

经典电动力学

绪言

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院

hyang@ustc.edu.cn

February 21, 2022

目录

1 一般性资讯

- 教师与助教
- 作业与考试计划

2 绪论

- 为什么学习电动力学？
- 课程概略
- 电动力学理论的出发点

欢迎同学们来到本课堂学习

Classical 电动力学

几句说在课前的话

任课教师信息：

姓名：杨焕雄

电话：18949882795

邮箱：hyang@ustc.edu.cn

教学经历：此次教学是本人第 14 次主讲本科生的经典电动力学，也是第一次尺度较大的教学改革。

课程助教：

① 马文昊, 13956942483, silentassassin@mail.ustc.edu.cn

② 高晶晶, 19155605768, gjj7654321@mail.ustc.edu.cn

教材：

郭硕鸿等, 电动力学 (第三版), 高等教育出版社, 2008 年 6 月.

参考书推荐

- ① L.D.Landau and E.M.Lifshitz, [The Classical Theory of Fields \(场论\)](#), Butterworth-Heinenann, 1980.
- ② K.Lechner, [Classical Electrodynamics, a modern perspective](#), Springer, 2018.
- ③ D.J.Griffiths, [Introduction to Electrodynamics](#), 4rd Edition, Pearson Education Inc., 2013
- ④ M. Chaichian, et al, [Electrodynamics, an intensive course](#), Springer, 2016
- ⑤ F. Scheck, [Classical Field Theory](#), Springer, 2018
- ⑥ A. Zangwill, [Modern Electrodynamics](#), Cambridge, 2012.

作业与考试的计划：

- ① 课程正式开始后，每周会布置若干习题 (习题数目 ≤ 3)，其中有些题目对初学者而言有一定的挑战性.
- ② 作业将作为平时成绩的一部分评分. 建议助教在制定作业成绩评分标准时既要考虑作业是否是独立完成、也要考虑作业的答案是否正确与合理.
- ③ 平时成绩也包括对课堂提问的参与.
- ④ 考试分期中考试 (闭卷) 和期终考试 (开卷) 两次，期终考试或许会包含电动力学教学组的统一试题.
- ⑤ 平时成绩、期中成绩与期终考试卷面成绩在总评成绩中的比重暂定为 20%、20% 和 60%.

提示：

考题的难易程度与作业持平、但不会考平时作业中布置过的习题原题.

教学特点：

自我评价：

- ① 清晰性、准确性和启发性或许可以保证.
- ② 通俗性欠佳,做不到深入浅出.
- ③ 语言能力一般,不会讲故事、不风趣.
- ④ 普通话水平低下,许多汉字的发音不准确. 声音不够洪亮 (请大家尽量集中注意力听讲).

本课程全程使用电子版课件进行教学. 教学课件的学生版会在课堂教学完成后上传到学校教学网上供大家参考.

课件下载网址：

<http://www.bb.ustc.edu.cn>

为什么要学习电动力学？

电动力学就是加强版的电磁学。

同初等电磁学一样，经典电动力学仍是关于宏观物理世界中的一种基本相互作用、即电磁相互作用的学问。

2：既然大家已学过了初等电磁学，为何还要再费时费力地学习经典电动力学？

我的看法如下：

- 初等电磁学与经典电动力学的划分纯粹是人为的，二者的差异仅仅在于侧重点不同。
- 经典电动力学提供了一个洞悉经典物理学理论体系严重缺陷的窗口，使我们了解学习由狭义相对论与量子力学所支撑的现代物理学理论的必要性。
- 体会并初步掌握理论物理学家分析问题、解决问题的思路和方法。

电磁学课程的基本内容：

在电磁学中，我们从学习 Coulomb 定律出发，依次学习或了解了

- ① 静止电荷分布在空间激发静电场的规律：[静电高斯定律](#)、[环路定理](#)。在电荷分布具有很强对称性的前提下能够使用场强叠加原理和高斯定律求解静电场的分布。
- ② 稳恒电流在空间激发静磁场的规律：[Ampere 环路定理](#)、[静磁 Gauss 定律](#)。在电流分布具有足够对称性的前提下能够用 Biot-Savart 定律或 Ampere 环路定理求解静磁场的分布。
- ③ [Faraday 电磁感应定律](#)和[Maxwell 位移电流假设](#)，时变的电、磁场相互激发产生电磁波的机制，电磁波的传播速度等于光速的结论。
- ④ [Maxwell 方程组](#)的积分形式和[Lorentz 力公式](#)。
- ⑤ 介质在电磁场中极化、磁化现象。

电磁学课程的不足：

电磁学作为本科低年级的入门课程，主要是沿着历史发展的脉络，通过介绍实验规律和使用矢量代数、微积分等初等数学工具展开的。

因此，

- ① 所学的求解静电场、静磁场的方法一方面对于电荷、电流分布的对称性有很强的依赖性，另一方面却没有指出这种对称性的物理实质。
- ② 虽然学习了电荷守恒定律，但不了解电荷守恒定律的原因。不了解电磁场是一种规范场、电磁相互作用是一种规范相互作用。
- ③ 对时变电磁场的基本属性和传播规律介绍的很浅，没有涉及电磁波的波动方程及其推迟解。
- ④ 没有涉及 Maxwell 方程组和 Lorentz 力公式的参考系问题，刻意回避了时间和空间不可分割的时空基本属性。
- ⑤ 没有以电磁场为依托介绍相对论性经典场论的现代描写方法、从而不了解对称性在现代物理学前沿研究中至关重要的指导作用。

电动力学的特色：

电动力学针对上述电磁学课程设置的漏洞打了补丁。

一是强化了如下数学工具的使用：

- ① 矢量分析
- ② 数理方程
- ③ 线性代数

从而强化了电磁现象基本规律的描写逻辑和解决问题的能力。

二是通过规范势的引入揭示了电磁场的规范场本性和电磁相互作用传播速度的有限性。建立起了电荷守恒定律与电磁相互作用具有的规范变换不变性之间的联系。

三是直面 Maxwell 方程组的参考系问题，系统地论证了 Einstein 创立“狭义相对论”的必要性、介绍了相对论的时空观。

- 学习电动力学难免要动用若干较高级的数学工具。

教学改革计划：

- 我的前 13 次电动力学教学活动都是采取**归纳法**组织的，若干流行的经典电动力学教材，例如 Jackson, Griffiths, Zangwill 与郭书大抵也都如此。

- 归纳法遵循电磁学发展的历史脉络：

- ① 静电、静磁现象的实验规律
- ② 法拉第电磁感应定律、Maxwell 方程组、时变电磁场及其规范场属性
- ③ 电磁波的传播与辐射电磁场
- ④ 电动力学基本定律的参考系问题，狭义相对论

其优点是反映了物理学是一门实验科学的本质，理论中每一新概念的
出现都伴有实验事实的支撑。从真实的物理学史角度看，电磁相互作用理论的重大进展都是通过归纳法取得的。

- 归纳法的缺点在于它与初等电磁学的讲法基本一致，容易引起审美疲劳。

演绎法

- 实际上也存在着采取组织经典电动力学教学的讲法, 代表作例如有 L.D. Landau, F. Scheck 与 K. Lechner 的著作 (详见前面推荐的参考书清单).
- 演绎法的基本思路是:
 - ① 假设电磁相互作用遵从若干对称性, 如时间均匀性、空间均匀性和各向同性、时间反演、电荷共轭以及空间反演变换下的不变性、特别是洛伦兹变换下的不变性和规范对称性. 当然, 这些对称性都得到了实验的检验与支持.
 - ② 从这些对称性出发构造体系的作用量, 通过最小作用量原理确定体系的动力学方程: Maxwell 方程组与洛伦兹力公式.
 - ③ 通过分析作用量的对称性, 确定电磁相互作用体系具有的各种守恒定律, 并由此确定体系的能量、动量和角动量.
 - ④ 把静电、静磁现象当作时变电磁场的特殊情形处理.

本学期我决定接受班上多数同学的建议, 尝试采取演绎法组织课堂教学、为大家学习经典电动力学营造一个新环境. 让我们用陆游的著名诗句共勉吧:

纸上得来终觉浅, 绝知此事要躬行.

归纳法、演绎法点评：

- 归纳法与演绎法在英语中分别对应于 *induction* 与 *deduction*, 但近年来在物理文献中大家更习惯分别用复合词汇 *bottom-up* 与 *top-down* 指代它们.
- 物理学院的教师大多喜欢使用归纳法组织电动力学课堂教学. 这是有原因的:
 - ① 物理学本质上是实验科学, 物理学史上绝大多数重大进步都是通过归纳法获得的.
 - ② 就历史发展的真实脉络而言, 电动力学的理论体系是几代物理学家提炼实验、不断试错, 逐渐归纳完成的.
 - ③ 归纳法是普通人进行科研活动的不二方法.
 - ④ 演绎法的门槛很高, 它要求使用者开了上帝视角. 具体到电动力学理论, 演绎法要求事先了解电磁相互作用所具有的全部对称性. 否则, 演绎法就会处于画虎不成反类犬的尴尬境地.

- 物理学史上演绎法取得的重大进展寥寥无几, 但 20 世纪几个史诗级的物理学理论是演绎法取得的:

① 广义相对论:

等效原理 \oplus 广义协变原理 \rightsquigarrow 引力的相对论性理论

② 弱电统一理论:

洛伦兹不变性 $\oplus SU(2) \times U(1)_Y$ 局域规范对称性 \rightsquigarrow WS 模型

③ 色动力学:

洛伦兹不变性 $\oplus SU(3)$ 局域规范对称性 \rightsquigarrow 色动力学

但是,

洛伦兹不变性 $\oplus SU(5)$ 局域规范对称性 \rightsquigarrow 大统一理论(失败)

原书第2版

引力与时空

〔美〕H.C.瓦尼安 〔意〕R.鲁菲尼◎著
向守平 冯珑珑◎译



科学出版社

www.sciencep.com

序

Einstein 早在 1916 年就发现了他的引力理论。按理说,这一理论应当是在 20 年之后才会被发现,那时物理学家对于相对论场论和规范不变性才有了清楚的理解。Einstein 对引力本质深刻和早熟的洞察力更多靠的是直觉而不是逻辑。他建立狭义相对论的基础具有令人赞叹的精确性和清晰的可操作性;与之相比,他建立广义相对论的基础却是模糊难解的。正如 Synge 和 Fock 强调过的,就连这一理论的名称也表明一个误解:并没有比狭义相对论更广义的相对论。但是,无论他走过的路多么晦暗,Einstein 的直觉引导他创建了一个美得令人目眩的理论。用 Arthur Koestler 形象化的比喻来说,如果我们把 Copernicus、Kepler 和 Newton 看作是梦游者,他们知道想去哪里,而且在并不完全了解如何去做的情况下设法到达那里,那么 Einstein 就是他们所有人中最伟大的梦游者。

教学互动方面的建议：

- ① 教学过程中将会不断出现一些思考题. 有些是我事先准备的, 有些则是即兴提出来的. 欢迎学有余力的同学就思考题所提出的问题撰写学习心得或者学术论文. 学习心得和学术论文不是必须的作业, 是否参与全凭自愿.
- ② 同学们若愿意与我分享你们对电动力学学习过程中的心得体会, 我欢迎. 我反应较慢, 有的问题可能需要反复思考才能说出符合我真实想法的观点. 所以, 请大家主要以电子版书面来信的方式与我讨论. 来信请把你的见解写成 word 文件或者 latex 文件、请使用共享插件 axMath 在 word 文件里写数学方程.
- ③ 我们的总评成绩不调分. 但是, 提交学习心得或者学术论文的同学将按照见解的深浅获得适当的奖励分直接加到总评成绩中. 获奖名单会事先公示以保持公正.

电动力学的奠基人：

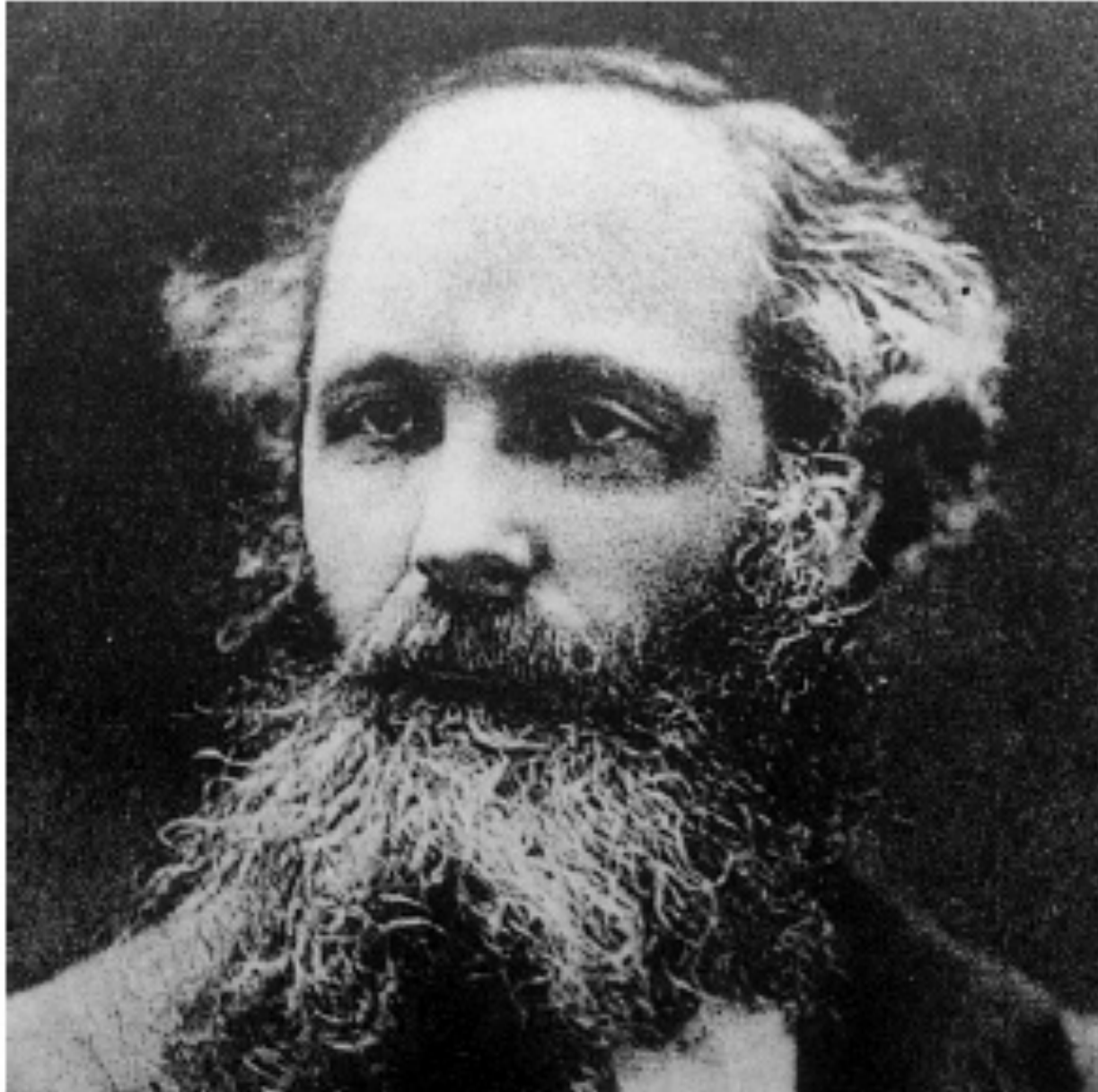
J. C. Maxwell(1831-1879) 被誉为是牛顿之后世界上最伟大的数学物理学家.

他依据库仑、高斯、欧姆、安培、毕奥、萨伐尔、法拉第等前人的一系列发现和实验成果,建立了第一个完整的电磁理论体系,不仅科学地预言了电磁波的存在,而且揭示了光、电、磁现象本质上的统一性,完成了物理学的一次大综合. 这一自然科学的理论成果,奠定了现代的电力工业、电子工业和无线电工业的基础.

描写电磁现象基本规律的 Maxwell 方程组入选改变了人类文明史的 17 个最伟大的方程之列¹.

¹I. Stewart, In Pursuit of the Unknown, Basic Books, 2012.

James Clerk Maxwell, 1831-1879



电动力学的理论基础是 Maxwell 方程组与洛伦兹力公式，它们适合于任意的惯性参考系。

- 积分形式的 Maxwell 方程组几乎是对实验现象的归纳：

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = Q/\epsilon_0, \quad \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0,$$
$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

- 洛伦兹力公式

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

脱胎于静电库仑定律与静磁安培力公式。这里采取了国际单位制。

以上两组方程联合构成了研究经典电动力学问题的出发点。

借助于高等数学中的奥高散度定理与斯托克斯公式,

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_V d^3x \nabla \cdot \mathbf{A}, \quad \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

我们可以把 Maxwell 方程组改写为如下微分形式:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho/\epsilon_0, & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0 \mathbf{j} \end{aligned}$$

让我们从如下问题开始经典电动力学的学习之旅:

- ① 怎么看出电动力学基本方程组适合于任意的惯性参考系?
- ② 基本方程组中蕴藏着哪些对称性?

经典电动力学

Chapter 1. 狭义相对论

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院近代物理系

hyang@ustc.edu.cn

May 6, 2022

1 相对论的实验基础

- 电动力学的参考系问题
- 狭义相对论的实验基础

2 狭义相对论的基本原理

- 间隔不变性
- 洛伦兹变换

3 相对论的时空结构

- 因果律与相互作用的最大传播速度
- 同时性的相对性
- 运动时钟的延缓效应
- 运动尺度的缩短
- 速度、加速度合成法则

4 闵氏空间中的张量

- 欧氏空间中张量的数学定义
- 四维闵氏空间中的张量

参考系问题

电磁现象的基本规律是 Maxwell 方程组和外电磁场之洛伦兹力作用下带电粒子的牛顿第二定律. 真空中, 它们分别表为:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{E} &= \rho / \epsilon_0, & \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} &= \mathbf{0}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0, & \nabla \times \boldsymbol{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} &= \mu_0 \boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

和

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}.$$

需要回答的物理问题是:

- ① 这些方程直接适用于什么参考系?
- ② 若观测者从一个惯性参考系变换到另一个惯性参考系, 上述方程组会不会发生改变? 如何改变?
- ③ 基本电磁场量 \boldsymbol{E} 与 \boldsymbol{B} 如何随参考系的不同选择而改变?

Maxwell 方程组的参考系问题可以换一个角度提问. 从真空中远离电荷电流分布区域的 Maxwell 方程组出发, 可以证明电磁场的基本存在形式是电磁波:

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 B - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0.$$

式中,

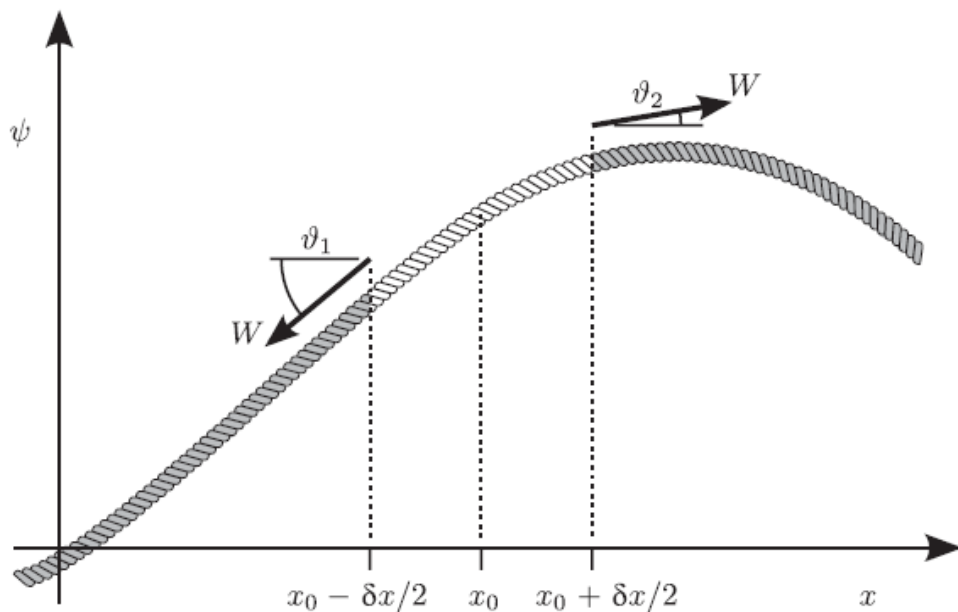
$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ 米/秒}$$

是真空中电磁波的传播速度.

2:

- ① 令人迷惑的是, 为什么 c 是一个常数?
- ② 换言之, $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ 是电磁波相对于哪一个参考系的传播速度?

回眸机械波



考察绳子里传播的机械波. 设绳子的质量线密度为 M , 张力为 W ,

$$\sin \vartheta_1 \approx \tan \vartheta_1 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{x-\delta x/2}$$

则按牛顿第二定律有:

$$M\delta x \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right)_{x_0} = W \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{x+\delta x/2} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{x-\delta x/2} \right]$$

亦即,

$$M \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = W \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

或者等价地,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

式中的 c

$$c = \sqrt{\frac{W}{M}}$$

就是此机械波的波速. 显然, 这里的 c 也是一个常数.

提醒:

机械波波速的常数性并不造成任何逻辑困难. 机械波的传播离不开介质的存在¹, 上述波速即是与介质质心保持相对静止的观测者测得的波速.

¹此例情形下介质即为绳子.

狭义相对论的实验基础

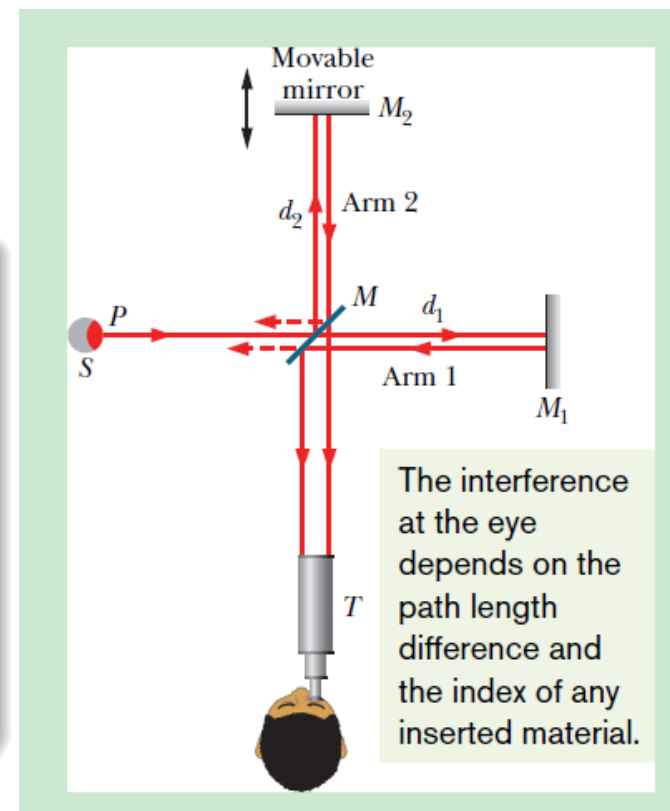
牛顿时空观认为：真空中电磁波的传播速度只有在某个特殊的参考系 (aether) 才等于 c . 若能够测定各个方向上光速的差异, 就可以确定地球相对于 aether 的运动.

