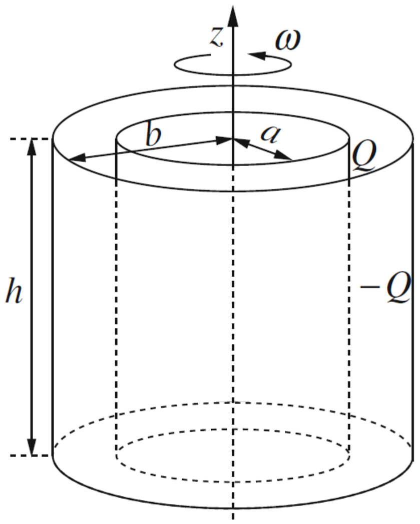
2021 年秋季学期《电磁学》期终考试试卷 C

（50 分）

1.（18 分）两个同轴的圆柱面半径分别为 a 和 b， $b>a$，高度为 h，且$h\gg b$。内圆柱面带$+Q$电荷，外圆柱面带$-Q$的电荷， 两个圆柱面共同沿中心轴以匀角速度ω转动，忽略边缘效应。



（1）求空间的磁感应强度分布（6 分）；

（2）计算外圆柱面单位面积的磁场力，并与电场力相比较；（8 分）

（3）计算磁场的能量（4 分）；

【解】（1）内外圆柱面的电荷面密度为：

$$\sigma_1=\frac{Q}{2\pi ah}, \quad \sigma_2=-\frac{Q}{2\pi bh}$$

两个圆柱面转动形成面电流密度 i，

$$i_1=\sigma_1 v=\sigma_1\omega a=\frac{Q}{2\pi ah}\omega a=\frac{Q\omega}{2\pi h}$$

$$i_2=\sigma_2 v=\sigma_2\omega b=-\frac{Q}{2\pi bh}\omega b=-\frac{Q\omega}{2\pi h}$$

两个圆柱面的面电流等效于两个螺线管， 对应的$nI=i$，不考虑边缘效应，螺线管只在内部产生磁场，因此有：

$$\vec{B}_1=\vec{B}_1'+\vec{B}_2'=\left(\mu_0 i_1+\mu_0 i_2\right)\vec{e}_z=\left(\frac{\mu_0 Q\omega}{2\pi h}-\frac{\mu_0 Q\omega}{2\pi h}\right)\vec{e}_z=0, \quad r<a$$

$$\vec{B}_2=\vec{B}_1'+\vec{B}_2'=0+\mu_0 i_2\vec{e}_z=-\frac{\mu_0 Q\omega}{2\pi h}\vec{e}_z, \quad a<r<b$$

$$\vec{B}_3=\vec{B}_1'+\vec{B}_2'=0+0=0, \quad r>b$$

(2)先计算电场力：根据高斯定理$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$，可以计算出三个区域的电场强度。

$$2\pi rhE_1=0 \quad \Rightarrow \quad E_1=0, \quad r<a$$

$$2\pi rhE_2=\frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_2=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\frac{1}{r}\vec{e}_r, \quad a<r<b$$

$$2\pi rhE_3=\frac{Q-Q}{\varepsilon_0}\quad\Rightarrow\quad E_3=0,\quad r>b$$

外圆柱面单位面积的静电力为：

$$f_{Eb}=\frac{1}{2}\left(E_2(r=b^-)+E_3(r=b^+)\right)\sigma=-\frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0b^2h^2}$$，方向沿径向向内

再计算磁场力。

外圆柱面单位面积的磁场力为：

$$\vec{f}_{Bb}=\sigma_2\vec{v}\times\left(\frac{\vec{B}_2+B_3}{2}\right)=\frac{-Q}{2\pi bh}\omega b\vec{e}_\varphi\times\frac{1}{2}\left(-\frac{\mu_0Q\omega}{2\pi h}\vec{e}_z\right)=+\frac{\mu_0Q^2\omega^2}{8\pi^2h^2}\vec{e}_r$$

因为$c^2=\dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$，所以有：

$$\left|\frac{f_{Eb}}{f_{Bb}}\right|=\frac{\dfrac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0b^2h^2}}{\dfrac{\mu_0Q^2\omega^2}{8\pi^2h^2}}=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0b^2\omega^2}=\frac{c^2}{v_b^2}$$

