基本参数：

玻尔兹曼常数 $k=1.36\times10^{-23}J/K$，电子电荷 $e=1.6\times10^{-19}C$，电子质量 $m_e=9.1\times10^{-31}kg$，质子质量 $m_p=1.67\times10^{-27}kg$，$m_p/m_e=1837$，光速 $c=3.0\times10^8m/s$，真空介电常数 $\varepsilon_0=\frac{1}{4\pi\times9.0\times10^9F/m}$，真空磁导率 $\mu_0=4\pi\times10^{-7}N/A^2$，$\varepsilon_0\mu_0=c^{-2}$

基本计算公式：

$\nabla=\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}=\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$

$\Delta=\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$

$\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})=(\nabla\times\boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{g}-(\nabla\times\boldsymbol{g})\cdot\boldsymbol{f}$

$\nabla\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})=(\boldsymbol{g}\cdot\nabla)\boldsymbol{f}-(\nabla\cdot\boldsymbol{f})\boldsymbol{g}+(\nabla\cdot\boldsymbol{g})\boldsymbol{f}-(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}$

$\nabla(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})=(\boldsymbol{g}\cdot\nabla)\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}\times(\nabla\times\boldsymbol{f})+(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}+\boldsymbol{f}\times(\nabla\times\boldsymbol{g})$

$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{f})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{f})-\nabla^2\boldsymbol{f}$

$\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\boldsymbol{g})=(\nabla\cdot\boldsymbol{f})\boldsymbol{g}+(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}$

1 等离子体基本概念和方程

Saha 方程

$$\frac{n_in_e}{n_0}=\frac{\pi_i\pi_e}{\pi_0}\frac{(2\pi m_ekT)^{\frac{3}{2}}}{h^3}e^{-\frac{E_i}{kT}}$$

等离子体的温度常用能量 kT 表示，$1eV$~$11600K$

平衡态等离子体具有 Maxwellian 分布

$$f=n(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

非 Maxwellian 分布的有效动力学温度 $kT=\frac{1}{n}\int m(v_x-u_x)^2fd\boldsymbol{v}$

粒子间平均势能 $U=\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0L}$，$L=n^{-\frac{1}{3}}$

准中性的时间尺度：成分震荡频率 $\omega_{p\alpha}=\sqrt{\frac{n_\alpha q_\alpha^2}{m_\alpha\epsilon_0}}$，等离子体振荡频率 $\omega_p=\sqrt{\Sigma_\alpha\omega_{p\alpha}^2}\approx\omega_{pe}$

德拜屏蔽方程 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\approx\frac{\varphi}{\lambda_D^2}$

空间尺度:成分德拜长度 $\lambda_{D\alpha}=\sqrt{\frac{kT_\alpha\epsilon_0}{n_\alpha q_\alpha^2}}$,等离子体德拜长度 $\lambda_D^{-2}=\Sigma_\alpha\lambda_{D\alpha}^{-2}$

粒子热运动速度 $v_{te}=\sqrt{\frac{kT}{m_e}}=\lambda_{De}\omega_{pe}$

2 单粒子运动

单粒子运动方程

$$\dot{\boldsymbol{v}}=\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{q}{m}(\boldsymbol{E}+\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{B})=\frac{q\boldsymbol{E}}{m}+(-\frac{q\boldsymbol{B}}{m})\times\boldsymbol{v}$$

回旋运动：$\boldsymbol{E}=0$，回旋频率 $\boldsymbol{\Omega}=-\frac{q\boldsymbol{B}}{m}=-\Omega\boldsymbol{b}$

引导中心 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\rho}$，$\boldsymbol{\rho}=\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}}{\Omega^2}$

曲率 $\boldsymbol{\kappa}=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}\approx\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta l}\approx-\frac{\boldsymbol{e}_R}{R}$

引导中心漂移速度 $\boldsymbol{v}_c=\boldsymbol{v}_{//}+\boldsymbol{v}_f+\boldsymbol{v}_m=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{b}}{m\Omega}+\boldsymbol{v}\times\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{b}}{\Omega}$，电场漂移 $\boldsymbol{v}_f=\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{b}}{B}$,曲率漂移 $\boldsymbol{v}_{cv}=\frac{v_{//}^2}{\Omega}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{\kappa}$,梯度漂移 $\boldsymbol{v}_{\nabla B}=\langle\boldsymbol{v}_\perp\times(\boldsymbol{v}_\perp\cdot\nabla)\frac{\boldsymbol{b}}{\Omega}\rangle=\frac{mv_\perp^2}{2q}\boldsymbol{b}\times\frac{\boldsymbol{\kappa}}{B}=-\mu\nabla B\times\frac{\boldsymbol{B}}{Bq}$