数量级估计:

地球绕太阳公转的速率约为 30km/s , 因此, 地球相对于 aether 参考系的运动速度至少应与此具有同一数量级,

$$\frac{v}{c} \sim 10^{-4}$$

Michelson-Morley 实验 (1887) 是测量光速沿不同方向的差异的典型实验.



地球绕太阳的公转速率：

天文学家 Lalande 通过对金星凌日现象的观测，估算出了地球与太阳之间的距离：

$$R \approx 1.5 \times 10^8 \text{ km}$$

所以，地球公转的线速度大小可估算如下²：

$$v = \frac{2\pi R}{T} \approx \frac{2 \times 3.14 \times 1.5 \times 10^8}{360 \times 24 \times 60 \times 60} \approx 30 \text{ km/s}$$

相对于地球而言，太阳更有资格与绝对惯性系 (aether) 保持相对静止。所以，地球相对于以太 (aether) 参考系的速率具有下限：

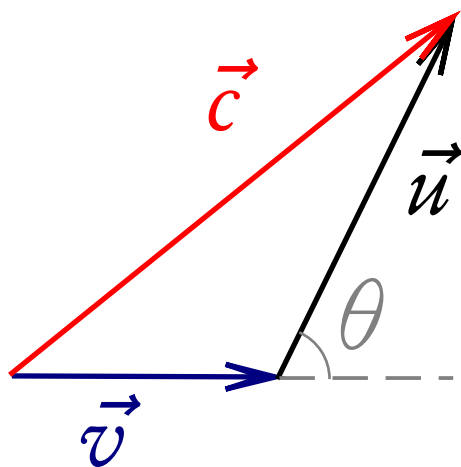
$$v \gtrsim 30 \text{ km/s}$$

²如此，地球人在地球公转轨道上每天走过的路程大约是：

$$S = vt \approx 30 \times 24 \times 60 \times 60 \approx 2.62 \times 10^6 \text{ km}$$

经典的速度合成法则

现在用经典速度合成法则计算 Michelson-Morley 实验中电磁波沿两条光路 $M \rightarrow M_1 \rightarrow M$ 与 $M \rightarrow M_2 \rightarrow M$ 的传播时间. 如图示,



- v 为观测者相对于 aether 的运动速度;
- u 为观测者参考系所测得的光速, 设其与牵连速度 v 之间的夹角为 θ ;
- c 是 aether 参考系中的光速.

按照经典的速度合成法则, 应有: $c = u + v$. 所以,

$$c^2 = u^2 + v^2 + 2uv \cos \theta$$

由此求得观测者所测得的光速的大小为:

$$u = \sqrt{c^2 - v^2 \sin^2 \theta} - v \cos \theta$$

Michelson-Morley 实验

设观测者相对于 aether 参考系的运动速度沿着光路 $M \rightarrow M_1$.
这样, 光线 $M \rightarrow M_1 \rightarrow M$ 的传播时间为:

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2cl}{c^2 - v^2} \approx \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right)$$

而光线 $M \rightarrow M_2 \rightarrow M$ 的传播时间是:

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} \approx \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right)$$

两束光线的光程差为:

$$c(t_1 - t_2) \approx l \frac{v^2}{c^2}$$

把仪器转动 90° , 使两束光位置互换, 理论上预计应该观测到干涉条纹的移动个数是:

$$\Delta N = \frac{2c(t_1 - t_2)}{\lambda} \approx \frac{2l}{\lambda} \frac{v^2}{c^2}$$

否定的实验结果

Michelson-Morley 实验设定：

- ① 利用多次反射技术可以使有效臂长达到 $l \approx 10\text{m}$;
- ② 假定地球相对于 aether 的速度大小与地球的公转速率具有同一量级, 使得: $(v/c)^2 \approx 10^{-8}$;
- ③ 取钠黄光做实验, $\lambda \approx 5 \times 10^{-7}\text{m}$.

如此, 经典理论预计的干涉条纹移动数目是:

$$\Delta N \approx \frac{2l}{\lambda}(v/c)^2 \approx \frac{20 \times 10^{-8}}{5 \times 10^{-7}} = 0.4$$

但是, 实验结果是否定的: $\Delta N \lesssim 0.01$.

- Michelson-Morley 实验实际上表明光速不服从伽利略 (Galileo) 速度合成法则, 光在不同惯性系中的传播速度具有相同的大小.

光速不变假设的实验基础

迄今为止的所有实验,都指出光速的大小与观测者所处的参考系无关,也与光源的运动速度无关:

- Michelson-Morley 实验 (1887).
- Cedarholm 微波激射实验 (1955), $\rightsquigarrow v \lesssim 3 \times 10^{-2} \text{km/s}$
- Isaak 利用穆斯堡尔效应所做的实验 (1970),
 $\rightsquigarrow v \lesssim 5 \times 10^{-5} \text{km/s}$

所以,光速的参考系选择无关性(俗称光速不变)是电磁现象的一条基本规律.

狭义相对论就是在光速不变性实验的基础上建立起来的.



物 理 专 业 经 典 教 材

光 学 (第二版)

母国光 战元龄 编



高等教育出版社
Higher Education Press

第十四章	光的速度	358
§ 14 - 1	概述	358
§ 14 - 2	测定光速的天文学方法	359
§ 14 - 3	测定光速的实验室方法	362
§ 14 - 4	光在介质中的速度 相速和群速	367
* § 14 - 5	运动介质中的光速	370
* § 14 - 6	狭义相对论的概念	374
* § 14 - 7	由狭义相对论得出的一些推论	377
* § 14 - 8	运动坐标系统中的光学与狭义相对论	379

狭义相对论的基本原理

Einstein(1905) 提出了两条相对论的基本假设:

- ① **相对性原理.** 所有惯性系都是等价的, 物理学规律对于所有惯性系都可以表为相同形式.
- ② **光速不变原理.** 真空中的光速相对于任何惯性系均为 c , 光速与光源的运动无关.

相对论时空观:

光速不变性所导致的时空概念与经典时空观之间存在着深刻的矛盾.

所有最基本的时空概念, 如同时性、距离、时间、速度等概念都需要在光速不变性的假设之上重新讨论.

Galileo 变换

牛顿时空观集中反映在惯性参考系的 Galileo 变换中.

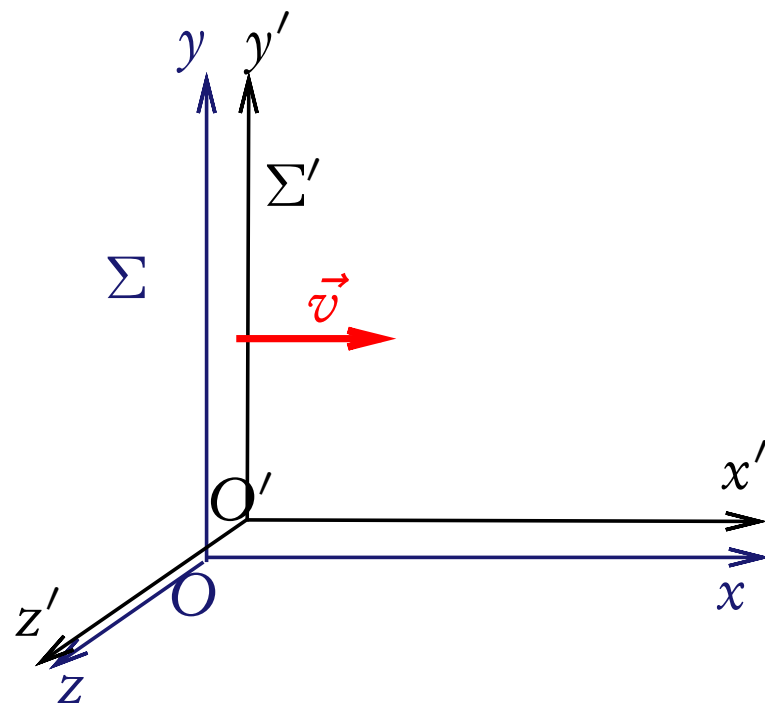
设惯性系 Σ' 相对于另一惯性系 Σ 以速度 v 运动. 建立 Cartesian 直角坐标系, 并选 x 和 x' 轴沿运动方向, Galileo 变换可表为:

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$



牛顿时空观的基本特征是时间与空间的分离. 时间在宇宙中均匀流逝着, 而空间则好像是一个容器, 二者之间没有联系, 也不与物质的运动发生关系.

事件

与牛顿时空观类似,相对论的时空观也集中反映在从一个惯性参考系到另一个惯性参考系的时空坐标变换式里.

这个坐标变换称为 Lorentz 变换.

以下我们将从相对论的基本原理出发建立 Lorentz 变换. 为此,先引入一个新概念: **事件 (event)**. 物质运动可以看作一系列事件的发展过程. 事件可以有各种不同的具体内容,但是它们总是在一定地点于一定时刻发生的.

狭义相对论假定可以用四个 Cartesian 坐标 (t, x^1, x^2, x^3) 表示一个事件³. 或者,

$$x = (x^\mu) = (x^0, x^i) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

式中, $x^0 \equiv ct$. x^μ 为 Cartesian 坐标意味着:

$$-\infty < x^\mu < +\infty, \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

³之所以能使用 Cartesian 坐标,是因为狭义相对论默认的物理时空是不存在引力的四维闵氏 (Minkowski) 平坦空间.

- 同一个事件 P 在惯性系 Σ 上用 $x_P = (x_P^\mu)$ 表达, 但在另一惯性系 Σ' 中就用 $(x_P'^\mu)$ 表达.
- Lorentz 变换就是同一事件在不同惯性系的两组坐标 x^μ 和 x'^μ 之间的联系.

狭义相对论默认的物理时空是内禀曲率为零的四维闵氏平坦空间. 所以, 在狭义相对论理论中,

- ① 时间是均匀的.
- ② 空间既是均匀的, 也是各向同性的.

时空的均匀性意味着同一时空点在不同坐标系的笛卡尔坐标之间的联系只能是线性变换. 证明如下:

- 考虑两个时空 P 与 Q . 设 P 在坐标系 Σ 与 Σ' 中的笛卡尔坐标分别为 x^μ 和 x'^μ , Q 在 Σ 与 Σ' 中的笛卡尔坐标分别为 y^μ 和 y'^μ . 一般情形下,

$$x'^\mu = f^\mu(x), \quad y'^\mu = f^\mu(y).$$

- 此二时空点的时间间隔与空间距离在坐标系 Σ 中为 $x^\mu - y^\mu$, 在另一坐标系 Σ' 中为:

$$x'^\mu - y'^\mu = f^\mu(x) - f^\mu(y)$$

- 时间与空间的均匀性假设意味着不存在有特权的时空点. 所以, 在坐标系 Σ 中重新选取坐标原点,

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + b^\mu, \quad y^\mu \rightarrow y^\mu + b^\mu$$

既不会改变 P 、 Q 两点在 Σ 系中的时空坐标差 $x^\mu - y^\mu$, 也不会改变它们在 Σ' 系中的时空坐标差:

$$x'^\mu - y'^\mu = f^\mu(x) - f^\mu(y) = f^\mu(x + b) - f^\mu(y + b)$$

求此式对 x^ν 的微商,

$$\frac{\partial f^\mu(x)}{\partial x^\nu} = \frac{\partial f^\mu(x + b)}{\partial x^\nu}$$

- 鉴于平移量 b^μ 的任意性, 上式的成立意味着:

$$\frac{\partial f^\mu(x)}{\partial x^\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu$$

是一些独立于时空坐标 x 的常数. 把上式看做一个偏微分方程组, 其通解是:

$$f^\mu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

所以, 时间与空间的均匀性意味着同一时空点在闵氏空间两个不同坐标系之间的笛卡尔坐标只能通过线性变换相联系:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

- 惯性参考系是闵氏空间中一类特殊的坐标系, 其中光速是一个常数. 因此, 期望中的 Lorentz 变换必须是上述线性变换的一个特例.

事件的间隔：

为了计入光速不变原理对时空坐标变换的限制，再引入事件间隔的概念。设两事件 P 与 Q 在惯性系 Σ 中的笛卡尔坐标分别为 x_P^μ 和 x_Q^μ ，则二者的间隔定义为：

$$(x_P - x_Q)^2 \equiv -c^2(t_P - t_Q)^2 + (x_P^1 - x_Q^1)^2 + (x_P^2 - x_Q^2)^2 + (x_P^3 - x_Q^3)^2$$

或者，

$$(x_P - x_Q)^2 = \eta_{\mu\nu} (x_P^\mu - x_Q^\mu) (x_P^\nu - x_Q^\nu)$$

$\eta_{\mu\nu}$ 称为闵氏空间度规张量 η 的笛卡尔分量：

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

上式常简记为：

$$\text{diag}(\eta_{\mu\nu}) = (-1, 1, 1, 1)$$

度规张量 $\eta_{\mu\nu}$ 存在逆张量 $\eta^{\mu\nu}$:

$$\eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho} := \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho} = \delta_{\mu}^{\rho}$$

式中,

$$\eta^{00} = \eta_{00} = -1, \quad \eta^{ij} = \eta_{ij} = \delta_{ij}, \quad \eta^{0j} = \eta_{0j} = 0.$$

- ① 若两事件在同一地点相继发生, 则:

$$(x_P - x_Q)^2 = -c^2(t_P - t_Q)^2 < 0$$

- ② 若两事件同时发生于不同地点, 则:

$$(x_P - x_Q)^2 = (x_P^1 - x_Q^1)^2 + (x_P^2 - x_Q^2)^2 + (x_P^3 - x_Q^3)^2 > 0$$

- ③ 设二事件在惯性系 Σ' 上的坐标分别为 $(x_P'^{\mu})$ 和 $(x_Q'^{\mu})$. 如此, Σ' 系中观察者所测得的事件间隔将是:

$$(x'_P - x'_Q)^2 = \eta_{\mu\nu}(x_P'^{\mu} - x_Q'^{\mu})(x_P'^{\nu} - x_Q'^{\nu})$$

2: $(x_P - x_Q)^2$ 与 $(x'_P - x'_Q)^2$ 之间有何关系?

- 倘若 P, Q 二事件是通过光讯号相联系, 计及光速不变原理, 则有:

$$(x_P - x_Q)^2 = 0, \quad \leftrightarrow \quad (x'_P - x'_Q)^2 = 0.$$

- 因此, 在一般情形下,

$$(x'_P - x'_Q)^2 = f[v, (x_P - x_Q)^2] = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(v) [(x_P - x_Q)^2]^n$$

其中系数 $f_n(v)$ 可以是牵连速度 v 的函数, 且 $f_n(0) = \delta_{n1}$. 只有这样才能保证光讯号的间隔在两个惯性系中均为零.

- 惯性系之间的笛卡尔坐标变换只能是线性变换. 所以,

$$f_n(v) = \sigma(v)\delta_{n1}, \quad \rightsquigarrow \quad (x'_P - x'_Q)^2 = \sigma(v)(x_P - x_Q)^2, \quad \rightsquigarrow \quad \sigma(0) = 1$$

- 二惯性系是平权的. 因此, 交换 Σ 与 Σ' 后上式应修正为:

$$(x_P - x_Q)^2 = \sigma(-v)(x'_P - x'_Q)^2 \rightsquigarrow \sigma(-v)\sigma(v) = 1$$

- 空间的各向同性假设意味着空间中不存在特定的方向. 因此, 比例因子 $\sigma(v)$ 只可能依赖于牵连速度的绝对值,

$$\sigma(v) = \sigma(-v) = \sigma(v)$$

所以:

$$\sigma(v) = \pm 1$$

注意到 $\sigma(0) = 1$ 并计及变换的连续性, 我们有 $\sigma(v) = 1$.

- ① 两个事件的间隔不因惯性系选择的不同而不同,

$$(x'_P - x'_Q)^2 = (x_P - x_Q)^2$$

这个结论称为 **间隔不变性**.

- ① 闵氏空间中两个不同坐标系之间笛卡尔坐标的线性变换 $(\Lambda^\mu{}_\nu, a^\mu)$

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

倘若保持任意两个事件的间隔,

$$(x'_P - x'_Q)^2 = (x_P - x_Q)^2$$

则称其为 Poincare 变换, 或者非齐次的 Lorentz 变换.

- ② $a^\mu = 0$ 情形下的 Poincare 变换称为齐次 Lorentz 变换或简称为 Lorentz 变换, 记作 $\Lambda^\mu{}_\nu$.

因为,

$$\begin{aligned}(x_P'^\mu - x_Q'^\mu) &= \Lambda^\mu{}_\nu (x_P^\nu - x_Q^\nu), & (x_P - x_Q)^2 &= \eta_{\mu\nu} (x_P^\mu - x_Q^\mu) (x_P^\nu - x_Q^\nu), \\ (x'_P - x'_Q)^2 &= \eta_{\mu\nu} (x_P'^\mu - x_Q'^\mu) (x_P'^\nu - x_Q'^\nu)\end{aligned}$$

Lorentz 变换矩阵 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 具有性质:

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}$$

或者等价地,

$$\Lambda^\mu{}_\rho \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma \eta^{\sigma\alpha} = \eta_{\rho\sigma} \eta^{\sigma\alpha} = \delta_\rho^\alpha \quad \rightsquigarrow \quad \Lambda^T \eta \Lambda \eta^{-1} = I$$

赝正交矩阵 $\Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu)$ 的全体在矩阵乘法的意义下形成一个群 $O(1,3)$, 称为 Lorentz 群:

- Lorentz 变换条件显然存在特解

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta_\nu^\mu \quad \rightsquigarrow \quad x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \delta_\nu^\mu x^\nu = x^\mu$$

即单位元是存在的.

- 求 Lorentz 变换性质矩阵形式两端的行列式, 我们有:

$$(\det \Lambda)^2 = 1, \quad \rightsquigarrow \quad \det \Lambda = \pm 1 \neq 0$$

所以逆 Lorentz 变换存在, $\tilde{\Lambda} = (\eta \Lambda \eta^{-1})^T = (\eta^{-1})^T \Lambda^T \eta^T$.

计及度规矩阵及其逆矩阵均是对称矩阵的事实, 我们有:

$$\tilde{\Lambda} = \eta^{-1} \Lambda^T \eta \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{\Lambda} \Lambda = \Lambda \tilde{\Lambda} = I$$

其矩阵元是:

$$\tilde{\Lambda}^{\mu}_{\nu} = \left(\eta^{-1} \Lambda^T \eta \right)^{\mu}_{\nu} = \eta^{\mu\sigma} \left(\Lambda^T \right)_{\sigma}^{\rho} \eta_{\rho\nu} = \eta^{\sigma\mu} \Lambda^{\rho}_{\sigma} \eta_{\nu\rho}$$

亦即,

$$\tilde{\Lambda}^{\mu}_{\nu} = \eta_{\nu\rho} \Lambda^{\rho}_{\sigma} \eta^{\sigma\mu}$$

- 请大家自行检验 Lorentz 变换满足封闭性和结合律.

现在分析 Lorentz 变换的物理内涵. Lorentz 变换满足的性质可以重新表为:

$$1 = (\Lambda^0_0)^2 - \delta_{ij} \Lambda^i_0 \Lambda^j_0, \quad \delta_{ij} = -\Lambda^0_i \Lambda^0_j + \delta_{kl} \Lambda^k_i \Lambda^l_j, \\ 0 = -\Lambda^0_0 \Lambda^0_j + \delta_{ik} \Lambda^i_0 \Lambda^k_j$$

它有如下特解:

$$\Lambda^0_0 = 1, \quad \Lambda^0_i = \Lambda^i_0 = 0, \quad \delta_{kl} \Lambda^k_i \Lambda^l_j = \delta_{ij}. \quad \rightsquigarrow \quad O(3)$$

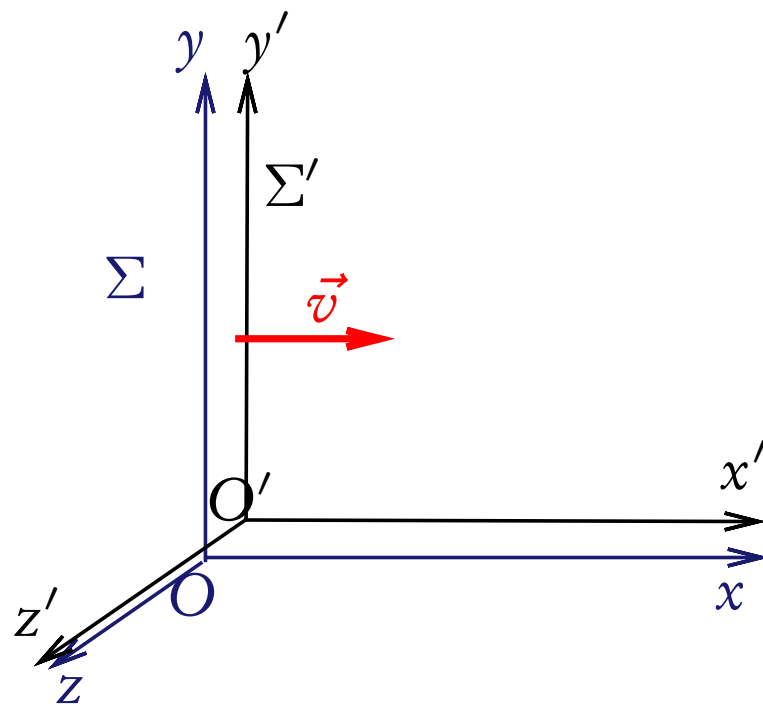
2: 除了空间转动外, 是否还存在非平庸的 Lorentz 变换?

