线性代数测试题

一.填空题（每题5分，共35分）

1. $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ =______

2.若$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则$A^{2020} =$ ______

3.设a，b，c是方程$x^3 + px + q = 0$的三个根，则：$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ =______

（用p，q表示）

4.设A，B均为n阶对称阵，则AB为对称阵的充要条件为______

5.设$\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\vec{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$，则$\det(I_n + \vec{a}^T\vec{b}) =$ ______

6.若n阶方阵A满足方程$A^2 + 2A + 3I = 0$，则$A^{-1} =$ ______

7.设A为$n(n > 1)$阶方阵，且$r(A) < n - 1$，则$A^* =$ ______

二.判断题（每题5分，共15分，需简述理由）

1.线性方程组$A\vec{x} = \vec{b}$有唯一解当且仅当$A\vec{x} = \vec{0}$只有零解。

2.三个向量$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$共面，则$\vec{a}$一定能写成$\vec{b}, \vec{c}$的线性组合。

3.设$\vec{\alpha_1}, \cdots, \vec{\alpha_s} \in \mathbb{F}^n$线性相关，则它们的加长向量组也必线性相关。

三.计算题（(1)8分，(2)15分）

(1) 求$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$。

(2) 设$\vec{\alpha_1} = (3, 2, -1, 4), \vec{\alpha_2} = (2, 3, 0, -1)$。

(a) 将$\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}$扩充为$\mathbb{R}^4$的一组基。

(b) 给出标准基在该组基下的表示。

(c) 求$\vec{\beta} = (1, 3, 4, -2)$在该组基下的坐标。

四.（12分）已知3阶方阵的伴随矩阵$A^* = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 10 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$，求$A$。

五.（15分）当a为何值时，方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 9x_2 - 5x_3 + 15x_4 = a \end{cases}$$

有解？并求其基础解系。

六.（10分）设$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，$B \in \mathbb{F}^{n\times p}$，且$AB = 0$。证明：$r(A)+r(B) \leq n$。