线性代数期中试卷　答案

姓名________ 学号____________________专业__________ 考试时间 2016.11.12

一. 简答题(本题共5小题,每小题8分,共40分)

1. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&6&-3\\-1&-2&1\\2&4&-2\end{pmatrix}$，求 A^n .

解：$A^2=-A, \therefore A^n=(-1)^{n-1}A.$

解法二：$A=(3,-1,2)^T(1,2,-1), A^n=(3,-1,2)^T((1,2,-1)(3,-1,2)^T)^{n-1}(1,2,-1)=(-1)^{n-1}A.$

解法三：$|\lambda E-A|=\lambda^2(\lambda+1)$，得 $\lambda=0$ 及特征向量 $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\lambda=-1$ 及特征向量 $\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$.

令 $P=\begin{pmatrix}-2&1&3\\1&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\2&4&-1\\-1&-2&1\end{pmatrix}$，且 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(0,0,-1)$.

故 $A^n=P\mathrm{diag}(0,0,(-1)^n)P^{-1}=(-1)^{n-1}A.$

2. 已知矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in R^{3\times3}$, $|A|=2$，矩阵 $B=(2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3)$，计算 $|B|$.

解：$|B|=\left|A\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&-3&2\\2&1&-1\end{pmatrix}\right|=|A|\cdot\begin{vmatrix}2&1&1\\-1&-3&2\\2&1&-1\end{vmatrix}=20.$

解法二：$|B|=|4\alpha_1+3\alpha_2,2\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3|=|10\alpha_1,-\alpha_2,-\alpha_3|=10|A|=20.$

3. 已知向量 $\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}x_3\\x_2\\x_1\end{pmatrix}$ 满足 $A\alpha=\beta$，其中 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-3&3&5\\2&-1&-3\end{pmatrix}$，求解向量 α.

解：$A\alpha=\beta$ 即 $(A-\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix})\alpha=B\alpha=\theta.$

$B=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-3&2&5\\1&-1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&4\\0&0&0\end{pmatrix}$，解得 $\alpha=k\begin{pmatrix}-1\\-4\\1\end{pmatrix},k\in R.$

解法二：$A\alpha=\beta$ 即 $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=x_3,\\-3x_1+3x_2+5x_3=x_2,\\2x_1-x_2-3x_3=x_1.\end{cases}$ 移项得 $\begin{cases}2x_1-x_2-2x_3=0,\\-3x_1+2x_2+5x_3=0,\\x_1-x_2-3x_3=0.\end{cases}$

求解 $\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-3&2&5\\1&-1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&4\\0&0&0\end{pmatrix}$，解得 $\alpha=k\begin{pmatrix}-1\\-4\\1\end{pmatrix},k\in R.$

4. 设 $A\in R^{m\times n}(m>n), \mathrm{r}(A)=n$，证明：存在矩阵 $P\in R^{n\times m}$ 使得 $PA=E_n$.

证：$\mathrm{r}(A)=n$，故 A 可通过初等行变换得到行简化梯形 $\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}$，此等价于左乘可逆矩阵 $Q=\begin{pmatrix}P\\P_2\end{pmatrix}$，

即 $QA=\begin{pmatrix}PA\\P_2A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}$，故 $PA=E_n$.

证法二：只要证明存在矩阵 P 使得 $A^TP^T=E_n$. 因为 $r(A^T)=r(A)=n=r(A^T,e_i)$，

故存在解 ξ_i 使得 $A^T\xi_i=e_i,i=1,2,\cdots,n$，令 $P^T=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，则有 $P\in R^{n\times m}$，使得 $PA=E_n$.

5. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&1&2\\0&0&\cdots&1&2&1\\0&0&\cdots&2&1&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\\1&2&\cdots&0&0&0\\2&1&\cdots&0&0&0\end{vmatrix}$.

解：令 $C_n=\begin{vmatrix}2&1&0&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\\0&0&0&\cdots&2&1\\0&0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}$，则 $C_n=2C_{n-1}-C_{n-2}$，即 $C_n-C_{n-1}=C_{n-1}-C_{n-2}$，

可得 $C_n=n+1$. 将 D_n 的第n列与第n-1列，$\cdots$，第1列两两交换，再将第n-1列两两交换到前面，依次下去，经$n(n-1)/2$次交换得到 C_n，故 $D_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n+1)$.

