2012 - 2013学年第一学期期终考试试题

考试科目：　　线性代数B1　　　　　　得分：______________

一、 填空题:【共30分】

1. 设$A=\begin{pmatrix}2&2\\2&a\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4&b\\3&1\end{pmatrix}$。$A$与$B$相抵的充要条件是____________________;
A与B相似的充要条件是_________________; A与B相合的充要条件是________;
矩阵方程$AX=B$有解但矩阵方程$BY=A$无解的充要条件是__________________。

2. 设A为3阶非零方阵。若$a_{ij}+A_{ij}=0(\forall i,j)$；则$det(A)=$_____，$A^{-1}=$_________。

3. 设$\mathbb{R}^3$的线性变换$\mathscr{A}$将$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$分别变为$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}$;
则$\mathscr{A}$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为_______________,$\mathscr{A}$在自然基下的矩阵为__________。

4. 如果正交矩阵A的每个元素都是$\frac{1}{2n}$或$-\frac{1}{2n}$，那么A的阶是____。

5. 设A是n阶实对称矩阵，且$A^2=-A$，则A的规范形为______________________。

二、 【共20分】判断题（判断对错并简述理由）

1. 设$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m\in\mathbb{F}^n$为一组列向量，$n\times m$矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$ 经有限次初等行变换成为$B=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_m)$，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$与向量组$\beta_1,\beta_2,...,\beta_m$等价。

2. 设A为3阶实方阵；若A不实相似于上三角阵，则A不复相似于对角阵。

3. 秩为r的实对称矩阵可分解成r个秩为1的实对称矩阵之和。

4. 若A,B为同阶正定实对称方阵，则AB也正定。

5. 在$\mathbb{R}^n$中，若β_i与线性无关的向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1}$中的每个向量都正交$(i=1,2)$，则$\beta_1,\beta_2$线性相关。

三、【12分】设$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$。当$a,b$分别取何值时，存在$C$使得$AC-CA=B$，并求所有的$C$。

四、【12分】已知二次型$Q(X)=4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$。

1. 给出二次型$Q(X)$的矩阵A和矩阵表示；

2. 试用正交变换$X=PY$将$Q(X)$化为标准形；

3. 给出$Q(X)=6$的几何意义，并作示意图。

五、【16分】设$V=M_2(\mathbb{R}), C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \mathscr{A}(\alpha)=C\alpha+\alpha C, \forall\alpha\in V$。

1. 给出V的一组基(B)及$dimV$；

2. 求$\mathscr{A}$在基(B)下的矩阵A，并求A和$\mathscr{A}$的全部特征值与特征向量；

3. A可否相似对角化？若能，试求P使$P^{-1}AP$为对角阵Λ，并求V的一组基(E)使$\mathscr{A}$在基(E)下的矩阵为对角阵Λ；

4. 给出从基(B)到基(E)的过渡矩阵和$D=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$在基$(E)$下的坐标。

六、【10分】已知三阶矩阵A和三维列向量X，使向量组X, AX, A^2X线性无关，且满足$A^3X = 3AX - 2A^2X$，记$P = (X \quad AX \ A^2X)$。求：

1. $B = P^{-1}AP$；
2. $det(A - I)$。