考虑 P 、 Q 两个事件: Q 在惯性系 Σ 中的笛卡尔坐标为 $(0, 0, 0, 0)$, P 在 Σ 中的笛卡尔坐标为 (ct, x^1, x^2, x^3) . 如此, Σ 系中二事件之间的间隔是:

$$s^2 = -(ct)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

现考虑此二事件在另一惯性系 Σ' 中的间隔. 设 Σ' 相对于 Σ 的运动速度为 \boldsymbol{v} , 且在初始时刻 ($t = t' = 0$) 二惯性系重合. 这样, 二事件在 Σ' 系中的笛卡尔坐标分别为 $(0, 0, 0, 0)$ 和 (ct', x'^1, x'^2, x'^3) , 相应的间隔是:

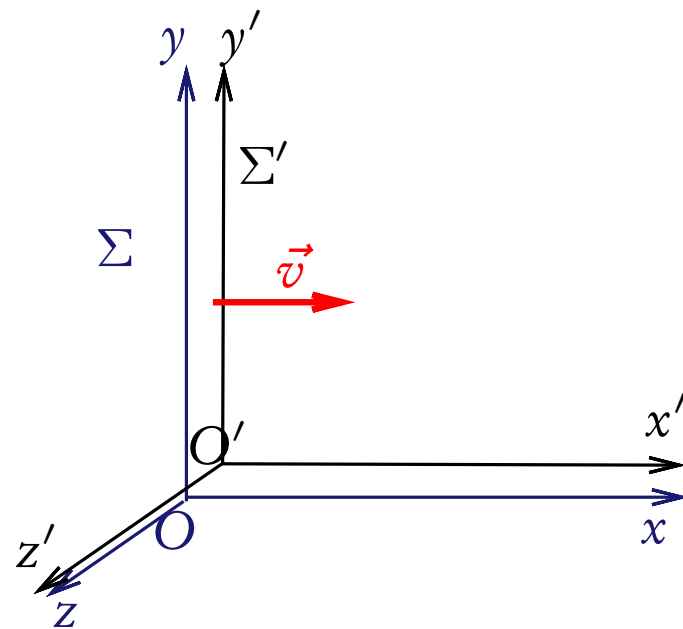
$$s'^2 = -(ct')^2 + (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2$$



洛伦兹推动变换

为简单计, 暂设两坐标系的 $x^1(x'^1)$ 轴都沿 Σ' 相对于 Σ 的运动方向. 此情形下, 期待的 Lorentz 变换具有如下特殊线性形式:

$$\begin{aligned} ct' &= \Lambda^0_0 ct + \Lambda^0_1 x^1 \\ x'^1 &= \Lambda^1_0 ct + \Lambda^1_1 x^1 \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned}$$



- ① 习惯上常把同一时空点在两个惯性参考系之间的坐标变换称为洛伦兹推动变换 (Boost).
- ② 由于 x^1 轴与 x'^1 轴正向相同, $\rightsquigarrow \Lambda^1_1 > 0$.
- ③ 同理, 通常取时间 t 和 t' 的演化箭头方向相同, $\rightsquigarrow \Lambda^0_0 > 0$.

将猜测的 Lorentz 推动变换代入到间隔不变性的表式 $s^2 = s'^2$ 中，则有：

$$\begin{aligned} -(ct)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 &= s'^2 \\ &= s'^2 \\ &= -(ct')^2 + (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 \\ &= -(\Lambda^0_0 ct + \Lambda^0_1 x^1)^2 + (\Lambda^1_0 ct + \Lambda^1_1 x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \\ &= -(ct)^2 [(\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^1_0)^2] + [(\Lambda^1_1)^2 - (\Lambda^0_1)^2] (x^1)^2 \\ &\quad - 2ctx^1 (\Lambda^0_0 \Lambda^0_1 - \Lambda^1_0 \Lambda^1_1) + (x^2)^2 + (x^3)^2 \end{aligned}$$

比较两端得知：

$$\begin{aligned} (\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^1_0)^2 &= 1, & (\Lambda^1_1)^2 - (\Lambda^0_1)^2 &= 1, \\ \Lambda^0_0 \Lambda^0_1 - \Lambda^1_0 \Lambda^1_1 &= 0. \end{aligned}$$

由前两个方程得知：

$$\Lambda^0_0 = \sqrt{1 + (\Lambda^1_0)^2}, \quad \Lambda^1_1 = \sqrt{1 + (\Lambda^0_1)^2}$$

第三个方程改写为：

$$\Lambda^0_1 \sqrt{1 + (\Lambda^1_0)^2} = \Lambda^1_0 \sqrt{1 + (\Lambda^0_1)^2} \quad \rightsquigarrow \quad \Lambda^0_1 = \Lambda^1_0$$

这些系数可以用牵连速度、即 Σ' 与 Σ 之间的相对速度表出。考虑惯性系 Σ' 的 origin O' 。在 Σ 上观测，质点 O' 以速度 v 沿 x^1 轴正方向移动，因此其坐标为 $x^1 = vt$ 。但 O' 在 Σ' 中的坐标始终是 $x'^1 = 0$ 。所以由 Lorentz 推动变换知：

$$0 = \Lambda^1_1 vt + \Lambda^1_0 ct, \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\Lambda^1_0}{\Lambda^1_1} = -v/c = -\beta$$

这里 $\beta \equiv v/c$ 是无量纲的牵连速度。从而：

$$\Lambda^1_1 = \Lambda^0_0 = 1/\sqrt{1 - \beta^2}, \quad \Lambda^1_0 = \Lambda^0_1 = -\beta/\sqrt{1 - \beta^2}$$

所求得的特殊 Lorentz 变换即为：

$$x'^1 = \frac{x^1 - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3, \quad t' = \frac{t - vx^1/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Lorentz 推动变换常表达为矩阵形式

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow X' = \Lambda X$$

式中出现的无量纲参数为：

$$\beta = v/c, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

习惯上常把

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

称为沿 x^1 方向的 Lorentz 推动矩阵. 显然, $\det \Lambda = 1$.

称为沿 x^1 方向 Lorentz 推动矩阵的逆矩阵为：

$$\tilde{\Lambda} = \eta^{-1} \Lambda^T \eta = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det \tilde{\Lambda} = 1$$

沿 x^1 方向的逆 Lorentz 推动变换即为：

$$X = \tilde{\Lambda} X' \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}$$

或者等价地，

$$x^1 = \frac{x'^1 + vt'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad x^2 = x'^2, \quad x^3 = x'^3, \quad t = \frac{t' + vx'^1/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

逆变换也可以直接使用相对性原理、从二惯性系的平权性获得。

点评:

- 若两个惯性系之间的相对速度远小于光速, $v \ll c$, 精确到无量纲牵连速度 $\beta = v/c$ 的一次幂, Lorentz 推动变换近似为:

$$t' = t - \frac{vx^1}{c^2}, \quad x'^1 = x^1 - vt, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3$$

此式称为 Lorentz 推动的低速近似. 也可以称之为无穷小的 Lorentz 推动.

- 若取 $c \rightarrow \infty$, 则 Lorentz 推动退化为 Galileo 变换:

$$t' = t, \quad x'^1 = x^1 - vt, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3$$

所以, Galileo 变换也可以称为是 Lorentz 推动变换的非相对论极限.

- 无穷小的 Lorentz 推动仍是 Lorentz 变换, 它与 Galileo 变换在物理上是有本质差别的.

普适的 Lorentz 推动变换

现在讨论与坐标系⁴选择无关的 Lorentz 变换.

如图示, 事件 (t, x^1, x^2, x^3) 的位置矢量可以在 Cartesian 直角坐标系里表达为:

$$\mathbf{r} = x^1 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j} + x^3 \mathbf{k}$$

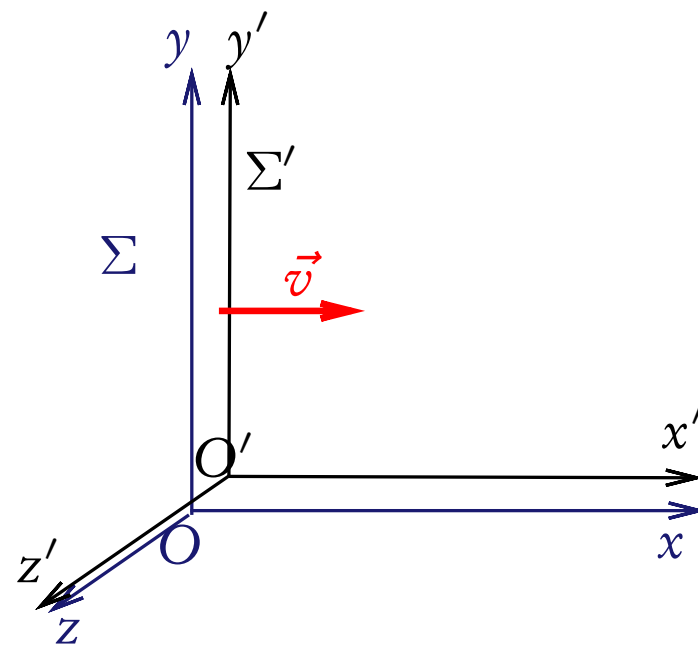
以二参考系相对运动速度 \mathbf{v} 为参考, 可以将 \mathbf{r} 改写为: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$, 这里 $\mathbf{r}_{\parallel} = x^1 \mathbf{i}$ 而 $\mathbf{r}_{\perp} = x^2 \mathbf{j} + x^3 \mathbf{k}$. 前面求得的 Lorentz 推动可重新表为:

$$ct' = \gamma(ct - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r})$$

$$\mathbf{r}'_{\parallel} = \gamma(\mathbf{r}_{\parallel} - \boldsymbol{\beta} ct)$$

$$\mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}$$

式中 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$, 且 $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. $\leadsto \beta^2 = (\gamma^2 - 1)/\gamma^2$.



⁴而非参考系.

因为，

$$r_{\parallel} = \frac{(r \cdot \beta)}{\beta^2} \beta = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} (r \cdot \beta) \vec{\beta}, \quad r_{\perp} = r - r_{\parallel}$$

我们有：

$$\begin{aligned} r' &= r'_{\parallel} + r'_{\perp} = \gamma(r_{\parallel} - \beta ct) + r_{\perp} \\ &= r + (\gamma - 1) \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} (r \cdot \beta) \beta - \gamma \beta ct \\ &= r + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (r \cdot \beta) \beta - \gamma \beta ct \end{aligned}$$

从而，普适的、与坐标系选择无关的 Lorentz 推动变换是：

$$ct' = \gamma(ct - \beta \cdot r), \quad r' = r + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (r \cdot \beta) \beta - \gamma \beta ct$$

逆 Lorentz 推动变换的普适形式为：

$$ct = \gamma(ct' + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}(\mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} + \gamma\boldsymbol{\beta}ct'$$

有了上述与坐标系选择无关的 Lorentz 推动变换及其逆变换，我们可以随意选择两个坐标系将其分量化。例如在二惯性系 Σ 、 Σ' 上均选择 Cartesian 直角坐标系，则可将正反 Lorentz 推动分别表达为：

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad x^{\mu} = \tilde{\Lambda}^{\mu}_{\nu} x'^{\nu} \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{\Lambda}^{\mu}_{\nu} = \eta_{\nu\rho} \Lambda^{\rho}_{\sigma} \eta^{\sigma\mu}$$

- Lorentz 推动中的变换系数为：

$$\Lambda^0_0 = \gamma, \quad \Lambda^0_j = -\gamma\beta_j, \quad \Lambda^i_0 = -\gamma\beta^i, \quad \Lambda^i_j = \delta^i_j + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}\beta^i\beta_j$$

- 逆 Lorentz 推动中的变换系数则为：

$$\tilde{\Lambda}^0_0 = \gamma, \quad \tilde{\Lambda}^0_j = \gamma\beta_j, \quad \tilde{\Lambda}^i_0 = \gamma\beta^i, \quad \tilde{\Lambda}^i_j = \delta^i_j + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}\beta^i\beta_j$$

2: 检验赝正交条件 $\Lambda^\mu{}_\rho \tilde{\Lambda}^\rho{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$.

- 情形 $\mu = \nu = 0$:

$$\Lambda^0{}_\rho \tilde{\Lambda}^\rho{}_0 = \Lambda^0{}_0 \tilde{\Lambda}^0{}_0 + \Lambda^0{}_i \tilde{\Lambda}^i{}_0 = \gamma^2 - \gamma^2 \beta_i \beta^i = \gamma^2(1 - \beta^2) = 1$$

- 情形 $\mu = 0, \nu = j$:

$$\begin{aligned} \Lambda^0{}_\rho \tilde{\Lambda}^\rho{}_j &= \Lambda^0{}_0 \tilde{\Lambda}^0{}_j + \Lambda^0{}_i \tilde{\Lambda}^i{}_j = \gamma^2 \beta_j - \gamma \beta_i \left(\delta_j^i + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \beta^i \beta_j \right) \\ &= \gamma(\gamma - 1) \beta_j - \frac{\gamma^3 \beta_i \beta^i}{\gamma + 1} \beta_j \\ &= \gamma(\gamma - 1) \beta_j - \frac{\gamma(\gamma^2 - 1)}{\gamma + 1} \beta_j = 0 \end{aligned}$$

同理知 $\Lambda^i{}_\rho \tilde{\Lambda}^\rho{}_0 = 0$.

以上验算中我们使用了数学恒等式：

$$\beta^i \beta_i = \beta^2, \quad \gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1 = (\gamma + 1)(\gamma - 1)$$

- 情形 $\mu = i, \nu = j$:

$$\begin{aligned} \Lambda^i{}_{\rho} \tilde{\Lambda}^{\rho}{}_j &= \Lambda^i{}_0 \tilde{\Lambda}^0{}_j + \Lambda^i{}_k \tilde{\Lambda}^k{}_j \\ &= -\gamma^2 \beta^i \beta_j + \left(\delta^i_k + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \beta^i \beta_k \right) \left(\delta_j^k + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \beta^k \beta_j \right) \\ &= -\gamma^2 \beta^i \beta_j + \delta_j^i - \frac{2\gamma^2}{\gamma + 1} \beta^i \beta_j + \frac{\gamma^4 \beta^2}{(\gamma + 1)^2} \beta^i \beta_j \\ &= \delta_j^i + \gamma^2 \left(-1 + \frac{2}{\gamma + 1} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) \beta^i \beta_j \\ &= \delta_j^i \end{aligned}$$

至此，Lorentz 满足一般 Lorentz 变换赧正交条件的论断完全证实。
换言之，Lorentz 推动的确属于洛伦兹变换(群)。

2: 怎样正确解读与洛伦兹变换矩阵相关的矩阵元?

- 鉴于我们把闵氏空间时空点的位置坐标写成了 x^μ 且约定 x^μ 构成了列矩阵

$$X = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

第 μ 行的矩阵元, 洛伦兹变换 $x^\mu \rightsquigarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ 可以理解
为矩阵方程:

$$X \rightsquigarrow X' = \Lambda X$$

式中 Λ 是洛伦兹变换矩阵:

$$\Lambda = (\Lambda^\mu_\nu) \rightsquigarrow \Lambda^\mu_\nu = (\Lambda)^\mu_\nu$$

换言之, 应该把 Λ^μ_ν 解读为洛伦兹变换矩阵 Λ 第 μ 行、第 ν 列的矩阵元.

- 注意到列矩阵的转置是行矩阵,

$$X = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow X^T = (x^0 \quad x^1 \quad x^2 \quad x^3)$$

洛伦兹变换可以等价地表示为 $X^T \rightsquigarrow X'^T = X^T \Lambda^T$. 写成矩阵元形式, 即为:

$$x^\mu \rightsquigarrow x'^\mu = x^\nu \left(\Lambda^T \right)_\nu^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \rightsquigarrow \left(\Lambda^T \right)_\nu^\mu = \Lambda^\mu_\nu$$

所以, 转置洛伦兹变换矩阵 Λ^T 的矩阵元结构是:

$$\Lambda^T = \left[\left(\Lambda^T \right)_\nu^\mu \right]$$

换言之, 也可以把 Λ^μ_ν 按照 $\Lambda^\mu_\nu = \left(\Lambda^T \right)_\nu^\mu$ 解读为 Λ^T 第 ν 行、第 μ 列的矩阵元.

- 或许你有机会遭遇到“矩阵元”

$$\Lambda_{\mu}^{\nu}$$

如何解读它呢？它的确可以诠释为某个矩阵第 μ 行、第 ν 列的矩阵元，但这个矩阵不是洛伦兹变换矩阵 Λ 。如前述， Λ 第 μ 行、第 ν 列的矩阵元是 Λ^{μ}_{ν} 。为了找到这个矩阵，我们使用闵氏空间的度规矩阵和逆矩阵对 Λ_{μ}^{ν} 的指标进行升降：

$$\Lambda_{\mu}^{\nu} \equiv \eta_{\mu\alpha} \Lambda^{\alpha}_{\beta} \eta^{\beta\nu} = \left(\eta \Lambda \eta^{-1} \right)_{\mu}^{\nu}$$

即把 Λ_{μ}^{ν} 定义成为复合矩阵 $\eta \Lambda \eta^{-1}$ 第 μ 行、第 ν 列的矩阵元。

注意到逆洛伦兹矩阵

$$\tilde{\Lambda} = \eta^{-1} \Lambda^T \eta \rightsquigarrow \tilde{\Lambda}^T = \eta \Lambda \eta^{-1}$$

换言之，

$$\Lambda_{\mu}^{\nu} \equiv \left(\tilde{\Lambda}^T \right)_{\mu}^{\nu}$$

即应该把 Λ_{μ}^{ν} 解读为逆洛伦兹变换矩阵之转置矩阵 $\tilde{\Lambda}^T$ 第 μ 行、第 ν 列的矩阵元。

- Λ_{μ}^{ν} 本来并没有定义, 它也并没有出现在洛伦兹变换中. 这个事实值得特别强调. 前页我们通过

$$\Lambda_{\mu}^{\nu} \equiv \eta_{\mu\alpha} \Lambda^{\alpha}_{\beta} \eta^{\beta\nu}$$

给它补充了一个定义. 但实际上是不必要的. 以下我们选择不定义符号 Λ_{μ}^{ν} 以避免出现歧义. 因此, $\tilde{\Lambda}^T$ 的矩阵元应准确地表达为:

$$\left(\tilde{\Lambda}^T\right)_{\mu}^{\nu} = \eta_{\mu\alpha} \Lambda^{\alpha}_{\beta} \eta^{\beta\nu}$$

- 根据逆洛伦兹变换矩阵 $\tilde{\Lambda}$ 的表达式

$$\tilde{\Lambda} = \eta^{-1} \Lambda^T \eta$$

我们很容易弄明白 $\tilde{\Lambda}$ 的矩阵元结构. 很显然, $\tilde{\Lambda}$ 第 μ 行、第 ν 列的矩阵元是:

$$\tilde{\Lambda}^{\mu}_{\nu} \equiv \left(\tilde{\Lambda}\right)^{\mu}_{\nu} = \eta_{\nu\alpha} \Lambda^{\alpha}_{\beta} \eta^{\beta\mu} = \left(\tilde{\Lambda}^T\right)^{\mu}_{\nu}$$

相对论的时空结构

设时空中存在着两个事件. 以第一事件 O 为时空原点 $(0, 0, 0, 0)$ 建立直角坐标系, 使得第二事件 P 的时空坐标为 (t, x^1, x^2, x^3) , 则此 O, P 二事件的间隔是:

$$s^2 = -c^2 t^2 + r^2$$

这里 $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$ 为二事件的空间距离.

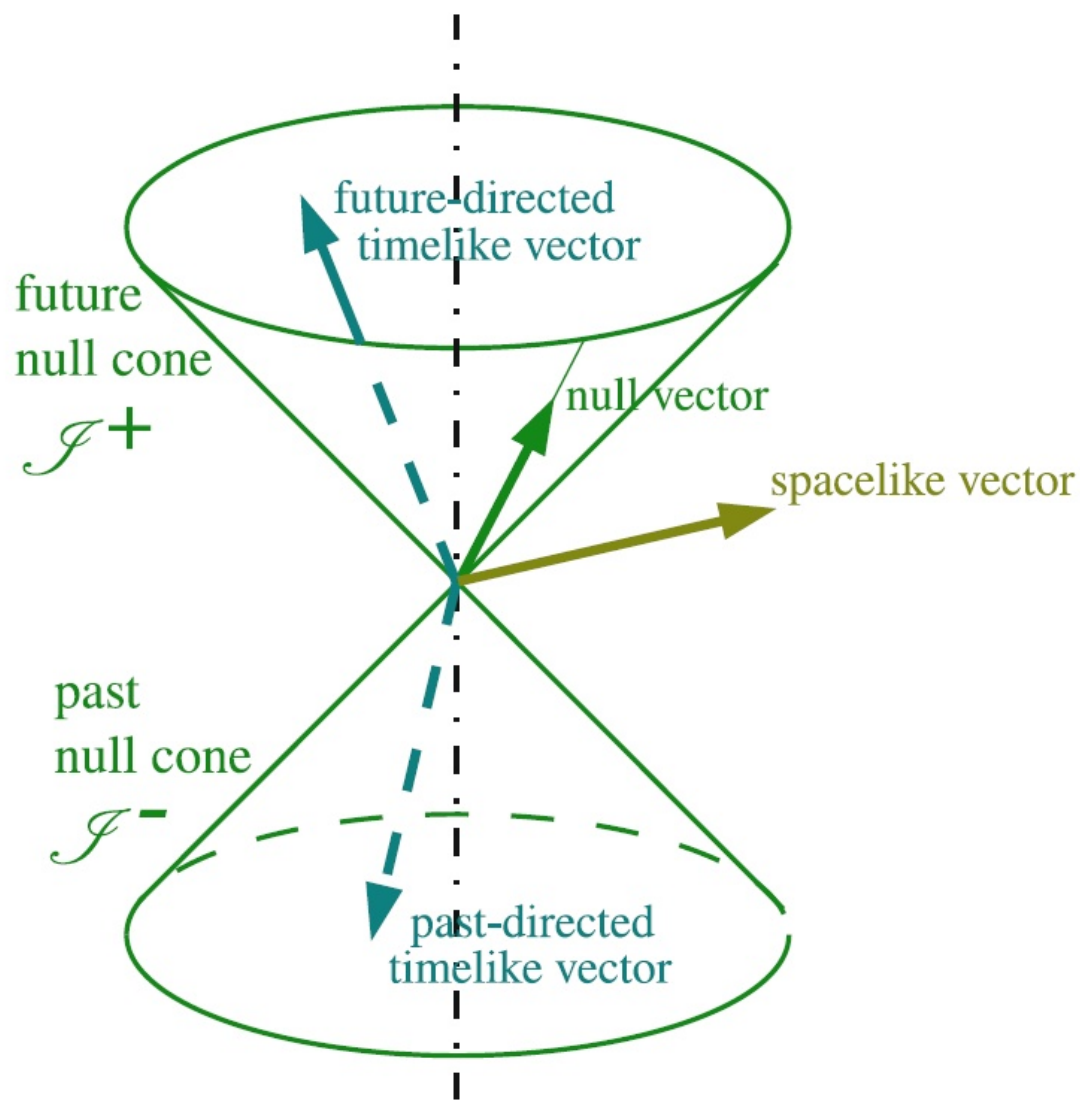
事件的间隔可以有如下三种类型:

- ① 类光间隔: 若二事件可以用光波联系, 则 $r = ct$, $\rightsquigarrow s^2 = 0$.
- ② 类时间隔: 若二事件可用速度为 u ($u < c$) 的作用联系, 则 $r = ut < ct$, $\rightsquigarrow s^2 < 0$.
- ③ 类空间隔: 若二事件的空间距离超过了光波在时间 t 内所能传播的距离, 则 $r > ct$, $\rightsquigarrow s^2 > 0$.

