preceq_{\neq}\cdots$、$b_n\preceq_{\neq} b_{n-1}$、$b_{n-1}\preceq_{\neq} b_{n-2}$、...、$b_3\preceq_{\neq} b_2$、$b_2\preceq_{\neq} b_1$、$b_1\preceq_{\neq} b$，而且$b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots$互不相同，与$A$是有限集合矛盾。于是，存在某个$i$，使得上述过程终止，即$a\preceq_{\neq} b_i$，且$b_i$是$a$的控制元素。证毕。

从这个定理可以看出，若$\preceq$是有限集合A上的偏序关系，则对于任意$a\in A$，要么不存在元素b，使得$a\preceq_{\neq} b$；要么a存在控制元素。同样的道理可知，要么不存在元素b，使得$b\preceq_{\neq} a$；要么a控制某个元素。

例 4.19. 设$S=\{1,2,3,4,6,12\}$。S上的整除关系是偏序关系。元素1的控制元素为2与3。元素2 的控制元素为4与6，元素3的控制元素为6，元素4与6的控制元素为12。元素12没有控制元素。

定义 4.15. 设$<A,\preceq>$为偏序集，对于$a\in A$，如果不存在元素$b\in A$，使得$a\preceq_{\neq} b$，则称a为偏序集$<A,\preceq>$的极大元；如果不存在元素$b\in A$，使得$b\preceq_{\neq} a$，则称a 为偏序集$<A,\preceq>$的极小元。

根据定理4.7，每个有限偏序集都可以绘成一个图，称为哈希（Hasse）图。假设$<A,\preceq>$为偏序集，且A是有限集合。将A中的每个元素用一个点来表示，对于$a,b\in A$，如果b是a的控制元素，即$a\widehat{\preceq}b$，则将b画在a的上方，且在a 与b之间画一条线。这样就得到了$<A,\preceq>$ 对应的哈希图。哈希图可以直观地将偏序关系表示出来，对研究偏序集的结构提供方便。在哈希图中，位于最上方的元素是极大元，位于最下方的元素是极小元，其余每个元素用线段向上连至它的全部控制元素，向下用线段连至全部被它控制的元素。

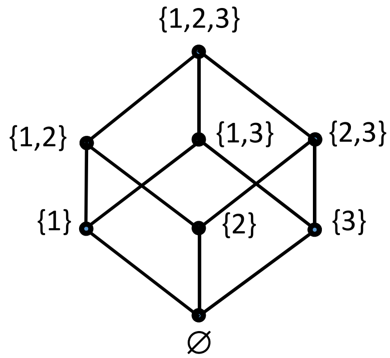

图 4.4: 例4.20对应的哈希图

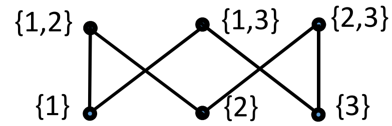

图 4.5: 例4.21对应的哈希图

例 4.20. 设$S = \{1, 2, 3\}$。偏序集$< \mathscr{P}(S), \subseteq >$的哈希图参见图*4.4*。其中$\{1, 2, 3\}$是极大元，$\emptyset$是极小元。

例 4.21. $< \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}, \subseteq >$是偏序集，对应的哈希图参见图*4.5*，其中，$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$都是极大元，$\{1\}, \{2\}, \{3\}$都是极小元。

例 4.22. $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$，$B$与其上的整除关系构成偏序集$< B, | >$，对应的哈希图参见图*4.6*，其极大元是30，极小元是1。

例4.20与例4.22中两个偏序集的哈希图相同。这表明，尽管$< \mathscr{P}(S), \subseteq >$与$< B, | >$的具体含义不同，但它们元素之间的序结构完全相同。若两个偏序集的哈希图相同，我们称其是**序同构**的。

例 4.23. $< \{1, 2, 4, 5, 10\}, \leq >$是偏序集，对应的哈希图参见图*4.7*，它的哈希图是一条链。不难看出，若A是有限集合，则A上的偏序集是线序集，当且仅当它的哈希图是一条链。

