DOI:10.16660/j.cnki.1674-098x.2013.32.006

面包师映射中的混沌

王军平
（上海电力学院数理学院 上海 201300）

摘 要：该文主要讨论了面包师映射中的一些混沌特性。首先从周期点出发，讨论了面包师映射周期为3的点的吸引排斥性；其次，通过计算机程序模拟仿真讨论了面包师映射对初值的极端敏感性。

关键词：面包师映射 周期点 初值敏感性
中图分类号：O1 文献标识码：A 文章编号：1674-098X(2013)11(b)-0239-02

混沌是指在确定性的系统中发生的随机的不规则的运动，一个确定性的系统，其行为却表现为不确定性、不可预测、不可重复，这就是混沌现象。1975年，中国学者李天岩和美国数学家约克（J.A.Yorke）发表了“有周期3的连续映射就意味着混沌”[1]，给出了L-Yorke定理，以数学的严格性分析了这种行为，证明了在任何一维映射系统中，只要出现规则的周期3，同一个系统也必然会给出其他任意长的规则周期，以及完全混沌的循环。

混沌的映射具有三个要素：不可预测性，不可分解性，还有一种规律性的成份。因为对初始条件的极端敏感依赖性，所以混沌的系统是不可预测的；因为是拓扑传递性，它不能被细分或不能被分解为两个在 f 下不相互影响的子系统。然而，在这混沌性态当中，毕竟有规则的成分，即稠密的周期点。

本文通过讨论面包师映射 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 2x-1, & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$ 的一些混沌特性，来更加深刻认识生活中的混沌现象。面包师映射形式上看起来很简单，但它具有周期3的点。由L-Yorke定理，它是一个混沌映射，具有很复杂的混沌动力学行为，如不可预测性，即对初始条件的极端敏感性。

1 周期为3的点

点x是映射 f 的周期为3的周期点是指 $f^{(3)}(x)=x$ 成立[2]，下面我们来求面包师映射的周期为3的周期点。

我们把 $x=2x$ 设为A，把 $x=2x-1$ 设为B，那么周期为3的迭代有AAA、AAB、ABA、ABB、BAA、BAB、BBA、BBB共8种，计算如下：

①AAA $2(2(2x))=x$ 可得 $x=0$，把 $x=0$ 代入可得满足条件且正确；

②AAB $2(2(2x-1))=x$ 可得 $x=\frac{4}{7}$ 把 $x=\frac{4}{7}$ 代入可得满足条件且正确；

③ABA $2(2(2x)-1)=x$ 可得 $x=\frac{2}{7}$ 把 $x=\frac{2}{7}$ 代入可得满足条件且正确；

④ABB $2(2(2x-1)-1)=x$ 可得 $x=\frac{6}{7}$ 把 $x=\frac{6}{7}$ 代入得满足条件且正确；

⑤BAA $2(2(2x))-1=x$ 可得 $x=\frac{1}{7}$ 把 $x=\frac{1}{7}$ 代入可得满足条件且正确；

⑥BAB $2(2(2x-1))-1=x$ 可得 $x=\frac{5}{7}$ 把 $x=\frac{5}{7}$ 代入得满足条件且正确；

⑦BBA $2(2(2x)-1)-1=x$ 可得 $x=\frac{3}{7}$ 把 $x=\frac{3}{7}$ 代入得满足条件且正确；

⑧BBB $2(2(2x-1)-1)-1=x$ 可得 $x=1$ 把 $x=1$ 代入满足条件且正确。

由以上结果可得，$x=0$，$x=1$ 是属于周期为1的不动点，故可以排除。而剩下的是属于面包师映射周期为3的周期点，用如下的方式表示：

接下来我们把周期点代入 $\left|(f^{n})'(p)\right|$，来判断周期点是排斥还是吸引的 $\left|(f^{3})'(p)\right|=8$。把以上的周期点代入所得的答案都是，故所有的周期为3的周期点为排斥的。我们用MATLAB进一步验证其正确性。初始值分别代入 $\frac{1}{7}+0.0001$,$\frac{2}{7}+0.0001$,$\frac{4}{7}+0.0001$ 和 $\frac{3}{7}+0.0001$,$\frac{5}{7}+0.0001$,$\frac{6}{7}+0.0001$ 得出的表格。先观察表1：

