

实验报告

电子信息技术 学院 21 级 04 班

学号 PB21061374

姓名 赵栋

日期 2023-10-24

实验一 连续信号的离散化

1.1 实验目的

- (1) 探究连续时间信号与时间取样序列之间的关系，取样前后的变化。
- (2) 理解取样操作的本质，是希望取样序列能够承载和表达原信号的所有信息。
- (3) 对比原信号频谱与取样序列频谱之间的差异，判断取样序列对原信号表达的有效性。
- (4) 理解奈奎斯特取样准则的物理意义及初步运用，掌握如何针对实际信号选择合适的取样频率。

1.2 实验原理

连续时间傅里叶变换（CFT）的一般表达式为 $X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$,

其反变换的一般表达式为

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega,$$

离散时间傅里叶变换（DTFT）的一般表达式为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n},$$

其反变换的一般表达式为

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega.$$

主要内容：

- 1) 对 $x(t)$ 做 CFT，记录观察频谱的幅频特性；
- 2) 对 $x(t)$ 做时域离散化得到 $x(n)$ ，对 $x(n)$ 做 DTFT，记录观察幅频特性；
- 3) 在不同的取样频率下，对比分析取样前后的幅频特性变化，理解奈奎斯特取样原理。

1.3 实验内容和分析

(1) 设

$$x_1(t) = \frac{\sin 2\pi f_h t}{t}, f_h = 100\text{Hz}$$

①CFT 变换后的幅频特性图如图 1-1 所示：

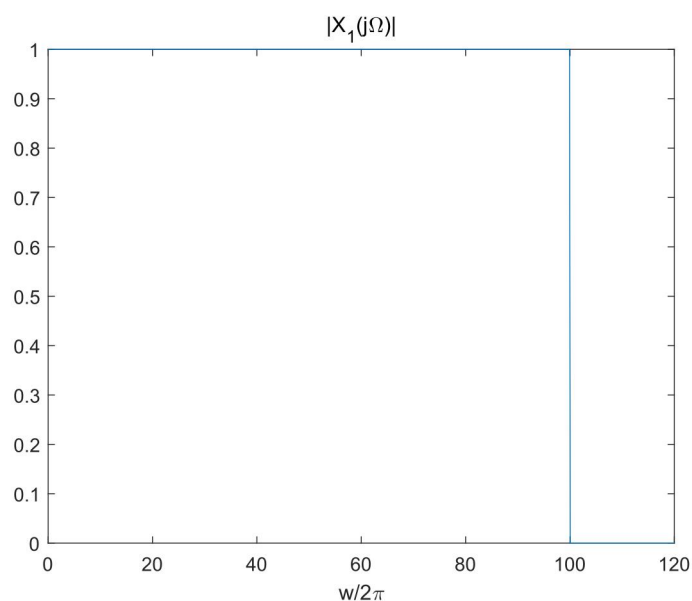


图 1-1 $x_1(t)$ 信号进行 CFT 变换得到的幅度谱

实际上 $x_1(t)$ 进行 CFT 后得到的是一个关于 y 轴对称的窗函数，从图像可以看出这是一个带宽受限的低通滤波器，最高频率为 $f_h = 100Hz$ ，根据奈奎斯特采样定理，最低的采样频率 $f_s = 2f_h = 200Hz$ 。

②在以下 5 个采样频率 f_s 下： $0.3f_h$ ， $0.6f_h$ ， $1.2f_h$ ， $1.8f_h$ ， $2.4f_h$ ，分别对 $x_1(t)$ 进行时域取样，形成取样序列 $x_1(n)$ ，对 $x_1(n)$ 进行 DTFT，得到的图像如图 1-2 至图 1-6 所示：