4.3.4 最大元与最小元

定义 4.16. 设$< A, \preceq >$为偏序集，$a \in A$。若任给$b \in A$，都有$b \preceq a$，则称a为$< A, \preceq >$ 的最大元；若任给$b \in A$，都有$a \preceq b$，则称a为$< A, \preceq >$的最小元。

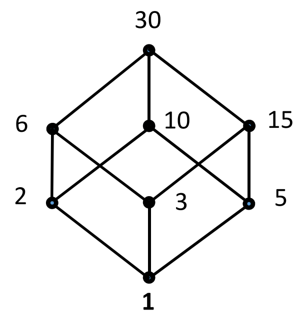

图 4.6: 例4.22对应的哈希图

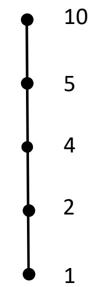

图 4.7: 例4.23对应的哈希图

在例4.20中，$\{1,2,3\}$是最大元，$\emptyset$是最小元。例4.21中没有最大元与最小元。例4.22中，30是最大元，1 是最小元。在例4.23中，10是最大元，1是最小元。

下面分析极大元、极小元、最大元与最小元的性质。

定理 4.8. 偏序集$< A, \preceq >$的最大元一定是极大元。

证明： 用反证法。设a是偏序集$< A, \preceq >$的最大元，若a不是$< A, \preceq >$的极大元，则存在$b \in A$，使得$a \preceq_{\neq} b$，即$a \neq b$且$a \preceq b$。由于a 是$< A, \preceq >$ 的最大元，所以必然有$b \preceq a$。再从$\preceq$的反对称性，可以推出$a = b$，与$a \neq b$矛盾。所以偏序的最大元必是极大元。证毕。

定理 4.9. 偏序集$< A, \preceq >$的最大元最多只有一个。

证明： 从前面的例子可以看出，偏序集不一定有最大元，比如说例4.21中的偏序集就没有最大元。

如果偏序集$< A, \preceq >$有最大元，设$a, b \in A$都是最大元。因为a是最大元，则任给$x \in A$，都满足$x \preceq a$，所以有$b \preceq a$。同理，由b是最大元，可以得出$a \preceq b$。由于$\preceq$满足反对称性，$b \preceq a$且$a \preceq b$，所以$a = b$。这说明当$< A, \preceq >$有最大元时，一定唯一。证毕。

定理 4.10. 假设A是有限集合，偏序集$< A, \preceq >$存在最大元，当且仅当$< A, \preceq >$只有一个极大元。

证明： 设a是$< A,\preceq>$的最大元。由定理4.8 知，a 是$< A,\preceq>$的极大元。假如存在$b \in A$且$b \neq a$，b也是极大元。由于a 是最大元，所以$b \preceq a$。而且$b \neq a$，所以$b \preceq_{\neq} a$，这与b是极大元矛盾。所以说，$< A,\preceq>$ 只有一个极大元。

反之，设a是$< A,\preceq>$唯一的极大元，我们要证明a是$< A,\preceq>$的最大元。任给$b \in A$ 且$b \neq a$。因为b不是极大元，所以存在$c_1 \in A$，使得$b \preceq_{\neq} c_1$。下面分两种情况来讨论。

其一是$c_1 = a$，则由于$b \preceq_{\neq} c_1$，可以得到$b \preceq a$。

另一种情况是$c_1 \neq a$。因为a是唯一极大元，故c_1也不是极大元，从而存在$c_2 \in A$ 且$c_2 \neq c_1$，使得$c_1 \preceq_{\neq} c_2$。这时又有两种情况:（1）$c_2 = a$，那么从$b \preceq_{\neq} c_1$、$c_1 \preceq_{\neq} c_2$以及$c_2 = a$，可以得出$b \preceq a$;（2）$c_2 \neq a$，那么c_2也不是极大元，存在$c_3 \in A$，使得$c_2 \preceq_{\neq} c_3$，而且由$b \preceq_{\neq} c_1$、$c_1 \preceq_{\neq} c_2$、$c_2 \preceq_{\neq} c_3$ 可知，b, c_1, c_2, c_3 互不相等。这样一直分析下去，得到元素序列c_1，c_2，c_3，$\cdots$,，而且这个序列中的元素两两不同。由于A是有限集合，这一过程一定会终止。也就是说，存在某个i，使得

