第 1 章 集合

集合是数学中最基本的概念,它已深入到各种科学和技术领域中,特别是应用于数学的各个分支中,本章的内容是在高中数学课所介绍的基础上略有提高,引入了幂集、积集概念以及计算机科学中常用的集合的归纳定义.

1.1 集合的基本概念

1.1.1 集合

集合是一些对象的总体.总体中的对象称之为集合的元素或成员.给定任意一个对象x以及集合S,如果x是集合S的一个元素,我们将写成$x \in S$.如果x不是集合S的一个元素则写成$x \notin S$.

习惯上称之为集合的事物,通常在数学上是可以接受的.例如:

1° “小于4的非负整数集合”是由四个元素组成的集合.这四个元素分别是$0, 1, 2, 3$;

2° “全体活着的中国人”是个集合.集合中元素的个数很多,但是有限的.由于生死的变化,要列出这个集合的成员是困难的.这种困难是实践上的,不是理论上的;

3° “大于等于3的整数集合”是个有无限多个元素的集合.要判断一个整数是否是它的元素很容易;

4° “在具有无限存贮量的计算机上,运行足够长的时间之后能停止运行的所有Algol 60程序组成了一个无限集合”.但计算理论已经证明,判断任意程序是否是这个集合的元素的算法是不存在的.从而这个集合是不可判定的;

5° “全体大于0,小于1的整数集合”.在这个集合中没有任何元素,我们称它为空集,并记为$\varnothing$.

集合是以它的元素来表征的.一个有有限多个元素的集合可以用列出它的全部元素的方法来说明.这些元素用大括号括起来,并且元素之间用逗号分开.一般集合用大写字母表示,集合元素用小写字母表示.当集合A中有有限多个元素时,用$|A|$表示集合中的元素个数.特别对于空集$\varnothing$, $|\varnothing| = 0$.例如:

1° $A = \{a, b, c\}$, a, b, c是集合A的元素,$|A| = 3$;

2° $B=\{0,2,4,6,8\}$,B是小于10的非负偶数集合.$|B|=5$.

集合,特别是有无限多个元素的集合,通常用指出集合中元素性质的方法来说明.例如,记$\mathbf{Z}$是全体整数集合.

1° 全体偶数集合为$\{x \mid \exists y \in \mathbf{Z}, x=2y\}$;

2° 大于10的整数集合$\{x \mid x \in \mathbf{Z}$且$x>10\}$;

3° 有理数集合$\mathbf{Q}=\{x/y \mid x,y \in \mathbf{Z}$且$y \neq 0\}$.

1.1.2 集合的相等

同一个集合可以有不同的表示法.例如,$A=\{-1,1\}$,$B=\{\, x \mid x \in \mathbf{Z}, x^2=1 \,\}$,$C=\{\, x \mid x \in \mathbf{R}, |x|=1 \,\}$,其中$\mathbf{R}$表示全体实数集合.这就产生了一个问题,即如何判断两个集合是同一个集合.

定义 1.1. 给定两个集合A和B,如果集合A中的每个元素都是集合B中的元素,反过来集合B中的每个元素也都是集合A中的元素,那么称集合A和集合B**相等**,并记为$A=B$.

用这个定义可直接验证上面的集合A,B,C是相等的集合,$A=B=C$.

定理 1.1. *A,B,C是任意集合,集合间的相等关系满足:*

1° **自反性** $A=A$;

2° **对称性** 若$A=B$,则$B=A$;

3° **传递性** 若$A=B, B=C$,则$A=C$.

证明 在定义1.1中,将B改成A以后显然成立,它说明$A=A$.又在定义1.1 中, 先说后一句话,再说前一句话,也就是说集合B的每个元素都是集合A中的元素,反过来集合A的每个元素也都是集合B中的元素,其意思与原来完全相同,所以当$A=B$时,必有$B=A$.

下面证明传递性.已知$A=B$,对于任何$x \in A$,必有$x \in B$.又由$B=C$,从$x \in B$推出$x \in C$.反过来,由$A=B, B=C$及相等关系的对称性推出$B=A, C=B$.对于任何$x \in C$,由于$C=B$,必有$x \in B$.又由$B=A$,从$x \in B$推出$x \in A$.对照定义1.1知$A=C$.