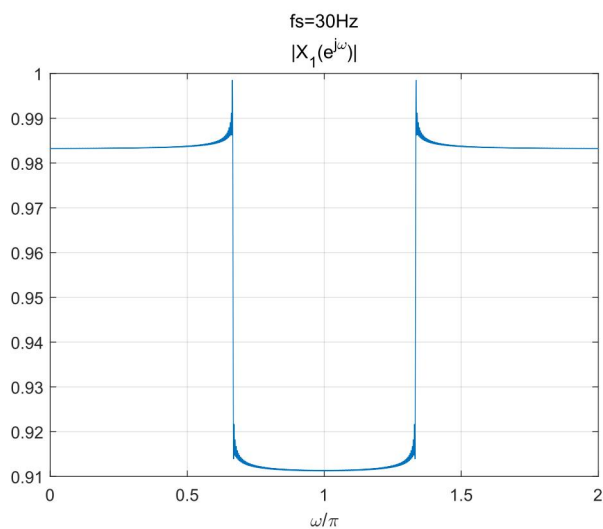


图 1-2 $x_1(t)$ 信号进行 $f_s = 0.3f_h$ 采样后的 DTFT 变换得到的幅度谱

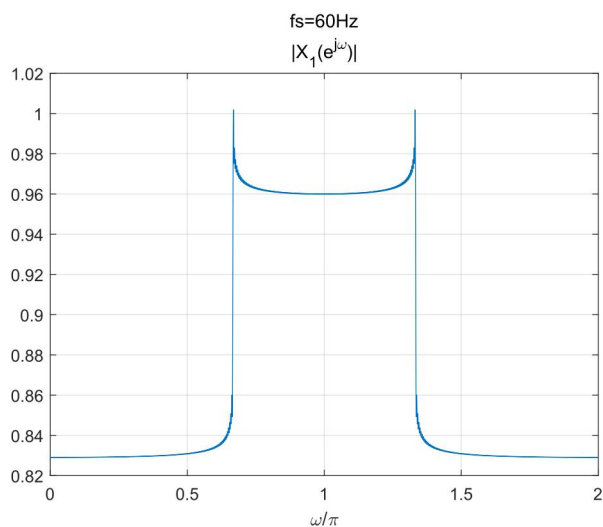


图 1-3 $x_1(t)$ 信号进行 $f_s = 0.6f_h$ 采样后的 DTFT 变换得到的幅度谱

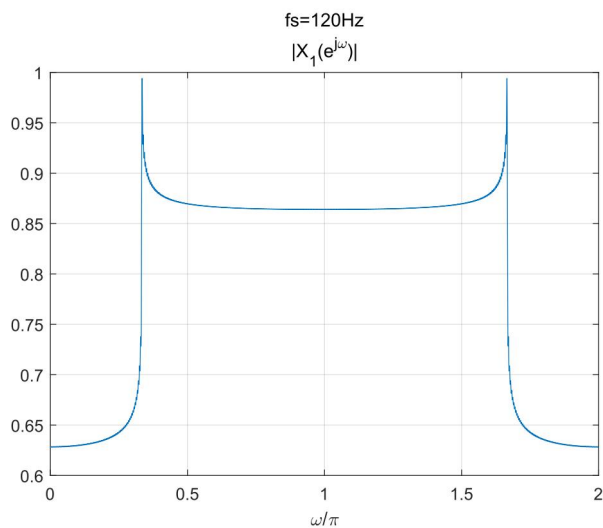


图 1-4 $x_1(t)$ 信号进行 $f_s = 1.2f_h$ 采样后的 DTFT 变换得到的幅度谱

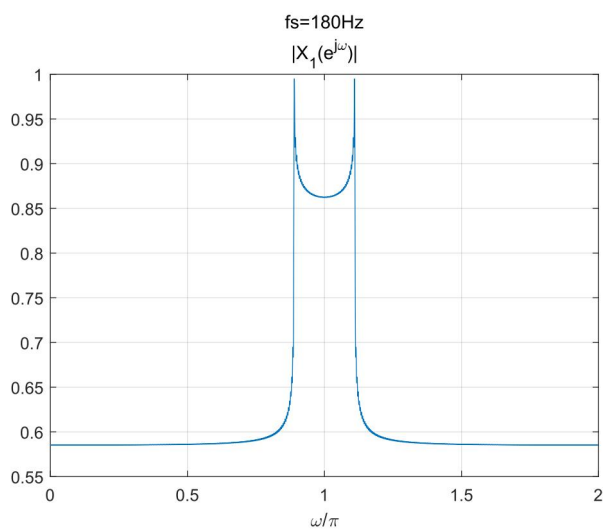


图 1-5 $x_1(t)$ 信号进行 $f_s = 1.8f_h$ 采样后的 DTFT 变换得到的幅度谱

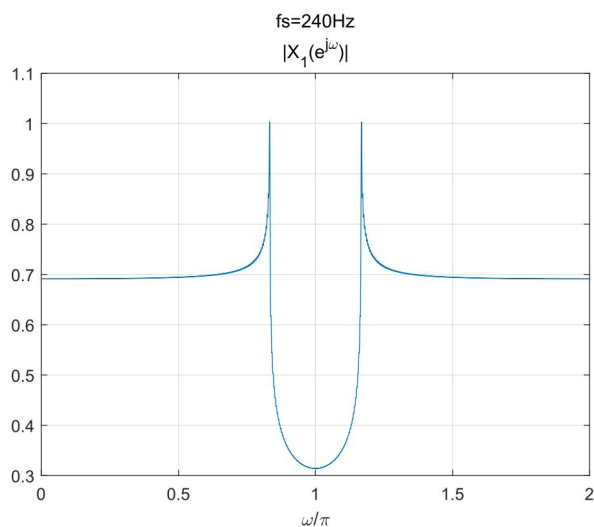


图 1-6 $x_1(t)$ 信号进行 $f_s = 2.4f_h$ 采样后的 DTFT 变换得到的幅度谱

从上面 $x_1(t)$ 在一系列采样频率下得到的幅度谱可以看出，随着 f_s 的增大，频谱之间发生的混叠成分逐渐减小，在 $f_s > 2f_h$ 之后，混叠现象基本消失，此时可以利用滤波器基本还原出原信号。不过可以注意到，由于采样点有限， $x_1(n)$ 对应的幅度谱并不是严格的窗函数形状，实际上还原的信号会有一点失真。

(2) 设 $x_2(t) = e^{-100t} \sin(2\pi f_q t)$, $f_q = 100\text{Hz}$,

- ① 对 $x_2(t)$ 进行 CFT，并画出幅频特性图，结果如图 1-7 所示。观察 $x_2(t)$ 的幅度谱可以发现 $x_2(t)$ 带宽是无限的，但是频率高端幅度有明显的衰减。根据频谱能量 95% 的近似原则，可以得到合适的取样频率 f_s 约为 284Hz。

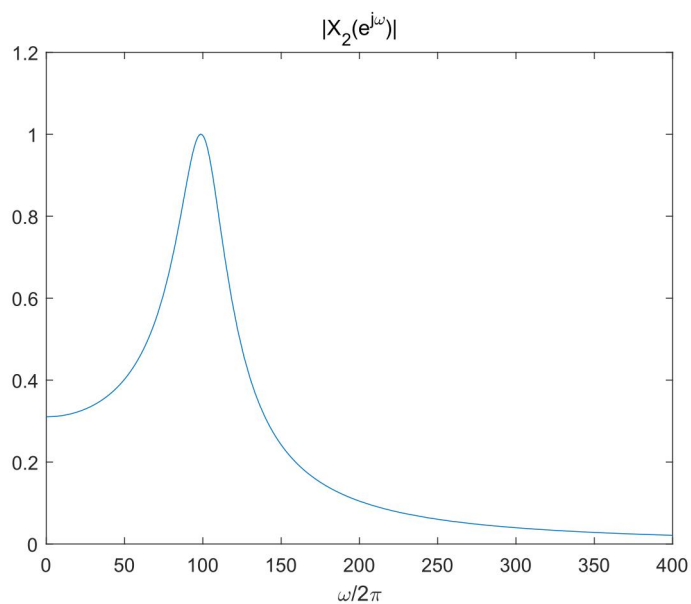


图 1-7 $x_2(t)$ 信号进行 CFT 变换得到的幅度谱

- ② 取样频率取 f_q , $4f_q$, $6f_q$, $10f_q$ 时, 分别对 $x_2(t)$ 进行时域取样, 形成不同的取样序列 $x_2(n)$, 对 $x_2(n)$ 分别进行 DTFT, 得到幅频特性图如图 1-8 至 1-11 所示。