$$b \preceq_{\neq} c_1, c_1 \preceq_{\neq} c_2, c_2 \preceq_{\neq} c_3, \cdots, c_{i-1} \preceq_{\neq} c_i, c_i \preceq_{\neq} c_{i+1},$$

而且$c_{i+1} = a$。由于$\preceq$满足传递性，可以得出$b \preceq a$。

综上可以得出，任给$b \in A$，都满足$b \preceq a$，所以a是$< A,\preceq>$的最大元。

因此，若A是有限集合，偏序集$< A,\preceq>$存在最大元，当且仅当$< A,\preceq>$只有一个极大元。证毕。

类似，可以证明下面的定理:

定理 4.11. 假设A是有限集合，偏序集$< A,\preceq>$存在最小元，当且仅当$< A,\preceq>$只有一个极小元。

4.3.5 上界与下界

定义 4.17. 设$< A,\preceq>$为偏序集，$M \subseteq A$，$a \in A$。如果对于任意$m \in M$，都有$m \preceq a$，则称a是子集M的上界；如果对于任意$m \in M$，都有$a \preceq m$，则称a是子集M的下界。

集合A的任意子集M不一定有上界或下界。即使有上界或下界，也不一定唯一。例如，$<\{1,2,3,4,5,6\},|>$是偏序集，它的哈布图参见图4.8。$<\{1,2,3,4,5,6\},|>$的最小元是1，无最大元，4,5,6是极大元。子集$\{1,2,4\}$的上界是4，子集$\{1,3\}$的上界是3和6，子集$\{3,4\}$无上界。

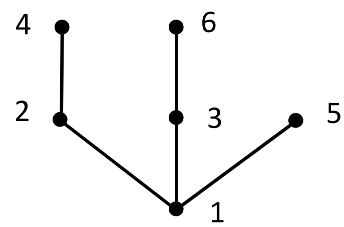

图 4.8: 上下界示例

一般的上界与下界对研究问题的意义不是很大，人们往往更关注的是最小上界与最大下界。参见定义4.18。

定义 4.18. 设$< A,\preceq >$为偏序集，$a\in A$是$M\subseteq A$的上界。如果任给M的上界a'，都有$a\preceq a'$，则称a是M的最小上界或上确界。

$b\in A$是$M\subseteq A$的下界。如果任给M的下界b'，都有$b'\preceq b$，则称b 是M的最大下界或下确界。

4.4 集合的势

对于有限集合来说，我们可以数出其中元素的个数，得到有限集合的阶，从而可以比较两个有限集合中元素的多少。但对于无限集合来说，我们就无法数出其中元素的个数。为了比较无限集合在元素个数上的差异，本节引入集合势的概念。集合势适用于有限集合与无限集合。

定义 4.19. 如果存在从集合A到集合B的双射，那么称集合A与集合B等势，记作$A\sim B$。

例 4.24. 集合$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$，$\mathbb{N}_2=\{0,2,4,6,\cdots\}$。定义映射$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}_2$，任给$n\in\mathbb{N}$，$f(n)=2n$，则$f$ 是$\mathbb{N}$到$\mathbb{N}_2$的双射。从而$\mathbb{N}$与$\mathbb{N}_2$等势。

定理 4.12. 设E是万有集合，$\mathscr{P}(E)$是所有集合构成的集合族。集合间的等势关系$\sim$是$\mathscr{P}(E)$ 上的等价关系。