1.1.3 集合的包含

集合的相等与包含是集合间的两种最基本的关系.现在定义两个集合的包含关系.

定义 1.2. A和B是两个集合.如果集合A中的每个元素都是集合B中的元素,我们称集合B包含集合A,而集合A叫做集合B的一个**子集**,表示成$B \supseteq A$或$A \subseteq B$.

如果集合B包含集合A,并且至少一个元素属于集合B而不属于集合A,我们称集合B真包含集合A,而集合A叫做集合B的一个**真子集**.

例如,偶数集合是整数集合的真子集.集合$\{1,2,3,4\}$是集合$\{x \mid x \in \mathbf{Z}$且$0 < x < 5\}$的子集,但不是真子集.

定理 1.2. *A,B,C是任意集合,集合间的包含关系满足:*

1° **自反性** $A \subseteq A$;

2° **反对称性** 若$A \subseteq B$且$B \subseteq A$,则$A = B$;

3° **传递性** 若$A \subseteq B$且$B \subseteq C$,则$A \subseteq C$.

证明 $1^\circ, 3^\circ$的证明留作习题.这里只证2°.

若$A \subseteq B$且$B \subseteq A$,由集合包含的定义知集合A中的每个元素都是集合B中的元素,并且集合B中的每个元素都是集合A中的元素.这正是集合A和集合B相等的定义,从而得出$A = B$.

定理 1.3. 对于任何集合A, $\varnothing \subseteq A$.

证明 用反证法.假设空集$\varnothing$不是某个集合A的子集,那么至少有一个元素x, $x \in \varnothing$且$x \notin A$.而$\varnothing$是空集,它没有任何元素,即对任何x必有$x \notin \varnothing$.产生矛盾.故不可能.由此得出$\varnothing$是任何集合A的子集.

由定理1.3知,空集$\varnothing$是唯一的.这是因为假若$\varnothing_1$和$\varnothing_2$都是空集.因为$\varnothing_1$是空集,得出$\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$.因为$\varnothing_2$是空集,得$\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$.由集合包含关系的反对称性知$\varnothing_1 = \varnothing_2$.

在研究一个特定问题时,假设有一个足够大的集合使一切集合都包含在它之中.这个足够大的集合称之为万有集合,并记为U.对于任何集合A均有$A \subseteq U$.

1.1.4 幂集

$A, B, \cdots$是集合,把它们放在一起构成一个新的集合$\{A, B, \cdots\}$.这种集合以集合作为元素称为集族.集族通常用花写字母$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \cdots$表示.

一个集合的全部子集构成的集族叫做该集合的幂集.若$A = \{a, b, c\}$, A的幂集$\mathscr{P}(A)$是有8个元素的集族:

$$\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

定理 1.4. A是有限集合,$|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$.

证明 A是有限集合,$|A| = n$.A的i元子集的个数就是从n个元素中选取i个不同元素的方法$C_n^i\left(= \frac{n!}{i!(n-i)!}\right)$,这里$i$可以取$0, 1, \cdots, n$这$n+1$个值.故有

$$|\mathscr{P}(A)| = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n$$

在二项式定理

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n y^0 + C_n^1 x^{n-1} y + \cdots + C_n^n x^0 y^n$$

中,令$x = y = 1$,于是有$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n$.从而$|\mathscr{P}(A)| = 2^n = 2^{|A|}$.

1.1.5 积集

定义 1.3. 对于正整数n,有序n元组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$是a_i为第i个分量的n个对象的**序列**.

两个有序n元组是相等的,当且仅当它们的每个分量都是相等的.

定义 1.4. n个集合$A_1, A_2, \cdots, A_n$的**积集**$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$是由全体有序$n$元组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$构成的集合,其中$a_i \in A_i, 1 \leqslant i \leqslant n$.

特别地,若$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$时,记$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$为$A^n$.