磁场不均匀性引起的漂移 $\boldsymbol{v}_m=\boldsymbol{v}_{cv}+\boldsymbol{v}_{\nabla B}=-m(v_{//}^2+\frac{1}{2}v_\perp^2)\boldsymbol{\kappa}\times\frac{\boldsymbol{b}}{Bq}$

绝热不变量：周期运动的广义坐标 q 的广义动量 p 的积分导出一个绝热不变量 $J=\oint pdq$。

回旋运动磁矩 $\mu=\frac{mv_\perp^2}{2B}$

投射角 θ：速度方向与磁力线的夹角，$2\cot^2\theta=2v_{//}^2/v_\perp^2$

磁镜力（磁场梯度力）：$\boldsymbol{F}=-\mu\nabla\boldsymbol{B}$

损失锥分布：最小通行投射角 θ_m 满足 $\sin^2\theta_m=\frac{v_\perp^2}{v^2}=\frac{B_{min}}{B_{max}}$，当投射角 $\theta<\theta_m$ 时，粒子能够穿过磁镜区域，剩下无法穿过强磁场区域的粒子束缚在弱磁场中，称为束缚粒子，其分布称为损失锥分布。

磁镜弹跳运动中的纵向不变量 $J=2\int_{z_1}^{z_2}mv_2dz$

等磁通面环绕漂移运动的纵向不变量 $J=\oint p_\varphi d\varphi\approx q\Phi$

3 等离子体的方程描述

D 维运动，分布函数 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)$，单位体积内动能 $\frac{1}{2}nmu^2$，热运动动能 $\frac{D}{2}nkT$

动理论方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla f+\frac{\boldsymbol{F}}{m}\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}}f=0\qquad\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$

矩方程：动理论方程乘上 $\psi(\boldsymbol{v})$ 并对 $\boldsymbol{v}$ 积分

$$\frac{\partial}{\partial t}(n\langle\psi\rangle)+\nabla\cdot(n\langle\psi\boldsymbol{v}\rangle)-\frac{q}{m}n\langle\nabla_{\boldsymbol{v}}\psi\cdot(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\rangle=0$$

0 阶矩方程即连续性方程，取 $\psi=1$

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\nabla\cdot(n\boldsymbol{u})=0\qquad\boldsymbol{u}=\langle\boldsymbol{v}\rangle$$

1 阶矩方程，取 $\psi=v_x$

$$\frac{\partial(nu_x)}{\partial t}+\nabla\cdot(nu_x\boldsymbol{u}+\frac{\boldsymbol{P}_x}{m})-\frac{qn}{m}(E_x+(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})_x)=0$$

2 阶矩方程，取 $\psi=v_x^2$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{p_{xx}}{m}+\frac{2\boldsymbol{P}_x}{m}\cdot\nabla u_x+\nabla\cdot\frac{p_{xx}\boldsymbol{u}}{m}-\frac{2q}{m^2}(p_{xy}B_z-p_{xz}B_y)=0$$

压强张量 $\boldsymbol{P}=mn\langle(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\rangle=p_\perp\boldsymbol{I}+(p_{//}-p_\perp)\boldsymbol{bb}$

等离子体受力方程（动量方程）

$$n_am_a\frac{d\boldsymbol{u}_a}{dt}=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}_a+n_aq_a(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}_a\times\boldsymbol{B})-\Sigma_bv_{ab}n_am_{ab}(\boldsymbol{u}_a-\boldsymbol{u}_b)$$

电磁流体方程组

$$\begin{cases}\text{连续性方程}\quad\dfrac{\partial n}{\partial t}+\nabla\cdot(n\boldsymbol{u})=\dfrac{dn}{dt}+n\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0\\ \text{动量方程}\\ \text{能量方程}\quad\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{u}+\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u})-nq\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{u}=0\\ \text{（各向同性）绝热方程}\quad\dfrac{d}{dt}(pn^{-\gamma})\qquad\gamma=\dfrac{D+2}{D}\\ \text{双绝热方程（三选二）}\\ \dfrac{d}{dt}(\dfrac{p_{//}B^2}{n^3})=0\qquad\dfrac{d}{dt}(\dfrac{p_\perp^2p_{//}}{n^5})=0\qquad\dfrac{d}{dt}(\dfrac{p_\perp}{nB})=0\end{cases}$$