证明： 任给集合$A \in \mathscr{P}(E)$，定义映射$I_A : A \to A$。任给$a \in A$，$I_A(a) = a$，则I_A是A到其自身的双射，所以$A \sim A$，故$\sim$满足自反性。任给$A, B \in \mathscr{P}(E)$，若$A \sim B$，则存在A到B的双射$f : A \to B$，则f的逆映射$f^{-1} : B \to A$是B到A的双射，所以$B \sim A$，故$\sim$满足对称性。任给$A, B, C \in \mathscr{P}(E)$，若$A \sim B$且$B \sim C$，则存在双射$f : A \to B$和双射$g : B \to C$，由复合映射的性质（定理3.8）可知，$g \circ f : A \to C$是集合$A$到集合$C$的双射，所以$A \sim C$。故$\sim$满足传递性。

综上，$\sim$是$\mathscr{P}(E)$上的等价关系。证毕。

利用等势关系，可以对所有的集合进行等价分类，在同一个等价类中的集合是等势的。

4.4.1 有限集合与可数集合

定义 4.20. 记$|0, n| = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$，称为自然数集合的一个断片。与自然数的某个断片等势的集合称为有限集合。空集合$\emptyset$也称为有限集合。不是有限集合的集合叫作无限集合。

如果集合A与$|0, n|$等势，则存在双射$f : |0, n| \to A$，对于$0 \leq i \leq n$，记$f(i) = a_i$，则有$A = \{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n\}$。可以将有限集合中的元素一个一个地数出来，所以有限集合的势可以用其中的元素个数来表示，也就是有限集合的阶。空集合的势为0。

任何有限集合不能与其真子集等势。这是因为，若A、B是有限集合且$A \subset B$，则必有$|A| < |B|$。A与B之间不可能存在双射，故$A \not\sim B$。然而，无限集合可以与其真子集等势。例如，在例4.24 中，$\mathbb{N}_2$ 是$\mathbb{N}$的真子集，但是$\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_2$。

定义 4.21. 与自然数集合$\mathbb{N}$等势的集合叫作可数无限集合。

有限集合与可数无限集合统称为可数集合，非可数集合称为不可数集合。

若集合A与自然数集合$\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$等势，那么存在双射$f:\mathbb{N}\to A$。记$f(i)=a_i$，则$A=\{a_0,a_1,a_2,\cdots\}$，所以无限可数集合中的元素可以逐个枚举出来，自然数集合的势记为$\mathscr{N}_0$。

下面来看一个不可数集合的例子。

例 4.25. 集合$(0,1)=\{x|x\in\mathbb{R},0<x<1\}$是不可数集合。

证明： 首先证明$(0,1)$是无限集合。取$(0,1)$的子集$C=\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}\subset(0,1)$，定义映射$f:C\to\mathbb{N}$，$f(\frac{1}{n})=n-2$，则$f$是$C$到$\mathbb{N}$的双射，故$C\sim\mathbb{N}$。因为$C$是无限集合，而且$C\subset(0,1)$，所以$(0,1)$是无限集合。

下面证明$(0,1)$是不可数集合。假设$(0,1)$是可数集合，将$(0,1)$中所有的元素逐个枚举出来，记为$(0,1)=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$。将$(0,1)$中的每个元素表示成小数，设为

$$\begin{aligned}
&b_1=0.a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}\cdots,\\
&b_2=0.a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}\cdots,\\
&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots,\\
&b_n=0.a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn}\cdots,\\
&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots,
\end{aligned}$$

我们取$d=0.d_1d_2\cdots d_n\cdots$，其中，任给$i=1,2,\cdots,n,\cdots$，$d_i\neq a_{ii},0,9$，也就是说，$d_i$可以任取$\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$中某个不等于$a_{ii}$的数字，这是一定可以取到的。因为$d_i\neq0,9$，所以$d\in(0,1)$。另一方面，对于任意$i\geq1$来说，$d_i\neq a_{ii}$，也就是$d$的第$i$位小数不等于$b_i$的第$i$位小数，所以有$d\neq b_i$，从而$d\notin\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}=(0,1)$。矛盾。所以，$(0,1)$ 是不可数集合。

