P153——19

f(x)=1+x+x2+…+xn 有因子 1+x 当且仅当 $f(-1)=0_R$

$$f(-1)=\begin{cases}0 & n为奇数\\ 1 & n为偶数\end{cases}$$

∴1+x+x2+…+xn 有因子 1+x 当且仅当 n 为奇数

P153——20

f(x)=x　Ker f={0}

f(x)=0　Ker f=Z

按照剩余类的加法和乘法，Z 对于理想 N 的所有剩余类的集合 Z/N 是一个环，规定 f(x)=x+N，则 f 是 Z 到 Z/N 的一个同态映射，其核为 N

P153——23

设 $[a]_m=[b]_m$ ∴m|(a−b) 又 r|m r|(a−b)即 $[a]_r=[b]_r$

f 与代表元选取无关 ∴ $f([1]_m)=[1]_r$

$f([a]_m+[b]_m)=f([a+b]_m)=[a+b]_r=[a]_r+[b]_r=f([a]_m)+f([b]_m)$

$f([a]_m[b]_m)=[ab]_r=[a]_m[b]_m=f([a]_m)f([b]_m)$

∴f 是环同态映射

Ker f={$[a]_m$ |a<m 且 r|a}

易知 f 是满射则 $Z_m/\ker f\cong Z_r$

P153——24

显然 φ 是映射，对∀a∈R，有 $\varphi(f(x))=\varphi(a+px+\dots+qx^n)=a$ ∴ φ 是满射

设 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$　　$g(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i$

$\varphi(f(x)+g(x))=a_0+b_0=\varphi(f(x))+\varphi(g(x))$

$\varphi(f(x)\cdot g(x))=\varphi(f(x))\cdot\varphi(g(x))$

$\varphi(1_{R[x]})=1_R$

∴ φ 是从 R[x]到 R 的满同态映射

Ker φ={f(x)| f(x) ∈R[x]， $\varphi(f(x))=0$}

$R[x]/\ker\varphi\cong R$

P154——26

充分性： |n|=0,(0)是 Z 的素理想显然；

|n|=p,若 ab=kn ∈(n),因 n 是素数，则 n|a、n|b

∴a ∈(n)，b∈(n) （n）是 Z 的素理想

必要性： (n)是 Z 的素理想

若 ab=kn ∈(n),必有 n|a 或 n|b

|n|=0 显然满足

否则设 n=pq∈(n)（p、q∈Z，p、q>1）

却得不到 p∈(n)或 q∈(n)

与(n)是 Z 的素理想矛盾

∴n 是素数或|n|=0

P154——27

充分性：n 为素数，则(x,n)≠Z[x]

若 $f(x)=a_0+a_1x+...+a_kx^k$ ∈(x,n) 有 $n|a_0$

令 A 为 Z[x]的理想且（x，n）⊂A

有 f∈A 且 f∉（x，n）则 $f= a_0+a_1x+...+a_kx^k$ 且 n 不整除 a_0

（n, a_0）=1 有 s,t ∈Z $sn+ta_0=1$

有 sn + tf=t(f- a_0) +1

sn ∈（x, n）,tf ∈A, t(f- a_0) ∈(x,n)

∴1 ∈A ,Z[x]=Z[x]A

∴A=Z[x]

∴(x,n)是 Z（x，n）的极大理想

必要性：(x,n）是 Z[x]的极大理想，显然 n ≠1

若 n=pq(2<p、q<n)

则（x，p）是 Z[x]的理想，且（x,n）⊂（x，p）≠Z[x]

与（x,n）是 Z[x]的极大理想矛盾

∴n 是素数