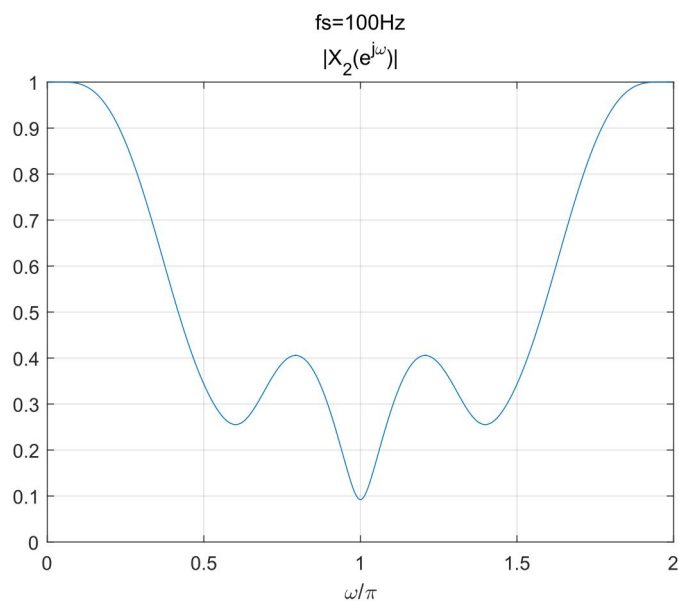


图 1-8 $x_2(t)$ 信号进行 $f_s = f_q$ 采样后的 DTFT 变换得到的幅度谱

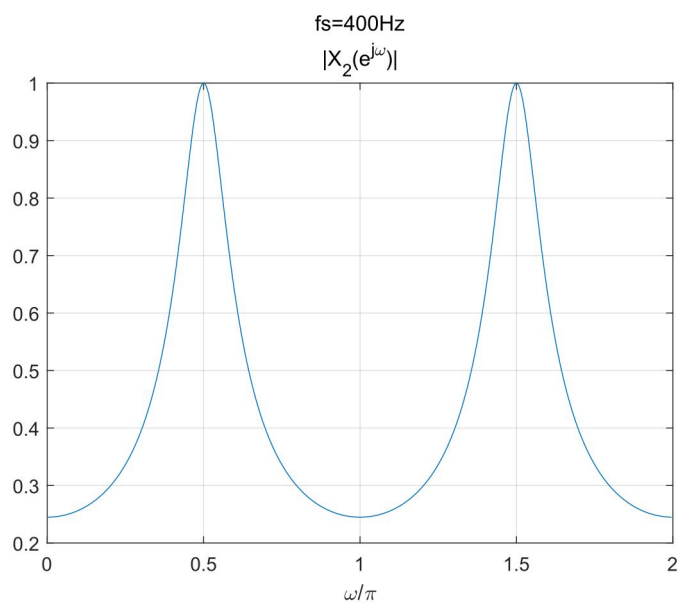


图 1-9 $x_2(t)$ 信号进行 $f_s = 4f_q$ 采样后的 DTFT 变换得到的幅度谱

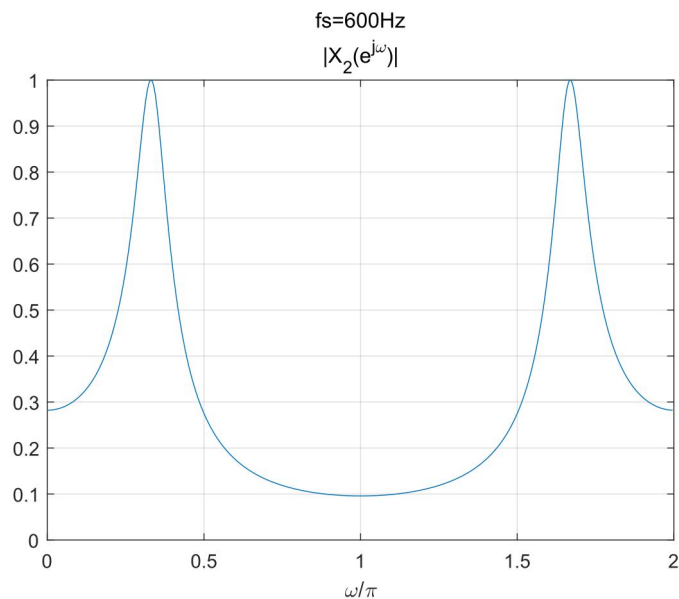


图 1-10 $x_2(t)$ 信号进行 $f_s = 6f_q$ 采样后的 DTFT 变换得到的幅度谱

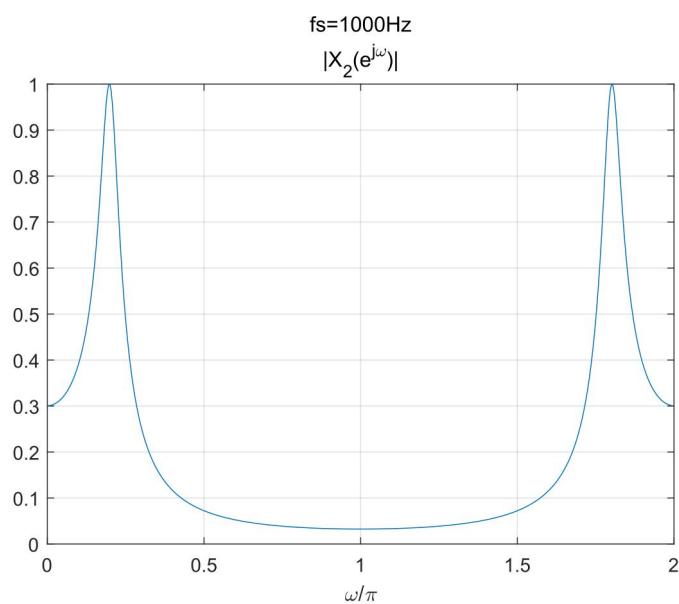


图 1-11 $x_2(t)$ 信号进行 $f_s = 10f_q$ 采样后的 DTFT 变换得到的幅度谱

从上面几幅图可以看出，随着采样频率的增加， $|X_2(e^{j\omega})|$ 从混叠逐渐分开，且距离越来越远，这说明信号的混叠程度逐渐减小，还原信号的效果也更好。

1.4 实验总结

第一次实验基本熟悉了 Maltlab 的基本绘图功能，了解了 plot 和 fplot 的绘图方式，学会了使用 fourier 函数对符号函数进行 CFT 变换，并掌握了使用 freqz 和矩阵运算的方法对离散信号进行 DTFT 变换。通过本次实验理解了连续信号离散化的各个过程，并能够通过观察幅度谱理清不同采样频率下对应幅度谱信号的混叠和分离过程，使奈奎斯特采样定理可视化。

实验二 栅栏效应

2.1 实验目的

- (1) 理解栅栏效应是连续频谱取样离散化之后呈现的一种视觉现象。
- (2) 理解在离散傅里叶变换 (DFT) 的定义下, 栅栏效应呈现的不是误差, 与频谱泄漏不同。

2.2 实验原理

栅栏效应, 是对频域离散化现象的一个形象化描述, 指 DFT 的频谱呈现在基频的整数倍处, 只能在相应离散点处看到输出的现象。这像通过一个“栅栏”来观看图景一样, 只能在离散点处看到真实图景。