解法二：按第一行展开得 $D_n=2(-1)^{n-1}D_{n-1}+D_{n-2}$，因为 $D_1=2,D_2=-3,D_3=-4,D_4=5$，归纳法证明 $D_n=(-1)^{[n/2]}(n+1)$.

$D_n=2(-1)^{n-1}(-1)^{[(n-1)/2]}n+(-1)^{[(n-2)/2]}(n-1)=\begin{cases}(-1)^{(n-1)/2}(n+1), & n\text{奇数}\\(-1)^{n/2}(n+1), & n\text{偶数}\end{cases}$，证毕.

解法三：$D_n=\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&1&1\\0&0&\cdots&1&2&1\\0&0&\cdots&2&1&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\\1&2&\cdots&0&0&0\\2&1&\cdots&0&0&0\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}D_{n-1}=(-1)^{n(n-1)/2}+(-1)^{n-1}D_{n-1}$

$=2(-1)^{n(n-1)/2}-D_{n-2}=4(-1)^{n(n-1)/2}+D_{n-4}$.

分情况可得 $D_n=\begin{cases}n+1, & n=4k+1,\\-(n+1), & n=4k+2,\\-(n+1), & n=4k+3,\\n+1, & n=4k+4.\end{cases}$.

解法四：$D_n=(-1)^{n(n-1)/2}+(-1)^{n-1}D_{n-1}$，

则 $(-1)^{n(n-1)/2}D_n=1+(-1)^{(n-1)(n-2)/2}D_{n-1}=\cdots=n+1$，故 $D_n=(-1)^{n(n-1)/2}(n+1)$.

二.(10分) 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\1\\2\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}7\\5\\-2\\-7\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}5\\-1\\10\\3\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$.

(1) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关组，并用该极大无关组表示其它向量.

(2) 若有向量 $\beta=(1,0,-1,-1)^T$，则向量组 α_3,α_4,β 是否与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 等价？

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\beta)\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&3&1&0&1/3\\0&1&-2&2&0&-1/3\\0&0&0&0&1&-1/3\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$.

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ 是一个极大无关组，且有 $\alpha_3=3\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2$.

(2) β 能由原向量组表示，故原向量组与向量组 $B:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\beta$等价,且 $\mathrm{r}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\beta\}=3$.

又 $\mathrm{r}\{\alpha_3,\alpha_4,\beta\}=3$，故 α_3,α_4,β 是向量组 B 的一个极大无关组，与 B 等价，故与原向量组等价.

解法二：(1) $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&0\\0&1&-2&2&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ 是一个极大无关组，且有 $\alpha_3=3\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2$.

(2) $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5|\beta)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1/3\\0&1&0&-1/3\\0&0&1&-1/3\end{array}\right)$，故 α_3,α_4,β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 表示.

$$(\alpha_3,\alpha_4,\beta|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/4&-1/8&3/8\\0&1&0&1/4&3/8&-1/8\\0&0&1&0&0&-3\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ 可由 α_3,α_4,β 表示，

于是 α_3,α_4,β 与原向量组等价.

三. (10**分**) 设 $A_1x=b_1$ 和 $A_2x=b_2$ 是两个非齐次线性方程组，其中 $A_1\in R^{m\times n},A_2\in R^{k\times n}$.
如果这两个方程组有相同的解集，请问 A_1 的行向量组与 A_2 的行向量组是否一定等价？若等价请给出证明，否则举出反例.

解：方程组有解则等价.

$A_1x=b_1,A_2x=b_2$ 同解可得 $A_1x=\theta,A_2x=\theta$ 同解，

从而 $A_1x=\theta,A_2x=\theta,\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}x=\theta$ 同解，故 $r(A_1)=r(A_2)=r\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$，

于是 $r(A_1^T)=r(A_1^T,A_2^T)$，即 A_2^T的列可由A_1^T的列表示，反之亦然.

故A_2^T的列与A_1^T的列等价，从而A_1,A_2的行等价.

方程组无解，则不一定等价，见反例：$(A_1,b_1)=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&0\end{pmatrix}$ 和 $(A_2,b_2)=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&0\end{pmatrix}$.

解法二：方程组有解则等价.

$A_1x=b_1,A_2x=b_2$ 同解可得 $A_1x=\theta,A_2x=\theta$ 同解，

$A_1x=\theta$ 的基础解系构成矩阵 C，则 $A_1C=O,A_2C=O$，且 $r(A_1)=n-r(C)=r(A_2)$.

