线性代数期中试卷　答案(2017.11.18)

一. 简答题(本题共5小题,每小题8分,共40分)

1. 已知向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性无关，求参数 t 使得向量组 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 线性相关，
其中 $\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3,\beta_2=2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=t\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$.

解：$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&2&t\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\theta$，

因为 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性无关，故 $\begin{pmatrix}1&2&t\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\theta$ 有非零解，于是 $\begin{vmatrix}1&2&t\\2&3&1\\3&1&2\end{vmatrix}=3-7t=0,t=3/7$.

2. 已知 $A=\begin{pmatrix}x&x&x&y\\x&x&y&y\\x&y&y&y\\y&y&y&y\end{pmatrix}$，求 $\mathrm{r}(A)$.

解：经过行列初等变换，有 $A\to\begin{pmatrix}x-y&&&\\&x-y&&\\&&x-y&\\&&&y\end{pmatrix}$.

当 $x=y=0$ 时 $\mathrm{r}(A)=0$；当 $x=y\neq0$ 时 $\mathrm{r}(A)=1$；
当 $x\neq y,y=0$ 时 $\mathrm{r}(A)=3$；当 $x\neq y,y\neq0$ 时 $\mathrm{r}(A)=4$.

3. 已知 $A=\begin{pmatrix}3&1&2\\2&-1&1\\2&3&1\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解：$(A,E)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&5/4&3/4\\0&1&0&0&-1/4&1/4\\0&0&1&2&-7/4&-5/4\end{array}\right),A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&5/4&3/4\\0&-1/4&1/4\\2&-7/4&-5/4\end{pmatrix}$.

4. 请找出 2×2 的实数矩阵 A 和 B 满足：$(E+A)^{-1}\neq E^{-1}+A^{-1}$ 和 $(E+B)^{-1}=E^{-1}+B^{-1}$.
解：易知$A=E$.
B满足$(E+B)(E^{-1}+B^{-1})=E,B^2+B+E=O$，故$\lambda^2+\lambda+1=0=\begin{vmatrix}\lambda&1\\-1&\lambda+1\end{vmatrix},B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$.
(*此题多解，按Hamilton-Cayley 定理，任何特征多项式为 $\lambda^2+\lambda+1$ 的矩阵都是解)

5. 计算行列式：$\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\2&2^2&\cdots&2^n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n^2&\cdots&n^n\end{vmatrix}$.
解：A取每一行公因子并转置，用范德蒙德行列式得$A=n!(n-1)!\cdots2!1!$.

二.(15分) 已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\3&-1&2&5\\1&3&4&-5\\2&-2&0&6\end{pmatrix}$.

(1) 求齐次方程组 $Ax=\theta$ 的基础解系.
(2) 若 $\xi=(-2,3,1,1)^T$ 满足 $A\xi=2b$，求 b 并求方程组 $Ax=b$ 的通解.

解：(1) $A\to\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故基础解系为：$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix}$.

(2) 令 $\eta=\frac{1}{2}\xi$，则 $b=A\eta=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\-2\end{pmatrix}$，$Ax=b$ 的通解为：$\eta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,k_1,k_2$ 为任意实数.

三.(10分) 已知3维列向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 和 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，且经过初等行变换有
$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
请将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表示为 β_1,β_2,β_3 的线性组合.
解：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
故有：$\alpha_1 = -8\beta_1 + 5\beta_2 + \beta_3, \alpha_2 = 7\beta_1 - 4\beta_2 - \beta_3, \alpha_3 = -5\beta_1 + 3\beta_2 + \beta_3$.

解法二：由条件知：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P$，其中 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
于是 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)P^{-1} = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix} -8 & 7 & -5 \\ 5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
故有：$\alpha_1 = -8\beta_1 + 5\beta_2 + \beta_3, \alpha_2 = 7\beta_1 - 4\beta_2 - \beta_3, \alpha_3 = -5\beta_1 + 3\beta_2 + \beta_3$.

四.(10分) 已知存在 x,y 使得 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & -8 & x \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & -2 \\ -3 & y & 2 \end{pmatrix}$ 相似.
求 x,y 并计算 $\mathrm{tr}(B^*)$，其中 B^* 为 B 的伴随矩阵.
解：相似矩阵有关系：$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B), |A| = |B|$，故 $1-3+x = 1-2+2$ 得 $x=3$，$8 = -34-7y$ 得 $y=-6$.
于是：$\mathrm{tr}(B^*) = B_{11} + B_{22} + B_{33} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -10$.

解法二：因为 $A \sim B$，故 $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$，
即 $\lambda^3 + (2-x)\lambda^2 - (2x+4)\lambda + 4x - 20 = \lambda^3 - \lambda^2 + (2y+2)\lambda + 7y + 34$，比较系数得 $x = 3, y = -6$
代入y后有 $|B| = 8, B^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -16 & -16 & 8 \\ 12 & 11 & -7 \\ 12 & 9 & -5 \end{pmatrix}$，再由 $B^* = |B|B^{-1}$，可得 $\mathrm{tr}(B^*) = -16 + 11 - 5 = -10$.

五. (10分) 已知 $P^{-1}AP = D$，其中 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
计算矩阵 $B = A^2 + (2E-A)^{-1}$ 的特征值和特征向量.

