代数结构第五次习题参考答案

金海旻
jhm1213@mail.ustc.edu.cn

习题三 3(1)　$g:Z\to Z^{+}$.　$g:n\to |n|+1$.

解答：此映射为满射。

理由：反证法。

若不是满射，则存在$b\in Z^{+}$ 但$b\notin \{g(z), z\in Z\}$

令 $z=b-1$, 则 $z\in Z$ 且 $g(z)=|b-1|+1=b-1+1=b$(注意 $b\geq 1$)

矛盾。

习题三 3(4) $f:N\to \{0,1\}$, $f(j)=\begin{cases}0, & j\text{ 为奇数}\\ 1, & j\text{ 为偶数}\end{cases}$

解答：此映射为满射。

理由：先说明是映射，然后说明值域就是$\{0,1\}$.

习题三 9 f, g, h 是从 Z 到 Z 的映射，$f(x)=3x$, $g(x)=3x+1$, $h(x)=3x+2$, 计算 $f\circ g$, $g\circ f$, $g\circ h$, $h\circ g$, $f\circ g\circ h$.

解答：$f\circ g=f(g(x))=3(3x+1)=9x+3$

$g\circ f=g(f(x))=3(3x)+1=9x+1$

$g\circ h=g(h(x))=3(3x+2)+1=9x+7$

$h\circ g=h(g(x))=3(3x+1)+2=9x+5$

$f\circ g\circ h=f(g(h(x)))=3(3(3x+2)+1)=27x+21$

习题三 10 令 f 是从 A 到 B 的单射，g 是从 B 到 C 的单射。证明 $g\circ f$是从 A 到 C 的单射。

证明：反证法。假设 $g\circ f$不是从 A 到 C 的单射，

则存在以下三种情况之一：

1. 存在 $a\in A$ 使 $g\circ f(a)$ 不属于 C

2. 存在 $a\in A$ 且 $g\circ f(a)$属于 C，但其值不唯一。

3. 存在$a_1,a_2\in A$, 使得$g\circ f(a_1)=g\circ f(a_2)$且$a_1\neq a_2$

反证 1，2 说明 $g\circ f$是从 A 到 C 的映射，反证 3 说明 $g\circ f$是单射。

现反正 3 如下：若 3 成立，由g是单射可知$f(a_1)=f(a_2)$。又由f是单射可知$a_1=a_2$.

矛盾。所以 3 不成立。

综上所述 $g\circ f$是从 A 到 C 的单射

习题三 12 设

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&4&5&6&2\end{pmatrix},\qquad \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&1&3&6&5\end{pmatrix}$$

计算$\tau\sigma$, $\tau^2\sigma$, $\sigma^2\tau$, $\sigma^{-1}\tau\sigma$

解答：$\tau\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&1&3&6&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&4&5&6&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&4&5&6&2\\1&2&3&6&5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&4&5&6&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&6&5&4\end{pmatrix}$

$$\tau^2\sigma=\tau\cdot\tau\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&6&5&4\\2&4&1&5&6&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&6&5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&1&5&6&3\end{pmatrix}$$

$$\sigma^2\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&4&5&6&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&4&5&6&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&1&3&6&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&4&5&6&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&5&3&4&2&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&6&4&5&1&2\end{pmatrix}$$

$$\sigma^{-1}\tau\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&6&1&3&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&6&5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&4&5&6&2\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&6&5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&6&1&5&4&3\end{pmatrix}$$

习题三 14（1）

(1)$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&2&6&3&7&4&5&1\end{pmatrix}$=（1 8）（3 6 4）（5 7）

习题三 16 证明任何 n 元置换可以表示成(12),(23),…,((n-1) n)的乘积。

证明：在一个 n 元集合{1,2,3….,n}中，任一对换(i j)=(i i+1)(i+1 i+2)…(j-1 j)(j-1 j-2)(j-2 j-3)…(i+1 i).

也就是任一对换都可以表示成由{(12),(23),…,((n-1) n)}中元素组成的乘积。（1）

而任一 n 元置换都可以轮换之积(i1 i2 i3 …ik)(j1 j2 j3… jm)…(…)　　（2）

而每一个轮换都可以写成对换之积(i1 i2 i3…ik)=(i1 ik)(i1 ik-1)…(i1 i2).　　（3）

由以上（1）（2）（3）可知命题得证。

习题三 18（2）如果 f+g=g,求证 $\bar{f}+g=1$

证明：$\bar{f}+g$

$=\bar{f}+f+g$

=1+g=1

证毕