2.3 实验内容和分析

设置 N 点离散序列 $x(n) = [1, 1, 0, 1]$,

- (1) 对 $x(n)$ 分别做 DTFT 和 DFT, 其中

DTFT 的一般表达式为:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

DFT 的一般表达式为:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

画出 $X(e^{j\omega})$ 和 $X(k)$ 的幅频特性曲线, 分别如图 2-1 和 2-2 所示。

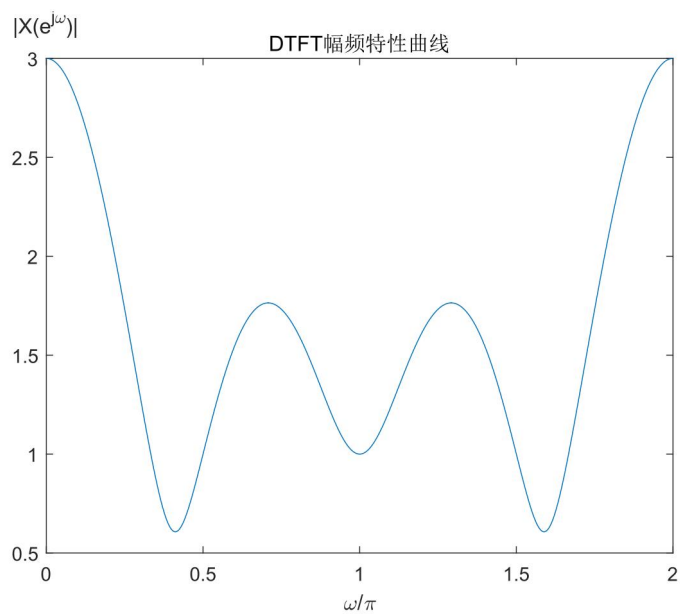


图 2-1 $x(n)$ 信号的 DTFT 变换幅度谱

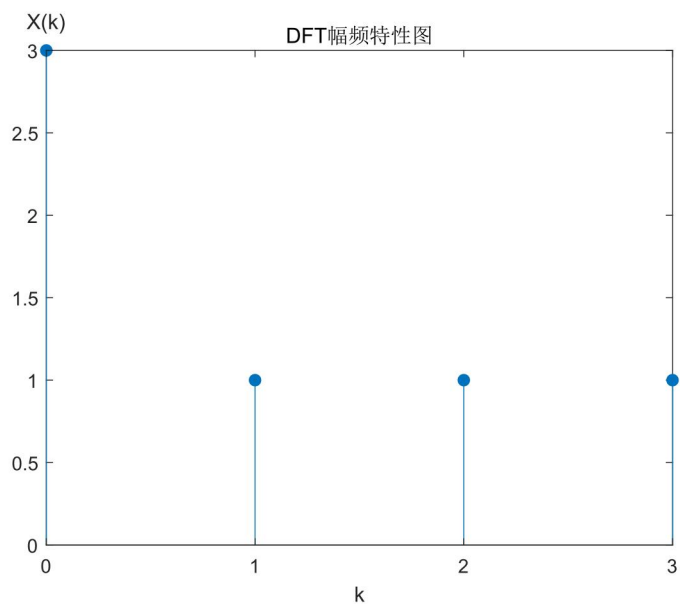


图 2-2 $x(n)$ 信号的 DFT 变换幅度谱

从图像上可以看出, $X(k)$ 就像是在基频频率下观察 $X(e^{j\omega})$ 的离散序列图,这就像通过一个“栅栏”来观看图景一样,只能在离散点处看到真实图景,这就是所谓的“栅栏效应”。为了更直观地观察这种效应,图 2-3 展示了将两张图重叠后的图像。

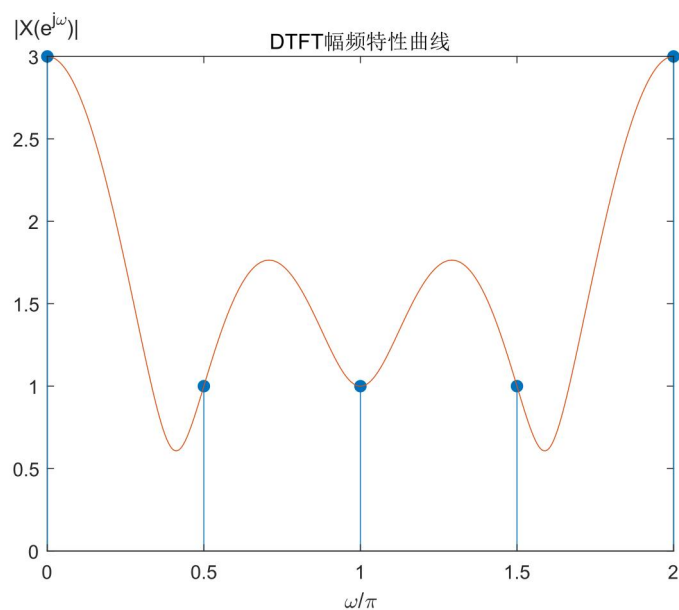


图 2-3 $x(n)$ 信号的 DTFT 变换和 DFT 变换幅度谱对比

(2) 用 $X(k)$ 和内插函数重建 $X(e^{j\omega})$ ，其中

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - W_N^{-k} e^{-j\omega}},$$

画出的幅频特性曲线，画出的 $\hat{X}(e^{j\omega})$ 图像如图 2-4 所示。

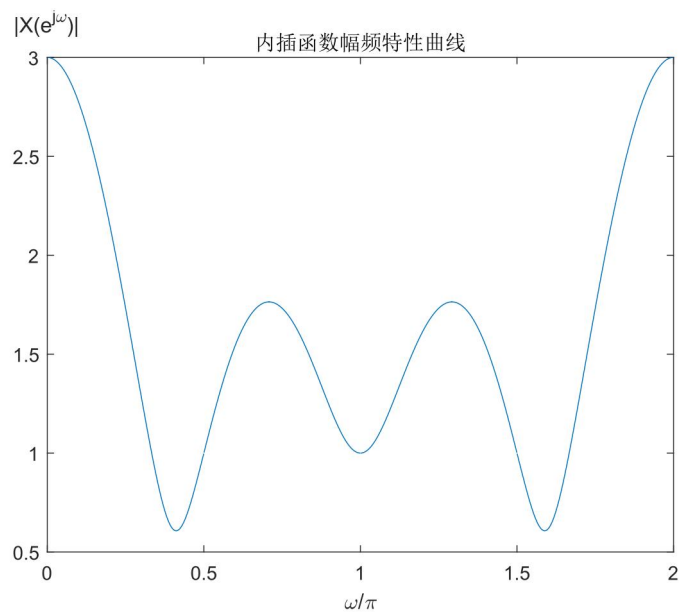


图 2-4 $X(k)$ 对 $\hat{X}(e^{j\omega})$ 重建后的内插函数幅度谱

从内插函数图像可以看出，通过该方法重建 $X(e^{j\omega})$ 可以比较好地还原出原信号的 DTFT 变换幅度谱。

2.4 实验总结

本次实验巩固了使用 MATLAB 学会了 `stem` 函数绘制离散图像的方法，复习如何利用矩阵运算实现 DTFT 和 DFT 变换，了解了 DTFT 变换和 DFT 变换之间的关系，并通过比较 $X(e^{j\omega})$ 和 $X(k)$ 幅度谱观察到了栅栏效应，即 DFT 的频谱呈现在基频的整数倍处，只能在相应离散点处看到输出的现象。最后通过内插函数利用 DFT 重建了 $X(e^{j\omega})$ 幅度谱图像，理解了如何利用栅栏效应，通过 DFT 图像近似还原出 DTFT 幅度谱图像。