事件的间隔不因参考系的变换而改变. 因此, 上述三种间隔的分类是绝对的, 与参考系的选择无关.

光锥 (Lightcone):

若事件 P 与事件 O 的间隔类光, $s^2 = 0$, 则 $r = ct$, 即 P 点位于一个以 O 点为顶点的锥面上, 这个锥面称为光锥.



因果律与相互作用的最大传播速度

- 二事件之间存在因果联系的前提条件是二者的间隔类时或类光.

若事件 O, P 的间隔类时 (类光)、且在某惯性系中事件 P 处于 O 的上半光锥内 (包括锥面), 则对任意选择的其他惯性系而言, P 也保持在 O 的上半光锥内:

- 事件 P 是事件 O 的绝对未来.
- 事件 O, P 之间可用光波或者其传播速度低于光速的作用相联系. 所以, 事件 O 是因, 事件 P 为果.

因此, 如果不存在超光速的相互作用, 则两事件 O, P 发生因果联系的必要条件是 P 处于 O 的光锥内. 这样, 二事件发生的先后次序在各个参考系中相同, 因而因果关系是绝对的.

- ① 相互作用的最大传播速度是真空中光速.

现在从 Lorentz 变换出发定量地研究二事件之间的因果律.

在惯性系 Σ 上, 以 (t_1, x_1^1) 表示作为原因的第一事件, (t_2, x_2^1) 表示作为结果的第二事件. $\rightsquigarrow t_2 > t_1$.

若这两个事件在另一惯性系 Σ' 上用 $(t'_1, x_1'^1)$ 和 $(t'_2, x_2'^2)$ 表示, 则由 Lorentz 变换知:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - v(x_2^1 - x_1^1)/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

若二事件之间的因果联系是绝对的、不因参考系的选择而改变, 应有: $t'_2 > t'_1$. 从而应有条件:

$$\frac{x_2^1 - x_1^1}{t_2 - t_1} < c^2/v$$

用 u 表示 Σ 系中测得的作用传播速度, $u = (x_2^1 - x_1^1)/(t_2 - t_1)$, 则上述条件可改写为: $uv < c^2$.

固定于参考系 Σ' 上的观测者也可以用来传递作用, 即牵连速度 v 也可以看做一种作用传递速度, 从而在不等式 $uv < c^2$ 中 u, v 的角色是平权的.

所以, $uv < c^2$ 的解是:

$$u \leq c, \quad v < c.$$

结论:

若相互作用的传播速度不大于光速 ($u \leq c$) 且二事件的间隔类时或类光, 则此二事件之间可以存在因果联系.

同时性的相对性

考虑具有类空间隔的二事件.

- ① 若二事件的间隔类空, 则 $r > ct$. 因为相互作用的传播速度不超过光速, 间隔类空的二事件之间不可能用任何方式相互联系, 它们之间没有因果联系, 其发生的先后次序也就失去了绝对性.

现在从 Lorentz 推动出发研究类空间隔. 设参考系 Σ 上二事件的时空坐标为 (t_1, x_1^1) 和 (t_2, x_2^1) . 若二事件间隔类空且 Σ 系上的观测者测得第一事件先于第二事件发生, 则:

$$c \|t_2 - t_1\| < \|x_2^1 - x_1^1\|, \quad t_1 < t_2.$$

变换到另一惯性系 Σ' 上, 由 Lorentz 推动变换知:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - (x_2^1 - x_1^1)v/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

若 Σ' 相对于 Σ 的速度 v 足够大, 则我们的约定 $t_2 > t_1$ 和类空间隔不等式 $c|t_2 - t_1| < |x_2^1 - x_1^1|$ 仍允许存在如下不等式:

$$0 < t_2 - t_1 \leq \frac{v}{c} \cdot \frac{|x_2^1 - x_1^1|}{c} < \frac{|x_2^1 - x_1^1|}{c}$$

回忆所涉及的 Lorentz 推动,

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - (x_2^1 - x_1^1)v/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

我们看到, 若上列不等式成立则必有:

$$t'_2 \leq t'_1$$

即对于 Σ' 系中的观测者而言, 第二事件是先于 (或同时于) 第一事件发生的.

这样的两个事件自然不会有因果联系. 其时间次序的先后或同时, 都没有绝对的意义, 因参考系的选择而不同.

运动时钟的延缓

现在聚焦狭义相对论所预言的典型运动学效应. 第一个要考虑的问题是:

2: 若在不同惯性系中观测同一物理过程, 观测者测得的过程持续时间之间有何联系?

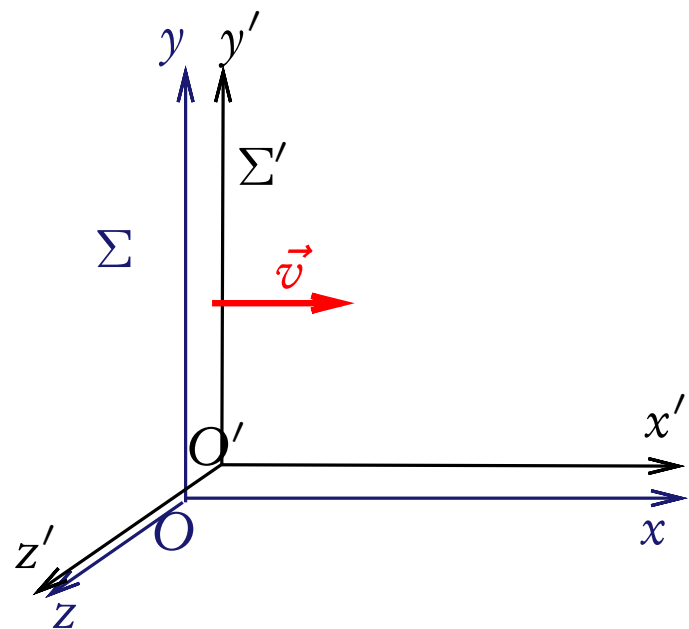
设某物理体系内部相继发生两事件. 惯性系 Σ' 是此体系的自身参考系, 即体系相对于 Σ' 始终保持静止状态:

- ① 在 Σ' 中, 两事件发生在同一地点, 即 $r'_1 = r'_2$.
- ② 在 Σ' 中观测到两事件发生的时刻分别为 t'_1 和 t'_2 , 相应的时间为 $\Delta\tau = t'_2 - t'_1$.
- ③ 体系的自身参考系只有一个, 对任一物理过程而言, $\Delta\tau$ 是唯一的. 通常称 $\Delta\tau$ 为该物理过程的固有时.

所以, 两事件的间隔是:

$$s^2 = -c^2(\Delta\tau)^2$$

现在实验室参考系 Σ 中观测. 设体系以速度 v 相对于 Σ 做匀速直线运动, 则在 Σ 看来, 上述二事件既发生于不同时刻 t_1 和 t_2 , 也发生于不同的地点.



按照逆 Lorentz 推动 $ct = \gamma(ct' + \beta \cdot r')$:

$$\Delta t := (t_2 - t_1) = \gamma \left[(t'_2 - t'_1) + \frac{\beta}{c} \cdot (r'_2 - r'_1) \right] = \gamma \Delta \tau$$

即:

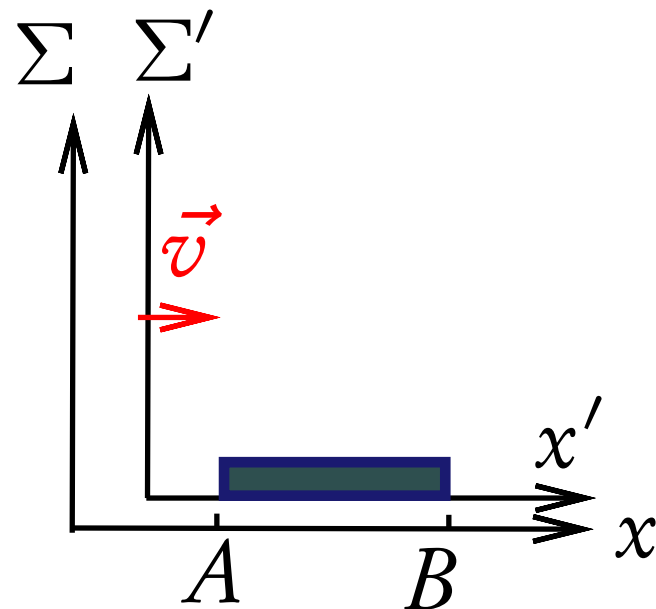
$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

显然, $\Delta t > \Delta \tau$. 运动物体上发生的物理过程比起静止物体的同一过程而言, 时间延缓了. 这就是相对论的时间延缓效应.

运动尺度的缩短

狭义相对论的另一典型运动学效应涉及比较不同惯性系中对同一物体长度的测量.

如图示, 设一把直尺相对于惯性系 Σ 以速度 v 沿 x^1 轴正向运动. 在 Σ 系中, 若直尺后端经过 A 点 (第一事件) 与其前端经过 B 点 (第二事件) 同时发生, 则 A, B 两点在 x^1 轴上坐标差的绝对值就定义为 Σ 系中测得的直尺长度: $L = x_2^1(t) - x_1^1(t)$.



以 Σ' 表示直尺自身参考系. 直尺前后两端在 x'^1 轴上坐标差的绝对值对这把直尺而言是唯一的,

$$L_0 := x_2'^1 - x_1'^1$$

L_0 称为直尺的固有长度.

由 Lorentz 推动变换知：

$$L_0 = x_2'^1 - x_1'^1 = \gamma (x_2^1 - vt_2) - \gamma (x_1^1 - vt_1) = \gamma [x_2^1(t) - x_1^1(t)] = \gamma L$$

即运动直尺的长度与其固有长度相比缩短了：

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

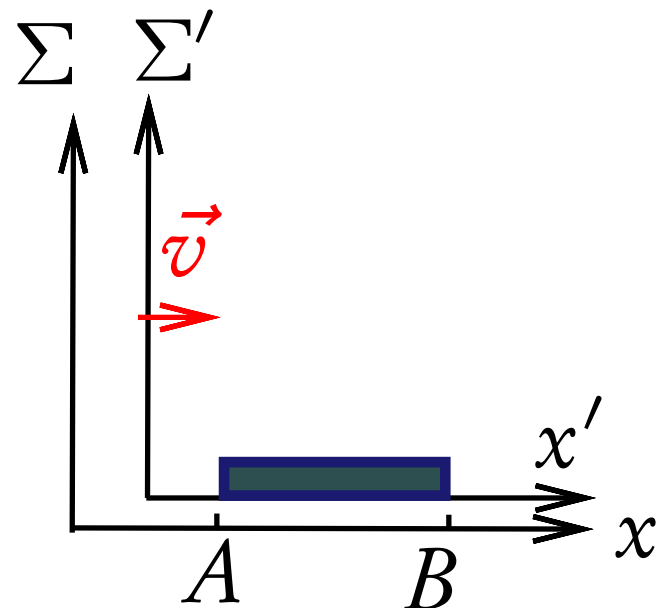
提醒：

- ① 时间延迟效应与尺度缩短效应是相关的。
- ② 二者都是运动着的物体相互之间时空关系的客观反映，并不是观测者的主观臆测。

作为时间延缓与尺度缩短效应相关性的一个验证，下面我们尝试从前者出发导出后者。

如前述, 在实验室参考系 Σ 中, 直尺以速度 v 沿 x^1 轴正向运动. 考虑如下两个事件:

- ① 直尺右端在 t_1 时刻到达坐标为 x_1^1 的 A 点.
- ② 直尺左端在 $t_1 + \Delta t$ 时刻到达 A 点.



从 Σ 系观测, 直尺左端到达 A 点的同时, 其右端到达坐标为 x_2^1 的 B 点. 于是, Σ 系观测者测得的直尺长度为:

$$L = x_2^1(t_1 + \Delta t) - x_1^1(t_1 + \Delta t) = v\Delta t, \quad \rightsquigarrow \Delta t = \frac{L}{v}$$

2: 怎样理解 Δt ?

上述二事件发生于同一个空间点 (A 点). 所以, Δt 是联系它们的物理过程的固有时.

Σ' 系观点:

对于直尺自身系 Σ' 中的观测者而言, 固定在 Σ 系上的质点 A 沿 x' 轴负方向以速度 v 做匀速直线运动. 前述二事件应该重新表达为:

- ① 第一事件是质点 A 在 t_1' 时刻到达直尺右端.
- ② 第二事件是质点 A 在 $t_1' + \Delta t'$ 时刻到达直尺左端.

所以,

$$\Delta t' = \frac{L_0}{v}$$

根据运动时钟的延迟效应, $\Delta t' = \gamma \Delta t$. 即:

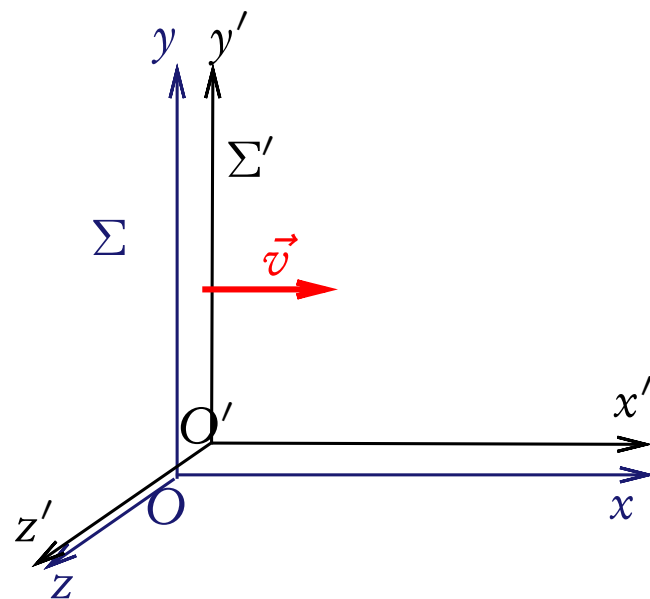
$$L_0/v = \frac{L/v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{L = L_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

相对论的速度合成法则

设某质点在两惯性系 Σ 和 Σ' 中的时空坐标分别为 (t, \mathbf{r}) 和 (t', \mathbf{r}') , 则其相对于 Σ 与 Σ' 的速度分别是:

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}.$$



Q: \mathbf{u}' 与 \mathbf{u} 如何联系?

回忆普适的 Lorentz 推动变换:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} - \gamma \boldsymbol{\beta} ct \\ t' &= \gamma (t - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r} / c) \end{aligned}$$

求此二式对 t 的导数, 并注意到牵连速度 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ 是常矢量, 得:

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{u} + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}c$$

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u}/c)$$

Σ' 系中观测者测得的质点速度是：

$$\vec{u}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}$$

显然，它可以通过以上二式相除获得：

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}c}{\gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u}/c)}$$

这就是相对论的速度合成法则.

注意到：

$$u_{\parallel} = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} (u \cdot \beta) \beta \quad \rightsquigarrow \quad (u \cdot \beta) \beta = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} u_{\parallel}, \quad u = u_{\parallel} + u_{\perp}$$

速度合成法则还可以更直观地写为：

$$u'_{\parallel} = \frac{u_{\parallel} - \beta c}{1 - \beta \cdot u/c}, \quad u'_{\perp} = \frac{u_{\perp}}{\gamma (1 - \beta \cdot u/c)}$$

其逆变换式如下：

$$u_{\parallel} = \frac{u'_{\parallel} + \beta c}{1 + \beta \cdot u'/c}, \quad u_{\perp} = \frac{u'_{\perp}}{\gamma (1 + \beta \cdot u'/c)}$$

- ① 倘若 $\beta \ll 1$ 且 $|u| \ll c$ ，精确到 $\beta = v/c$ 的一次幂，速度合成公式近似为：

$$u'_{\parallel} \approx u_{\parallel} - v, \quad u'_{\perp} \approx \vec{u}_{\perp}.$$

这正是经典力学中的 Galileo 速度合成法则。

2: 验证真空中的光速不因惯性系的不同选择而改变其大小.

设在 Σ 系中测得的光波传播方向的单位矢量是 \boldsymbol{n} , 使得:
 $\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{n}$. 这样, 按照相对论的速度合成法则, 另一惯性系 Σ' 中测得的光速应为 $\boldsymbol{u}' = c\boldsymbol{n}'$,

$$\boldsymbol{n}' = \frac{1}{\gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n})} \left[\boldsymbol{n} - \gamma\boldsymbol{\beta} + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{\beta} \right].$$

现计算 \boldsymbol{n}' 的大小:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{n}' &= \frac{1}{\gamma^2(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n})^2} \left[1 + \gamma^2\boldsymbol{\beta}^2 + \frac{\gamma^4\boldsymbol{\beta}^2}{(\gamma + 1)^2} (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n})^2 - 2\gamma(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\gamma^2}{\gamma + 1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n})^2 - 2\frac{\gamma^3\boldsymbol{\beta}^2}{\gamma + 1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n}) \right] \end{aligned}$$

注意到 $\boldsymbol{\beta}^2\gamma^2 = \gamma^2 - 1$, 化简上式知 $\boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{n}' = 1$, 即 \boldsymbol{n}' 也是一个单位矢量. 故惯性系 Σ' 测得的光速仍为 c .

相对论的加速度合成法则

与牛顿力学相同, 相对论力学中质点的加速度仍然定义为其速度的时间导数. 所以, 质点相对于惯性系 Σ 和 Σ' 的加速度分别是:

$$w = \frac{du}{dt}, \quad w' = \frac{du'}{dt'}.$$

通过计算速度合成法则求 u'

$$u' = \frac{u + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(u \cdot \beta)\beta - \gamma\beta c}{\gamma(1 - \beta \cdot u/c)}$$

对 Σ 系中时间参数 t 的导数, 可得:

$$\begin{aligned} \frac{du'}{dt} &= \frac{w + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(w \cdot \beta)\beta}{\gamma(1 - \beta \cdot u/c)} - \left[\frac{u + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(u \cdot \beta)\beta - \gamma\beta c}{\gamma(1 - \beta \cdot u/c)^2} \right] (-\beta \cdot w/c) \\ &= \frac{1}{\gamma^2(1 - \beta \cdot u/c)^2} \left[w - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta \times (\beta \times w) + \frac{\gamma}{c}\beta \times (u \times w) \right] \end{aligned}$$

注意到

$$u' = \frac{du'}{dt'} = \frac{\frac{du'}{dt}}{\frac{dt'}{dt}}, \quad \frac{dt'}{dt} = \gamma(1 - \beta \cdot u/c)$$

我们有：

$$w' = \frac{1}{\gamma^3(1 - \beta \cdot u/c)^3} \left[w - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \beta \times (\beta \times w) + \frac{\gamma}{c} \beta \times (u \times w) \right]$$

这就是相对论的加速度合成法则。它的反变换式如下：

$$w = \frac{1}{\gamma^3(1 + \beta \cdot u'/c)^3} \left[w' - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \beta \times (\beta \times w') - \frac{\gamma}{c} \beta \times (u' \times w') \right]$$

- ① 低速近似下, $\beta \ll 1$, $|u| \ll c$, 质点的加速度将不依赖于惯性系的选择：

$$w' \approx w$$

这正是牛顿力学中的情形。

瞬时自身系：

- ① 倘若取 Σ' 为粒子的瞬时自身参考系，则有 $u' = 0$ ，但 $w' \neq 0$ 。

倘若粒子以速度 u 相对于实验室参考系 Σ 运动， $\beta = u/c$ 。如此，实验室系中测得的粒子加速度 w 与粒子瞬时自身系中的加速度 w' 之间的关系为：

$$w = \frac{1}{\gamma^3} \left[w' - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \beta \times (\beta \times w') \right]$$

- 若 $w' \parallel \beta$,

$$w = \frac{w'}{\gamma^3} = \left[1 - (u/c)^2 \right]^{\frac{3}{2}} w' \quad \rightsquigarrow w \parallel u$$

即粒子相对于 Σ 系做加速直线运动。

- 若 $w' \perp \beta$,

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{1}{\gamma^3} \left[w' - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \beta \times (\beta \times w') \right] \\
 &= \frac{1}{\gamma^3} \left[w' - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \beta (\beta \cdot w') + \frac{\gamma^2 \beta^2}{\gamma + 1} w' \right] \\
 &= \frac{1}{\gamma^3} \left[w' + \frac{\gamma^2 \beta^2}{\gamma + 1} w' \right] = \frac{w'}{\gamma^2}
 \end{aligned}$$

亦即：

$$w = \left[1 - (u/c)^2 \right] w' \quad \rightsquigarrow \quad w \perp u$$

若设 $u = u\hat{u}$, 此处用单位矢量 \hat{u} 表示速度 u 的方向, 我们有:

$$w = \dot{u}\hat{u} + u\dot{\hat{u}}$$

$w \perp u$ 意味着 $\dot{u} = 0$, 即 Σ 系中的观测者认识到粒子的速率不随时间改变, 粒子作匀速曲线运动. 若 w 进一步赋值非常矢量, 则 Σ 系中的观测者将观测到粒子作匀速圆周运动.

