代数结构第八次习题参考答案

金海旻
jhm1213@mail.ustc.edu.cn

习题 4-18 证明一个有限集合与一个可数集合的并是可数集合

证明: 设有限集合 $A=\{a_0,a_1,\ldots a_n\}$,

根据有限集合定义必存在双射 $f:|0,n|\to A$, 即 $f(i)=a_i$.

这某个可数集合 $B=\{b_0,b_1,\ldots,b_n,\ldots\}$, 则必存在双射 $g:N\to B$, $g(i)=b_i$.

$A-B=\{a_{j0},a_{j2},..a_{jk}\}$, 我们构造如下双射 $h:N\to A\cup B$.

$$h(i)=\begin{cases} f(ji), i\le k \\ g(i-k-1), i>k \end{cases}$$

由于 f, g 都是双射，所以 h 也是双射。

因此 $A\cup B$ 是可数集合。

习题 4-20 证明 R×R 与实数集合 R 等势。

证明：由 $g(x)=e^x$ 可知 R 和 R^+ 等势……(1)

正实数总可唯一表示为正整数部分和小数部分。

即实数 R=（$\ldots a_2a_1$, $b_1b_2\ldots b_j\ldots$）其中 “，”号之前是整数部分，之后是小数部分。

整数部分首位不为 0.

有如下映射 $f:R^+\times R^+\to R^+$,

设正实数 A=（$\ldots a_2a_1$, $b_1b_2\ldots b_j\ldots$）,B=($\ldots c_2c_1$,$d_1d_2\ldots$). 将 A 与 B 按小数点对齐。

当首位 c_i 与 a_j 与小数点距离不同时，不妨设 a_j 更远。

$f((a_1a_2...a_i...,\ b_1b_2\ldots b_j\ldots),\ (c_1c_2\ldots,d_1d_2\ldots))=(a_10a_20\ldots a_jc_1a_{j+1}c_2\ldots,b_1d_1b_2d_2\ldots)$.当 A 的小数位长度和 B 不一样长时，短的一方在相应位置补 0。

易知 f 是双射。即 $R^+\times R^+$ 与 R^+ 等势….（2）

同理由 $h(x,y)=(e^x,e^y)$ 可知 R×R 与 $R^+\times R^+$ 等势….(3)

由 1，2，3 可以知命题得证。