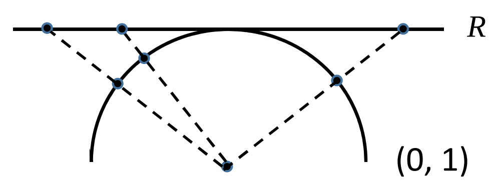

图 4.9: $(0,1)$与$\mathbb{R}$等势证明示意图

可以证明，集合$(0,1)$与实数集合$\mathbb{R}$是等势的。图4.9给出了其证明的示意图。我们将开区间$(0,1)$的有限长线段弯曲成一个半圆，用无限长的横坐

标轴来表示实数R，横坐标轴与半圆弧相切于半圆弧的中点。如果从半圆的圆心引出直线，使之与半圆弧，以及横坐标轴相交，这两个交点必定成对出现，从而形成从$(0,1)$到$\mathbb{R}$的双射。故$(0,1)$与$\mathbb{R}$的势相同，记为$\mathscr{N}_1$。

4.4.2 势的大小

定义 4.22. 如果集合A与集合B的一个子集等势，则称B支配A，记为$A \preceq B$，并且说A的势小于等于B的势，记为A的势$\leq B$的势。

如果$A \preceq B$，并且$A \not\sim B$，则称$A \prec B$，也说A的势小于B的势，记为A的势$<B$的势。

例如，自然数集合是实数集合的子集，即$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$，故自然数集合$\mathbb{N}$ 的势$\mathscr{N}_0 \leq$实数集合$\mathbb{R}$的$\mathscr{N}_1$。又因为$\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$，所以$\mathscr{N}_0 < \mathscr{N}_1$。

定理 4.13. 将集合A的幂集记为$\mathscr{P}(A)$，那么A的势小于$\mathscr{P}(A)$的势，即$A \prec \mathscr{P}(A)$。

证明: 首先证明$A \preceq \mathscr{P}(A)$。记$\overline{\mathscr{P}}(A) = \{\{a\}|a \in A\}$，则$\overline{\mathscr{P}}(A) \subset \mathscr{P}(A)$。定义$f : A \to \overline{\mathscr{P}}(A)$，任给$a \in A$，$f(a) = \{a\}$，则易知$f$是$A$到$\overline{\mathscr{P}}(A)$的双射，而且$\overline{\mathscr{P}}(A) \subset \mathscr{P}(A)$，所以$A \preceq \mathscr{P}(A)$。

下面证明$A \prec \mathscr{P}(A)$。因为已经证明$A \preceq \mathscr{P}(A)$，只需证明$A \not\sim \mathscr{P}(A)$。假设$A \sim \mathscr{P}(A)$，则存在双射$g : A \to \mathscr{P}(A)$。我们把集合$A$中的元素分成两类：内部成员与外部成员。任给$a \in A$，如果$a \in g(a)$，则称$a$为内部成员，否则称$a$为外部成员。令$B = \{x|x \in A, x \notin g(x)\}$，即$B$是全体外部成员构成的集合，是$A$的子集，$B \in \mathscr{P}(A)$。

因为g是双射，所以是满射，因此存在$b \in A$，使得$g(b) = B$。如果b是内部成员，则有$b \in g(b) = B$。而B为外部成员集合，与$b \in g(b)$矛盾。如果b是外部成员，应该$b \notin g(b) = B$。另一方面B是所有外部成员构成的集合，b是外部成员，应该$b \in B$，但$b \notin B$，故矛盾。

综上所述，$A \sim \mathscr{P}(A)$不成立，即$A \not\sim \mathscr{P}(A)$，加之$A \preceq \mathscr{P}(A)$，得到$A \prec \mathscr{P}(A)$。证毕。