例如,$A = \{1, 2\}, B = \{m, n\}, C = \{0\}, D = \varnothing$,那么

$A \times B = \{(1, m), (1, n), (2, m), (2, n)\}$,

$A \times C = \{(1, 0), (2, 0)\}, C \times A = \{(0, 1), (0, 2)\}, A \times D = \varnothing$. 注意,这里$A \times C \neq C \times A$.

定理 1.5. A, B是两个有限集合,$|A\times B| = |A|\cdot|B|$.

证明 从集合A中任取一个元素a作为第一分量,从集合B中任取一个元素b作为第二分量构成的有序2元组(a,b)是$A\times B$的一个元素.a与b的不同取法构成不同的有序2元组.从集合A中选取一个元素有$|A|$种方法,从集合B中选取一个元素有$|B|$种方法.它们可以构成$|A|\cdot|B|$个不同的2元组.于是$|A\times B| = |A|\cdot|B|$.

同理可以证明$|A_1\times A_2\times\cdots\times A_n| = |A_1|\cdot|A_2|\cdot\cdots\cdot|A_n|$.

1.2 集合的运算

我们在前一节谈到集合间的一些联系,如包含、子集等,各种不同集合的进一步联系是通过集合上的各种运算显示出来的.

定义 1.5. 集合A与B的**并,交,差集**$A\cup B, A\cap B, A-B$分别为

$$A\cup B = \{x \mid x\in A\text{或}x\in B\},$$
$$A\cap B = \{x \mid x\in A\text{且}x\in B\},$$
$$A-B = \{x \mid x\in A\text{且}x\notin B\}.$$

由定义看出$A\cup B$是由或是在集合A中,或是在集合B中的元素组成的.$A\cap B$是由集合A和集合B的公共元素组成的.$A-B$是由在集合A中但不在集合B中的元素组成的.若取A为万有集合U,$U-B$称为集合B的补集,并记为$\bar{B}$.不难看出

$$\bar{B} = \{x \mid x\in U\ \text{且}x\notin B\} = \{x \mid x\notin B\}.$$

例如,$A = \{0,1,2\}, B = \{1,2,3\}, U = \{x \mid x\in\mathbf{Z}\ \text{且}x\geqslant 0\}$.

$$A\cup B = \{0,1,2,3\},$$
$$A\cap B = \{1,2\},$$
$$A-B = \{0\},\quad B-A = \{3\},$$
$$\bar{A} = U-A = \{x \mid x\in\mathbf{Z}\text{且}x\geqslant 3\}.$$

定理 1.6. 对于任意集合A, $A\cup\bar{A} = U, A\cap\bar{A} = \varnothing$.

证明 由并与交运算的定义

$$A \cup \bar{A} = \{x \mid x \in A或x \in \bar{A}\} = \{x \mid x \in A或x \notin A\} = U.$$
$$A \cap \bar{A} = \{x \mid x \in A且x \in \bar{A}\} = \{x \mid x \in A且x \notin A\} = \varnothing.$$

例 1.1. 证明$\bar{A} \subseteq \bar{B}$当且仅当$B \subseteq A$.

证明 用反证法证明必要性.假设$B \subseteq A$不成立,那么至少存在一个元素$x_0 \in B$且$x_0 \notin A$,从而$x_0 \in \bar{A}$.另一方面$x_0 \in B$, 故$x_0 \notin \bar{B}$.这就是说,至少存在一个元素x_0,使$x_0 \in \bar{A}$且$x_0 \notin \bar{B}$,与$\bar{A} \subseteq \bar{B}$相矛盾,故不可.于是仅当$B \subseteq A$时有$\bar{A} \subseteq \bar{B}$.

可用类似的方法证明充分性.