解：令 $B = A^2 + (2E-A)^{-1}, P = (\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
易知 $A = PDP^{-1}$，则 $B = A^2 + (2E-A)^{-1} = PD^2P^{-1} + (P(2E-D)P^{-1})^{-1} = P(D^2 + (2E-D)^{-1})P^{-1}$.
而 $D^2 + (2E-D)^{-1} = \mathrm{diag}(9,1,0) + (\mathrm{diag}(-1,1,2))^{-1} = \mathrm{diag}(8,2,0.5)$，
故 $B(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = BP = P\mathrm{diag}(8,2,0.5) = (8\xi_1, 2\xi_2, 0.5\xi_3)$.
故 $B = A^2 + (2E-A)^{-1}$ 的特征值为 $8, 2, 0.5$，对应特征向量为 $k_1\xi_1, k_2\xi_2, k_3\xi_3$，$k_1,k_2,k_3$为非零实数.

解法二：令 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$，$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
则有 $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, P = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)$. 于是有 $AP = PD$，即 $A\xi_i = \lambda_i\xi_i, i = 1,2,3$，
故 $(A^2 + (2E-A)^{-1})\xi_i = (\lambda_i^2 + \frac{1}{2-\lambda_i})\xi_i, i = 1,2,3$.
可得 $A^2 + (2E-A)^{-1}$ 的特征值 $\lambda_i^2 + \frac{1}{2-\lambda_i}$ 为 $8, 2, \frac{1}{2}$，对应特征向量为 $k_1\xi_1, k_2\xi_2, k_3\xi_3$，$k_1,k_2,k_3$为非零实数.

解法三：$A=PDP^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}6&-6&12\\-4&12&-8\\7&-3&14\end{pmatrix}$. 于是 $B=A^2+(2E-A)^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}38&-30&60\\-24&56&-48\\33&-21&74\end{pmatrix}$.
解 B 的特征值特征向量.
$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-38/16&30/16&-60/16\\24/16&\lambda-56/16&48/16\\-33/16&21/16&\lambda-74/16\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-38/16&30/16&1-2\lambda\\24/16&\lambda-56/16&0\\-33/16&21/16&\lambda-1/2\end{vmatrix}$
$=(\lambda-1/2)(\lambda-2)(\lambda-8)=0$.
$\lambda=1/2$ 时解得特征向量为 $k_1\xi_1=k_1(-2,0,1)^T$，k_1为非零实数.
$\lambda=2$ 时解得特征向量为 $k_2\xi_2=k_2(0,2,1)^T$，k_2为非零实数.
$\lambda=8$ 时解得特征向量为 $k_3\xi_3=k_3(1,-1,1)^T$，k_3为非零实数.

六.(15分) 设 A 为 n 阶方阵 $(n\geq 2)$.
(1) 证明：$(A^*)^T=(A^T)^*$，其中 $A^*,(A^T)^*$ 分别为 A 和 A^T 的伴随矩阵.
(2) 若偶数阶方阵 A 满足 $A^T=-A$，证明：A^* 的所有元素之和为0.

证明：(1) $(A^*)^T$ 的 (i,j) 元素，即为 A^* 的 (j,i) 元素，即 $|A|$ 的代数余子式 A_{ij}.
$(A^T)^*$ 的 (i,j) 元素即为 $|A^T|$ 的 (j,i) 元素的代数余子式，即 $|A|$ 的 (i,j) 元素的代数余子式 A_{ij} 的带符号转置行列式，等于 A_{ij}. 故 $(A^*)^T=(A^T)^*$.
(2) 由(1)的结论，$(A^*)^T=(A^T)^*=(-A)^*$. 而偶数阶行列式的余子式为奇数阶，故 $|-A|$ 的 (i,j) 元素的代数余子式为$-A_{ji}$，即 $|A|$ 的 (i,j) 元素取负，故$(A^*)^T=(-A)^*=-A^*$，从而 $A^*+(A^*)^T=O$ 的元素总和等于A^*的2倍元素总和，为0，故总和为0.

证明二：(1)当 A 可逆时，有 $A^*=|A|A^{-1}$，故有 $(A^*)^T=(|A|A^{-1})^T=|A|(A^{-1})^T=|A^T|(A^T)^{-1}=(A^T)^*$.
当 A 不可逆时，存在 $\epsilon>0$ 使得 $0<t<\epsilon$ 时有 $tE+A$ 特征值非零，故 $tE+A$ 可逆. 于是有 $((tE+A)^*)^T-((tE+A)^T)^*=O$，而等式左边为$t$ 的多项式构成的矩阵，有连续性，两边令 $t\to 0$ 得到极限相等，即 $(A^*)^T=(A^T)^*$.
(2) 由 $A^T=-A$ 可知，A^* 的(i,i) 元素为 $|A|$ 的代数余子式A_{ii}，而余子式M_{ii} 为奇数阶反对称行列式，等于0，故 $A_{ii}=M_{ii}=0$.
当 $i\neq j$ 时，A^* 的 (i,j) 元素与 (j,i) 元素为 $|A|$ 的代数余子式 $A_{ji}=(-1)^{j+i}M_{ji}$ 和 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$. 两者符号相同，余子式M_{ji} 与 M_{ij} 正好是转置取负，即若 $M_{ji}=|\tilde{M_{ji}}|$，则 $M_{ij}=|\tilde{M_{ij}}|=|-\tilde{M_{ji}}^T|=|-\tilde{M_{ji}}|$，再考虑余子式为奇数阶，有 $M_{ij}=-|\tilde{M_{ji}}|=-M_{ji}$，即 $M_{ji}+M_{ij}=0$，从而 $A_{ji}+A_{ij}=0$，故全部 A^* 的非对角元素成对相加再与对角元素求和得总和为0.