定理 4.14. 设E是万有集合。$\mathscr{P}(E)$中集合间的支配关系“$\preceq$”是偏序关系。

证明： （1）对任意集合$A \in \mathscr{P}(E)$，定义映射$f : A \to A$，使得任意$a \in A$，$f(a) = a$。则f是A到A的双射，且$A \subseteq A$，所以$A \preceq A$。“$\preceq$”是自反的。

（2）任给$A, B, C \in \mathscr{P}(E)$，如果$A \preceq B$、$B \preceq C$，则存在子集$B_1 \subseteq B$、$C_1 \subseteq C$，以及双射$f : A \to B_1$和$g : B \to C_1$。因为$B_1 \subseteq B$，所以$f(B_1) \subseteq f(B)$，而且因为$g$是集合$B$到集合$C_1$的双射。所以$f(B) = C_1$。综上，记$f(B_1) = C_2$，则有$C_2 \subseteq C_1$。将$g$的原像限制到$B_1$上，则$g$ 也是B_1到C_2的双射，所以复合映射$g \circ f : A \to C_2$是A 到C_2的双射。而$C_2 \subseteq C$，所以$A \preceq C$。“$\preceq$”是传递的。

（3）下面证明支配关系“$\preceq$”是反对称的。假设$A, B \in \mathscr{P}(E)$，$A \preceq B$且$B \preceq A$，则存在$A_1 \subseteq A$与$B_1 \subseteq B$，以及双射$f : A \to B_1$和$g : B \to A_1$，从而A与B_1等势，B与A_1等势，即$A \sim B_1$且$B \sim A_1$。令$g(B_1) = A_2 \subseteq A_1 \subseteq A$，将$g$的原像限制到$B_1$ 上，$g : B_1 \to A_2$ 是双射，$B_1 \sim A_2$。由等势关系的传递性，得出$A \sim A_2$，即存在双射$h : A \to A_2$。类似，我们可以得到，存在A的子集合序列$A_1, A_2, A_3, \cdots$，满足

$$h(A) = A_2，其中A_2 \subseteq A_1, \qquad (1)$$

$$h(A_1) = A_3，其中A_3 \subseteq A_2, \qquad (2)$$

$$h(A_2) = A_4，其中A_4 \subseteq A_3, \qquad (3)$$

$$h(A_3) = A_5，其中A_5 \subseteq A_4, \qquad (4)$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

从而$A \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_{n-1} \supseteq A_n \cdots$。因为$h$ 是一一映射，由（1）式与（2）式，可得$h(A - A_1) = h(A) - h(A_1) = A_2 - A_3$，于是有

$$A - A_1 \sim A_2 - A_3 \qquad (5)$$

同理，由（3）式与（4）式，可得$h(A_2 - A_3) = h(A_2) - h(A_3) = A_4 - A_5$，于是有

$$A_2 - A_3 \sim A_4 - A_5 \qquad (6)$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

记集合$C = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n \cdots$。任取$a \in A$，记$A_0 = A$，有以下两种可能性：

（1）$a \in C$，则任给$i = 1, 2, \cdots$，都满足$a \in A_i$；

（2）$a \notin C$，则存在某个$n \in \{1, 2, \cdots\}$，使得$a \in A_{n-1}$，但是$a \notin A_n$，所以$a \in A_{n-1} - A_n$。
从上面的分析可知，

$$A = C \cup (A - A_1) \cup (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \cdots,$$
$$A_1 = C \cup (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup (A_3 - A_4) \cup \cdots。$$

又由（5）、（6）、...诸式，可以得到

$$(A - A_1) \cup (A_2 - A_3) \cup \cdots \sim (A_2 - A_3) \cup (A_4 - A_5) \cup \cdots,$$

即存在双射

$$f_0 : (A - A_1) \cup (A_2 - A_3) \cup \cdots \to (A_2 - A_3) \cup (A_4 - A_5) \cup \cdots。$$

再定义一个双射$f_1 : A \to A_1$，任给$a \in A$，

$$f_1(a) = \begin{cases} f_0(a), & a \in (A - A_1) \cup (A_2 - A_3) \cup \cdots, \\ a & a \in C \cup (A_1 - A_2) \cup (A_3 - A_4) \cup \cdots。\end{cases}$$