例 1.2. 证明$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

证明 证明的思路是先证明$\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$,再证明$\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$,利用集合间包含关系的反对称性得到$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

下面我们先证$\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

任取$x \in \overline{A \cap B}$,由补运算的定义知$x \notin A \cap B$,即$x \in A$与$x \in B$不能同时成立.由此得出$x \notin A$或$x \notin B$.再由集合并运算的定义知$x \in \bar{A} \cup \bar{B}$,这里$x$是$\overline{A \cap B}$的任意元素,故$\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

再证$\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

任取$x \in \bar{A} \cup \bar{B}$,由并运算的定义知$x \in \bar{A}$或$x \in \bar{B}$.因$A \cap B \subseteq A$,从上例知$\bar{A} \subseteq \overline{A \cap B}$.当$x \in \bar{A}$时,必有$x \in \overline{A \cap B}$.同样因$A \cap B \subseteq B$,从上例知$\bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$. 当$x \in \bar{B}$时,必有$x \in \overline{|A \cap B|}$.综上分析知$\bar{A} \cup \bar{B}$的每个元素都是$\overline{A \cap B}$的元素, 即$\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

定理 1.7. 对任意集合A, B, C下面等式成立:

1° $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A;$

2° $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$

3° $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$

4° $A \cup \varnothing = A, A \cap U = A;$

5° $A \cup \bar{A} = U, A \cap \bar{A} = \varnothing.$

证明 $5°$已在定理1.6中证明.其余的均可由集合并、交运算的定义直接证明.

定理 1.8. 下面三个关于集合A和B的命题是相互等价的:

$1°$ $A \subseteq B$;

$2°$ $A \cup B = B$;

$3°$ $A \cap B = A$.

证明 我们的证明方法是通过证明$1° \Longrightarrow 2° \Longrightarrow 3° \Longrightarrow 1°$来说明它们是等价的.

首先证明$1° \Longrightarrow 2°$.

已知$A \subseteq B$, A的每个元素都是B中的元素,从集合并运算的定义知

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或} x \in B\} = \{x \mid x \in B\} = B.$$

再证明$2° \Longrightarrow 3°$.

已知$A \cup B = B$,等式两边同时与A求交仍然相等.然后再定理1.7中的诸性质

$$\begin{aligned}
A \cap B \quad &= A \cap (A \cup B) & \\
&= (A \cup \varnothing) \cap (A \cup B) & 4° \\
&= A \cup (\varnothing \cap B) & 3° \\
&= A \cup ((\varnothing \cap B) \cap \varnothing) & 4° \\
&= A \cup ((B \cap \varnothing) \cup (B \cap \bar{B})) & 1°, 5° \\
&= A \cup (B \cap (\varnothing \cup \bar{B})) & 3° \\
&= A \cup (B \cap \bar{B}) & 1°, 4° \\
&= A \cup \varnothing & 5° \\
&= A. & 4°
\end{aligned}$$

最后证明$3° \Longrightarrow 1°$.

已知$A \cap B = A$,任取$x \in A \cap B$,由集合交运算的定义知$x \in A$且$x \in B$,特别注意到$x \in B$,由x的任意性,得到$A \cap B \subseteq B$.将$A \cap B = A$代入即是所求的结果$A \subseteq B$.

