HW 7

5.25

> 证明：无限循环群的子群，除{e}以外都是无限循环群

解：设$G=\langle a\rangle$是无限循环群，H是G的子群，因为循环群的子群还是循环群，若$H\neq\{e\}$, 则$H=\langle a^m\rangle$, 其中a^m为H中最小正方幂元。假如H是有限设$|H|=t$，则$|a^m|=t$, 即$a^{mt}=e$。这与a为无限阶元矛盾。

> 注：循环群的子群还是循环群

5.26

> 在群$\langle G,*\rangle$中定义新的二元运算$\bullet$, $a\bullet b=b*a$。证明：$\langle G,\bullet\rangle$是群，并且$\langle G,*\rangle$与$\langle G,\bullet\rangle$同构

解：定义映射$f:G\to G,f(x)=x'$，注意此处的逆在*运算意义下，首先由于群逆元的存在唯一性，得知f是一个映射；另外对于$\forall a,b\in G$,若有$f(a)=f(b)\Leftrightarrow a'=b'$, 则有$e=b'*a\Rightarrow b=a$，故知$f$是单射，另外对$\forall a\in G,f(a')=(a')'=a$，所以$f$是满射。综上$f$是双射。

进一步地，对$\forall a,b\in G$，有$f(a*b)=(a*b)'=b'*a'=a'\bullet b'=f(a)\bullet f(b)$，故$f$保持运算。

综上，由定理5.15，$\langle G,\bullet\rangle$是群，并且$\langle G,*\rangle$与$\langle G,\bullet\rangle$同构，同构映射是f。

> 利用定理5.15求解，主要是找到G到G的双射，并且保持运算，及同构映射。观察到$a\bullet b=b*a;a,b$位置交换，考虑逆运算

6.3

> 写出A_4中关于$H=\{e,(1\ 2)(3\ 4),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 4)(2\ 3)\}$的左陪集分解和右陪集分解。

解：
$A_4=\{e,(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$共可以分解成$\frac{|A_4|}{|H|}=3$个陪集

左陪集分解：

$$\begin{aligned}eH=H&=\{e,(1\ 2)(3\ 4),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 4)(2\ 3)\}\\(123)H&=\{(123),(134),(243),(142)\}\\(132)H&=\{(132),(124),(143),(234)\}\end{aligned}$$

右陪集分解：

$$\begin{aligned}He=H&=\{e,(1\ 2)(3\ 4),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 4)(2\ 3)\}\\H(123)&=\{(123),(134),(243),(142)\}\\H(132)&=\{(132),(124),(143),(234)\}\end{aligned}$$

> 注：
>
> 1. 陪集的个数：拉格朗日定理，确定个数后尝试求出三个不同的陪集即可
> 2. 左陪集等于右陪集

6.4

> H是群G的指数为2的子群。证明：对于G的任何元素a必有$a^2\in H$，若H的指数为3，是否对G的任意元素a有$a^3\in H$?证明你的断言。

1. 若$a\in H$，由于H是子群，所以$a^2=a*a\in H$；

   若$a\notin H$, 则$a'\notin H$, 否则$a=(a')'\in H$, 由于H的指数为2，所以a,a'都属于H的另一个右陪集，也即$a\equiv a'(mod\ H)$，也即$a*(a')'=a^2\in H$成立
2. 否。反例如下：

   $S_3=\{I,(123),(132),(12),(13),(23)\}$

   $H=\{I,(12)\}$

   $a=(13)$时, $a^3=(13)\notin H$

> 注：以a是否属于H分类讨论

6.5

> H,K是G的两个子群，$[G:H]=m,[G:K]=n$, 证明子群$H\bigcap K$在G中的指数$\leq m\bullet n$

1. 法一

   考虑陪集交$Ha\bigcap Kb$, 其中a,b任意，若他不为空，则对$\forall x\in Ha\bigcap Kb$有$Ha=Hx,Kb=Kx$成立(等价类性质)，所以$\forall y\in Ha\bigcap Kb=Hx\bigcap Kx,\exists h\in H,k\in K,y=h*x=k*x$, 于是$h=k=y*x'$成立，所以$h=k\in H\bigcap K$成立, 也即$y\in(H\bigcap K)x$。另一方面，对于$y\in(H\bigcap K)x$而言，有$z\in H\bigcap K,y=z*x$，于是显然$y\in Hx,y\in Kx$成立，也就是$y\in Ha,y\in Kb$，也就是$y\in Ha\bigcap Kb$。

   所以说存在映射g对于每一个非空的陪集交$Ha\bigcap Hb$，一定可以映射到一个子群$H\bigcap K$的陪集且g是满射(参见上面证明中的"另一方面"部分)，而非空的陪集交至多有mn个，所以子群$H\bigcap K$的陪集至多有mn个(此时$Ha\bigcap Hb$对任意a,b非空且映射g为单射)，于是有原命题成立。

2. 法二

本题有同学使用公式$|HK| = \frac{|H||K|}{|H\bigcap K|}$进行证明，这个公式书上并没有，考试也不能直接使用，这里给出一个简单证明：

该公式要求H, K都是有限阶的, 设$|H| = n, |K| = m$。$HK = \{h*k|h\in H, k\in K\} = h_1K\bigcup h_2K\bigcup ...\bigcup h_nK$，也就是说$HK$是$K$的若干陪集之交，那么现在考察$h_1K\bigcup h_2K\bigcup ...\bigcup h_nK$中哪些项是相同的?

由6.2题的结论可得，
$h_iK = h_jK \Leftrightarrow h_i' * h_j \in K$；又因为$H$是群，所以$h_i' * h_j \in H$成立。故$h_i' * h_j \in H\bigcap K$, 也就是说$h_i(H\bigcap K) = h_j(H\bigcap K)$，上面推导的每一步都是等价的，即$h_iK = h_jK \Leftrightarrow h_i(H\bigcap K) = h_j(H\bigcap K)$，而模$H\bigcap K$左不同余的元素在$H$中有$[H : H\bigcap K] = \frac{|H|}{|H\bigcap K|}$个，所以$h_1K\bigcup h_2K\bigcup ...\bigcup h_nK$中不同的陪集有$\frac{|H|}{|H\bigcap K|}$个, 故$|HK| = |h_1K\bigcup h_2K\bigcup ...\bigcup h_nK| = \frac{|H||K|}{|H\bigcap K|}$

下面利用该公式证明题6.5

由$[G : H] = m, [G : K] = n$得$|G|/|H| = m, |G|/|K| = n$, 而$[G : H\bigcap K] = \frac{|G|}{|H\bigcap K|}$, 由如上证明的公式得$[G : H\bigcap K] = \frac{|G|}{|H\bigcap K|} = \frac{|G||HK|}{|H||K|}$ $\frac{|G|^2}{|H||K|} = mn$

> 注：该公式要求H,K是有限的，但是题目并没有给出这样的条件，因此使用该公式证明是不完备的！