不难看出，f_1是双射，即$A \sim A_1$。再由$B \sim A_1$，得出$A \sim B$，即A的势等于B的势。所以，支配关系“$\preceq$”满足反对称性。

综上所述，集合间的支配关系“$\preceq$”是偏序关系。证毕。

4.4.3 无限集合

定理 4.15. 每个无限集合都含有一个可数无限子集。

证明： 因为A是无限集合，所以不是空集合，存在$a_1 \in A$。而$A - \{a_1\}$仍是无限集合。同理，必存在$a_2 \in A - \{a_1\}$，显然$a_2 \neq a_1$。$\{a_1, a_2\}$是A的子集，$A - \{a_1, a_2\}$ 也是无限集合。如此进行下去，得到$S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$是$A$的子集。而且，当$i \neq j$时，$a_i \neq a_j$，所以说，$S$就是无限集合$A$ 的可数无限子集。证毕。

定理 4.16. 每个无限集合都与它的某个真子集等势。

证明： 假设A是无限集合，由定理4.15知，A有一个可数无限子集$S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$。构造映射$f : A \to A - \{a_1\}$，

$$f(a) = \begin{cases} a & a \in A - S, \\ a_{i+1} & a \in S \text{且} a = a_i, \end{cases}$$

则f是A到$A-\{a_1\}$的双射，所以$A\sim A-\{a_1\}$。证毕。

从这个定理可知，若一个集合与其真子集等势，则一定是无限集合；否则就一定是有限集合。

习题

1. 设E是万有集合，在$\mathscr{P}(E)$上定义下列关系，请说明这些关系具有什么性质?

（1）SR_1T，当且仅当$S\cap T=\emptyset$,

（2）SR_2T，当且仅当$S\cap T\neq\emptyset$,

（3）SR_3T，当且仅当$S\subset T$,

（4）SR_4T，当且仅当$S\subseteq T$,

（5）SR_5T，当且仅当$S=T$。

2. 请在整数集合$\mathbb{Z}$上给出三个二元关系，这三个关系分别具有以下性质:

（1）自反的、对称的，但不是传递的,

（2）自反的、传递的，但不是对称的,

（3）对称的、传递的，但不是自反的。

3. 设$\{a,b,c,d\}$，R_1、R_2是A上的关系，其中

$R_1=\{(a,a),(a,b),(b,d)\}$,

$R_2=\{(a,d),(b,c),(b,d),(c,b)\}$。

求$R_1\circ R_2$，$R_2\circ R_1$，R_1^2，R_2^3。

4. R_1是集合B到集合C的关系，R_2与R_3是集合A到集合B的关系。证明:

$$R_1\circ(R_2\cap R_3)\subseteq(R_1\circ R_2)\cap(R_1\circ R_3).$$

5. 设R是集合A上的二元关系，I_A是A上的恒等关系。证明：$R'=R\cup I_A$是R的自反闭包。

6. $\mathbb{N}$是自然数集合，“$\sim$”是$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$上的关系。任给$(a,b),(c,d)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$,

$$(a,b)\sim(c,d),\quad \text{当且仅当}\quad a+d=b+c\text{。}$$

证明："$\sim$"是$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$上的等价关系，并在二维坐标平面上画出"$\sim$"确定的等价类。

