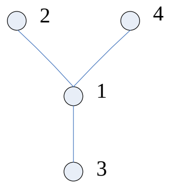
P91

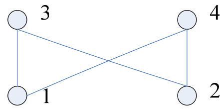
13.

解：

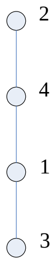
（1）



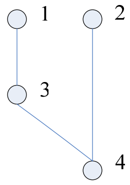
（2）



（3）



（4）



16.

解：

（1） 若 A 是有限集合，则子集序列的并集是 P(A)的极大元。

设 A={a1，a2，…，ak}

则子序列的并集为{a1，a2，…，ak}

P(A)中不存在与{a1，a2，…，ak}不同的 M，使{a1，a2，…，ak}$\subseteq$M

$\therefore$子集序列的并集是 P(A)的极大元。

（2） 若 A 是无限集合

a) A 是可数集，则子集序列的并集不是 P(A)的极大元。

因为所有的并集其实是一个可数集，而一个无限（可数或不可数）的集合必有一可数无限子集，

这个并集可以看作是原来可数集的子集，如果是真子集就不是极大元。

举例来说，可设初始可数集是自然数集

a1=0 a2=2, a3=4, . . .

这样并集是非负偶数集，不是极大元。

b) A 是不可数集，则子集序列的并集不是 P(A)的极大元。

$\cup_{n=1}^{n\to\infty}\{a_1,a_2,...,a_n\}=\{a_1,a_2,...,a_n,...\}$是可数无限集，

而 A 是不可数无限集

$\therefore \cup_{n=1}^{n\to\infty}\{a_1,a_2,...,a_n\}\subset A$

$\therefore$ 子集序列的并集不是 P(A)的极大元。

17.

证明：

充分性：

当 S 的递降序列 $a_1 > a_2 > ... > a_n > ...$ 终止于有限项时

S 的任一非空子集 M 必含有递降序列终止于有限项，即存在 i 使得 ai 在 M 中最小

$\therefore$ S 的任一非空子集 M 均含有极小元。

必要性：

$\because$ S 的任一非空子集 M 均含有极小元

如果序列 $a_1 > a_2 > ... > a_n > ...$ 不终止于有限项

取 T= $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\} \subseteq S$ ，则 T 中没有极小元，矛盾。

$\therefore$ S 的递降序列 $a_1 > a_2 > ... > a_n > ...$ 终止于有限项。

19. 证明 $N \times N$ 是可数集合，这里 N 是自然数集合。

证明：

首先我们把 N×N 的元素足码按表 4-5.1 的次序排列，并对表中每个序偶注以标号。

表4-5.1

0	1	3	6	10	
$\langle 0, 0\rangle$	$\langle 0, 1\rangle$	$\langle 0, 2\rangle$	$\langle 0, 3\rangle$	$\langle 0, 4\rangle$	…
2 ↙	4 ↙	7 ↙	11 ↙		
$\langle 1, 0\rangle$	$\langle 1, 1\rangle$	$\langle 1, 2\rangle$	$\langle 1, 3\rangle$	$\langle 1, 4\rangle$	…
5 ↙	8 ↙	12 ↙			
$\langle 2, 0\rangle$	$\langle 2, 1\rangle$	$\langle 2, 2\rangle$	$\langle 2, 3\rangle$	$\langle 2, 4\rangle$	…
9 ↙	13 ↙				
$\langle 3, 0\rangle$	$\langle 3, 1\rangle$	$\langle 3, 2\rangle$	$\langle 3, 3\rangle$	$\langle 3, 4\rangle$	…
14 ↙					
$\langle 4, 0\rangle$	$\langle 4, 1\rangle$	$\langle 4, 2\rangle$	$\langle 4, 3\rangle$	$\langle 4, 4\rangle$	…

我们可以作$f: N\times N\to N$如下：

$$f(m, n)=\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+m$$

若把$f(m, n)$看作表4-5.1中序偶$\langle m, n\rangle$的标号，则

$$f: N\times N\to N$$

是个双射函数。这是因为：

a)

$$f(0, 1)-f(0, 0)=1$$
$$f(0, 2)-f(0, 1)=2$$
$$f(0, 3)-f(0, 2)=3$$
$$\cdots\qquad\cdots$$
$$f(0, n)-f(0, n-1)=n$$

则 $$f(0, n)-f(0, 0)=\frac{n(n+1)}{2}$$

因为 $$f(0, 0)=0$$

故 $$f(0, n)=\frac{n(n+1)}{2}$$

又 $$f(1, n)-f(0, n)=n-2$$
$$f(2, n)-f(1, n)=n-3$$
$$\cdots\qquad\cdots$$

$$f(m,n)-f(m-1,n)=m+n+1$$

所以

$$f(m,n)-f(0,n)=mn+m(m+3)/2,$$

$$f(m,n)=n(n+1)/2+m(m+3)/2+mn$$

经整理得：

$$f(m,n)=\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+m \qquad (A)$$

b) 若给出 $f(m,n)\in N$，可由(A)式确定唯一序偶 $\langle m,n\rangle$。

因

$$f(m,n)=\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+m$$

其中 $m,n\in N$。

令

$$u=f(m,n)$$

则

$$u\geq\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)$$

$$u<\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+(m+n)+1=\frac{1}{2}(m+n)(m+n+3)+1$$

令 $m+n=A$，则

$$\frac{1}{2}A(A+1)\leq u<\frac{1}{2}A(A+3)+1$$

即

$$A^2+A-2u\leq 0$$

$$A^2+3A-2(u-1)>0$$

$$-1+\frac{1}{2}[-1+(1+8u)^{0.5}]<A\leq\frac{1}{2}[-1+(1+8u)^{0.5}]$$

因为A是自然数，故可取

$$A=\frac{1}{2}[-1+(1+8u)^{0.5}]$$

因此，

$$\begin{cases} m=u-\frac{1}{2}A(A+1) \\ n=A-m \end{cases}$$

由a)，b)可知 $N\times N$ 是可数的。

20. 证明 $R\times R$ 与实数集合 R 等势。

证明：

$\because$ (0,1) 集合与实数集合 R 等势。

$\therefore$ 原题求证 $(0,1)\times(0,1)$ 与 (0,1) 等势。

一个实数就是一个无限小数（末尾可能只有有限个数不是零）。把数字写成十进制小数，按奇数位的数字和偶数位的数字拆成两半，可以把一个实数与一组实数对儿做一一对应。

任取 (0,1) 上的一个实数为 0.abcdef……

那么得到 x=0.ace……　　y=0.bdf……

(x,y)是 $(0,1)\times(0,1)$ 上的一个元素

可以看出，(0,1) 中的元素与 $(0,1)\times(0,1)$ 中的元素是一一对应关系。

$\therefore$ $R\times R$ 与实数集合 R 等势。