物理量的显示协变性

我们已经学习了 Lorentz 变换:

$$x^\mu \rightsquigarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma = \eta_{\rho\sigma}$$

特别是惯性参考系之间的 Lorentz 推动变换:

$$t' = \gamma(t - \beta \cdot r/c)$$
$$r' = r + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}(r \cdot \beta)\beta - \gamma\beta ct$$

现在我们有条件贯彻狭义相对论的第二条假设了, 即考察候选的“物理学规律”是否具有惯性参考系选择的无关性.

- ① 当务之急的事情是了解各个具体的物理量在 Lorentz 变换下如何变换.
- ② Lorentz 变换表现为四维闵氏空间中的赝转动:

$$X \rightsquigarrow X' = \Lambda X, \quad \tilde{\Lambda} = \eta^{-1} \Lambda^T \eta$$

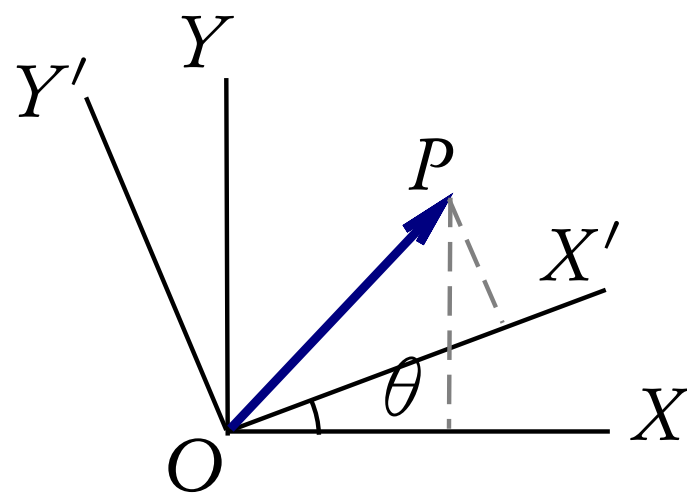
$\tilde{\Lambda}$ 是 Lorentz 变换矩阵 Λ 的逆矩阵, $\tilde{\Lambda} \neq \Lambda^T$.

三维欧氏空间中的转动

鉴于 Lorentz 变换非常类似于欧氏空间中的转动, 我们首先对三维欧氏空间中的转动做一简单复习、并讨论一下物理量按照其在转动变换下的性质所进行的分类.

先看二维平面上的转动, 设坐标系 S' 相对于 S 转了一个角 θ , 平面上的点 P 在新旧坐标系中的坐标分别为 (x', y') 与 (x, y) . 转动前后 P 点位置坐标之间的关系是:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta\end{aligned}$$



① 显见, 转动变换的特点是保持 OP 矢量的长度不变:

$$\|OP\|^2 = x^2 + y^2 = (x')^2 + (y')^2$$

现在考虑三维欧氏空间的转动.

设 P 为三维欧氏空间 \mathbb{E}_3 中的一点, 其在笛卡尔直角坐标系 S 中的坐标为 (x^1, x^2, x^3) . P 点相对于原点 $O(0, 0, 0)$ 的位置矢量为:

$$\boldsymbol{r} = x^i \boldsymbol{e}_i$$

- 若在 \mathbb{E}_3 中建立另一笛卡尔直角坐标系 S' , 使得 P 点在其中的位置坐标为 (x'^1, x'^2, x'^3) 且 $\boldsymbol{r} = x'^i \boldsymbol{e}'_i$, 则这两组坐标之间一般是通过线性变换相联系:

$$x'^i = a^i_j x^j + b^i$$

- 倘若此变换保持新旧坐标系具有同一坐标原点 ($\rightsquigarrow b^i = 0$) 且保持 P 点相对于原点的位置矢量的长度不变:

$$x'^i x'_i = x^i x_i \equiv \delta_{ij} x^i x^j$$

则称此线性变换为转动 (Rotation).

- ① 倘若采取笛卡尔坐标, 欧氏空间 \mathbb{E}_3 中两点之间的距离 (平方) 表达为:

$$\|r_P - r_Q\|^2 = (x_P^1 - x_Q^1)^2 + (x_P^2 - x_Q^2)^2 + (x_P^3 - x_Q^3)^2$$

换言之,

$$\|r_P - r_Q\|^2 = \delta_{ij} (x_P^i - x_Q^i) (x_P^j - x_Q^j)$$

由此知 \mathbb{E}_3 的度规矩阵为单位矩阵, $g = (\delta_{ij})$. \mathbb{E}_3 的逆度规矩阵实际上也是单位矩阵

$$g^{-1} = (\delta^{ij}) \quad \rightsquigarrow \quad \textcolor{red}{g} g^{-1} = g^{-1} g = \textcolor{red}{I} \quad \Leftarrow \textcolor{red}{I} = (\delta_j^i)$$

或者写成矩阵元形式:

$$\textcolor{red}{\delta_{ij} \delta^{jk} = \delta^{kj} \delta_{ji} = \delta_i^k}$$

- ② 可以在 \mathbb{E}_3 中引入下指标的笛卡尔坐标:

$$x_i \equiv \delta_{ij} x^j \quad \rightsquigarrow \quad x^i = \delta^{ij} x_j$$

按照保持位置矢量长度不变的要求, 转动变换 $x'^i = a^i_j x^j$ 的系数 a^i_j 须满足如下条件:

$$x^i x_i = x'^i x'_i = \delta_{ij} a^i_k a^j_l x^k x^l \quad \rightsquigarrow \quad \delta_{ij} a^i_k a^j_l = \delta_{kl}$$

或者等价地,

$$\tilde{a}^l_i a^i_k = \delta^l_k \quad \Leftarrow \quad \tilde{a}^l_i \equiv \delta_{ij} a^j_k \delta^{kl}$$

若将线性变换 $x'^i = a^i_j x^j$ 写成矩阵方程 $X' = AX$, 这里,

$$X' = \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

我们看到:

$$a^i_j = (A)^i_j \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{a}^l_i = (g)_{ij} (A)^j_k (g^{-1})^{kl} = (gAg^{-1})^l_i$$

换言之,

$$\tilde{a}^l{}_i = \left(\tilde{A}\right)^l{}_i = \left(\tilde{A}^T\right)_i{}^l \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{A} \equiv g^{-1}A^Tg$$

进而可以把转动变换条件 $\tilde{a}^l{}_i a^i{}_k = \delta^l_k$ 表为矩阵方程:

$$\tilde{A}A = I \quad \rightsquigarrow \quad A^{-1} = \tilde{A} = g^{-1}A^Tg \approx A^T$$

- ① 满足这个条件的矩阵 A 称为正交矩阵, 相应的变换称为正交变换. 显见, $\det A = \pm 1$.
- ② 对于真实的空间转动而言, $\det A = 1$.
- ③ 可以把空间转动 $X \rightsquigarrow X' = AX$ 等价地重新表达为

$$gX \rightsquigarrow gX' = gAX = gAg^{-1}gX$$

亦即:

$$(gX')^T = (gX)^T g^{-1}A^Tg = (gX)^T \tilde{A}$$

注意到：

$$(gX)^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

上式所示的转动变换可以显示地写为：

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \tilde{A}$$

其矩阵元形式是：

$$x_i \rightsquigarrow x'_i = x_l \left(\tilde{A} \right)^l_i = x_l \tilde{a}^l_i$$

值得强调的是：

- 虽然 $x_i = \delta_{ij} x^j$ 在取值上等同于 x^i ，但二者在空间转动下的变换性质完全不同。
- 鉴于 \tilde{a}^l_i 的定义，

$$\tilde{a}^l_i = \delta_{ij} a^j_k \delta^{kl}$$

变换式 $x_i \rightsquigarrow x'_i = x_l \tilde{a}^l_i$ 和 $x^i \rightsquigarrow x'^i = a^i_j x^j$ 在几何内涵上完全一致。

物理量按空间转动性质的分类

物理量常常分类为标量、矢量和高阶张量等. 这种分类本质上是根据物理量在三维欧氏空间转动

$$x^i \rightsquigarrow x'^i = a^i_j x^j, \quad \tilde{a}^l_i a^i_k = \delta^l_k, \quad \det(a^i_j) = \det(\tilde{a}^i_j) = 1$$

下的变换性质规定的 ($\tilde{a}^l_i = \delta_{ij} a^j_k \delta^{kl}$):

- 若某物理量, 例如 u , 它仅有 1 个分量, 在坐标系转动时此分量保持不变,

$$u \rightsquigarrow u' = u$$

则称其为标量.

- 若某物理量, 例如 V , 它具有 3 个独立分量 (v^1, v^2, v^3), 在坐标系转动时其分量 v^i 与位置矢径的分量 x^i 具有相同的变换法则:

$$v^i \rightsquigarrow v'^i = a^i_j v^j$$

则称 V 为 \mathbb{E}_3 中的矢量、 v^i 为矢量 V 的逆变分量.

- 考虑矢量 V , 倘若它的 3 个独立分量 (v_1, v_2, v_3) , 在坐标系转动时的变换法则为:

$$v_i \rightsquigarrow v_i' = v_j \tilde{a}^j_i$$

则称 v_i 为矢量 V 的协变分量.

- ① 矢量 V 的协变分量与逆变分量之间的关系是:

$$v_i = \delta_{ij} v^j, \quad v^i = \delta^{ij} v_j$$

根据 $v'^i = a^i_j v^j$ 并注意到 δ^{ij} 是转动变换下的不变张量, 我们有:

$$v_i \rightsquigarrow v_i' = \delta_{ij}' v'^j = \delta_{ij} a^j_k v^k = \left(\delta_{ij} a^j_k \delta^{kl} \right) v_l = v_l \tilde{a}^l_i$$

- ② x^j 与 x_i 分别称为位置矢量 r 的逆变分量和协变分量. 二者的关系是 $x^j = \delta^{ij} x_j$ 或者 $x_i = \delta_{ij} x^j$.
- ③ 两个矢量 a 与 b 的点乘运算定义为:

$$a \cdot b \equiv a^i b_i = a_i b^i = \delta_{ij} a^i b^j$$

点乘服从交换律, $a \cdot b = b \cdot a$, 其结果是标量.

- 在欧氏空间 \mathbb{E}_3 中建立笛卡尔直角坐标系, 引入坐标轴方向的单位基矢 e_i 使得

$$V = v^i e_i \quad \rightsquigarrow \quad (e_j)^i = \delta_j^i \quad \Leftarrow \quad e_j = \delta_j^i e_i = (e_j)^i e_i$$

我们看到两个单位基矢之间的标量积恰好给出了 \mathbb{E}_3 度规矩阵的矩阵元:

$$e_i \cdot e_j = \delta_{kl} (e_i)^k (e_j)^l = \delta_{kl} \delta_i^k \delta_j^l = \delta_{ij}$$

由此推论:

$$V \cdot e_i = v^m e_m \cdot e_i = v^m \delta_{im} = v_i \quad \rightsquigarrow \quad v_i = V \cdot e_i$$

- 也可以在 \mathbb{E}_3 中定义两个矢量的矢量积、特别是笛卡尔坐标系中基矢之间的矢量积:

$$e_i \times e_j \equiv \epsilon_{ijk} e^k \quad \rightsquigarrow \quad a \times b = \epsilon_{ijk} e^k a^i b^j$$

式中 e^i 是与基矢 e_i 相关联的所谓余基矢:

$$e^i \equiv \delta^{im} e_m \quad \rightsquigarrow \quad V = v^i e_i = v_i e^i$$

ϵ_{ijk} 称为 Levi-Civita 全反对称符号,

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & (ijk) \text{ 形成 } (123) \text{ 的偶排列;} \\ -1, & (ijk) \text{ 形成 } (123) \text{ 的奇排列;} \\ 0, & \text{其他情形.} \end{cases}$$

或者等价地,

$$\epsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_i^1 & \delta_i^2 & \delta_i^3 \\ \delta_j^1 & \delta_j^2 & \delta_j^3 \\ \delta_k^1 & \delta_k^2 & \delta_k^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_i^1 & \delta_j^1 & \delta_k^1 \\ \delta_i^2 & \delta_j^2 & \delta_k^2 \\ \delta_i^3 & \delta_j^3 & \delta_k^3 \end{vmatrix}$$

所以 $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{jik}$, 但 $\epsilon_{ijk} \delta^{ij} = 0$.

- 若某物理量 T , 它具有 3^{n+m} 个独立分量 $T_{j_1 j_2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_m}$. 在坐标系转动时其分量的每一个上指标都与位置矢径逆变分量 x^i 有相同的变换法则, 每一个下指标都与位置矢径协变分量 x_i 有相同的变换法则:

$$T_{j_1 j_2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_m} \rightsquigarrow T_{j_1 j_2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_m} = a_{k_1}^{i_1} \cdots a_{k_m}^{i_m} T_{l_1 l_2 \dots l_n}^{k_1 k_2 \dots k_m} \tilde{a}_{j_1}^{l_1} \cdots \tilde{a}_{j_n}^{l_n}$$

则称 T 为 \mathbb{E}_3 中的一个 (m, n) 型张量, $m+n$ 称为此张量的阶.

以 $(0, 2)$ 型张量 T 为例⁵, 它具有 9 个独立分量 T_{ij} . 在坐标系转动时 T_{ij} 中的变换法则是:

$$T_{ij} \rightsquigarrow T'_{ij} = T_{kl} \tilde{a}^k{}_i \tilde{a}^l{}_j$$

T_{ij} 可以进一步分解为:

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij} + \frac{1}{3} T^k{}_k \delta_{ij}$$

其中,

- ① $S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) - \frac{1}{3} T^k{}_k \delta_{ij}$ 是对称无迹的二阶张量, $S_{ij} = S_{ji}$, $S_{ij} \delta^{ji} = 0$.
- ② $A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$ 是反对称二阶张量, $A_{ij} = -A_{ji}$. 反对称张量天然无迹, $A_{ij} \delta^{ji} = 0$.
- ③ $T^k{}_k \equiv T_{ij} \delta^{ji}$ 称为张量 T_{ij} 的迹, 它本身是一个标量.
- ④ δ_{ij} 是 \mathbb{E}_3 的度规张量, 它在空间转动变换下保持不变.

⁵也可以称它为 2 阶协变张量.

疑难解析:

- ① 张量的对称性质不因空间转动而改变. 设 S_{ij} 在转动前的坐标系中是对称张量, $S_{ij} = S_{ji}$. 空间转动后,

$$S_{ij} \rightsquigarrow S'_{ij} = S_{kl} \tilde{a}^k{}_i \tilde{a}^l{}_j = S_{lk} \tilde{a}^l{}_j \tilde{a}^k{}_i = S'_{ji}$$

$$a_i{}^k S_{kl} a^l{}_j$$

- ② 张量之迹确为标量:

$$T^k{}_k \rightsquigarrow T'^k{}_k = a^k{}_i T^i{}_j \tilde{a}^j{}_k = T^i{}_j \left(\tilde{a}^j{}_k a^k{}_i \right) = \delta^j_i T^i{}_j = T^i{}_i$$

- ③ 度规 δ_{ij} 是欧氏空间 \mathbb{E}_3 中的不变张量:

$$\delta_{ij} \rightsquigarrow \delta'_{ij} = \delta_{kl} \tilde{a}^k{}_i \tilde{a}^l{}_j = \delta_{kl} \left(\delta_{im} a^m{}_n \delta^{nk} \right) \tilde{a}^l{}_j = \delta_{im} a^m{}_l \tilde{a}^l{}_j$$

所以,

$$\delta'_{ij} = \delta_{im} \delta^m{}_j = \delta_{ij}$$

2: 欧氏空间 \mathbb{E}_3 中独立的不变张量共有两个. 除二阶对称的度规张量 δ_{ij} 之外, 另一个不变张量是三阶 Levi-Civita 全反对称张量 ϵ_{ijk} .

现在检验 ϵ_{ijk} 在空间转动下的不变性. 首先约定 ϵ_{ijk} 是 \mathbb{E}_3 中的三阶协变张量, 则在进行了空间转动变换 $x^i \rightsquigarrow x'^i = a^i_j x^j$ 之后, ϵ_{ijk} 变为:

$$\epsilon_{ijk} \rightsquigarrow \epsilon'_{ijk} = \epsilon_{mnl} \tilde{a}^m_i \tilde{a}^n_j \tilde{a}^l_k = \kappa \epsilon_{ijk}$$

上式最后一步基于对称性的分析. 为了确定比例系数 κ , 注意到真实空间转动矩阵的行列式是 +1,

$$1 = \det \tilde{A} = \epsilon_{mnl} \tilde{a}^m_1 \tilde{a}^n_2 \tilde{a}^l_3$$

所以:

$$\kappa = \kappa \epsilon_{123} = \epsilon'_{123} = \epsilon_{mnl} \tilde{a}^m_1 \tilde{a}^n_2 \tilde{a}^l_3 = 1 \rightsquigarrow \epsilon'_{ijk} = \epsilon_{ijk}$$

点评:

虽然 \mathbb{E}_3 中独立的不变张量只有 δ_{ij} 与 ϵ_{ijk} , 但与它们相关的 δ_j^i, δ_j^i 与 ϵ^{ijk} 也都是空间转动下的不变张量. 例如在空间转动变换下,

$$\delta_j^i \rightsquigarrow (\delta')^i_j = a^i_k \delta_l^k \tilde{a}^l_j = a^i_k \tilde{a}^k_j = \delta_j^i, \quad \delta_i^i = 3$$

全反对称的逆变 Levi-Civita 张量 ϵ^{ijk} 定义为:

$$\epsilon^{ijk} \equiv \delta^{im} \delta^{jn} \delta^{kl} \epsilon_{mnl} = \delta^{im} \delta^{jn} \delta^{kl} \begin{vmatrix} \delta_m^1 & \delta_m^2 & \delta_m^3 \\ \delta_n^1 & \delta_n^2 & \delta_n^3 \\ \delta_l^1 & \delta_l^2 & \delta_l^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_1^i & \delta_2^i & \delta_3^i \\ \delta_1^j & \delta_2^j & \delta_3^j \\ \delta_1^k & \delta_2^k & \delta_3^k \end{vmatrix}$$

不难证明 (Optional):

$$\epsilon^{ijk} \epsilon_{mnl} = \begin{vmatrix} \delta_m^i & \delta_n^i & \delta_l^i \\ \delta_m^j & \delta_n^j & \delta_l^j \\ \delta_m^k & \delta_n^k & \delta_l^k \end{vmatrix}$$

从而,

$$\epsilon^{ijk} \epsilon_{mnk} = \delta_m^i \delta_n^j - \delta_n^i \delta_m^j \rightsquigarrow \epsilon^{ijk} \epsilon_{mjk} = 2\delta_m^i, \quad \epsilon^{ijk} \epsilon_{ijk} = 6$$

作为 \mathbb{E}_3 中张量的物理量举例

- **标量**：质量 m , 电荷 Q , 静电标势 φ , 电荷分布的体密度 $\rho(r)$ 等. 特别是处在空间点 r_0 处的点电荷 Q 的电荷体密度：

$$\rho(r) = Q \delta^{(3)}(r - r_0)$$

显然,

$$\int_V \rho(r) d^3x = Q \int_V \delta^{(3)}(r - r_0) d^3x = Q$$

Q: 为什么说狄拉克戴尔塔函数 $\delta^{(3)}(r - r_0)$ 是标量？

戴尔塔函数的定义是：

$$\delta^{(3)}(r - r_0) = \begin{cases} \infty, & \text{倘若 } r = r_0; \\ 0, & \text{倘若 } r \neq r_0. \end{cases} \quad \int_V \delta^{(3)}(r - r_0) d^3x = 1$$

\mathbb{E}_3 的体积元在笛卡尔坐标系中定义为：

$$d^3x \equiv dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

式中 \wedge 表示坐标微分 dx^i 之间的外积⁶, 具有性质：

$$\boxed{dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i} \rightsquigarrow dx^1 \wedge dx^1 = dx^2 \wedge dx^2 = dx^3 \wedge dx^3 = 0$$

所以,

$$dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = \epsilon^{ijk} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \epsilon^{ijk} d^3x$$

在空间转动变换下, $x^i \rightsquigarrow x'^i = a^i_j x^j$, 我们看到：

$$dx^i \rightsquigarrow dx'^i = a^i_j dx^j$$

$$d^3x \rightsquigarrow d^3x' = dx'^1 \wedge dx'^2 \wedge dx'^3 = a^1_i a^2_j a^3_k dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$$

⁶外积就是反对称化的直积. 例如：

$$dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2} (dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i).$$

亦即：

$$\mathrm{d}^3x' = a^1_i a^2_j a^3_k \epsilon^{ijk} \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 = \det A \mathrm{d}^3x = \mathrm{d}^3x$$

换言之，体积元 d^3x 在空间转动变换下保持不变，它是 \mathbb{E}_3 中的标量。

鉴于此以及戴尔塔函数的积分定义式，

$$\int_V \delta^{(3)}(r - r_0) \mathrm{d}^3x = 1$$

我们确信 $\delta^{(3)}(r - r_0)$ 也是 \mathbb{E}_3 中的标量，其量纲为：

$$\left[\delta^{(3)}(r - r_0) \right] = L^{-3}$$

- **矢量**：带电粒子的速度 \boldsymbol{u} ，静电力 \boldsymbol{F} ，电场强度 \boldsymbol{E} ，磁感应强度 \boldsymbol{B} 等。特别地，点电荷 Q 以速度 \boldsymbol{u} 运动时它的电流密度矢量：

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \equiv \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{u} = Q\boldsymbol{u} \delta^{(3)}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$$

- 梯度算符 ∇ 也具有矢量性质. 在笛卡尔直角坐标系中,

$$\nabla = e^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

其分量算符在空间转动下的变换法则是:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

在空间转动下,

$$x^i \rightsquigarrow x'^i = a^i_j x^j \rightsquigarrow x^j = \tilde{a}^j_i x'^i$$

由此我们知:

$$\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} = \tilde{a}^j_i \rightsquigarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial}{\partial x^j} \tilde{a}^j_i}$$

即 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 形成了矢量算符 ∇ 的协变分量.

4-张量

- ① 物理量可以按照其在空间转动变换下的变换性质分类为欧氏空间 \mathbb{E}_3 中的标量、矢量和高阶张量等.
- ② 为了方便地表达狭义相对论的相对性原理, 我们需要把物理量按照其在洛伦兹变换下的变换性质重新进行分类.