Maxwell 方程组

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\dfrac{\rho}{\varepsilon}\qquad\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\qquad\boldsymbol{H}=\dfrac{1}{\mu}\boldsymbol{B}\end{cases}$$

磁流体力学方程组

$$\begin{cases}\rho=\Sigma_am_an_a\qquad\rho\boldsymbol{u}=\Sigma_am_an_a\boldsymbol{u}_a\qquad\boldsymbol{P}=\Sigma_a\boldsymbol{P}_a\\ \boldsymbol{j}=\Sigma_an_aq_a\boldsymbol{u}_a\qquad\rho_q=\Sigma_an_aq_a\qquad\varepsilon=\dfrac{1}{2}\rho u^2+\dfrac{3}{2}p\\ \dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u})=0\\ \rho\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt}=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}\\ \dfrac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma})\\ \dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\\ \boldsymbol{j}=\dfrac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{B}\end{cases}$$

等离子体受力

$$\rho\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=-\nabla\cdot(\boldsymbol{P}+\frac{B^2}{2\mu_0}\boldsymbol{I})+\frac{(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}}{\mu_0}$$

其中磁压力 $P_m=\frac{B^2}{2\mu_0}$，磁张力 $\frac{(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}}{\mu_0}=\frac{B^2}{\mu_0}\boldsymbol{\kappa}+(\nabla\frac{B^2}{2\mu_0})_{//}$

等离子体 $\beta=\frac{P}{P_m}=\frac{2\mu_0P}{B^2}$

电磁张量 $\boldsymbol{T}=-\frac{B^2}{2\mu_0}\boldsymbol{I}+\frac{\boldsymbol{BB}}{\mu_0}$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}=\nabla\cdot\boldsymbol{T}$

磁场的变化方程等价于 $\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}=(\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$，即磁场冻结；碰撞扩散项 $\frac{\eta}{\mu_0}\nabla^2\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}=\eta\boldsymbol{j}$，$\eta=\frac{\nu_{ei}m_e}{ne^2}$

磁雷诺数：冻结项与扩散项的比值 $R_m\approx\frac{\mu_0uL}{\eta}$

广义欧姆定律：流动项 + 霍尔效应项 + 电子压力项 + 电子惯性项 + 碰撞电阻项

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{u}_i\times\boldsymbol{B}+\frac{\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}}{ne}-\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{P}_e}{ne}-\frac{m_e}{e}\frac{d\boldsymbol{u}_e}{dt}+\frac{\nu_{ei}m_e}{ne^2}\boldsymbol{j}$$

等离子体的平衡态方程 $\nabla p=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}$，即

$$-\nabla(p+\frac{B^2}{2\mu_0})+\frac{\boldsymbol{B}\cdot\nabla\boldsymbol{B}}{\mu_0}=0$$

螺度 $\boldsymbol{g}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{g})$ 在理想磁流体封闭区域内守恒，磁重联过程近似守恒

4 等离子体中的波动

$$\Psi(\boldsymbol{x},t)=\int\Psi_k(\boldsymbol{k},\omega)e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}d\boldsymbol{k}d\omega$$

$$\Psi_k(\boldsymbol{k},\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\Psi(\boldsymbol{x},t)e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}d\boldsymbol{x}dt$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=-i\omega \qquad \nabla=ik$$

相位 $\phi=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t$

相速度：相位不变 $\frac{d\phi}{dt}=0$，$v_p=\frac{\omega}{k}$

群速度：波包的传播速度 $v_g=\frac{d\omega}{dk}|_{\omega_0}$

非磁化等离子体静电波的色散关系 $1-\Sigma_\alpha\frac{\omega_{p\alpha}}{\omega^2-k^2v_{s\alpha}^2}=0$。当 ω 处于高频时，电子起主要作用，产生电子静电波（朗缪尔波）：色散关系 $\omega^2=\omega_{pe}^2+k^2v_{se}^2$，其中电子声波速度 $v_{se}=\sqrt{\gamma\frac{kT_e}{m_e}}$；冷等离子体 $\omega\approx\omega_{pe}=\sqrt{\frac{n_0e^2}{m_e\varepsilon_0}}$，热等离子体在长波下色散关系近似为 $\omega\approx\omega_p(1+\frac{3}{2}k^2\lambda_{De}^2)$，短波情况会产生强烈的波与电子相互作用。当 ω 处于低频时，长波波段 $k\lambda_{De}\leqslant 1$，产生离子声波 $\omega=kv_s$，$v_s=\sqrt{\frac{\gamma_ekT_e+\gamma_ikT_i}{m_i}}$；短波波段 $k\lambda_{De}\geqslant 1$ 产生离子静电波 $\omega^2=\omega_{pi}^2+k^2v_{si}^2$。