实验三 频谱泄漏

3.1 实验目的

- (1) 理解这里的误差（偏差）概念，是指处理之后相对于处理之前的变化。
- (2) 理解 $x(n)$ 如何通过 DFT 来反映表达 $x(t)$ 的频谱情况。
- (3) 频谱泄漏是指离散序列 $x(n)$ DFT 相对于原信号 $x(t)$ 在频谱上多显示出的频率成分。
- (4) 产生频谱泄漏的根本原因，是对原信号 $x(t)$ 的截短；信号截短之后，相对于截短之前的原信号一定发生泄漏，与时域离散化无关，与 DFT 无关。
- (5) 理解 DFT 对频谱泄漏的呈现形态，与 DTFT 频谱离散化的频率取样点位置方式有关。

3.2 实验原理

- 1) 对 $x(t)$ 做 CFT，记录观察频谱的幅频特性；
- 2) 对 $x(t)$ 在时域上截短，记录观察频谱的幅频特性；
- 3) 对截短后连续信号离散化得到 $x(n)$ ，对 $x(n)$ 做 DTFT，记录观察幅频特性。

3.3 实验内容和分析

设 $x(t) = e^{2\pi f_1 t} + e^{2\pi f_2 t}$ ，式中 $f_1 = 24\text{Hz}$, $f_2 = 60\text{Hz}$ 。

- (1) 对 $x(t)$ 做 CFT 并进行幅度归一化，得到的表达式为 $X(j\Omega) = 2\pi\delta(\Omega - 2\pi f_1) + 2\pi\delta(\Omega - 2\pi f_2)$ ，归一化的幅频特性图如图 3-1 所示。

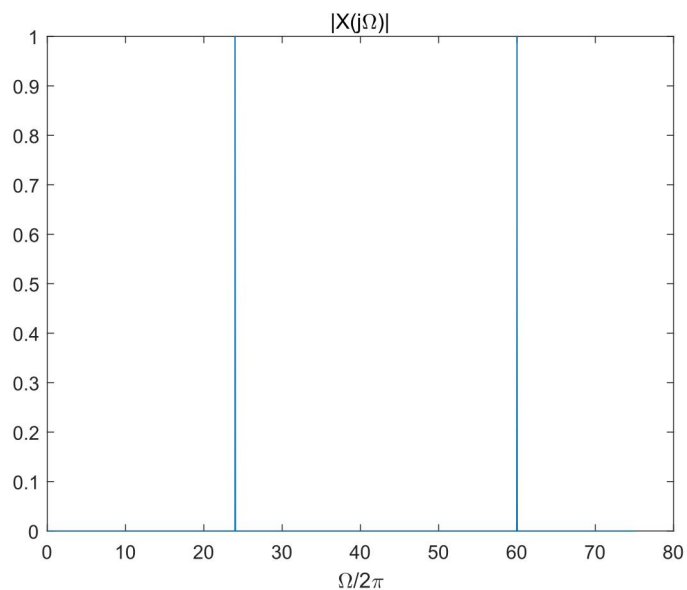


图 3-1 $x(t)$ 信号进行 CFT 变换得到的幅度谱

(2) 根据 $x(t)$ 表达式可知, $x(t)$ 是周期函数, 基频 $\Omega_0 = 24\pi$, 最小周期 $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{1}{12}s$, 由 FS 展开表达式可得 $X(m\Omega_0) = \delta(m-2) + \delta(m-5)$, 幅频特性图像如图 3-2 所示。由图像可以看出 $x(t)$ 仅包含 2 次基频和 5 次基频分量。

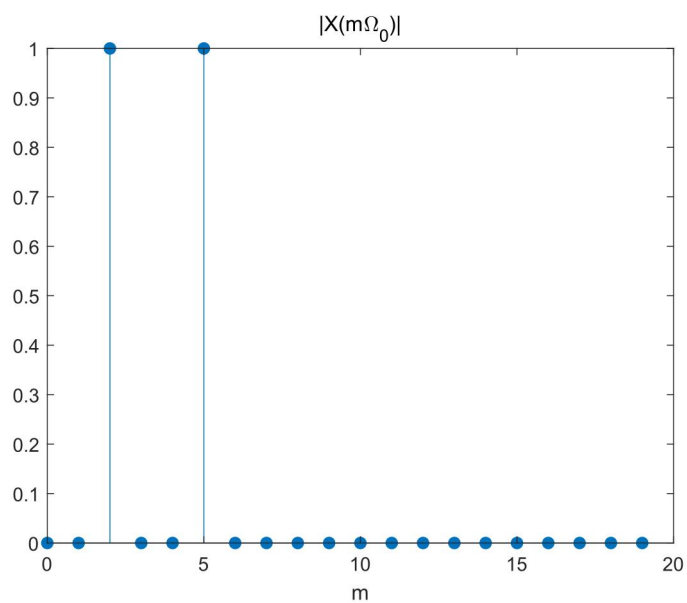


图 3-2 $x(t)$ 信号进行 FS 展开得到的系数幅度图

(3) 对 $x(t)$ 用矩形窗截短, 得到 $x_1(t)$ 。矩形窗宽度的选择, 分为两种情况: 矩形窗宽度等于 $x(t)$ 最小周期 T_0 的整倍数(记为 R_1); 矩形窗宽度不等于 $x(t)$ 最小周期 T_0 的整倍数(记为 R_2)。

这里选择矩形窗宽度 $R_1 = 2T_0$ ， $R_2 = 1.6T_0$ ，在 R_1 和 R_2 两种宽度下，对 $x_1(t)$ 分别做 CFT，画出 $X_1(j\Omega)$ 的幅频特性曲线，如图 3-3 和图 3-4 所示。