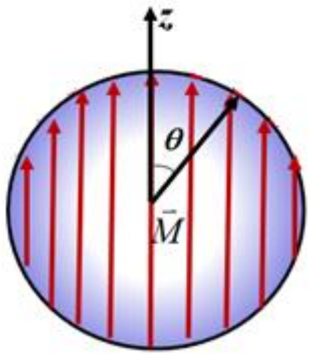
（3）由于磁场只局限在两个圆柱面之间，而且为均匀磁场，因此磁能为：

$$W_B=\frac{1}{2\mu_0}B^2\cdot\pi\left(b^2-a^2\right)h=\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0Q\omega}{2\pi h}\right)^2\pi\left(b^2-a^2\right)h=\frac{\mu_0Q^2\omega^2}{8\pi h}\left(b^2-a^2\right)$$

2. （17 分）

（1）一个半径为 R 的磁化球，相对磁导率为 μ_r，磁化强度 M 沿 z 轴方向，且均匀磁化。已知球内磁感应强度是均匀的，球外为等效电偶极矩产生的磁场。求球内外的磁感应强度；（10 分）

（2）该磁化球产生的总磁场能量。（7 分）



【解】（1）由于题目给定已知球内磁场为均匀的，因此只需求出球心处的磁感应强度。磁化球表面的磁化电流为：

$$\vec{i} = \vec{n} \times \vec{M} = M \sin\theta \vec{e}_\theta$$

球面圆环带上的电流为：$dI = M\sin\theta R d\theta$，该圆环电流在球心处的磁感应强度为：

$$dB_0 = \frac{\mu_0}{2}\frac{r^2 dI}{\left(z^2+r^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2}\frac{R^2\sin^2\theta M\sin\theta R d\theta}{\left(R^2\sin^2\theta + R^2\cos^2\theta\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2}\sin^3\theta M d\theta$$

$$B_0 = \frac{\mu_0 M}{2}\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = -\frac{\mu_0 M}{2}\int_0^\pi \sin^2\theta d\cos\theta = -\frac{\mu_0 M}{2}\int_0^\pi \left(1-\cos^2\theta\right) d\cos\theta$$

$$= -\frac{\mu_0 M}{2}\left(\cos\theta - \frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\Big|_0^\pi = -\frac{\mu_0 M}{2}\left[\left(-1-\frac{1}{3}(-1)\right)-\left(1-\frac{1}{3}\right)\right] = -\frac{\mu_0 M}{2}\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}\mu_0 M$$

球内磁场各处大小均与球心处磁感应强度的值相同，方向均沿 M 方向。

磁化球等效于一个磁矩，该磁矩为：

$$\vec{m} = \vec{M}V = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{M}$$

球外的磁感应强度为该磁矩产生，因此为：

$$\vec{B}_{外} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\left(\vec{m}\cdot\vec{r}\right)}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right]$$

【另解】磁化球等效于一个磁矩，该磁矩为：

$$\vec{m} = \vec{M}V = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{M}$$

设球内外的磁感应强度分别为 $\vec{B}_{内} = B_0 \hat{z}$ 和

$$\vec{B}_{外} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3\left(\vec{m}\cdot\hat{r}\right)\hat{r} - \vec{m}\right] = \mu_0 M\frac{R^3}{3r^3}\left[\left(2\cos\theta\right)\hat{r} + \left(\sin\theta\right)\hat{\theta}\right]$$

由磁感应强度的法向分量连续，$\hat{r}\cdot\left(\vec{B}_{外} - \vec{B}_{内}\right)_{r=R} = 0$，得到

$$B_0 = \frac{2}{3}\mu_0 M$$

（2）磁化球的磁能为球内磁能和球外磁能两部，

球内为均匀磁场，磁能密度为：

$$w_1 = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} = \frac{1}{2}B\cdot\frac{B}{\mu_0\mu_r} = \frac{1}{2\mu_0\mu_r}B^2 = \frac{1}{2\mu_0\mu_r}\left(\frac{2}{3}\mu_0 M\right)^2 = \frac{2\mu_0}{9\mu_r}M^2$$

球内磁能能为：

$$W_1 = w_1 V = \frac{2\mu_0}{9\mu_r}M^2\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8\pi\mu_0 R^3}{27\mu_r}M^2$$

球外的磁能密度为：

$$w_2 = \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}_{外}^2 = \frac{1}{2\mu_0}\left(B_r^2 + B_\theta^2\right) = \frac{\mu_0 M^2 R^6}{18}\frac{1}{r^6}\left(4\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = \frac{\mu_0 M^2 R^6}{18}\frac{1}{r^6}\left(1+3\cos^2\theta\right)$$