洛伦兹变换

$$x^\mu \rightsquigarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu,$$

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma = \eta_{\rho\sigma}$$

可以重新诠释为四维闵氏空间 (Minkowski) 中的赝转动:

$$X^T \eta X = X'^T \eta X', \quad X' = \Lambda X, \quad \Lambda \tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda} \Lambda = I$$

式中,

$$\tilde{\Lambda} = \eta^{-1} \Lambda^T \eta, \quad (\Lambda^T)_\nu^\mu = (\Lambda)^\mu_\nu = \Lambda^\mu_\nu, \rightsquigarrow (\tilde{\Lambda})^\mu_\nu = \eta_{\nu\rho} \Lambda^\rho_\sigma \eta^{\sigma\mu}$$

且:

$$\det \Lambda = \det \tilde{\Lambda} = \pm 1$$

物理量新分类的结果常常称之为 4-张量或者四维协变量.

假设在闵氏空间 M_4 中建立起了笛卡尔直角坐标系, 沿各坐标轴延伸方向的单位基矢为 e_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) 使得

$$e_\mu \cdot e_\nu = \eta_{\mu\nu}$$

- 仅有一个分量且其在洛伦兹变换下保持不变的物理量 A

$$A \rightsquigarrow A' = A$$

称为 4-标量.

- 具有四个分量的物理量 V , 设其在笛卡尔坐标系中表达为:

$$V = V^\mu e_\mu$$

倘若 V^μ 在洛伦兹变换下与位置坐标 x^μ 有相同的变换法则,

$$V^\mu \rightsquigarrow V'^\mu = \Lambda^\mu_\nu V^\nu$$

则称 V 形成了一个 4-矢量. V^μ 称为 4-矢 V 的逆变分量.

2: 怎么定义时间轴方向的单位基矢 e_0 ?

- 通过度规矩阵 $\eta_{\mu\nu}$ 与 V^μ 的缩并, 我们也可以定义 4-矢量 V 的协变分量:

$$V_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} V^\nu \quad \rightsquigarrow \quad V^\mu = \eta^{\mu\nu} V_\nu$$

在洛伦兹变换下,

$$V_\mu \rightsquigarrow V'_\mu = \eta'_{\mu\nu} V'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho V^\rho = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho \eta^{\rho\sigma} V_\sigma$$

亦即:

$$V_\mu \rightsquigarrow V'_\mu = V_\nu \tilde{\Lambda}^\nu{}_\mu$$

- 具有 4^{m+n} 个笛卡尔分量的物理量 T , 倘若在洛伦茨变换下它的分量

$$T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_m}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_n}$$

中每一个上指标 μ_i ($1 \leq i \leq m$) 都与逆变位置坐标 x^μ 有相同的变换法则、每一个下指标 ν_j ($1 \leq j \leq n$) 都与协变位置坐标 x_ν 有相同的变换法则:

$$T^{\mu_1 \cdots \mu_m}_{\nu_1 \cdots \nu_n} \rightsquigarrow T'^{\mu_1 \cdots \mu_m}_{\nu_1 \cdots \nu_n} = \Lambda^{\mu_1}_{\rho_1} \cdots \Lambda^{\mu_m}_{\rho_m} T^{\rho_1 \cdots \rho_m}_{\sigma_1 \cdots \sigma_n} \tilde{\Lambda}^{\sigma_1}_{\nu_1} \cdots \tilde{\Lambda}^{\sigma_n}_{\nu_n}$$

则称 T 为 (m, n) 型 4-张量, $m+n$ 为此张量的阶.

- ① 通常把 $(m, 0)$ 型的 4-张量称为逆变的 m 阶 4-张量, 把 $(0, n)$ 型的 4-张量称为协变的 n 阶 4-张量.
- ② m 与 n 皆取非零值时的 (m, n) 型 4-张量称为混合张量.
- ③ 4-张量的逆变、协变分量可以通过度规矩阵 $\eta_{\mu\nu}$ 或者其逆 $\eta^{\mu\nu}$ 相互转换. 例如:

$$T_{\mu\nu} \rightsquigarrow T^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} T_{\rho\sigma}$$

4-标量举例：

- 事件的间隔

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu$$

不受洛伦兹变换的影响, 因此是一个 4-标量.

- 物理过程持续的固有时 $d\tau = -ds/c$.
- 电磁波的相位因子 ϕ . 相位只是计数问题, 不应随参考系的改变而发生变化.
- 粒子的质量 m .
- 闵氏空间 \mathbb{M}_4 的体积元 $d^4x = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$.
- 带电粒子的电荷 Q 及其在 \mathbb{M}_4 中的电荷体密度:

$$\rho(x) = Q \delta^{(4)}(x - x_0) \equiv \frac{Q}{c} \delta(t - t_0) \delta^{(3)}(r - r_0)$$

4-矢量举例：

- 粒子的时空坐标本身形成了一个四维矢量，

$$X = (x^\mu) = (x^0, \mathbf{r})$$

常称之为 4-位置矢量，此处 $x^0 \equiv ct$ 。

- 对 x^μ 的微分算符形成了一个 4-矢量微商，

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

常称之为 4-梯度算符。洛伦兹变换 $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ 的逆变换可写为：

$$x^\nu = \tilde{\Lambda}^\nu_\mu x'^\mu$$

因此在洛伦兹变换下，

$$\partial_\mu \rightsquigarrow \partial'_\mu := \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \tilde{\Lambda}^\nu_\mu \partial_\nu$$

即 ∂_μ 形成了 4-梯度矢量的协变分量。

- 对 $X = (x^\mu)$ 的微分形成了一个四维矢量：

$$dX = (dx^\mu) = (dx^0, d\mathbf{r})$$

常称之为 4-位移矢量.

- 将 4-位移 dX 与固有时 $d\tau$ 相除, 可以构造出一个 4-矢量 U , 其逆变分量为：

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

常称 U 为粒子的 4-速度. 按此构造, U^μ 与 x^μ 显然具有完全相同的在洛伦兹变换规律：

$$U^\mu \rightsquigarrow U'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu U^\nu$$

注意到粒子的物理速度为 $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$, 而运动时钟延缓效应又暗示着：

$$dt = \gamma_u d\tau, \quad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \rightsquigarrow U = (U^\mu) = \gamma_u (c, \mathbf{u})$$

这就是粒子的 4-速度 U 与其物理速度 \mathbf{u} 之间的联系.

粒子的 4-速度 U

- 粒子 4-速度 U^μ 与其自身求缩并, 可以构造出一个四维标量:

$$U^\mu U_\mu = -c^2$$

此式是 $U = (U^\mu)$ 最重要的性质.

- 可以把闵氏空间 \mathbb{M}_4 时间轴方向的单位基矢选择为:

$$e_0 = \frac{U}{c} \quad \rightsquigarrow \quad e_0 \cdot e_0 = -1 = \eta_{00}$$

- 利用 4-速度可以高效地推导出相对论的速度合成法则.

回忆洛伦兹推动矩阵的矩阵元

$$\Lambda^0_0 = \gamma, \quad \Lambda^0_i = -\gamma\beta_i, \quad \Lambda^i_0 = -\gamma\beta^i, \quad \Lambda^i_j = \delta^i_j + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j$$

式中 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, 而 $\beta = v/c$ 是无量纲化的牵连速度. 惯性系 Σ 和 Σ' 中粒子 4-速度的逆变分量分别是:

$$U^\mu = \gamma_u(c, u^i), \quad U'^\mu = \gamma_{u'}(c, u'^i) \quad \rightsquigarrow \quad U'^\mu = \Lambda^\mu_\nu U^\nu$$

我们有：

$$\begin{aligned}\gamma_{u'} u'^i &= U'^i = \Lambda^i_{\nu} U^{\nu} = \Lambda^i_0 U^0 + \Lambda^i_j U^j = \Lambda^i_0 \gamma_u c + \Lambda^i_j \gamma_u u^j \\ &= -\gamma \beta^i \gamma_u c + \left[\delta_j^i + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \beta^i \beta_j \right] \gamma_u u^j \\ &= \gamma_u \left[u^i + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (u \cdot \beta) \beta^i - \gamma \beta^i c \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{u'} c &= U'^0 = \Lambda^0_{\nu} U^{\nu} = \Lambda^0_0 U^0 + \Lambda^0_j U^j = \gamma \gamma_u c - \gamma \beta_j \gamma_u u^j \\ &= \gamma_u \gamma c (1 - u \cdot \beta / c)\end{aligned}$$

整理此二式，我们看到：

$$u'^i = \frac{\gamma_u}{\gamma_{u'}} \left[u^i + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (u \cdot \beta) \beta^i - \gamma \beta^i c \right], \quad \frac{\gamma_{u'}}{\gamma_u} = \gamma (1 - u \cdot \beta / c).$$

把第二式代入到第一式, 即得:

$$u'^i = \frac{u^i + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(u \cdot \beta)\beta^i - \gamma\beta^i c}{\gamma(1 - u \cdot \beta/c)}$$

或等价地,

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}c}{\gamma(1 - \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\beta}/c)}$$

这正是相对论的速度合成法则.

- 通过求粒子 4-速度 U 对固有时 τ 的时间导数, 可以构造出一个新的四维矢量 \mathcal{A} :

$$\mathcal{A} \equiv \frac{dU}{d\tau} = (\mathcal{A}^\mu) = (\mathcal{A}^0, \mathbf{a}), \quad \rightsquigarrow \mathcal{A}^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau}$$

常称 $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^\mu)$ 为粒子的 4-加速度.

现在研究粒子 4-加速度 \mathcal{A} 与其物理加速度 w 之间的联系. 注意到:

$$U^\mu = \gamma_u(c, u^i), \quad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}, \quad dt = \gamma_u d\tau$$

我们有 $\dot{u}^i = w^i$ 且 $\dot{\gamma}_u = \gamma_u^3 (u \cdot w / c^2)$. 进而,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^0 &= \frac{dU^0}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d(\gamma_u c)}{dt} = \gamma_u^4 \frac{u \cdot w}{c} \\ \mathcal{A}^i &= \frac{dU^i}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d(\gamma_u u^i)}{dt} = \gamma_u (\gamma_u w^i + \dot{\gamma}_u u^i) \\ &= \gamma_u^4 \left[(1 - u^2/c^2) w^i + \frac{u \cdot w}{c^2} u^i \right] \\ &= \gamma_u^4 w^i + \frac{\gamma_u^4}{c^2} [u \times (u \times w)]^i \end{aligned}$$

亦即:

$$\mathcal{A} = (\mathcal{A}^0, \mathcal{A}^i) = \gamma_u^4 \left(\frac{u \cdot w}{c}, w^i + \frac{1}{c^2} [u \times (u \times w)]^i \right)$$

粒子 4-加速度 \mathcal{A} 的空间分矢量 a 与其物理加速度 w 之间的联系是：

$$a = (\mathcal{A}^i) = \gamma_u^4 \left[w + \frac{1}{c^2} u \times (u \times w) \right]$$

- ① 倘若粒子做加速直线运动, $u \parallel w$, $\rightsquigarrow a = \gamma_u^4 w$.
- ② 倘若粒子做加速圆周运动, $u \perp w$, $\rightsquigarrow a = \gamma_u^2 w$.
- ③ 倘若粒子的运动速率远小于光速, $|u| \ll c$, 精确到无量纲参数 $|u|/c$ 的一次幂, 我们看到:

$$a \approx w$$

- ④ 在粒子瞬时自身参考系中 ($u = 0, \gamma_u = 1$),

$$a = w$$

故可以把 a 诠释为粒子在其瞬时自身系中的物理加速度.

关联于粒子的 4-加速度 \mathcal{A} , 存在着如下两个 4-标量:

$$\mathcal{A}^\mu U_\mu, \quad \mathcal{A}^\mu \mathcal{A}_\mu$$

- 由于 $U^\mu U_\mu = -c^2$, 我们确定粒子的 4-速度 U 为类时 4-矢量. 求此式对于固有时 τ 的导数, 我们有:

$$0 = 2U_\mu \frac{dU^\mu}{d\tau}, \quad \rightsquigarrow \mathcal{A}^\mu U_\mu = 0$$

所以, 粒子的 4-加速度 \mathcal{A} 是类空 4-矢量. 总可以找到一个惯性系, 使得在其中 $\mathcal{A}^0 = 0$. 因为

$$\mathcal{A}^0 = \gamma_u^4 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{c}$$

这样一个惯性系实际上是粒子的瞬时自身系.

- 另一个 4-标量常常记为：

$$\mathcal{A}^\mu \mathcal{A}_\mu = a^2$$

在相对论力学中，粒子加速度的量值定义为：

$$a = \sqrt{\mathcal{A}^\mu \mathcal{A}_\mu}$$

- ① 鉴于 \mathcal{A}^μ 的类空性, $\mathcal{A}^\mu \mathcal{A}_\mu > 0$. 所以 $a > 0$.
- ② a 是 4-标量, 它的量值不依赖于惯性系的选择.
- ③ 不难证明：

$$a = \gamma_u^3 \sqrt{[1 - (u/c)^2] \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{w} + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})^2 / c^2}$$

所以, a 就是瞬时自身系中 ($\boldsymbol{u} = 0$) 该粒子的物理加速度的大小.

- 电磁波的相位因子 $e^{i\phi}$ 是一个 4-标量,

$$\phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$$

这是因为某个波峰通过某一时空点是一个物理事件, 而相位 ϕ 只是计数问题, 不应随参考系而变.

引入数组 $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ 和 $x^\mu = (ct, \mathbf{r})$, 可以把 4-标量 ϕ 重新写为:

$$\phi = \eta_{\mu\nu} k^\mu x^\nu = k^\mu x_\mu$$

然而 $(x_\mu) = X$ 是一个 4-矢量, 即粒子在闵氏空间 \mathbb{M}_4 中的位置矢量. 所以,

$$k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$$

必须也是一个 4-矢量, 常称之为 4-波矢. k^μ 的洛伦兹变换法则为:

$$k^\mu \rightsquigarrow k'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu k^\nu$$

倘若考虑洛伦兹推动变换, 则有:

$$\begin{aligned}k' &= k + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}(k \cdot \beta)\beta - \gamma\beta\omega/c \\ \omega' &= \gamma(\omega - c\beta \cdot k)\end{aligned}$$

- ① 相对论的多普勒效应. 考虑在真空中传播的平面电磁波. 假设 Σ 系中的物理波矢 k 与牵连速度 βc 之间的夹角为 θ ,

$$\beta \cdot k = k\beta \cos \theta = \frac{\omega}{c}\beta \cos \theta \quad \leftrightarrow \quad k = \frac{\omega}{c}$$

我们有:

$$\omega' = \gamma(\omega - c\beta \cdot k) = \gamma\omega(1 - \beta \cos \theta)$$

若 Σ' 系为光源静止参考系, $\omega' = \omega_0$. 这里用 ω_0 标记静止光源的辐射角频率. 于是, 相对论的多普勒效应由下式描写:

$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta}$	光行差效应 \rightsquigarrow	$\tan \theta = \frac{\sin \theta' \sqrt{1 - \beta^2}}{\cos \theta' + \beta}$
--	--------------------------	--

- 在垂直于光源运动方向观测辐射时, 经典力学多普勒效应的结论是 $\omega = \omega_0$.
- 与经典力学结论不同, 狭义相对论预言存在横向的多普勒效应 ($\theta = \pi/2$):

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \beta^2} < \omega_0$$

横向多普勒效应为 Ives-Stilwell 实验 (1938) 所证实.

答疑:

现在解释一下如何理解“可以选择粒子的无量纲 4-速度 U/c 作为某惯性系中时间轴方向的单位基矢”.

- 设 Σ 为实验室参考系, 有质量粒子 A 以速度 u 在其中作匀速直线运动. 倘若在 Σ 中建立笛卡尔直角坐标系, 可以把坐标系的基矢取为:

$$\begin{aligned} e_0 &= (1, 0, 0, 0); & e_1 &= (0, 1, 0, 0); & e_2 &= (0, 0, 1, 0); \\ e_3 &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

- 粒子 A 相对于 Σ 系的 4-速度为：

$$U = U^\mu e_\mu = \gamma_u c e_0 + \gamma_u u^i e_i \quad \rightsquigarrow \quad \frac{U}{c} = \gamma_u \left(1, \frac{u^i}{c} \right)$$

- 设 Σ' 为粒子 A 的自身参考系. 倘若也在 Σ' 系中建立笛卡尔直角坐标系, 则 A 会朴素地认为坐标系的基矢是：

$$\begin{aligned} e'_0 &= (1, 0, 0, 0); & e'_1 &= (0, 1, 0, 0); & e'_2 &= (0, 0, 1, 0); \\ e'_3 &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

换言之,

$$e'_\mu = e_\mu = \delta_\mu^\nu e_\nu \quad \rightsquigarrow \quad (e'_\mu)^{\prime\nu} = \delta_\mu^\nu$$

特别地, e'_0 作为一个 4-矢量, 其在粒子自身系 Σ' 中的笛卡尔分量为：

$$(e'_0)^{\prime\nu} = \delta_0^\nu$$

- 借助于 $\Sigma' \rightarrow \Sigma$ 的逆洛伦兹推动变换 $\tilde{\Lambda}^\mu_\nu(u)$, 我们推知类时 4-矢量 e'_0 在实验室参考系 Σ 中的笛卡尔分量为:

$$(e'_0)^\mu = \tilde{\Lambda}^\mu_\nu(u) (e'_0)'^\nu = \tilde{\Lambda}^\mu_\nu(u) \delta_0^\nu = \tilde{\Lambda}^\mu_0(u)$$

所以,

$$(e'_0)^0 = \tilde{\Lambda}^0_0(u) = \gamma_u, \quad (e'_0)^i = \tilde{\Lambda}^i_0(u) = \gamma_u u^i / c$$

亦即:

$$e'_0 = \gamma_u \left(1, \frac{u^i}{c} \right) = \frac{U}{c}$$

- 同理知类空 4-矢量 e'_j ($j = 1, 2, 3$) 在实验室参考系 Σ 中的笛卡尔分量为:

$$e'_j = \left(\gamma_u \frac{u_j}{c}, \delta_j^i + \frac{\gamma_u^2}{\gamma_u + 1} \frac{u^i u_j}{c^2} \right)$$

闵氏空间 \mathbb{M}_4 中的不变张量

\mathbb{M}_4 中存在着三个独立的不变张量: $\eta_{\mu\nu}$, δ_ν^μ 和 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$.

- $\eta_{\mu\nu}$ 与 δ_ν^μ 是 \mathbb{M}_4 中不变张量. 假设 $\eta_{\mu\nu}$ 和 δ_ν^μ 在洛伦兹变换 $x^\mu \rightsquigarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ 下形成二阶张量, 我们有:

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu} \rightsquigarrow (\eta')_{\mu\nu} &= \eta_{\rho\sigma} \tilde{\Lambda}^\rho_\mu \tilde{\Lambda}^\sigma_\nu \\ &= \eta_{\rho\sigma} \eta_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha_\beta \eta^{\beta\rho} \tilde{\Lambda}^\sigma_\nu \\ &= \eta_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha_\sigma \tilde{\Lambda}^\sigma_\nu \\ &= \eta_{\mu\alpha} \delta^\alpha_\nu \\ &= \eta_{\mu\nu}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_\nu^\mu \rightsquigarrow (\delta')^\mu_\nu &= \Lambda^\mu_\alpha \delta^\alpha_\beta \tilde{\Lambda}^\beta_\nu \\ &= \Lambda^\mu_\alpha \tilde{\Lambda}^\alpha_\nu \\ &= \delta_\nu^\mu\end{aligned}$$

同理知 \mathbb{M}_4 的逆度规张量 $\eta^{\mu\nu}$ 也是不变张量.

- $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 称为四阶 Levi-Civita 全反对称张量. 其文字定义式是:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1, & \text{若 } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ 是 } (0123) \text{ 的偶置换} \\ -1, & \text{若 } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ 是 } (0123) \text{ 的奇置换} \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$$

从而,

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} -1, & \text{若 } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ 是 } (0123) \text{ 的偶置换} \\ 1, & \text{若 } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ 是 } (0123) \text{ 的奇置换} \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$$

若将上述文字重新写成标准的数学表达式, 即为:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{vmatrix} \delta_0^\mu & \delta_1^\mu & \delta_2^\mu & \delta_3^\mu \\ \delta_0^\nu & \delta_1^\nu & \delta_2^\nu & \delta_3^\nu \\ \delta_0^\rho & \delta_1^\rho & \delta_2^\rho & \delta_3^\rho \\ \delta_0^\sigma & \delta_1^\sigma & \delta_2^\sigma & \delta_3^\sigma \end{vmatrix}, \quad \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = - \begin{vmatrix} \delta_\mu^0 & \delta_\mu^1 & \delta_\mu^2 & \delta_\mu^3 \\ \delta_\nu^0 & \delta_\nu^1 & \delta_\nu^2 & \delta_\nu^3 \\ \delta_\rho^0 & \delta_\rho^1 & \delta_\rho^2 & \delta_\rho^3 \\ \delta_\sigma^0 & \delta_\sigma^1 & \delta_\sigma^2 & \delta_\sigma^3 \end{vmatrix}$$

$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 满足的基本运算公式是：

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda} = - \begin{vmatrix} \delta_{\alpha}^{\mu} & \delta_{\beta}^{\mu} & \delta_{\gamma}^{\mu} & \delta_{\lambda}^{\mu} \\ \delta_{\alpha}^{\nu} & \delta_{\beta}^{\nu} & \delta_{\gamma}^{\nu} & \delta_{\lambda}^{\nu} \\ \delta_{\alpha}^{\rho} & \delta_{\beta}^{\rho} & \delta_{\gamma}^{\rho} & \delta_{\lambda}^{\rho} \\ \delta_{\alpha}^{\sigma} & \delta_{\beta}^{\sigma} & \delta_{\gamma}^{\sigma} & \delta_{\lambda}^{\sigma} \end{vmatrix}$$

此式可以通过前页给出的 Levi-Civita 符号行列式表达式证实 (Optional Exercise). 由此可知 $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 具有的几个重要恒等式：

1

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma} = - \begin{vmatrix} \delta_{\alpha}^{\mu} & \delta_{\beta}^{\mu} & \delta_{\gamma}^{\mu} \\ \delta_{\alpha}^{\nu} & \delta_{\beta}^{\nu} & \delta_{\gamma}^{\nu} \\ \delta_{\alpha}^{\rho} & \delta_{\beta}^{\rho} & \delta_{\gamma}^{\rho} \end{vmatrix}$$

2

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -2 \begin{vmatrix} \delta_{\alpha}^{\mu} & \delta_{\beta}^{\mu} \\ \delta_{\alpha}^{\nu} & \delta_{\beta}^{\nu} \end{vmatrix} = -2 \left(\delta_{\alpha}^{\mu}\delta_{\beta}^{\nu} - \delta_{\beta}^{\mu}\delta_{\alpha}^{\nu} \right)$$

3

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} = -6\delta_{\alpha}^{\mu}, \quad \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -24.$$

\mathcal{C} : $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是 \mathbb{M}_4 中的不变张量.