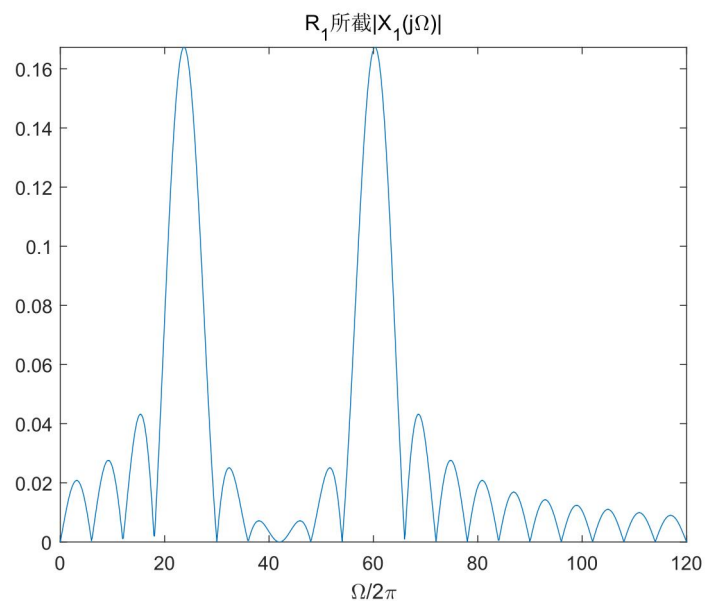


图 3-3 $x_1(t)$ 信号用 R_1 矩形窗截取后进行 CFT 变换得到的幅度谱

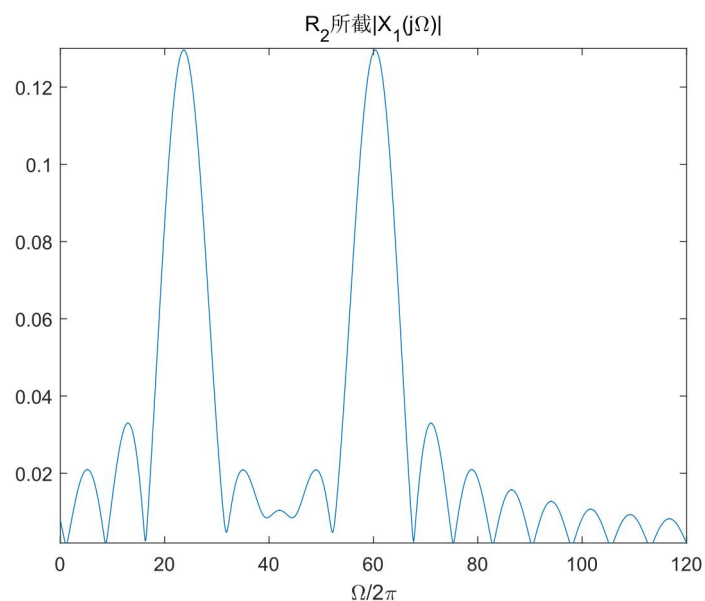


图 3-4 $x_1(t)$ 信号用 R_2 矩形窗截取后进行 CFT 变换得到的幅度谱

从 R_1 和 R_2 截得的 $x_1(t)$ 对应的 CFT 幅频特性图可以看出，二者对应的波形基本一致，在 $f_1 = 24Hz$ 和 $f_2 = 60Hz$ 处有较高分量，这符合之前分析的频率分量结果。但是从图像可以看出除了这两个频率之外，还有其他频率的分量。这说明在矩形窗截取之后， $x(t)$ 信号发生了频谱泄漏，使得之前不存在的频率分量出现在了截取后的 $x_1(t)$ 信号中。

(4) 分别取 $f_{s1} = f_{s2} = 600\text{Hz}$ ，在 R_1 和 R_2 两种宽度下，对 $x_1(t)$ 进行离散化，对取样序列 $x_1(n)$ 做 DTFT. 画出 $X_1(e^{j\omega})$ 幅频特性曲线，如图 3-5 和 3-6 所示。

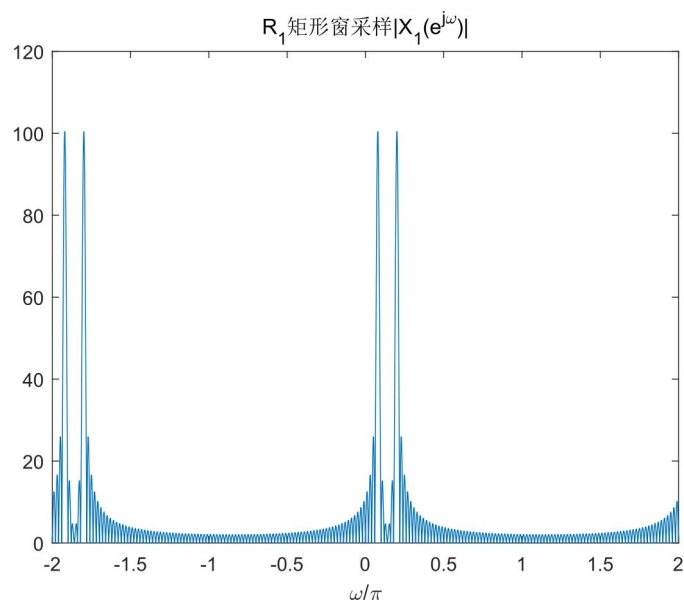


图 3-5 $x(t)$ 信号用 R_1 矩形窗截取后 $f_{s1} = 600\text{Hz}$ 采样 DTFT 变换得到的幅度谱

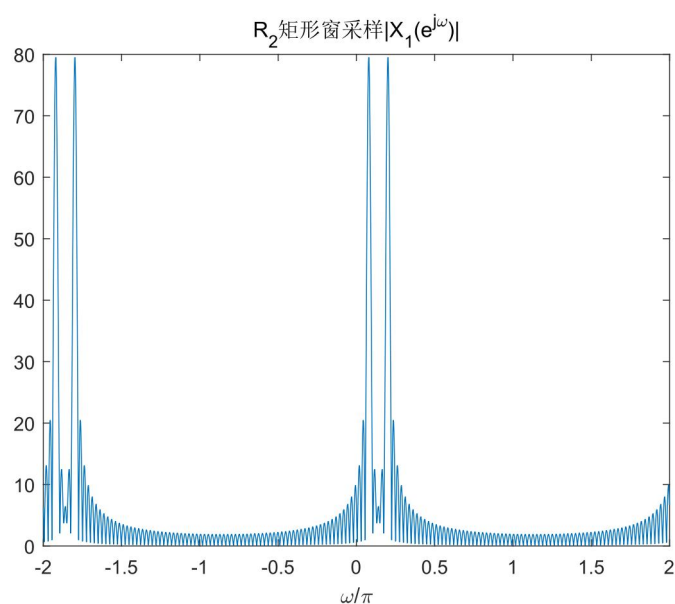


图 3-6 $x(t)$ 信号用 R_2 矩形窗截取后 $f_{s2} = 600\text{Hz}$ 采样 DTFT 变换得到的幅度谱

从这两幅图可以看出，在 $0 \sim 2\pi$ 一个周期内，有两个频率的信号尖峰，这与 $X_1(e^{j\omega})$ 中对应的两个信号尖峰相对应。同时由于矩形窗的截取，与 $X_1(e^{j\omega})$ 相比发生了频谱泄漏现象。这里的 $X_1(e^{j\omega})$ 图像看起来就像是把 $X_1(j\Omega)$ 压缩了一样，这是因为信号从模拟信号转化为数字