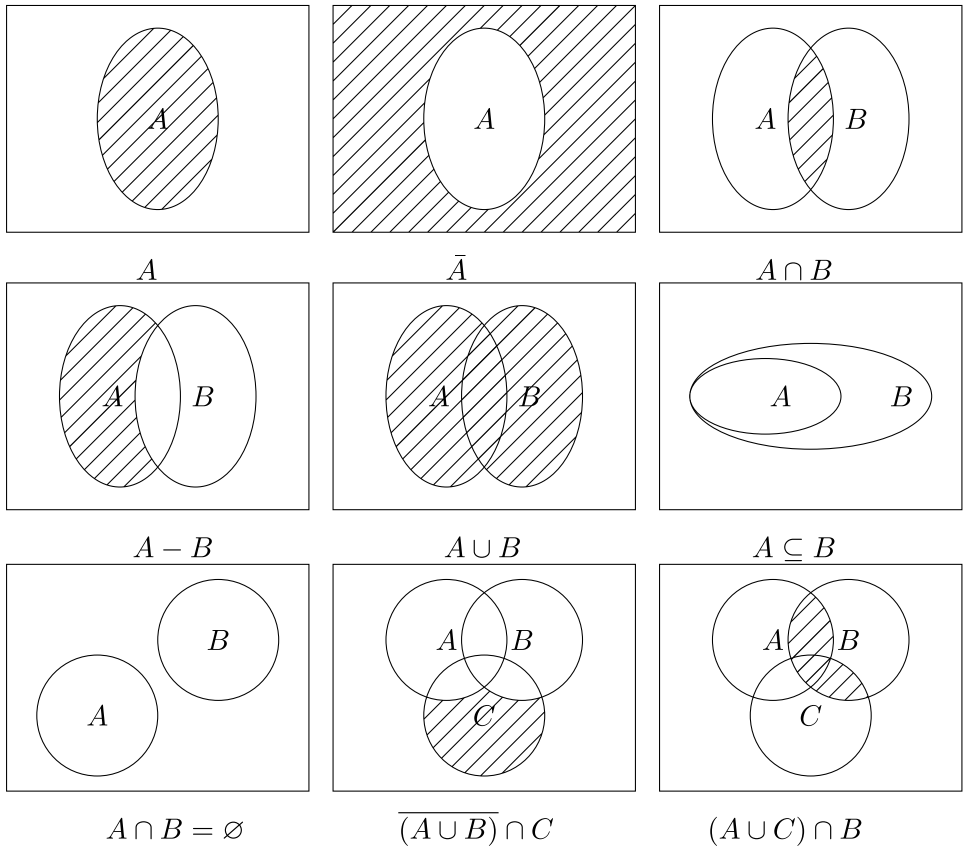

图 1.1: Venn图

对集合的运算可以用Venn图直观地表示.在图1.1中用矩形表示万有集合U,圆表示集合A, B, C.

1.3 集合的归纳定义

前面谈到有限集合可以用列出集合元素的方法,也可用刻画集合元素性质的方法来表述.但是用集合元素来定义集合,特别是无限集合,不总是很方便的.例如pascal程序集合、自然数集合等.对这样的集合通常自然地采用归纳定义.

集合的归纳定义是由基础语句,归纳语句和终结语句三个部分组成的.

先看个例子.非负偶整数集合E可以定义为

$$E = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, x \geqslant 0 \text{ 且} \exists y \in \mathbf{Z}, \text{使} x = 2y\}.$$

它也可以归纳定义如下:

1° (基础语句)$0 \in E$;

2° (归纳语句)如果$n \in E$,则$n+2 \in E$;

3° (终结语句)除了有限多次使用1°, 2°产生的整数之外再也没有其他元素属于E.

在这个例子中,我们可以看出: 基础语句为该集合提供了基本建筑块.这些基本块应该尽可能地少.归纳语句指出如何从集合已有元素构造出其他元素.构造方法要简单可行.终结语句表述构造方法的完备性,即除掉基础语句给出的元素外,集合的每个元素都能用归纳语句提供的方法构造出来,并且该集合的全体元素就是有限次使用基础语句和归纳语句所得到的全部元素.

在计算机科学中符号行起着重要作用,在行文编辑程序、处理代数公式程序以及定理证明程序中,对符号行的运算是核心.字母表是由有限多个符号组成的集合,记为Σ.从Σ中选取有限个符号排成一行称为字母表Σ上的一个行.令$\Sigma = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$,$x = a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}$.其中$a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_k} \in \Sigma$,那么称$x$是$\Sigma$上长为$k$的行.特别地,称长为0的行为空行,记作$\lambda$.现有$\Sigma$上的两个行$x = a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}$,$y = b_{j_1}b_{j_2}\cdots b_{j_l}$,其中$a_{i_1}$,$a_{i_2}$, $\cdots$,a_{i_k},b_{j_1},b_{j_2}, $\cdots$, $b_{j_l} \in \Sigma$.行x与行y的连接是行xy:

$$xy = a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}b_{j_1}b_{j_2}\cdots b_{j_l},$$

它是Σ上长为$k+l$的行.一般地,行的连接运算不满足交换律.

特别地,$x\lambda = \lambda x = x$,即任何行与空行相连接,则保持不变.

下面归纳定义两个常用的集合Σ^+和Σ^*.