故 A_1^T 的列与方程组 $C^Ty=\theta$ 的基础解系等价，同样 A_2^T 的列与该基础解系等价，

故 A_1^T 与 A_2^T 列向量组相互等价，即 A_1 的行向量组与 A_2 的行向量组等价.

方程组无解，则不一定等价，反例见前一解法.

四.(10**分**) 设 $n(n\geq 2)$ 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b&b&\cdots&a\end{pmatrix}$，求 A 的特征值和特征向量.

解：$|\lambda E-A|=(\lambda-a-(n-1)b)(\lambda-a+b)^{n-1}=0$，故 $\lambda=a+(n-1)b,a-b$.

当 $b=0$ 时，$\lambda=a(n重)$，特征矩阵$aE-A=O$，故任意非零向量为属于特征值 a 的特征向量.

当 $b\neq 0$ 时，

$\lambda=a+(n-1)b$ 单重，$\lambda E-A\to\begin{pmatrix}1&0&\cdots&-1\\0&1&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&-1\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$，基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，

特征向量为 $k_1\xi_1,k_1\in R,k_1\neq 0$.

$\lambda=a-b(n-1重),\lambda E-A\to\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0\end{pmatrix}$,基础解系为 $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\xi_n=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$,

特征向量为$k_2\xi_2+\cdots+k_n\xi_n,k_2,\cdots,k_n\in R$，$k_1,\cdots,k_n$ 不全为0.

五.(15**分**) 设有矩阵 $A=\begin{pmatrix}5&2&4\\2&5&-11\\2&3&-5\end{pmatrix}$.

(1) 解方程组 $Ax=\theta$;

(2) 求 $A^2x=\theta$ 但 $Ax\neq\theta$ 的解集.

解：(1) $A=\begin{pmatrix}5&2&4\\2&5&-11\\2&3&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$. 可得齐次方程组的解为 $\alpha=k(-2,3,1)^T$.

(2) $A^2=\begin{pmatrix}37&32&-22\\-2&-4&8\\6&4&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$，得到解为 $\beta=k_2(-2,3,1)^T$，

显然 $A\beta=\theta$，故方程组无解.

解法二：(1) 解法同上.

(2) $A^2x=Ay=\theta,\ y=Ax$，由(1)得 $y=k(-2,3,1)^T$，故 $Ax=k(-2,3,1)^T$，只要解 $Ax=(-2,3,1)^T$.

求解 $\left(\begin{array}{ccc|c}5&2&4&-2\\2&5&-11&3\\2&3&-5&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&0\\0&1&-3&1\\0&0&0&-1\end{array}\right)$，方程组无解，故所求解集为空集.

六.(15分) (1) 设 $x_0,\cdots,x_n,y_0,\cdots,y_n$ 为实数，其中 $x_0,\cdots,x_n$ 两两不同. 求证：存在唯一的次数不大于 n 的多项式 $f(x)$ 使得$y_i=f(x_i),\ i=0,1,\cdots,n$;

(2) 设带参数 t 的矩阵 $A(t)=\begin{pmatrix}2t-1&f(t)\\-f(t)&2t-1\end{pmatrix}$，其中 $f(t)$ 为 t 的多项式，满足：$f(0)=f(1)=0,|A(t)|>0$. 求满足条件的一个多项式 $f(t)$.

解：(1) 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，将 $y_i=f(x_i),i=0,1,\cdots,n$ 代入得线性方程组

$$\begin{cases}a_0+a_1x_0+\cdots+a_nx_0^n=y_0,\\ \cdots\cdots\\ a_0+a_1x_n+\cdots+a_nx_n^n=y_n.\end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&x_0&\cdots&x_0^n\\1&x_1&\cdots&x_1^n\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_n&\cdots&x_n^n\end{vmatrix}$$

是转置的范德蒙德行列式，值为 $\prod\limits_{0\le i<j\le n}(x_j-x_i)$，此值非零，因为 $x_0,\cdots,x_n$ 两两不同，

由克莱姆法则有唯一解，得证.

(2) $|A(t)|=(2t-1)^2+f(t)^2>0$，故只要 $t=1/2$ 时，有 $f(1/2)\neq 0$ 即可.

令 $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2,f(0)=f(1)=0,f(1/2)=1$ 可解得 $f(t)=4t(1-t)$.