电磁波色散关系 $(\boldsymbol{nn}-n^2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\varepsilon})\cdot\boldsymbol{E}_1=0$，$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{I}+\frac{i\boldsymbol{\sigma}}{\omega\varepsilon_0}$，$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{k}c}{\omega}$，冷等离子体电导率 $\boldsymbol{\sigma}=\frac{i\varepsilon_0\omega_{pe}^2}{\omega}\boldsymbol{I}$，电场垂直于波矢方向时色散关系为 $\omega^2=\omega_{pe}^2+k^2c^2$

磁化等离子体中的磁流体力学波：本底磁场沿 z 方向，波矢位于 $x-z$ 平面内，色散关系

$$\begin{cases}(\omega^2-k^2v_A^2-k_x^2v_s^2)v_x-k_xk_zv_s^2v_z=0\\(\omega^2-k_z^2v_A^2)v_y=0\\(\omega^2-k_z^2v_s^2)v_z-k_xk_zv_s^2v_x=0\end{cases}$$

其中，声波速度 $v_s^2=\frac{\gamma P_0}{\rho_0}$，Alfven 速度 $v_A^2=\frac{B_0^2}{\mu_0\rho_0}$。第一解 $v_y\neq 0,v_x=v_z=0$ 时为 Alfven 波，色散关系 $\omega=k_zv_A=kv_A\cos\theta$，$v_p=v_g=v_A\cos\theta$，电场扰动 $\boldsymbol{E}_1=-B_0v_y\boldsymbol{e}_x$，磁场扰动 $\boldsymbol{B}_1=\frac{\boldsymbol{k}}{\omega}\times\boldsymbol{E}_1=-\frac{k_zB_0}{\omega}v_y\boldsymbol{e}_y$，密度扰动和压力扰动 $\rho_1=p_1=0$，电流扰动 $\boldsymbol{j}_1=-\frac{ik_zB_0}{\mu_0\omega}v_y\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}_y$。另一解 $v_y=0,v_x,v_z\neq 0$ 时为磁声波，色散关系 $\frac{\omega^2}{k^2}=\frac{1}{2}(v_A^2+v_s^2)\pm\frac{1}{2}\sqrt{(v_A^2+v_s^2)^2-4v_s^2v_A^2\cos^2\theta}$，称为快磁声波和慢磁声波。

磁化冷等离子体中的电磁波 $\boldsymbol{j}=\sigma\cdot\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0\\-i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0\\0 & 0 & \varepsilon_3\end{pmatrix}\qquad\begin{cases}\varepsilon_1=1-\Sigma_\alpha\dfrac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2-\Omega_\alpha^2}\\\varepsilon_2=-\Sigma_\alpha\dfrac{\Omega_\alpha}{\omega}\dfrac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2-\Omega_\alpha^2}\\\varepsilon_3=1-\Sigma_\alpha\dfrac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2}\end{cases}$$

由电磁波的色散关系导出方程

$$\begin{vmatrix}\varepsilon_1-n^2\cos^2\theta & i\varepsilon_2 & n^2\sin\theta\cos\theta\\-i\varepsilon_2 & \varepsilon_1-n^2 & 0\\n^2\sin\theta\cos\theta & 0 & \varepsilon_3-n^2\sin^2\theta\end{vmatrix}=0$$

垂直传播电磁波的色散关系 $(\varepsilon_1(\varepsilon_1-n^2)-\varepsilon_2^2)(\varepsilon_3-n^2)=0$。

第一解 $n^2=\varepsilon_3$ 为寻常模 O 模，色散关系 $\omega^2=k^2c^2+\Sigma_\alpha\omega_{p\alpha}^2\approx k^2c^2+\omega_{pe}^2$，$E_z\neq 0$，$E_x=E_y=0$，是线偏振波。

另一解 $n^2=\varepsilon_1-\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1}$ 为异常模（X 模），是 $x-y$ 平面内的椭圆偏振波，$E_x\neq 0$ 或 $E_y\neq 0$。

使得 $k=0$ 的频率称为截止频率，低于截止频率时电磁波不能传播。O 模截止频率为 ω_{pe}，X 模截止频率为 $\omega_L=-\frac{|\Omega_e|}{2}+\sqrt{\frac{\Omega_e^2}{4}+\omega_{pe}^2}$，$\omega_R=-\frac{|\Omega_e|}{2}+\sqrt{\frac{\Omega_e^2}{4}+\omega_{pe}^2}$。

