代数结构第十四次习题参考答案

金海旻

jhm1213@mail.ustc.edu.cn

8-1.令$R_1=\{x|x\in R, 0\leq x\leq 1\}$,≤是$R_1$上的小于等于关系，证明<$R_1$, ≤>是格，该格的*,⊕的运算是什么？

证明：1.证明<R_1, ≤>是部分序集

2.再证*是 min，⊕是 max。

8-4.证明：在格中，如果 $a\leq b\leq c$,则有

（1），$a\oplus b=b*c$

证明: $a\oplus b=b=b*c$

(2) $(a*b)\oplus(b*c)=b=(a\oplus b)*(a\oplus c)$

证明：$(a*b)\oplus(b*c)$

$=a\oplus b=b$

又$(a\oplus b)*(a\oplus c)$

$=b*c=b$

证毕

8-5（1）证明在格中$(a*b)\oplus(c*d)\leq(a\oplus c)*(b\oplus d)$

证明：$a*b\leq a$, $c*d\leq c$

所以 $(a*b)\oplus(c*d)\leq a\oplus c$

同理 $(a*b)\oplus(c*d)\leq b\oplus d$

由于$(a\oplus c)*(b\oplus d)$是最大下界，所以$(a*b)\oplus(c*d)\leq(a\oplus c)*(b\oplus d)$

（2）证明$(a*b)\oplus(b*c)\oplus(c*a)\leq(a\oplus b)*(b\oplus c)*(c\oplus a)$

证明：$(a*b)\oplus(b*c)\leq b$

$(b*c)\ominus(c*a)\leq c$

所以(a*b) $\oplus(b*c)\oplus(c*a)\leq b\oplus c$

同理(a*b) $\oplus(b*c)\oplus(c*a)\leq a\oplus c$，(a*b) $\oplus(b*c)\ominus(c*a)\leq a\oplus b$

所以命题成立

8-8 设 S={1,3,5,15,25,75},<S,|>是格，请列出互补元素。

解：最小元=1，最大元=75，

1 与 75 互补

3 与 25 互补

8-10 具有三个或者更多元素的线性序集不是有补格。

证明: 设该线性序集=<{a,b,c,.....},R>且则不妨设 a$\leq b\leq c$

若是有补格，则设最小元是 a，最大元是 x，c$\leq x$

设 b 的补元 d，由于 b*d=a,所以 a= d，又因为 a$\oplus b=b$ **不是最大元。所以 b 的补元不存在**。

8-13 证明在有补分配格中

(1) $a\leq b \Leftrightarrow a*b'=0$

证明: $b*b'=0$

$a\leq b, a*b'\leq b*b'=0$

反之 $a*b'=0, a*(b\oplus b')=a*1=a$

又因为 $a*(b\oplus b')=a*b\oplus(a*b')=a*b\oplus 0=a*b$

所以 $a*b=a$,所以 $a\leq b$

(2) $b'\leq a' \Leftrightarrow a'\oplus b=1$

证明: $b\oplus b'=1, b'\leq a'$， 所以 $b\oplus b'\leq a'\oplus b$

$a'\oplus b\geq 1$,

所以$a'\oplus b=1$

反之，$a'\oplus(b*b')=a'\oplus 0=a'$

$a'\oplus(b*b')=a'\oplus b*(a'\oplus b')=1*(a'\oplus b')=a'\oplus b'$所以$a'\oplus b'=a'$

所以$b'\leq a'$。