P41

3. 求 x 和 y 使得

（1）314x+159y=1

解：

先求（314，159）

314=159 • 1+155

159=155 • 1+4

155=4 • 38+3

4=3 • 1+1

3=

∴（314，159）=1|1，方程 314x+159y=1 有解

1 = 4-3 • 1=4-（155-4 • 38）=-155+4 • 39=-155+(159-155 • 1) • 39

=159 • 39-155 • 40=159 • 39-(314-159 • 1) • 40=-314 • 40+159 • 79

∴一组特解为 -40， 79

通解为 x=-40+159t，y=79-314t （t 为整数）

5. 证明：若对于某个m有 10|（3^m+1）. 则对所有的n>0, 10|(3^{m+4n}+1).

证明：

$3^{m+4n}+1=3^{m+4n}+3^{4n}-3^{4n}+1=3^{4n}（3^m+1）-（3^{4n}$ $=3^{4n}（3^m+1）-（81^n$

∵10|（3^m+1）

∴10|3^{4n}（3^m+1）

又 10|（81^n

∴10|3^{4n}（3^m+1）-（81^n

即对所有的n>0, 10|(3^{m+4n}+1)。

10. 求下列方程的负整数解

（1）6x-15y=51

解：

（6，15）=3，3|51，∴6x-15y=51 有整数解

其一组特解为 x0=11，y0=1.

通解为 x=11-5t，y=1-2t

要 $x<0$ 且 $y<0$，则 $t>2$

∴$6x-15y=51$ 的负整数解为 $x=11-5t$，$y=1-2t$ ($t>2$).

17. 证明：

（1）$10^{k}\equiv(-1)^{k}\pmod{11}$，$k=0，1，2，\cdots$

证明：

$10^{k}=(11-1)^{k}$

根据二项式定理，展开的前k项可被11整除，最后一项为$(-1)^{k}$

∴$10^{k}\equiv(-1)^{k}\pmod{11}$，$k=0，1，2，\cdots$

（2）推出一个整数能被11整除的判别法

解：

设a为n位整数

$a=a_n\cdot 10^{n-1}+a_{n-1}\cdot 10^{n-2}+a_2\cdot 10+a_1=\sum a_i\cdot 10^{i-1}$

∵$(a_i，11)=1$

∴ $a_i\cdot 10^{i-1}\equiv a_i\cdot(-1)^{i-1}\pmod{11}$

∴$a\equiv\sum a_i\cdot(-1)^{i-1}\pmod{11}$

故a奇数位上数码之和与偶数位数码之和的差能被11整除时有$11|a$。

18(3).解同余方程：$4x\equiv 6\pmod{18}$

解：

∵$\gcd(4,18)|6$,

∴该方程有通解 $x=x0+9t\pmod{18}$, 其中 $0\leqq t\leqq 1$, $x0$ 是同余方程 $2x\equiv 3\pmod{9}$ 的特解。

易知 $x0=6$，

该同余方程的解为 $x=6，15\pmod{18}$.

19（4）解下列同余方程组

$2x\equiv 1\pmod{5}$

$3x\equiv 2\pmod{7}$

4x≡1（mod11）

解：

由 gcd(2,5)=1 可知：2x≡1（mod5）等价于 x≡3（mod5)。

由 gcd(3,7)=1 可知：3x≡2（mod7）等价于 x≡3（mod7)。

由 gcd(4,11)=1 可知：4x≡1（mod11）等价于 x≡3（mod11)。

令 M=5・7・11=385，由定理 2.9

[illegible]1≡1（mod 5）

55b2≡1（mod 7）

35b3≡1（mod 11）

b1=3，b2=6，b3=6

a1=3，a2=[illegible]3=3

∴x=77・3・3+55・6・3+35・6・3=3 (mod 385) 是方程组的解