使得 $k\to\infty$ 的频率是波的共振频率。O 模没有共振频率，X 模共振条件是 $\varepsilon_1=0$，则有高混杂波 $\omega_{HH}^2=\omega_{pe}^2+\Omega_e^2$，低混杂波 $\omega_{LH}^2=\Omega_i|\Omega_e|$，退化为波矢方向的线偏振纵波，即退化为静电波模。

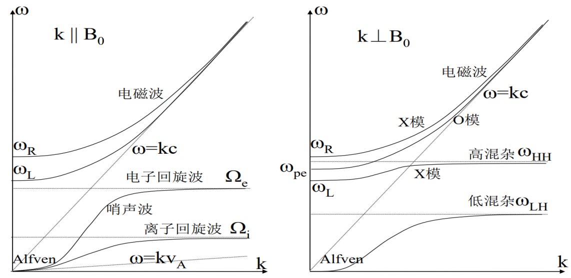
平行传播电磁波的色散关系 $(\varepsilon_2^2-(\varepsilon_1-n^2)^2)\varepsilon_3=0$。

第一解 $\varepsilon_3=0$ 为电子静电波，$E_x=E_y=0$，$E_z\neq 0$，色散关系 $\omega^2=\Sigma_\alpha\omega_{p\alpha}^2$。

第二解 $n^2=\varepsilon_1+\varepsilon_2$ 为左旋圆偏振波，$E_x=iE_y\neq 0$，$E_z=0$，色散关系 $(\frac{kc}{\omega})^2=1-\frac{\omega_{pe}^2+\omega_{pi}^2}{(\omega+|\Omega_e|)(\omega-\Omega_i)}$；频率较高时 $(\frac{kc}{\omega})^2=1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega+|\Omega_e|)}$，截止频率为 ω_L；频率较低、波长较短时 $\omega=\Omega_i(1-\frac{\omega_{pi}^2}{k^2c^2})$，成为离子回旋波，在离子回旋频率上共振；频率极低时 $\omega=kv_A(1+\frac{v_A^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$，成为左旋圆偏振 Alfven 波。

第三解 $n^2=\varepsilon_1-\varepsilon_2$ 为右旋圆偏振波，$E_x=-iE_y\neq 0$，$E_z=0$，色散关系 $(\frac{kc}{\omega})^2=1-\frac{\omega_{pe}^2+\omega_{pi}^2}{(\omega-|\Omega_e|)(\omega+\Omega_i)}$；频率较高时 $(\frac{kc}{\omega})^2=1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega-|\Omega_e|)}$，截止频率为 ω_R；接近电子回旋频率、波长较短 $\omega=|\Omega_e|(1-\frac{\omega_{pe}^2}{k^2c^2})$，成为电子回旋波，在电子回旋频率上共振；频率极低时 $\omega=kv_A(1+\frac{v_A^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$，成为右旋圆偏振 Alfven 波。

右旋偏振波在频率远低于电子回旋频率、远高于离子回旋频率时称为哨声波，色散关系 $\omega=\frac{k^2c^2|\Omega_e|}{\omega_{pe}^2}$，群速度随频率升高 $v_g=\frac{2c}{\omega_{pe}}\sqrt{\omega|\Omega_e|}$。



带电粒子的运动轨迹

$$-i\frac{\omega}{\Omega_\alpha}\boldsymbol{v}_\alpha=\frac{\boldsymbol{E}}{B_0}+\boldsymbol{v}_\alpha\times\boldsymbol{e}_z$$

$$v_{\alpha z}=\frac{i\Omega_\alpha}{\omega}\frac{E_z}{B_0}\qquad v_{\alpha\perp}=(\frac{\boldsymbol{E}_\perp}{B_0}\times\boldsymbol{e}_z-i\frac{\omega}{\Omega_\alpha}\frac{\boldsymbol{E}_\perp}{B_0})/(1-\frac{\omega^2}{\Omega_\alpha^2})$$

5 等离子体中的不稳定性

朗道阻尼：波与电子的共振相互作用。当电子的运动速度与波的相速度相差不大时，电子就被波的势阱捕获，从而与波一起运动。开始时速度小于波速的粒子得到加速，而开始时速度大于波速的粒子被减速，最后被捕获的粒子平均速度都与波的速度相同。对于 Maxwellian 分布，运动速度在波速附近的粒子中，速度慢的比速度快的粒子更多。从而获得加速的粒子多于减速的粒子。总体看来，波失去能量而粒子获得能量。波的幅度就会逐渐减小，形成阻尼。

