P64

6. 设 A={a1,a2,…,an}, |B|=m, S(B)表示集合 B 中元素构成的全体有序 n 数组，即

S(B)={(bi1,bi2,…,bin)|bij 属于 B,1<=j<=n}

以 F 表示从 A 到 B 的映射全体。对于 F 中的每个映射 f，令

g(f)=(f(a1),f(a2),…f(an))

证明：g是从F到S(B)的双射，并由此证明从A到B的映射有m^n个。

证明：

任取 S(B)中一元素(bi1,bi2,…,bin)，

令 f 为

$a_1 \to b_{i1}, a_2 \to b_{i2}, ..., a_n \to b_{in}$

则 f 为 S(B)在 F 中的原象

$\therefore$ 任一 S(B)的元素有原象，g 为满射；

设 f1，f2 都是(bi1,bi2,…,bin)的原象

则 f1=f2

$\therefore$ S(B)中的任一元素都有唯一原象，g 为单射；

$\therefore$ g 为双射。

$\therefore |F| = |S(B)| = |B|^n = m^n$

$\therefore$ 从A到B的映射有m^n个

8.

解：

当 a 是单射时，

$\forall b \in a(\tilde{A})$

则$b \in T$

$\because a$是单射 $\therefore b \notin a(A)$

$\therefore b \in \widetilde{a(A)}$

$\therefore a(\tilde{A}) \subseteq \widetilde{a(A)}$

当 a 是满射时，

$\forall b \in \widetilde{a(A)}$

则$b \notin a(A)$

$\because a$是满射 $\therefore b \in a(\tilde{A})$

$\therefore \widetilde{a(A)} \subseteq a(\tilde{A})$

当 a 是双射时，

$\widetilde{a(A)} = a(\tilde{A})$

11.

解：

若 f 是双射

若 g 不是满射，则必存在 f 中某一象不是 $f\circ g$ 中的象，

则 $f\circ g\neq I_S$，矛盾

所以 g 是满射；

若 g 不是单射，则 $f\circ g$ 不是单射，

又 I_S 是单射，矛盾

所以 g 是单射；

综上得出 g 为双射。

$\because$ $f\circ g=I_S$，f 和 g 都是双射

$\therefore$ $g=f^{-1}$

$\therefore$ $g\circ f=f^{-1}\circ f=I_S$，矛盾。

13．把下列置换写成不相交的轮换之积。

(2)　　（72815）（21）（476）（12）

解：

$1\to2\to2\to1\to5$

$2\to1\to1\to2\to8$

$3\to3\to3\to3\to3$

$4\to4\to7\to7\to2$

$5\to5\to5\to5\to7$

$6\to6\to4\to4\to4$

$7\to7\to6\to6\to6$

$8\to8\to8\to8\to1$

$\therefore$ 可写成（1576428）

15. 求下列置换的阶。

(2)　　（163）（1357）（67）（12345）

解：

$1\to2\to2\to2\to2$

$2\to3\to3\to5\to5$

$3\to4\to4\to4\to4$

$4\to5\to5\to7\to7$

$5\to1\to1\to3\to1$

$6\to6\to7\to1\to6$

$7\to7\to6\to6\to3$

$\therefore$ 可写成（125）（347）

阶=[3, 3]=3.

16. 证明任何 n 元置换可以表示成（12），（23），…，（n-1，n）的乘积。

证明：

任取一对换（a1 a2）

$\because$（a1 a2）与（a2 a1）相同

不妨设 a1<a2

则（a1 a2）

=(a1 a1+1)(a1+1 a1+2)…(a2-2 a2-1)(a2-1 a2)(a2-2 a2-1)…(a1+1 a1+2)(a1 a1+1)

∴任意对换可表示为（12），（23），…，（n-1，n）的乘积。

又

任意置换可表示为不相交的轮换之积

任意轮换可表示为对换之积

∴任何 n 元置换可以表示成（12），（23），…，（n-1，n）的乘积。

18. 如果 f+g=g，求证

（1） $f \cdot g + \bar{f} = 1$

证明：

$$f \cdot g + \bar{f}$$

$$= f \cdot (f + g) + \bar{f}$$

$$= f \cdot f + f \cdot g + \bar{f}$$

$$= f + \bar{f} + f \cdot g$$

$$= 1 + f \cdot g$$

$$= 1$$

19. 写出下列 2 元开关函数的小项表达式。

（1）恒为 1 的函数。

解：

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + \bar{x}_1)(x_2 + \bar{x}_2)$$

$$= x_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2$$