下面证明此立论. 假设 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是洛伦兹变换 $x^\mu \rightsquigarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ 下的四阶张量, 则有:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \rightsquigarrow (\epsilon')^{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \Lambda^\rho_\gamma \Lambda^\sigma_\lambda \epsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda} \propto \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

最后一步的成立源自于对称性分析. 暂设:

$$(\epsilon')^{\mu\nu\rho\sigma} = \lambda \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

我们看到:

$$\lambda = \lambda \epsilon^{0123} = (\epsilon')^{0123} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma} \Lambda^0_\alpha \Lambda^1_\beta \Lambda^2_\gamma \Lambda^3_\sigma = \det(\Lambda) = 1$$

换言之, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 在洛伦兹变换下保持不变:

$$(\epsilon')^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

物理规律的洛伦兹协变性

2: 4-张量为什么重要 ?

相对性原理声称: 所有惯性参考系都是等价的、物理规律对于所有惯性系都可以表达为相同形式.

倘若一个物理学方程中的每一项都属于相同类型的 4-张量, 例如:

$$\mathcal{F}_\mu + \mathcal{H}_\mu = 0$$

式中 \mathcal{F}_μ 与 \mathcal{H}_μ 都是 4-矢量. 或者,

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} + \mathcal{U}_{\mu\nu} + \mathcal{W}_{\mu\nu} = 0$$

式中 $\mathcal{T}_{\mu\nu}$, $\mathcal{U}_{\mu\nu}$ 及 $\mathcal{W}_{\mu\nu}$ 都是二阶 4-张量, 则在洛伦兹变换下, 方程的每一项都按相同的方式变换, 保证方程的形式与惯性参考系的选择无关, 从而使得该物理学方程获得作为相对论所接受的物理规律的资格.

以

$$\mathcal{F}_\mu + \mathcal{H}_\mu = 0$$

为例. 假设这是惯性系 Σ 中的观测者通过实验所建立的一个物理量之间的关系式, 其中的 \mathcal{F}_μ 与 \mathcal{H}_μ 已被确认形成两个 4-矢量. 这样, 若在惯性系 Σ 和 Σ' 之间进行洛伦兹变换

$$x^\mu \rightsquigarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

则在惯性系 Σ' 里我们有:

$$\mathcal{F}'_\mu = \mathcal{F}_\nu \tilde{\Lambda}^\nu{}_\mu = -\mathcal{H}_\nu \tilde{\Lambda}^\nu{}_\mu = -\mathcal{H}'_\mu$$

亦即:

$$\mathcal{F}'_\mu + \mathcal{H}'_\mu = 0$$

此方程在两个惯性系中采取了相同的数学形式, 因此有资格作为一条被狭义相对论所承认的物理学规律.

2: 如下方程

$$\mathcal{A}_\mu \mathcal{B}_\nu + \mathcal{C}_{\mu\nu} = 0$$

是否有资格作为一条狭义相对论承认的物理规律?

正确答案是:

不知道 (unknown)

- 1 不能自欺欺人地脑补、想当然地把 \mathcal{A}_μ , \mathcal{B}_ν 与 $\mathcal{C}_{\mu\nu}$ 等认作是 4- 矢量与二阶 4-张量. 切记! 尚未明确其在洛伦兹变换下的变换性质之前, 它们不过是一些多分量数组而已.

2: 怎么建立狭义相对论承认的物理规律?

- ① 一种可能的方案是从非相对论性的候选实验规律出发, 设法将其中的物理量更换为相应的 4-张量. 通过不断试错, 最终归纳出既符合实验事实、又满足相对性原理要求的物理规律.

例如, (真空中) 静电现象的实验规律是:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times E = 0$$

静电场强分布的无旋性允许我们引入静电势替代场强描写静电场, $E = -\nabla\phi$. 所以,

$$\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$$

- 严格地说, 此静电泊松方程仅仅在电荷分布 ρ 的自身参考系中才成立.

- 若想将其过渡到任意惯性系，必须把其中出现的物理量更换为相应的 4-张量. 特别地，

$$\nabla^2 \rightsquigarrow \partial^\mu \partial_\mu = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$$

进而：

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi = -\rho/\epsilon_0$$

- 接下来必须把 ϕ 与 ρ 替换为相应的 4-张量. 最简单的选择是假设它们均为 4-标量，如此上述方程自然符合相对论原理的要求. 次简单的选择是假设它们构成了 4-矢量的时间分量

$$A^\mu = (\phi, A), \quad J^\mu = (\rho, j)$$

符合相对性原理的方程变成了：

$$\partial^\mu \partial_\mu A^\nu = -J^\nu/\epsilon_0 \rightsquigarrow \partial^\mu \partial_\mu A = -j/\epsilon_0$$

相比于 ϕ 的方程，现在多出了 A 满足的波动方程. 当然还可以有更复杂的选择. 我们应该如何抉择呢？

经典电动力学

Chapter 2. 电动力学的理论基础

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院近代物理系

hyang@ustc.edu.cn

April 12, 2022

① 分析力学的形式体系 (Formalism) 简述

- 狭义相对论意义下的作用量泛函
- 自由粒子
- 自由标量场

② 电磁相互作用的经典场论

- 应该用什么经典场描写电磁场?
- 规范原理
- 从对称性出发构造电磁相互作用拉氏量
- Maxwell 方程组
- 两个重要的 4-标量
- 拓展: 电磁场拉氏密度中是否需要加入 Chern-Simons 项?
- 电磁场强度在洛伦兹推动变换下的变换法则
- 连续对称性与诺特定理
- 时空平移对称性与能动量守恒
- 空间转动对称性与角动量守恒
- 电磁场的哈密顿形式体系

作用量泛函

- ① 我们选择把带电粒子与电磁场纳入到分析力学的形式体系，通过定义洛伦兹不变的作用量泛函建立符合相对性原理的电动力学基本方程组.

哈密顿原理 (最小作用量原理):

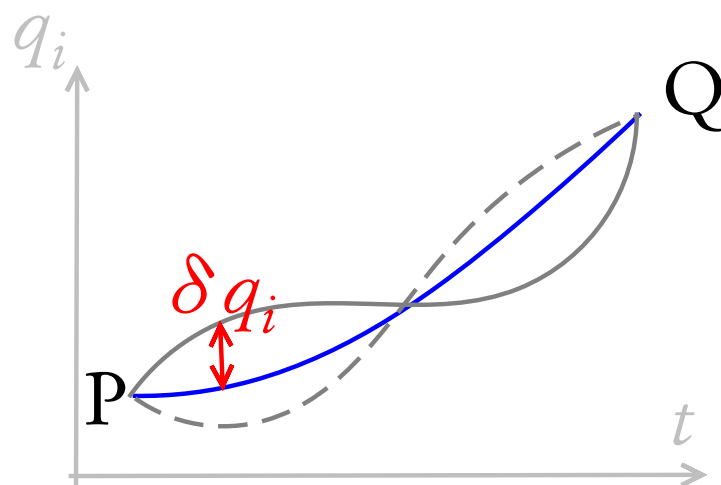
一个保守力学体系，在相同的时间内
的任何真实的动力学过程 $P \rightarrow Q$ ，必定满足作用量泛函

$$S = \int_P^Q L(q_i, \dot{q}_i) dt$$

取极值，即：

$$\delta S = 0$$

作用量泛函 S 的核 $L(q_i, \dot{q}_i)$ 称为体系的拉氏函数，其中 q_i 为广义坐标， \dot{q}_i 为广义速度。独立 q_i 的数目称为体系的自由度数。



拉氏方程

保守力体系经典物理意义下的动力学方程, 即 $\delta S = 0$, 可以通过拉氏函数表为:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

此式称为拉氏 (Lagrangian) 方程.

证明如下.

若广义坐标 q_i 发生了一个变分 δq_i , 它将诱导拉氏函数发生如下变分:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i$$

交换求时间导数和求变分的次序, 即令 $\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i$, 可把上式重新写为:

$$\delta L = \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right)$$

哈密顿原理 $\delta S = 0$ 表述为：

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int_P^Q \delta L \, dt \\ &= \int_P^Q dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \Big|_P^Q \end{aligned}$$

注意到广义坐标在路径的两个端点处的变分均为零, $\delta q_i|_P = 0$, $\delta q_i|_Q = 0$, 上式最后一项为零. 所以：

$$0 = \int_P^Q dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i$$

由于 δq_i 的任意性, 上式的成立意味着：

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

这正是期待的拉氏方程.

- 在非相对论性的牛顿力学中, 保守力体系的拉氏函数常表为体系动能与势能之差:

$$L = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 - V(q_i) \right]$$

代入到拉氏方程中, 即得保守力情形下的牛顿第二定律:

$$m \ddot{q}_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

- 拉氏函数 L 具有能量的量纲. 因为

$$S = \int_P^Q L(q_i, \dot{q}_i) dt$$

作用量泛函 S 具有能量与时间乘积的量纲:

$$[S] = ML^2 T^{-1} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{S}{\hbar} \sim \text{dimensionless}$$

S 的量纲实际上也是角动量的量纲.

- 对经典力学或者经典场体系的描述也可以采取哈密顿正则程式 (Formalism). 假定体系的状态由正则坐标 q_i 和与之共轭的正则动量 p_i

$$p_i(t) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

描写. 体系的动力学决定于哈密顿量 (不显含时间参数时, 哈密顿量可诠释为体系的总能量):

$$H(q_i, p_i) \equiv \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i)$$

动力学方程是所谓哈密顿正则方程组:

$$\boxed{\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}}$$

它实际上与拉氏方程等价.

- 采取了哈密顿正则程式后, 可以定义任意两个物理量 \mathcal{A} , \mathcal{B} 之间的泊松括号:

$$\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\} \equiv \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial p_i} \right]$$

特别地,

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$$

泊松括号具有性质:

$$\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\} = -\{\mathcal{B}, \mathcal{A}\}$$

$$\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\mathcal{C}\} = \mathcal{B}\{\mathcal{A}, \mathcal{C}\} + \{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}\mathcal{C}$$

$$\{\mathcal{A}, \{\mathcal{B}, \mathcal{C}\}\} + \{\mathcal{B}, \{\mathcal{C}, \mathcal{A}\}\} + \{\mathcal{C}, \{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}\} = 0$$

- 利用泊松括号可以把哈密顿正则方程组重新表达为:

$$\boxed{\frac{dq_i}{dt} = \{q_i, H\}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \{p_i, H\}}$$

相对性原理对作用量泛函的限制

\mathcal{F} : 为了满足相对性原理, 必须把体系的作用量泛函构造为闵氏空间 \mathbb{M}_4 中的 4-标量.

- 在相对论性经典力学中, 质点的作用量泛函常表达为:

$$S = \int \mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu) d\tau \quad \leftrightarrow \quad \dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

式中 τ 为质点演化的固有时. 体系拉氏函数 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu)$ 的选择有很大的任意性, 相对性原理仅要求它是一个具有能量量纲的 4-标量.

极值条件 $\delta S = 0$ 表达为拉氏方程:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = 0$$

鉴于 τ 与 \mathcal{L} 均为 4-标量而 x^μ 和 \dot{x}^μ 均为 4-矢量, 如此拉氏方程中各项都是相同类型的 4-张量 \rightsquigarrow 此拉氏方程具有明显的洛伦兹变换下的不变性.

- 把 $x^\mu(\tau)$ 看作粒子的正则坐标, 引入与之共轭的正则动量

$$\pi_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}$$

并通过勒让德变换定义体系的哈密顿函数:

$$\mathcal{H} = \pi_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L} \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}(x^\mu, \pi_\mu)$$

我们也可以把对粒子的描写纳入到哈密顿程式. 此情形下作用量泛函的极值条件重新表达为哈密顿正则方程组:

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_\mu}, \quad \frac{d\pi_\mu}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\mu}$$

哈密顿正则方程组与拉氏方程是等价的.

- 鉴于 τ 与 \mathcal{H} 均为 4-标量而 x^μ 和 π_μ 均为 4-矢量, 哈密顿正则方程组也具有明显的洛伦兹变换不变性.

- 考虑到体系拉氏函数与哈密顿量定义的任意性, \mathcal{L} 与 \mathcal{H} 本身并没有直接的物理意义¹. 体系的物理量(能量、动量等), 必须从对称性与守恒定律的关系出发做出定义.

现在简述沟通力学体系对称性与守恒定律的诺特 (Noether) 定理. 设 $x^\mu(\tau) \rightsquigarrow x'^\mu(\tau) = x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau)$ 是力学体系的一种对称性, 即 $\delta x^\mu(\tau)$ 并不导致作用量泛函的改变:

$$\begin{aligned}
 0 &= \delta S = \int d\tau \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \delta \dot{x}^\mu \right) \\
 &= \int d\tau \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \frac{d\delta x^\mu}{d\tau} \right) \\
 &= \int d\tau \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \delta x^\mu \right) + \int d\tau \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \delta x^\mu \\
 &= \int d\tau \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \delta x^\mu \right)
 \end{aligned}$$

最后一步使用了拉氏方程(体系沿着真实的经典路径运动).

¹特别地, 不能沿用非相对论性经典力学的习惯, 把 \mathcal{L} 误解为体系动能与势能之差、把 \mathcal{H} 误解为体系的总能量.

所以,

$$\delta x^\mu : \delta S = 0 \rightsquigarrow \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \delta x^\mu \right) = 0$$

这就是相对论力学体系情形下的诺特定理.

- ① $\delta x^\mu = \varepsilon^\mu$ (常 4-矢) 表示无穷小的时空平移变换. 倘若体系具有时空平移变换下的不变性, 那么相应的守恒定律

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \varepsilon^\mu \right) = 0 \rightsquigarrow \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = 0$$

就诠释为体系的能量、动量守恒定律:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0 \quad \leftarrow p_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}$$

4-矢量 p^μ 称为力学体系的 4-动量, 其时间分量与空间分量分别诠释为体系的能量与物理动量:

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right)$$

- 在相对论性经典场论中, 场 $\Psi(x)$ 的作用量泛函常表达为:

$$S = \int \mathcal{L}(\Psi, \partial_\mu \Psi) d^4x$$

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x)$ 称为经典场体系的拉氏函数密度 (Lagrangian), 它必须是一个 4-标量. 拉氏密度的量纲为 $[\mathcal{L}(x)] = ML^{-2}T^{-1}$.

- 极值条件 $\delta S = 0$ 可等价地表达为如下拉氏方程:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} \right] = 0$$

倘若 Ψ 为 4-张量, 则此经典场的拉氏方程明显地是洛伦兹不变的, 从而满足了相对性原理对于候选物理规律的资格审查.

我们现在以标量场为例, 讨论一下经典场情形下的诺特定理. 设 $\Psi = \Psi(x)$ 为 \mathbb{M}_4 空间中的一个 4-标量场. 倘若 Ψ 因为某种原因发生了一个无穷小改变:

$$\Psi(x) \rightsquigarrow \Psi'(x) = \Psi(x) + \delta \Psi(x)$$

它引起的场 $\Psi(x)$ 拉氏密度的改变为：

$$\mathcal{L}(x) \rightsquigarrow \mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x)$$

其中，

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}(x) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi(x)}\delta\Psi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi(x))}\delta\partial_\mu\Psi(x) \\ &= \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi(x))}\delta\Psi(x)\right] + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi(x)} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi(x))}\right]\delta\Psi(x) \\ &= \partial_\mu j^\mu(x) + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi(x)} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi(x))}\right]\delta\Psi(x)\end{aligned}$$

右端第一项中出现的

$$j^\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi(x))}\delta\Psi(x)$$

是一个 4-矢量，而第二项正比于经典场作用量泛函对场量 $\Psi(x)$ 的泛函导数。

最基本的泛函导数是：

$$\frac{\delta\Psi(y)}{\delta\Psi(x)} = \delta^{(4)}(x-y)$$

因为，

$$S = \int \mathcal{L}(y) d^4y = \int \mathcal{L}(\Psi(y), \partial_\mu \Psi(y)) d^4y$$

作用量泛函对场量 $\Psi(x)$ 的泛函导数计算如下：

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta\Psi(x)} &= \int d^4y \left[\frac{\partial\mathcal{L}(y)}{\partial\Psi(y)} \frac{\delta\Psi(y)}{\delta\Psi(x)} + \frac{\partial\mathcal{L}(y)}{\partial(\partial_\mu\Psi(y))} \frac{\delta(\partial_\mu\Psi(y))}{\delta\Psi(x)} \right] \\ &= \int d^4y \left[\frac{\partial\mathcal{L}(y)}{\partial\Psi(y)} \delta^{(4)}(x-y) + \frac{\partial\mathcal{L}(y)}{\partial(\partial_\mu\Psi(y))} \frac{\partial\delta^{(4)}(x-y)}{\partial y^\mu} \right] \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi(x)} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi(x))} \end{aligned}$$

所以,可以把场量的无穷小改变 $\delta\psi(x)$ 所引起的经典场拉氏密度的改变表达为:

$$\delta\mathcal{L}(x) = \partial_\mu j^\mu(x) + \frac{\delta S}{\delta\psi(x)} \delta\psi(x)$$

考虑到 $\psi(x)$ 的真实演化遵从拉氏方程,

$$\frac{\delta S}{\delta\psi(x)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi(x)} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi(x))} = 0$$

我们有:

$$\partial_\mu j^\mu(x) = \delta\mathcal{L}(x)$$

- 倘若 $\delta\psi(x) \rightsquigarrow \delta\mathcal{L}(x) = 0$, 则称 $\delta\psi(x)$ 为经典场体系的一种对称性. 与其相伴的守恒定律为:

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0$$

4-矢量 $j^\mu(x)$ 就称为此经典场相应于这个对称性的守恒流.

- 倘若 $\delta\Psi(x)$ 是由时空坐标的平移变换 $\delta x^\mu = \varepsilon^\mu$ 引起的,

$$\delta\Psi(x) = \frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu}\varepsilon^\mu \rightsquigarrow \delta\mathcal{L}(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\varepsilon^\mu = \partial_\mu(\mathcal{L}\varepsilon^\mu)$$

虽然 $\delta\mathcal{L} \neq 0$, 但如此 $\delta\Psi(x)$ 仍为经典场体系的一种对称性 (时空平移对称性). 与其相伴的守恒定律

$$\partial^\mu T_{\mu\nu}(x) = 0$$

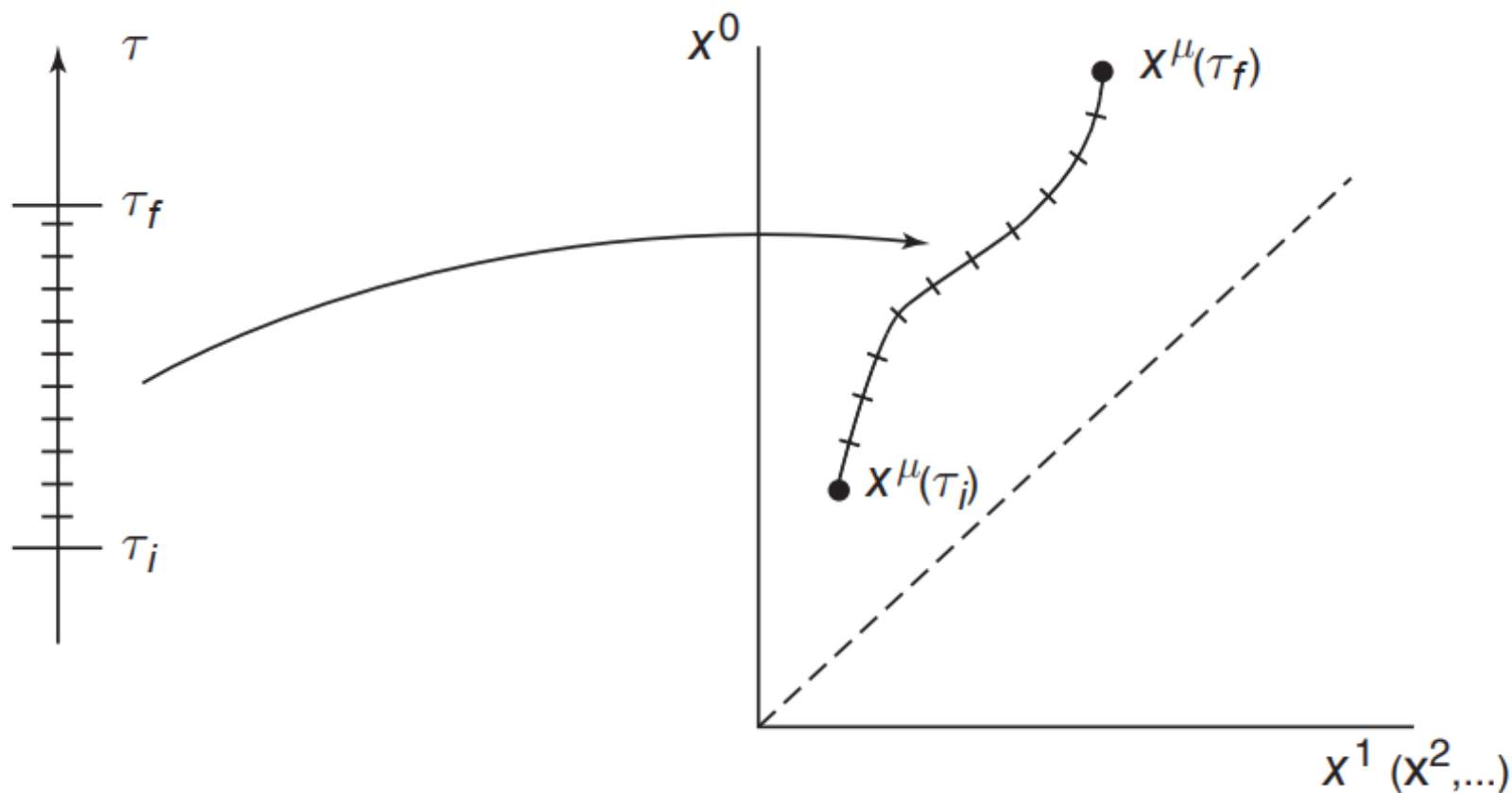
称为体系的能量、动量守恒定律. 二阶 4-张量 $T_{\mu\nu}(x)$

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Psi(x))}\partial_\nu\Psi(x) - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}(x)$$

诠释为此经典场的能量动量张量².