由以上三组数据可以看出，三个周期点 $\frac{1}{7}$，$\frac{2}{7}$，$\frac{4}{7}$ 和 $\frac{1}{7}+0.001$，$\frac{2}{7}+0.0001$，$\frac{4}{7}+0.0001$ 在迭代后相差很大，$\frac{1}{7}$，$\frac{2}{7}$，$\frac{4}{7}$ 迭代是在周期点之间循环，$\frac{1}{7}+0.001$，$\frac{2}{7}+0.0001$，$\frac{4}{7}+0.0001$30次迭代后的值是0.6505，0.9362，0.5077，故通过以上的数学实验，我们验证了 $\frac{1}{7}$,$\frac{2}{7}$,$\frac{4}{7}$ 都是排斥的。

下面我们来讨论 $\frac{3}{7}$,$\frac{5}{7}$,$\frac{6}{7}$。方法和上面的方法一样，这三个周期点和 $\frac{3}{7}+0.0001$，$\frac{5}{7}+0.0001$，$\frac{6}{7}+0.0001$ 比较，把 $\frac{3}{7}+0.0001$，$\frac{5}{7}+0.0001$，$\frac{6}{7}+0.0001$ 代入MATLAB运算后可以得到以下的表格数据，表2：

由以上三组数据可以看出，三个周期点 $\frac{3}{7}$，$\frac{5}{7}$，$\frac{6}{7}$ 和 $\frac{3}{7}+0.001$,$\frac{5}{7}+0.0001$,$\frac{6}{7}+0.0001$ 在30次迭代后相差很大，故通过

表1 三组不同初值的迭代数据

n	$x_0=1/7+0.0001$	$x_0=2/7+0.0001$	$x_0=4/7+0.0001$
1	0.2859	0.5716	0.1431
2	0.5718	0.1433	0.2861
3	0.1437	0.2865	0.5722
4	0.2873	0.5730	0.1445
5	0.5746	0.1461	0.2889
6	0.1493	0.2921	0.5778
…	…	…	…
26	0.4578	0.0293	0.1721
27	0.9157	0.0585	0.3442
28	0.8313	0.1170	0.6885
29	0.6626	0.2341	0.3769
30	0.3253	0.4681	0.7538

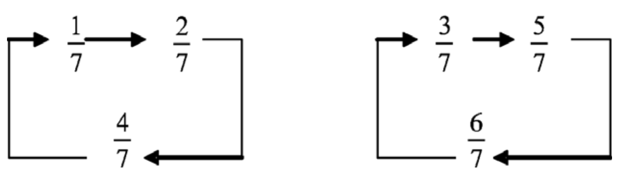

图1

表2 三组初值不同的迭代数据

n	$x_0=3/7+0.0001$	$x_0=5/7+0.0001$	$x_0=6/7+0.0001$
1	0.8573	0.4288	0.7145
2	0.7147	0.8575	0.4290
3	0.4294	0.7151	0.7159
4	0.8587	0.4302	0.4318
5	0.7175	0.8603	0.8635
6	0.4350	0.7207	0.7271
…	…	…	…
26	0.6007	0.7435	0.6299
27	0.2014	0.4871	0.2599
28	0.4027	0.9742	0.5198
29	0.8055	0.9483	0.0395
30	0.6110	0.8967	0.0791