7. 设$A=\{1,2,3,4\}$，在$\mathscr{P}(A)$上定义关系"$\sim$"。任给$S,T\in\mathscr{P}(A)$，

$$S\sim T,\quad \text{当且仅当}\quad |S|=|T|。$$

证明："$\sim$"是$\mathscr{P}(A)$上的等价关系，并写出它的商集$\mathscr{P}(A)/\sim$。

8. 将非零实数集合记为$\mathbb{R}^*$，定义$\mathbb{R}^*$上的二元关系R。任给$x,y\in\mathbb{R}^*$，

$$xRy,\qquad \text{当且仅当}\quad x\times y>0。$$

证明：R是$\mathbb{R}^*$上的等价关系，列出所有等价类的代表元。

9. $\mathbb{R}$是实数集合，在$\mathbb{R}$上定义关系R。任给$x,y\in\mathbb{R}$，

$$xRy,\qquad \text{当且仅当}\quad x\text{与}y\text{相差一个整数}。$$

证明：R是$\mathbb{R}$上的等价关系，列出所有等价类的代表元。

10. 设R是集合X上的偏序，A是X的子集。证明：$R\cap(A\times A)$是A上的一个偏序关系。

11. 设A是非空集合，$\mathscr{B}$是A上所有二元关系构成的集合。在$\mathscr{B}$上定义二元关系$\preceq$。任给$R_1,R_2\in\mathscr{B}$，$R_1\preceq R_2$，当且仅当，对所有的$x,y\in A$，若xR_1y，则必有xR_2y。证明；$<\mathscr{B},\preceq>$ 是偏序集。

12. 设画出下列集合上整除关系的哈布图：

（1）$S=\{1,2,3,4,6,8,12,14\}$，

（2）$S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$。

13. 假定图4.10给出的是不同偏序关系的关系图，请画出每个关系对应的哈布图。

14. 设$A=\{a,b,c\}$，说明A的偏序集只有五种不同的哈布图。

15. $\mathbb{Z}$是整数集合，在$\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}-\{0\}$上定义关系$R$。任给$m,n\in\mathbb{Z}^*$，

$$mRn,\qquad \text{当且仅当}\qquad m\times n>0\text{且}m|n.$$

证明：$<\mathbb{Z}^*,R>$是偏序集，它是否有最大元、最小元、极大元、极小元?

16. $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$是任意集合。在偏序集$<\mathscr{P}(A),\subseteq>$ 中取子集序列$\{a_1\},\{a_1,a_2\},\{a_1,a_2,a_3\},\cdots,\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\},\cdots$，它们的并集是否是$\mathscr{P}(A)$的一个极大元? 为什么?

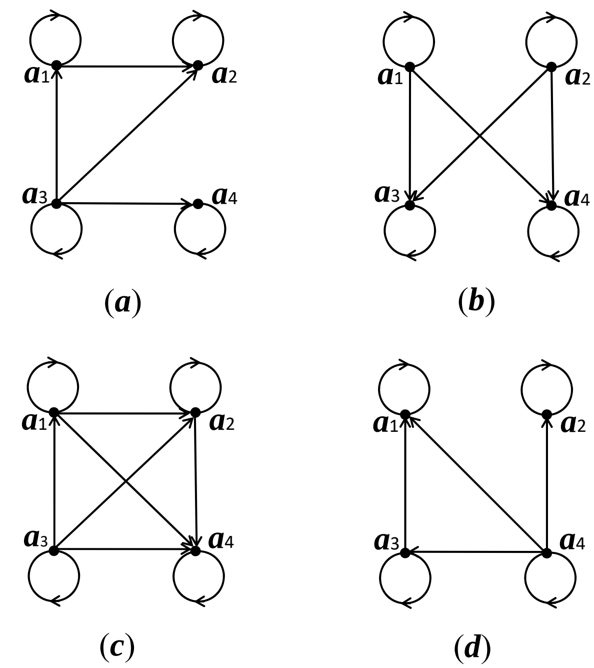

图 4.10: 习题13对应的图

17. 设$< S, \preceq >$是偏序集。证明：S的任意非空子集M均含有极小元，当且仅当S的任意递降序列$a_1 \succ a_2 \succ \cdots \succ a_n \succ \cdots$必终止于有限项。

18. 证明：一个有限集合与一个可数集合的并是可数集合。

19. 设$\mathbb{N}$是自然数集合。证明$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$是可数集合。

20. 证明：实数集合$\mathbb{R}$与笛卡尔积$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$等势。