信号时满足关系 $\Omega = wf_s$ ，也就是 $X_1(e^{j\omega}) = X_1(j\Omega)|_{\Omega=wf_s}$ ，在频域幅度谱上看起来就会呈现出压缩的效果。

(5) 在 R_1 和 R_2 两种宽度下，对 $x_1(n)$ 做 DFT，画出 $X_1(k)$ 完整的幅频特性曲线($k = 0, 1, \dots, N-1$)，分别如图 3-7 和 3-8 所示。

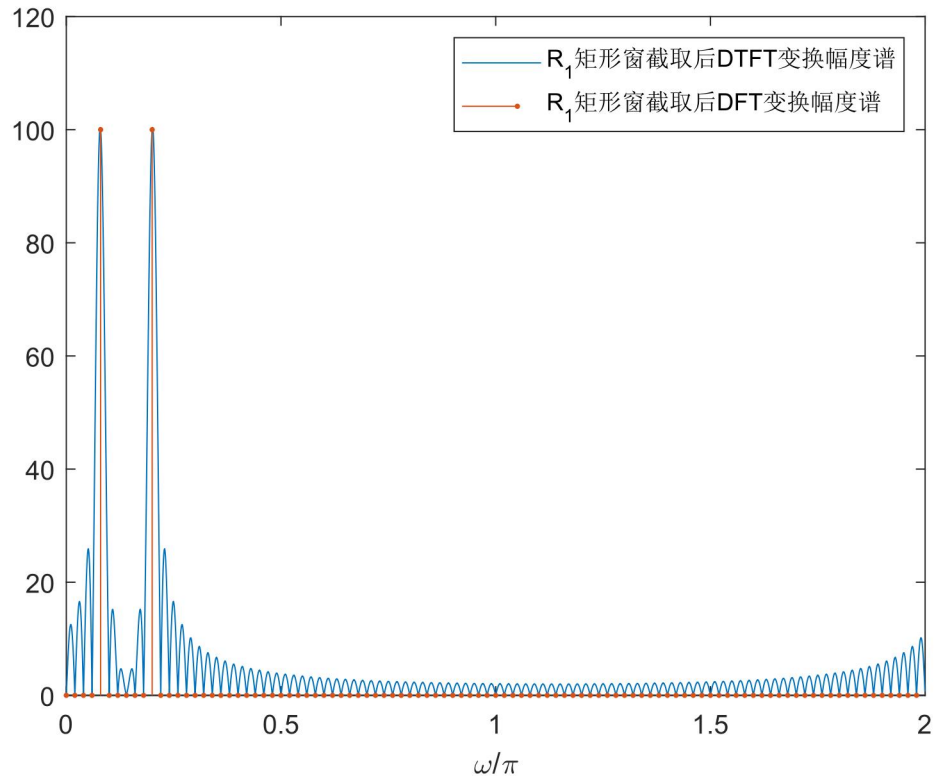


图 3-7 $x_1(n)$ 信号得到的 DTFT 和 DFT 幅度谱对比

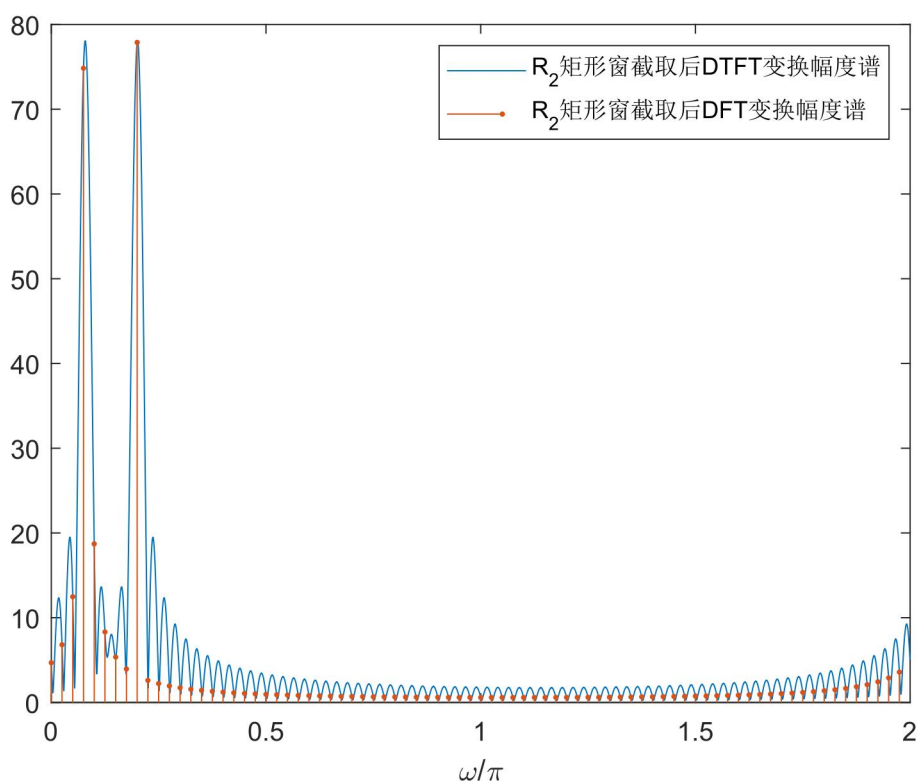


图 3-8 $x_1(n)$ 信号得到的 DTFT 和 DFT 幅度谱对比

从上面两幅图的 DFT 和 DTFT 图像可以看出, R_1 和 R_2 截取后的信号对应的 DTFT 信号都有不同程度的频谱泄漏。对于 DFT 图像, R_2 截取的信号对应的图像也存在频谱泄漏现象, 但是对于 R_1 截取的信号进行的 CFT 变换, 频谱泄漏现象却恰好消失了, 只保留了应有的频率分量。

