装订线 答题时不要超过此线

中国科学技术大学数学科学学院
2016—2017学年第二学期期中试卷

课程名称　线性代数（B1）　　课程编号　00151911

考试时间　2017年4月　　考试形式　闭卷

姓名__________　　学号__________　　学院__________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、填空题（每小题4分，共24分）

（1）设$\alpha_1=(1,3,2)^T,\alpha_2=(4,4,0)^T,\alpha_3=(2,5,3)^T,\alpha_4=(-1,2,3)^T$, 则$\mathrm{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ $=$ $\underline{\quad 2\quad}$。

（2）设$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&-2&-1\\2&4&2\end{pmatrix}$，则$A^{10}=$ $\underline{\quad A\quad}$。

（3）设A为n阶方阵，$\det(A)=5$，A^*为A的伴随方阵，则$\det(A^*)=$ $\underline{\quad 5^{n-1}\quad}$。

（4）设$A=\begin{pmatrix}1&5&2&-1\\0&3&1&-4\\0&0&-1&2\\1&5&2&3\end{pmatrix}$，$A_{ij}$为代数余子式，则$A_{14}-3A_{24}+2A_{34}-A_{44}=$ $\underline{\quad 6\quad}$。

（5）若向量$\beta=(3,9,6)^T$不能由向量组$\alpha_1=(1,1,2)^T$，$\alpha_2=(1,2,-1)^T$，$\alpha_3=(1,-\lambda,3)^T$线性表示，则$\lambda=$ $\underline{\quad -\frac{2}{3}\quad}$。

（6）设分块矩阵$A=\begin{pmatrix}O&B\\C&O\end{pmatrix}$，其中$B$，$C$为$n$阶可逆方阵，$O$ 为零矩阵，则$(A^T)^{-1}=$ $\underline{\begin{pmatrix}O&(B^T)^{-1}\\(C^T)^{-1}&O\end{pmatrix}}$。

二、判断题（判断下列命题是否正确，并简要说明理由。每小题5分，共20分）

（1）设$A=\begin{pmatrix}2&3&-1\\1&5&-2\\5&11&-4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&-2\\5&0&4\\3&0&2\end{pmatrix}$，则$A$与$B$不相抵。

答：错误。因为 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)=2$，从而$A$与$B$相抵。

（2）设数组空间F^n中的向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性相关，$A \in F^{m\times l}$，$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)A$，则向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l$也线性相关。

答：错误。不妨$\alpha_1 \neq 0$，取$A = (1, 0, \ldots, 0)^T$.

（3）设A，B为n阶实方阵，则$\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(BA)$。

答：错误。取$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$。

（4）设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的秩为$r$，且任何向量$\alpha_i (1 \leq i \leq s)$均可以被$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示，则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的一个极大线性无关组。

答：正确。仅需说明$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关，可以反证得到。

三、（本题12分）当a取何值时，下列线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = a, \end{cases}$$

有解，并求出它的通解。

解：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & -14 & -6 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & a-4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & -14 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$.

因此，当$a = 1$ 时有解，其通解为

$$x = t_1 \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -18 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

四、（本题16分）设n阶方阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$，求$\det(A)$ 及A^{-1}。

解：利用初等行变换求解得 $\det(A)=2^{n-1}$及

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

□

五、（本题16分）设$\mathbb{P}_3[x]$为实数域$\mathbb{R}$上次数不超过3的多项式全体，按多项式的加法和数乘运算构成线性空间。

（1）证明：$S=\{1,x+1,(x+1)^2,(x+1)^3\}$构成$\mathbb{P}_3[x]$的一组基。

（2）求基S到自然基$\{1,x,x^2,x^3\}$的过渡矩阵。

（3）求多项式$5+7x-x^2+13x^3$在基S下的坐标。

解:（1）由$x^k=[(x+1)-1]^k$及二项式展开可知$\mathbb{P}_3[x]$任一元素可由S线性表示。下证S是现线性无关的。设 $\lambda_0+\lambda_1(x+1)+\lambda_2(x+2)^2+\lambda_3(x+1)^3=0$, x分别取四个不同的实数，再由Vandermonde行列式的性质知$\lambda_0=\cdots=\lambda_3=0$。

（2）

$$\left(1,x,x^2,x^3\right)=\left(1,x+1,(x+1)^2,(x+1)^3\right)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

（3）多项式$5+7x-x^2+13x^3$在基S下的坐标为

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -16 \\ 48 \\ -40 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

□

六、（本题12分）设方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$c=\operatorname{tr}(A)=\sum_{i=1}^n a_{ii}$，已知$\operatorname{rank}\,(A)=1$，

（1）证明：$A^2=cA$；

（2）计算$\det(I+A)$，其中I为n阶单位方阵。

解: 由$\operatorname{rank}(A)=1$ 可知存在行向量 α，β使得 $A=\alpha^T\beta$。易知，$\operatorname{tr}(A)=\alpha\beta^T=\beta\alpha^T$.
（1） $A^2=(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)=\alpha^T(\beta\alpha^T)\beta=cA$;

（2）$\det\begin{pmatrix} I_n & -\alpha^T \\ \beta & 1 \end{pmatrix} = \det\Big(\begin{pmatrix} I_n & -\alpha^T \\ \beta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}\Big) = \det(I_n{+}\alpha^t\beta) = \det(I_n{+}A).$
又，$\det\begin{pmatrix} I_n & -\alpha^T \\ \beta & 1 \end{pmatrix} = \det\Big(\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & -\alpha^T \\ \beta & 1 \end{pmatrix}\Big) = 1 + c.$所以，$\det(I + A) = 1 + c$。
□