代数结构第十三次习题参考答案

梁后军

ahlhj@mail.ustc.edu.cn

5 page152

(1)非整环， 非域

(2) 整环， 非域

(3) 整环， 域

7 page153

证。 a*b 是零因子=> a*b 不是零元， 且 a, b 不是零元（否则 a*b 是零元）

a*b 是零因子=>存在非零元 c 使 (a*b)*c=0=> a*(b*c)=0

若 b*c 不是零元则 a 是零因子;

若 b*c 是零元则 b 是零因子.

8 page153

证。（1）对 $f,g \in E_H$， $x\in H$有 （f+g）（x）=f(x)+g(x) $\in H$=>（f+g）（H）$\subseteq H$

=> E_H对加法封闭

（2）$x\in H$令 $f_0(x)= O_H$ => $f_0(H) =\{O_H\}\subseteq H$=> $f_0\in E_H$.

对 任 $x\in H$，$f \in E_H$ 有 $(f+ f_0)(x)= f(x)+ f_0(x)= f(x)+ O_H= f(x)$ 同理$(f_0+ f)(x)= f(x)$

=> f_0 是E_H. 的 加法幺元（零元）。

令 $f'(x)=-f(x)$; 对 任 $x\in H$ $(f'+f)(x)= O_H= f_0(x)$ => f’是 f的 逆元。

因 $f(x) \in H$， $-f(x)$ 是 f(x)的加法逆元 =>$-f(x) \in H$

从而， 对$f \in E_H$ 有逆元存在。

（1）（2）=>< E_H， +> 是 <E , +> 的 子群。

（3）对 $x\in H$, f ， $g \in E_H$， 有 $(f \bullet g)(x)= f(g(x)) \in H$ => E_H 对乘法封闭。

（4）令 $f_1(x)=x$， $(f_1 \bullet g)(x)= f_1(g(x))= g(x)$ => f_1是乘法幺元。

由（1）（2）（3）（4）=>E_H是E的子环。

10 page153

证。(1) f((a,b)+ (c,d))=f(a+c, b+d)=a+c=f(a,b)+f(c,d)

(2) $f((a,b)\bullet(c,d))=f(ac, bd)= ac= f(a,b) \bullet f(c,d)$

(3) f(1,1)=1, (1,1) 是 $Z\times Z$ 的 单位元， 1 是 Z 的 单位元.

=>f 是同态映射。

令 f(a,b)=0=> a=0 => $kerf=\{(0,b)| b\in H\}$

18 page153

$f(x)+g(x)=-1+4x$, $f(x) \bullet g(x)=-5+5x-5x^2+3x^4+5x^6$

19 page153

(1) n为奇数时 $(1+x+\ldots+x^n)=(1+x)(1+x^2+x^4+\ldots+x^{n-1})$ => $1+x$ 是其因子。

(2）若 $1+x+\ldots+x^n$ 有因子 $1+x$,

令 $1+x+\ldots+x^n=q(x)*(1+x)$, 令x=1 => 1+1+1+…+1(共n+1 个 1)= q(1)*(1+1)=0（因 1+1=0（mod 2））=> n+1 为偶数=> n为奇数。