球面体积元为 $dV = 2\pi r^2\sin\theta d\theta dr$，因此球外磁能为：

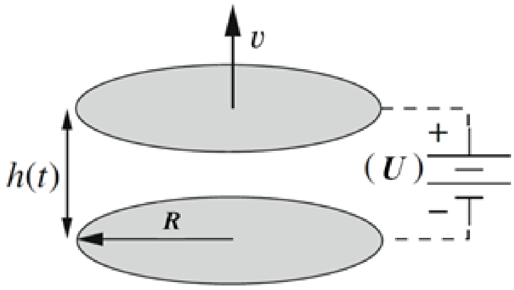
$$W_2 = \frac{\mu_0 M^2 R^6}{18}2\pi\int_R^\infty \frac{1}{r^6}r^2 dr\int_0^\pi\left(1+3\cos^2\theta\right)\sin\theta d\theta = \frac{\pi\mu_0 M^2 R^6}{9}\left(-\frac{1}{3r^3}\right)\Bigg|_R^\infty\left(-\cos\theta-\cos^3\theta\right)\Big|_0^\pi$$

$$= \frac{\pi\mu_0 M^2 R^6}{9}\left(\frac{1}{3R^3}\right)4 = \frac{4\pi\mu_0 R^3}{27}M^2$$

总磁能为：

$$W = W_1 + W_2 = \frac{8\pi\mu_0 R^3}{27\mu_r}M^2 + \frac{4\pi\mu_0 R^3}{27}M^2 = \frac{4\pi\mu_0 R^3}{27}M^2\left(\frac{2}{\mu_r}+1\right)$$

3.（15 分）一个平行板电容器由两个半径为 R 的金属圆盘组成，初始间距为h_0，下极板保持静止，上极板以速度 v 匀速离开下极板，因此在 t 时刻的间距为$h(t) = h_0 + vt$，设任何时刻均有$h \ll R$，即忽略边缘效应并忽略变化的磁场带来的电场，假设速度 v 很小，两个极板之间始终接有恒定的电源，电压为 U。 求：



（1）两个极板之间的磁场，并求玻印廷矢量；（8 分）

（2）求从电容器侧面单位时间流出的能量，并求电源所接收的功率。（7 分）

【解】（1）两个极板之间接上电源，电压不变，即：

$$\vec{E} = -\frac{U}{h}\vec{e}_z = -\frac{U}{h_0 + vt}\vec{e}_z$$

电场随时间变化，因此有位移电流，对应产生的磁感应强度为：

$$2\pi rB = \mu_0 I_D = \pi\mu_0 r^2 \frac{dD}{dt} = \pi\varepsilon_0\mu_0 r^2 U \frac{v}{\left(h_0 + vt\right)^2}$$

$$\vec{B} = \frac{\varepsilon_0\mu_0 rU}{2}\frac{v}{\left(h_0 + vt\right)^2}\vec{e}_\varphi = \frac{rU}{2c^2}\frac{v}{\left(h_0 + vt\right)^2}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{U}{h_0 + vt}\vec{e}_z\right)\times\left[\frac{rU}{2c^2}\frac{v}{\left(h_0 + vt\right)^2}\vec{e}_\varphi\right] = \frac{rU^2}{2\mu_0 c^2}\frac{v}{\left(h_0 + vt\right)^3}\vec{e}_r = \frac{r\varepsilon_0 U^2}{2}\frac{v}{\left(h_0 + vt\right)^3}\vec{e}_r$$

方向为从电容器侧面指向外。

（2）单位时间从电容器侧面流出的能量为：

$$\iint \vec{S}\cdot d\vec{s} = S\left(r = R\right)\cdot 2\pi R\left(h_0 + vt\right) = \frac{\varepsilon_0\pi R^2 U^2 v}{\left(h_0 + vt\right)^2} = \frac{\varepsilon_0\pi R^2 U^2 v}{\left(h_0 + vt\right)^2}$$

电源回路中的传导电流为：$I = \dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{d\left(CU\right)}{dt} = -U\varepsilon_0\pi R^2\dfrac{v}{\left(h_0 + vt\right)^2}$

这个电流是流到电源的，因此电源接收到的功率为：

$$P = -UI = \frac{U^2\varepsilon_0\pi R^2 v}{\left(h_0 + vt\right)^2}$$

正好等于单位时间从电容器侧面流出的能流，即电容器从侧面流出的能量是由电源接收的。

（说明：（3）本问题简化了能量的讨论，只计算独立的两部分：单位面积的流出能量和电源接收的能量，避免去讨论整个系统能量守恒问题，因为整个系统能量守恒满足：

$$-\iint \vec{S}\cdot d\vec{s} = \frac{dW}{dt} + \vec{F}\cdot\vec{v}$$

W 是整个电容器内部的电场和磁场能量，F 是保持极板匀速运动需要的力，可以证明该等式成立，证明过程略。）