定义 1.6. 字母表Σ上所有非空行的集合Σ^+定义如下*:*

1° (基础语句)如果$a \in \Sigma$,则$a \in \Sigma^+$*;*

2° (归纳语句)如果$x \in \Sigma^+$且$a \in \Sigma$,则a与行x的连接$ax \in \Sigma^+$*;*

3° (终结语句)集合Σ^+只包含有限次使用1°, 2°所得到的那些行.

集合Σ^+包括长为$1, 2, \cdots$的行,它是一个无限集合.特别要指出的是,在Σ^+中的每一个元素都是由有限多个符号组成的行.

例如$\Sigma=\{a,b\}$,那么

$$\Sigma^+=\{a,b,aa,ab,ba,bb,aaa,aab,\cdots\}.$$

定义 1.7. Σ是字母表,Σ上所有行的集合Σ^*定义如下:

1° (基础语句)空行$\lambda\in\Sigma^*$;

2° (归纳语句)如果$x\in\Sigma^*$且$a\in\Sigma$,则a与行x的连接$ax\in\Sigma^*$;

3° (终结语句)除了有限次使用1°, 2°构造的行以外,Σ^*再没有其他元素.

例如$\Sigma=\{a,b\}$,那么

$$\Sigma^*=\{\lambda,a,b,aa,ab,ba,bb,aaa,aab,\cdots\}=\{\lambda\}\cup\Sigma^+.$$

例 1.3. 用归纳方法定义仅由整数,一元运算符$+,-$,二元运算符$+,-,*,/$及括号组成的算术表达式集合.

1° (基础语句)令$\mathbf{D}=\{0,1,2,\cdots,9\}$,若$x\in\mathbf{D}^+$,则$x$是算术表达式;

2° (归纳语句) 如果x和y是算术表达式,则$(-x),(+x),(x+y),(x-y),(x*y),(x/y)$是算术表达式;

3° (终结语句)一个符号行是算术表达式,当且仅当它是有限次使用1°, 2° 得到的.

不难验证$341, 0000, (3+7), (3*(-61)), ((+1)-((+6)/7))$都是上面定义的集合中的元素.

习题

1.下面的集合A和集合B是否是相等的?

(1) $A=\{1,2,3\}, B=\{x\mid x\in\mathbf{Z}\}$;

(2) $A=\{1,2,4\}, B=\{1,2,2,4\}$;

(3) $A=\{a,b,ab\}, B=\{b,ab,a,b,a\}$.

2.已知$A\subseteq B, B\subset C$,证明$A\subset C$.

3.下面的等式是否成立?

(1) $\{0\}=\varnothing$;

(2) $\varnothing=0$;

(3) $\{\varnothing\}=\varnothing$;

(4) $\varnothing=\{x \mid x\neq x\}$;

(5) $\varnothing=\{B \mid B\subseteq A$且$|B|=0\}$;

(6) $\mathscr{P}(\varnothing)=\varnothing$.

4.下面的命题是否成立?

(1) 如果$A\neq B, B\neq C$,则$A\neq C$;

(2) 如果$a\notin A, A\supseteq B$,则$a\notin B$;

(3) $|\mathscr{P}(A)|>1$推出$A\neq\varnothing$.

5.证明下列不等式:

(1) $A\cap(\bar{A}\cup B)=A\cap B$;

(2) $A\cup(A\cap B)=A$;

(3) $A_1, A_2, \cdots, A_n$为集合,证明

$$\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i \overline{A_i}.$$

6.证明下列命题:

(1) $B\subseteq C\Rightarrow(A\cap B)\subseteq(A\cap C)$;

(2) $A\subseteq C, B\subseteq C\Rightarrow(A\cup B)\subseteq C$;

(3) A和B是有限集合,那么$|A\cup B|\leqslant|A|+|B|$,并且仅当$A\cap B=\varnothing$时等式成立.

7.用归纳法定义如下集合:

(1) 十进制无符号整数,它应该包括$4, 167, 0012$等;

(2) 带有限小数部分的无符号实数,它应该包括$6.1, 712., 61.200$等;

(3) 不以0打头的二进制偶整数,它应该包括$0, 110, 1010$等.