分析之后不难看出, 这是由于上个实验探究的栅栏效应导致的。由于 R_1 截取的宽度恰好是 T_0 的正整数倍, 这使得 DFT 变换的频率间隔恰好是基频 Ω_0 的整数倍, 所以 DFT 获取的信号正好是频率分量为 0 的基频整数倍处, 在 DFT 信号上呈现出没有发生频谱泄漏的效果, 就像恰好通过特定的栅栏位置观察出不同的效果一样。而对于 R_2 , 由于 R_2 截取的宽度并不是 T_0 的正整数倍, 这导致频率筛选的时候与基频整数倍分量位置相比有一定的偏移, 所以频谱泄漏现象仍然存在。

(6) 在 R_1 和 R_2 两种宽度下, 对 $x_1(n)$ 补两倍长度于自身的零值形成延长序列 $x_2(n)$. 对 $x_2(n)$ 做 DFT, $X_1(k)$ 完整的幅频特性曲线 ($k = 0, 1, \dots, N-1$), 分别如图 3-9 和 3-10 所示。

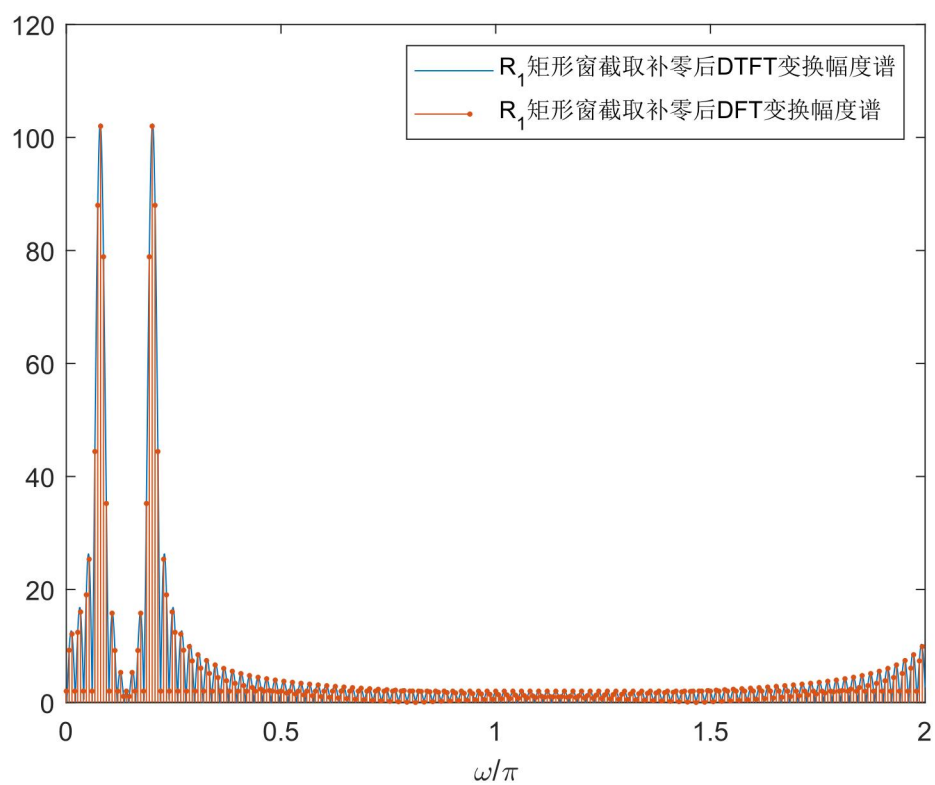


图 3-9 $x_2(n)$ 信号得到的 DTFT 和 DFT 幅度谱对比

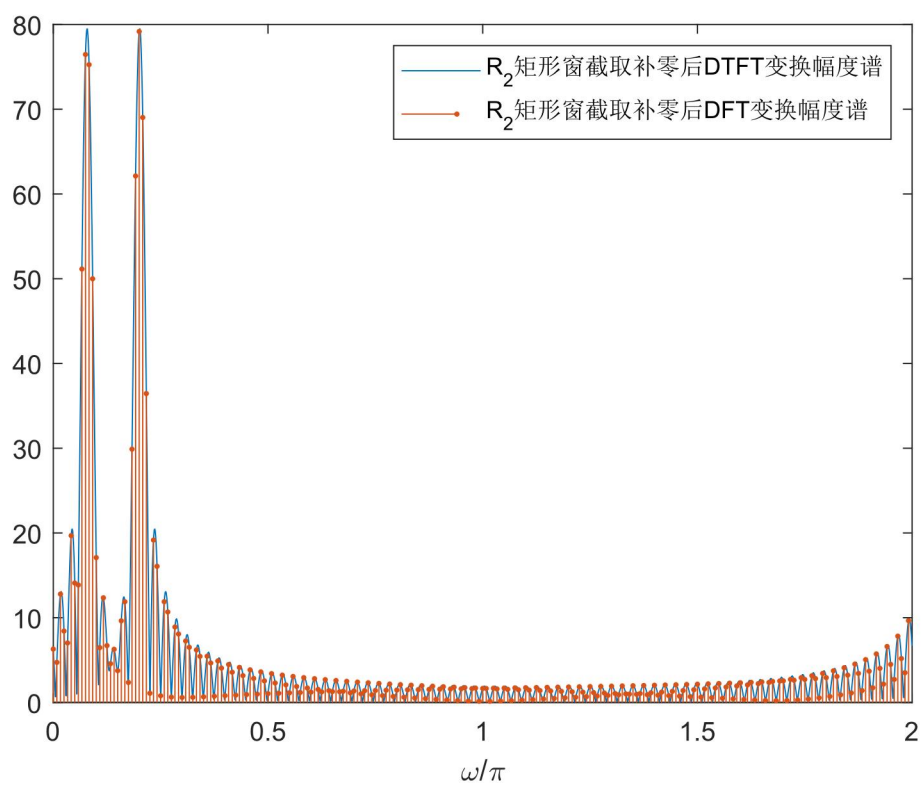


图 3-10 $x_2(n)$ 得到的 DTFT 和 DFT 幅度谱对比

从上面两幅图可以看出，通过对原截取后信号补零再进行 DFT 变换，由于原有信号长度进行了两倍长度的延拓，DFT 在 DTFT 上的采样频率增加了两倍，使得 DFT 变换更加接近 DTFT 变换图像。这在一定程度上减缓了栅栏效应带来的影响，这也说明栅栏效应可以通过对原信号补零延长来减缓。

3.4 实验总结

这次实验通过对信号的截取后进行 DFT 和 DTFT 变换，观察到了频谱泄漏现象。同时还观察到了 DFT 和 DTFT 之间的栅栏效应，发现了 DFT 的频谱泄漏可以利用栅栏效应来消除，通过控制信号截取宽度等于信号最小正周期整数倍达到效果。最后还发现对截取信号进行补零延长操作可以减缓栅栏效应带来的影响，使得 DFT 图像更接近 DTFT 图像。