电子静电波的阻尼率 $\omega_i=-\sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{\omega_{pe}}{k^3\lambda_{De}^3}\exp(-\frac{1}{2k^2\lambda_{De}^2}-\frac{3}{2})$

动理论伯恩斯坦波是磁化等离子体中的电子静电波。垂直磁场传播的静电波是动理论伯恩斯坦波。伯恩斯坦波没有阻尼，而对于斜向传播的静电波，可产生阻尼。

波与带电粒子共振条件 $\omega-k_zv_z=n\Omega$

MHD 不稳定性能量原理：假设系统中的等离子体各处都有微小位移，如果系统整体的能量有所上升，则系统处于稳定平衡状态，反之，则不平衡。

扰动 $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$，速度 $\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt}\approx\frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial t}$。连续性方程 $\rho_1=-\nabla\cdot(\rho_0\boldsymbol{\xi})$，绝热方程 $p_1=-\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla p_0-\gamma p_0\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}$，磁场冻结方程 $\boldsymbol{B}_1=\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B}_0)$，牛顿方程 $\boldsymbol{F}=-\rho_0\omega^2\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{j}_1\times\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{j}_0\times\boldsymbol{B}_1-\nabla p_1$ 系统能量变化 $\delta W=-\int\int\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\xi}dV$，形变项恒为正，总压力项，内部磁场项恒为正，电流驱动项常为负，压力不均匀项常为负，等离子体压缩项恒为正（不可压为 0）。

Rayleigh-Taylor 不稳定性：磁流体密度分层。色散关系 $\omega^2=\frac{2k^2B_{0z}^2}{\mu_0(\rho_u+\rho_l)}+kg\frac{\rho_l-\rho_u}{\rho_u+\rho_l}$。若上半部分密度大于下半部分且没有磁场，则 $\omega^2<0$ 引发不稳定性；若磁场存在且足够强则稳定。

柱形等离子体不稳定性：柱形等离子体内部磁场和压力是均匀且电流存在于等离子体柱表面的等离子体扰动。a 为柱形等离子体半径，色散关系 $\mu_0\rho_0\omega^2=k^2B_0^2-\frac{I_m'(ka)}{I_m(ka)}(\frac{K_m(ka)}{K_m'(ka)}(kB_{0z}+\frac{m}{a}B_\theta(a))^2+\frac{kB_\theta^2(a)}{a})$

腊肠不稳定性 $B_{0z}=0,m=0$，稳定性条件 $B_0^2>\frac{B_\theta^2(a)}{2}$ 或 $\delta(\frac{B_\theta^2-B_0^2}{2\mu_0})\delta r=\delta(\frac{-2B_\theta^2+4B_0^2}{2\mu_0})\frac{(\delta r)^2}{r}>0$（内部场 $B_0\propto r^{-2}$，外部场 $B_e\propto r^{-1}$）

扭曲不稳定性 $B_{0z}=0,m=1$，稳定性条件：短波稳定，长波 $\omega_{min}^2=\frac{mB_\theta^2}{\mu_0\rho_0a^2}(\frac{mB_0^2}{B_0^2+B_{0z}^2}-1)\geqslant 0$

交换不稳定性：表现在等离子体中的 Rayleigh-Taylor 不稳定性，稳定性条件是磁通量管的体积减小 $\delta V<0$，即 $\delta\int\frac{dl}{B}<0$

双流不稳定性：两种成分，有各自的初速度。色散关系 $1=\Sigma_\alpha\frac{\omega_{p\alpha}}{(\omega-kv_{\alpha 0})^2}$。临界波数 $\frac{dk}{d\omega}=0\Rightarrow k_c(v_{i0}-v_{e0})=(\omega_{pi}^{\frac{2}{3}}+\omega_{pe}^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$，当 $|k|<k_c$ 时存在复数解，即不稳定，反之稳定。当 $k=0,\pm k_c$ 时增长率为 0，在不稳定范围内最大增长率为 $\gamma=\omega_{pe}\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{m_e}{2m_i})^{\frac{1}{3}}$

撕裂模不稳定性：方向相反的两部分磁场的分界面，此处存在一个电流片，若存在电阻则会使电流片破裂形成不稳定性，引发磁场重联。

等离子体不可压缩条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}=0$