表3 三组初值非常接近的迭代数据

n	$x_0=0.4444$	$x_0=0.4445$	$x_0=0.4446$
1	0.8888	0.8890	0.8892
2	0.7776	0.7780	0.7784
3	0.5552	0.5560	0.5568
4	0.1104	0.1120	0.1136
5	0.2208	0.2240	0.2272
6	0.4416	0.4480	0.4544
7	0.8832	0.8960	0.9088
8	0.7664	0.7920	0.8176
9	0.5328	0.5840	0.6352
10	0.0656	0.1680	0.2704
…	…	…	…
20	0.3488	0.0320	0.8896
21	0.3952	0.0640	0.7792
22	0.7904	0.1280	0.5584
23	0.5808	0.2560	0.1168
24	0.1616	0.5120	0.2336
25	0.3232	0.0240	0.4672
26	0.6464	0.0480	0.9344
27	0.2928	0.0960	0.8688
28	0.5856	0.1920	0.7376
29	0.1712	0.3840	0.4752
30	0.3424	0.7680	0.9504

以上的数学实验，我们验证了$\frac{3}{7},\frac{5}{7},\frac{6}{7}$都是排斥的。

2 混沌特性

1989年Deveney给出了混沌的数学涵义[3]：设$f:I\to I$，I为实轴上的一区间，那么具有下面三个要素的映射f是混沌的。

2.1 长期不可预测性，即f对初始条件的敏感依赖性

f对初始值的敏感依赖性，直观上指对I中的任意点x，存在任意接近x的点y使得在f的迭代下经过若干次后将x与y的距离拉开某个正数δ。我们强调，并非x附近的所有点都需要在迭代下与x分离，而只是要在x的每一个邻域中必须至少存在一个这样的点在若干次迭代后彼此分离。另外需注意的是存在使x与y分离的迭代次数n即可，并没有在次数大于n的所有次迭代都使之分离，实际上允许它们可以时分时合。必须指出，由于f的像在I中，所以排除了经f映射发散到无穷远处的情形，这是在有界范围内相邻点被f多次迭代后时分时合混乱的现象。由于f对初值敏感依赖性导致f的长期不可预测性。

2.2 不可分解性，即f是拓扑传递的

f是拓扑传递的，这个概念不太容易理解，我们先直观解释如下：对I中的任意两个邻域，都存在f的若干次迭代使将一个邻域的点移到另一个邻域中。即从拓扑意义下可以将任意两个I中的开集通过f的若干处迭代使之沟通。也可以理解为I不能被分解为两个在映射f下不变的非交的开集，即f的不可分解性。用严格的数学语言表达即指如对任何一对I中的开集U，V，存在k>0，使得$f^k(U)\cap V\neq 0$。

2.3 有一定的规律性，即f的周期点在I中稠密

现在我们讨论面包师映射对初始条件的极端敏感性，从而长期不可预测。面包师映射的周期点特性即规律性前面已经讨论了，下面我们讨论面包师映射对初始条件的极端敏感性，从而长期不可预测。如果初始值y_0取为0.4或0.4001或0.4002三个随机选取的非常接近的数值，甚至这种接近程度对一般的计算机是不可以避免的误差造成的。接下来对这三个数值进行多次迭代，见下表3：

从表中可见n为10时，三组数据就相差很大，又很难预测接下来的值，看上去第30以后迭代值构成的轨道像是随机的轨道，给一个名称为混沌轨道。

注意到面包师映射的跌代方程，它有三个特征：一是迭代的结果出现了似乎是随机的，二是对初始值的极端敏感地依赖，三是长期的不可预测的动力学行为，这种动力学称为混沌动力学。故面包师映射具有混沌性。

3 结语

前面我们讨论了面包师映射的周期点的特性，看到其数值周期出现的规律；继而又讨论了面包师映射对初始条件的极端敏感性，看到其在初始数值确定的情况下，出现了很复杂的无法预测的混沌现象。对于这样形式很简单的面包师映射，仅仅是一次函数构成的，却有丰富的似乎规律且又随机的复杂行为。我们生活的世界和社会也是如此，看似简单但又充满神秘，激励我们不断地去探究。

参考文献

[1] T.Y.Li,J.A.Yorke,Period three implies chaos[J].Amer.Math.Monthly,1975(82):985-992.
[2] 阮炯,黄振勋,蔡志杰.应用数学[M].北京：科学出版社,2000:1-60.
[3] R.L.Devaney.An introduction to chaotic dynamical systems.New York:Addison-Wesley Publishing Company,1987.