² T_{00} 与 T_{0i} 分别诠释为经典场在 \mathbb{E}_3 中的能量体密度与动量体密度, 而 T_{ij} 诠释为场的动量流密度张量.

自由粒子



我们先看看相对论力学对自由粒子的描写. 设粒子质量为 m , 其在 \mathbb{M}_4 中的运动轨迹(世界线)可以刻化为:

$$x^\mu = x^\mu(\tau), \quad \tau_i \leq \tau \leq \tau_f$$

粒子的世界线(world-line)上, 相邻两点之间的间隔可表为:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} (d\tau)^2 = U^\mu U_\mu (d\tau)^2 = -c^2 (d\tau)^2 < 0$$

- 立足于 \mathbb{M}_4 的几何, 可以把 $\sqrt{-ds^2}$ 理解为粒子世界线上相邻两点之间的微元弧长, 它是一个 4-标量.
- 对于连接 $x_i^\mu = x^\mu(\tau_i)$ 与 $x_f^\mu = x^\mu(\tau_f)$ 的其他路径³,

$$\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \neq -c^2$$

这些候选路径上相邻两点之间的微元弧长为:

$$\sqrt{-ds^2} = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau$$

$\sqrt{-ds^2}$ 仍是一个 4-标量, $[\sqrt{-ds^2}] = L$.

³ 因此, $U^\mu U_\mu = -c^2$ 常称作是粒子的质壳条件.

自由粒子的拉氏函数可以定义为：

$$\mathcal{L} = -mc\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}} = -mc\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} \quad \Leftarrow \dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

如此定义的 \mathcal{L} 既是一个 4-标量, 又具有能量的量纲⁴, 是相对论力学意义下自由粒子合格的拉氏函数.

不难看出：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = mc \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}$$

这里约定 $\dot{x}^2 \equiv \eta_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$. 所以, 自由粒子情形下的拉氏方程 (亦即自由粒子世界线方程)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = 0$$

表达为：

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \right) \rightsquigarrow \frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} = 0$$

⁴从而保证了作用量泛函具有角动量量纲.

上面的计算中最后一步使用了粒子的质壳条件 $\dot{x}^2 = -c^2$.

- 倘若把对自由粒子的描述纳入到哈密顿程式,则需要引入与粒子正则坐标 $x^\mu(\tau)$ 共轭的正则动量

$$\pi_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = mc \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \quad \rightsquigarrow \quad \pi^\mu \pi_\mu = -m^2 c^2$$

与哈密顿量:

$$\mathcal{H} \equiv \pi_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L} = mc \frac{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} + mc \sqrt{-\dot{x}^2}$$

不过很显然,

$$\mathcal{H} = 0$$

所以,依托 $\mathcal{L} = -mc\sqrt{-\dot{x}^2}$ 的勒让德变换并不能建立起自由粒子有意义的哈密顿表述⁵.

⁵当然,建立在 $\mathcal{L} = -mc\sqrt{-\dot{x}^2}$ 基础上的自由粒子拉氏表述仍是合理的.

我们也可以把自由粒子的拉氏函数重新选择为：

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{m}{2} \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{m}{2} \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

如此 $\tilde{\mathcal{L}}$ 既是一个 4-标量, 又具有能量的量纲, 从而也是相对论力学意义下自由粒子合格的拉氏函数⁶.

不难看出：

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial x^\mu} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}^\mu} = m \dot{x}_\mu$$

按照新定义的拉氏函数 $\tilde{\mathcal{L}}$, 描写自由粒子动力学演化的拉氏方程

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}^\mu} = 0$$

表达为：

$$0 - \frac{d}{d\tau} (m \dot{x}_\mu) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} = 0$$

这正是我们期望的结果, 也与 $\mathcal{L} = -mc\sqrt{-\dot{x}^2}$ 满足的拉氏方程结论一致.

⁶切忌把 $\tilde{\mathcal{L}}$ 曲解为自由粒子的动能. 请愿意动脑筋的同学想想其中的道理.

依托新拉氏函数 $\tilde{\mathcal{L}}$ 的勒让德变换可以建立起自由粒子有意义的哈密顿表述.

- 视 $x^\mu(\tau)$ 为粒子的正则坐标, 共轭的正则动量定义为:

$$\tilde{\pi}_\mu = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}^\mu} = m\dot{x}_\mu = mU_\mu$$

- 按照勒让德变换, 自由粒子的哈密顿量定义为⁷:

$$\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\pi}_\mu \dot{x}^\mu - \tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2m} \tilde{\pi}_\mu \tilde{\pi}^\mu = \frac{1}{2m} \tilde{\pi}^2 < 0$$

因此, 自由粒子的哈密顿正则运动方程组为:

$$\boxed{\frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{\pi}^\mu} = \tilde{\pi}_\mu, \quad \frac{d\tilde{\pi}_\mu}{d\tau} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial x^\mu} = 0} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} = 0$$

⁷也不能把 $\tilde{\mathcal{H}}$ 曲解为自由粒子的动能.

- 因为

$$\frac{d\tilde{\pi}_\mu}{d\tau} = 0$$

$\tilde{\pi}_\mu = mU_\mu$ 实际上描写了自由粒子的一组守恒量，通常将其标记为 4-动量：

$$p_\mu = mU_\mu = m\gamma_u(-c, u_i)$$

- 这个守恒量 4-矢量的时间分量与空间分量分别对应于自由粒子作用量泛函在时间平移与空间平移变换下的不变性，因此可以诠释为粒子的能量 E 与动量 \mathbf{p} ：

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \quad \rightsquigarrow \quad p_\mu = \left(-\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right)$$

- 质壳条件 $\dot{x}^2 = -c^2$ 可用粒子的 4-动量等价地表达为：

$$p_\mu p^\mu = -m^2 c^2 \quad \rightsquigarrow \quad p^2 = -m^2 c^2$$

它实际上就是相对论意义下自由粒子的能量、动量关系式 $E^2 = m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2$ 。

- 根据 4-动量的定义 $p^\mu = mU^\mu$ 以及 4-速度 U^μ 和粒子物理速度 u 之间的关系, 相对论意义下粒子能量、动量表达为:

$$E = cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}, \quad p = \frac{mu}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$$

即使粒子静止不动, 它也具有非零的能量:

$$E_0 = mc^2$$

有质量粒子静止能量的揭示是狭义相对论最重要的成果之一, 它为原子能的开发与利用奠定了理论基础.

- 粒子因为运动而具有的能量称为动能. 因此, 相对论力学中粒子动能的定义是:

$$K = mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} - 1 \right]$$

不难证明在 $u \ll c$ 的低速近似下, K 的上述表达式将回归牛顿力学中质点动能的表达式:

$$K \approx \frac{1}{2}mu^2$$

自由标量场

设 $\Phi(x)$ 为 \mathbb{M}_4 中的标量场, 其拉氏密度可定义为:

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\Phi^2 \quad \rightsquigarrow \quad [\Phi] = M^{\frac{1}{2}}T^{-\frac{1}{2}}$$

式中 m 称为标量场 $\Phi(x)$ 的质量参数, $[m] = M$. 我们默认 m 为 4-标量, 如此 \mathcal{L} 明显是 4-标量, 从而从源头上保证了此标量场理论的参考系选择无关性.

因为 \mathcal{L} 中未包含相互作用项, 此拉氏密度描写的实际上是一个自由标量场的演化. 拉氏方程为:

$$\partial_\mu\partial^\mu\Phi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\Phi = 0$$

这是一个洛伦兹不变的波动方程. $m \neq 0$ 意味着此标量场波动的传播速度小于光速 c .

现在把标量场的描写纳入到哈密顿程式. 以 $\Phi(x)$ 作为相空间中场的正则坐标, 与之共轭的正则动量定义为:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \Phi(x))} = -\partial_0 \Phi(x) = \partial^0 \Phi(x)$$

决定经典场动力学演化的哈密顿密度根据拉氏密度 \mathcal{L} 的勒让德变换定义:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x) &= \pi(x) \partial^0 \Phi(x) - \mathcal{L}(x) \\ &= -\frac{1}{2} \partial_0 \Phi(x) \partial^0 \Phi(x) + \frac{1}{2} \partial_i \Phi(x) \partial^i \Phi(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \Phi^2 \\ &= \frac{1}{2} \pi^2(x) + \frac{1}{2} \nabla \Phi(x) \cdot \nabla \Phi(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \Phi^2\end{aligned}$$

上式右端的表达式没有明晰的洛伦兹变换性质. 不过, 回忆标量场能量动量张量的定义式,

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \Phi(x))} \partial_\nu \Phi(x) - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}(x)$$

我们辨认出 $\mathcal{H}(x) = -T_{00}(x)$.

- 1 标量场的哈密顿密度 \mathcal{H} 构成二阶 4-张量的 00 分量, 它在洛伦兹变换下遵从二阶张量的变换法则.
- 2 $\mathcal{H}(x) = -T_{00}(x)$ 意味着可以在物理上把 \mathcal{H} 诠释为标量场 $\Phi(x)$ 在 \mathbb{E}_3 中的能量体密度. 换言之, 可以把 $\Phi(x)$ 场的总能量定义为:

$$\begin{aligned} H &= \int_{\Omega} \mathcal{H}(t, r) d^3x \\ &= \int_{\Omega} d^3x \left[\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \Phi^2 \right] \end{aligned}$$

最后让我们补上自由标量场 $\Phi(x)$ 的哈密顿正则方程组:

$$\partial^0 \Phi(t, r) = \frac{\delta H}{\delta \pi(t, r)} = \pi(t, r),$$

$$\partial^0 \pi(t, r) = -\frac{\delta H}{\delta \Phi(t, r)} = \nabla^2 \Phi(t, r) - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \Phi(t, r)$$

2: 应该用什么经典场描写电磁场 ?

首先看看静电学的启迪.

静电势 $\varphi(\mathbf{r})$ 是满足泊松方程的静态分布:

$$\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0$$

做代换 $\nabla^2 \rightsquigarrow \partial_\mu \partial^\mu$, 并要求源与势同时依赖于时间参数 t 和空间位矢 \mathbf{r} , 我们可以把这个方程提升为:

$$\sigma \partial_\mu \partial^\mu \phi(x) = -\lambda J(x)$$

以初步满足相对性原理的要求, 式中约定 $\sigma = \pm 1$ 与 $\lambda = \pm 1$ 是独立取值的无量纲实参数. 欲真正通过相对性原理对候选物理规律的资格审查, 还须对势 $\phi(x)$ 和源 $J(x)$ 在洛伦兹变换下的性质做出明确规定.

- 最简单的选择是假定势 $\phi(x)$ 与源 $J(x)$ 均是 4-标量场.

假设某物理场可以用势分布 $\phi(x)$ 描写, 其动力学演化方程是:

$$\sigma \partial_\mu \partial^\mu \phi(x) = -\lambda J(x)$$

其中 $J(x)$ 是 $\phi(x)$ 的源. 为符合相对性原理的要求, 我们假设 $\phi(x)$ 和 $J(x)$ 均为 \mathbb{M}_4 中的标量场, 即 4-标量场. 不难看出, 上述动力学方程可以看做是拉氏函数密度

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{\sigma}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \lambda J(x) \phi(x)$$

决定的拉氏方程.

- ① 拉氏密度中未引入标量场 $\phi(x)$ 的质量项, 相当于假设此标量场描写的波动其相速度等于光速.
- ② 源 $J(x)$ 可以是另一个标量场或者几个标量场的耦合. 我们这里不关心 $J(x)$ 本身的动力学, 仅把它看作是一个激发了 $\phi(x)$ 的 4-标量场.
- ③ $\phi(x)$ 的动力学方程在静态近似下退化为泊松方程:

$$\sigma \nabla^2 \phi(r) = -\lambda J(r)$$

$$\rightsquigarrow \phi(r) = \frac{\lambda}{4\pi\sigma} \int d^3x' \frac{J(r')}{|r - r'|}$$

标量场 $\phi(x)$ 的总能量是:

$$H = \int_{\Omega} d^3x \left(\frac{\sigma}{2} \pi^2 + \frac{\sigma}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi - \lambda J \phi \right) \quad \Leftarrow \pi = \sigma \partial^0 \phi$$

- H 积分核中的 π^2 项称为 $\phi(x)$ 场的动能项 (kinetic term). 为了保证无源的自由标量场能量有下界, 动能项必须非负.

$$\rightsquigarrow \sigma = 1.$$

- 使用矢量分析恒等式

$$\nabla \phi \cdot \nabla \phi = \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) - \phi \nabla^2 \phi$$

与场方程, 并假定

$$\phi(x) \Big|_{|r| \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

我们可以把场 $\phi(x)$ 的能量改写为:

$$H = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d^3x \left[\sigma (\partial_0 \phi)^2 - \sigma \phi \partial_0^2 \phi - \lambda J \phi \right]$$

此处暂时保留了参数 σ 取值的不确定.

- 对于静止的源所激发的静场，

$$J(x) = J(r), \quad \phi(x) = \phi(r) \quad \rightsquigarrow \quad \partial_0 \phi = \partial_0^2 \phi = 0$$

场的能量表达为：

$$H = -\frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} d^3x J(r) \phi(r)$$

亦即：

$$H = -\frac{\lambda^2}{8\pi\sigma} \int d^3x \int d^3x' \frac{J(r')J(r)}{|r - r'|}$$

- 倘若激发静场分布 $\phi(r)$ 的源是两个点状荷，

$$J(r) = Q_1 \delta^{(3)}(r - r_1) + Q_2 \delta^{(3)}(r - r_2)$$

它们以标量场 $\phi(r)$ 为媒介发生相互作用的相互作用能量为：

$$\mathcal{W}_{12} = -\frac{\lambda^2}{4\pi\sigma} \frac{Q_1 Q_2}{|r_1 - r_2|}$$

审视

$$\mathcal{W}_{12} = -\frac{\lambda^2}{4\pi\sigma} \frac{Q_1 Q_2}{|r_1 - r_2|}$$

我们看到：

- ① 两个同号的点场源之间的相互作用究竟是斥力还是引力与参数 λ 的取值无关, 但强烈地依赖于参数 σ 的取值.
- ② 倘若可以取 $\sigma = -1$, 则 Q_1 和 Q_2 同号时 $\mathcal{W}_{12} > 0$, 表明二点场源之间存在的是斥力. 不幸的是, 这是一个虚假的可能性.
- ③ 标量场 $\phi(x)$ 的相对论性理论要求 $\sigma = 1$. Q_1 和 Q_2 同号时 $\mathcal{W}_{12} < 0$. 换言之, 二个同号的点场源之间通过标量场作为媒介传递的相互作用力是引力.
- ④ 所以, 在狭义相对论意义下, 电磁场的势不能用标量场描写⁸.

既然标量场不能胜任, 我们只好探索用矢量场描写电磁场的可能性.

⁸那么, 相对论意义下万有引力的势可否用标量场描写呢?

回到静电势泊松方程的相对论性提升方程：

$$\sigma \partial_\mu \partial^\mu \phi(x) = -\lambda J(x)$$

既然不能把势 $\phi(x)$ 和源 $J(x)$ 看做 4-标量场, 那么接下来最简单的能满足相对性原理要求的方案是假设它们形成 4-矢量场的时间分量：

$$A^\mu(x) = (\phi(x), A(x)), \quad J^\mu(x) = (J(x), J(x))$$

从而把静电势泊松方程在相对论意义下重新提升为：

$$\sigma \partial_\mu \partial^\mu A_\nu(x) = -\lambda J_\nu(x)$$

容易验证, $A_\nu(x)$ 服从的这个波动方程恰好是洛伦兹不变的拉氏密度

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{\sigma}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \lambda J^\mu A_\mu$$

所决定的拉氏方程.

- ① 为叙事方便起见, 我们暂时把 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 称为候选电磁势.
- ② 拉氏密度中未出现 $A_\mu(x)$ 的质量项,

$$-\frac{1}{2}\mu^2 A^\mu A_\mu$$

相当于承认候选电磁势描写的波动其相速度等于光速.

- ③ 我们知道电磁场的源是电荷电流分布. 因此, 可以把 $J^\mu(x)$ 称为电流密度 4-矢量. 这里不关心 $J^\mu(x)$ 本身的动力学, 仅把它看作是一个激发了 $A_\mu(x)$ 的 4-矢量场.
- ④ 矢量场 $A_\mu(x)$ 的动力学方程在静态近似下退化为“泊松”方程:

$$\sigma \nabla^2 A_\mu(r) = -\lambda J_\mu(r)$$

其在无界空间的解为:

$$A_\mu(r) = \frac{\lambda}{4\pi\sigma} \int d^3x' \frac{J_\mu(r')}{|r - r'|}$$

矢量场 $A_\mu(x)$ 的能量动量张量是：

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\rho)} \partial_\nu A^\rho - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= -\sigma \partial_\mu A_\rho \partial_\nu A^\rho + \eta_{\mu\nu} \left(\frac{\sigma}{2} \partial_\alpha A_\beta \partial^\alpha A^\beta - \lambda J^\rho A_\rho \right) \end{aligned} \quad \boxed{\rightsquigarrow \partial^\mu T_{\mu\nu} = 0}$$

由此知其 \mathbb{E}_3 中的能量体密度为：

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -T_{00} \\ &= \sigma \partial_0 A_\rho \partial_0 A^\rho + \frac{\sigma}{2} \partial_\alpha A_\beta \partial^\alpha A^\beta - \lambda J^\rho A_\rho \\ &= \frac{\sigma}{2} \eta^{\mu\nu} (\pi_\mu \pi_\nu + \nabla A_\mu \cdot \nabla A_\nu) - \lambda J^\rho A_\rho \end{aligned}$$

式中

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 A^\mu)} = -\sigma \partial_0 A_\mu$$

是相空间中与正则坐标 $A_\mu(x)$ 共轭的正则动量.

矢量场 $A_\mu(x)$ 的总能量为：

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \left(\frac{\sigma}{2} \eta^{\mu\nu} \pi_\mu \pi_\nu + \frac{\sigma}{2} \eta^{\mu\nu} \nabla A_\mu \cdot \nabla A_\nu - \lambda J^\rho A_\rho \right)$$

假定

$$A_\mu(x) \Big|_{|r| \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

我们可以把场的总能量改写为：

$$H = \int d^3x \left[\frac{\sigma}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_0 A_\mu) (\partial_0 A_\nu) - \frac{\sigma}{2} A^\mu (\partial_0^2 A_\mu) - \frac{\lambda}{2} J^\mu A_\mu \right]$$

对于静止的源 $J^\mu(r)$ 所激发的静场 $A_\mu(r)$,

$$H = -\frac{\lambda}{2} \int d^3x J^\mu(r) A_\mu(r) = -\frac{\lambda}{8\pi\sigma} \iint d^3x d^3x' \frac{J^\mu(r) J_\mu(r')}{|r - r'|}$$

倘若激发静场分布 $A_\mu(r)$ 的源是两个点“电荷”，

$$J^\mu(r) = \delta_0^\mu \left[Q_1 \delta^{(3)}(r - r_1) + Q_2 \delta^{(3)}(r - r_2) \right]$$

它们以矢量场 $A_\mu(r)$ 为媒介发生相互作用的相互作用能量为⁹:

$$\mathcal{W}_{12} = \frac{\lambda^2}{4\pi\sigma} \frac{Q_1 Q_2}{|r_1 - r_2|}$$

- ① 与标量场情形类似, 两个同号的点场源之间的相互作用究竟是斥力还是引力与参数 λ 的取值无关, 但强烈地依赖于参数 σ 的取值.
- ② 倘若可以取 $\sigma = 1$, 则 Q_1 和 Q_2 同号时 $\mathcal{W}_{12} > 0$, 表明二点“电荷”之间存在的是斥力. 这正是我们所需要的结果.
- ③ 不幸的是我们并无过硬的理由能强取 $\sigma = 1$. 这是因为矢量场 $A_\mu(x)$ 能量密度表达式中的动能项是:

$$\frac{1}{2} \sigma \eta^{\mu\nu} \pi_\mu \pi_\nu = \frac{1}{2} \sigma \left[-(\pi_0)^2 + \sum_{i=1}^3 (\pi_i)^2 \right] \quad \rightsquigarrow \text{Failure!}$$

⁹ 勿忘记 $J_0(r) = -J^0(r)$.

基础物理述评教程 (2011年科学出版社出版的图书)

 播报

 编辑

 讨论 ²

 上传视频

《基础物理述评教程》是2011年科学出版社出版的图书，作者是潘根。本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，其前一版是教育部“面向21世纪”系列教材，被全国高等院校教学研究中心列入“优秀教材”行列。

书 名	基础物理述评教程	出版时间	2011-07
作 者	潘根	定 价	74 元
出版社	科学出版社	开 本	16 开
		ISBN	9787030317940

Let There be Light



Hermann Weyl (1855–1955)

- 前面的分析使我们悟到：倘若电磁势可以形成一个 4-矢量场 $A_\mu(x)$ ，则其时间分量 $A_0(x)$ 与空间分量 $A_i(x)$ 不能彼此独立。
- 具体实现了这个设想的方案是外尔 (H. Weyl) 提出的规范原理。
- 规范原理之所以能名扬天下、最后发展成为物理学中决定基本相互作用力的一条铁律，归功于 1954 年 Yang-Mills 非阿贝尔规范理论的诞生。

杨振宁与米尔斯(Mills):



获诺奖时的杨帅哥 (1957):



华人物理学家的双子星：



我们也不能忘记和杨振宁先生一起为华人争光的李政道先生. 李杨因正确地预言了弱作用过程中宇称不守恒而分享了 1957 年度的诺贝尔物理学奖金.

感动中国人物之百岁物理学家杨振宁 (2021):



颁奖词:

站在科学和传统的交叉点上, 惊人艳艳. 你贡献给世界的如此深奥, 懂的人不多; 你奉献给祖国的如此纯真, 我们都明白. 曾经, 你站在世界前排; 现在, 你与国家一起向未来.

外尔提出规范原理最初的目的是想构造引力与电磁相互作用的统一理论 (1918). 随着广义相对论 (GR) 的诞生 (1916), 我们有了一个描写引力的相对论性理论. GR 中存在着两个描写时空性质的动力学变量

$$g_{\mu\nu}(x), \quad \Gamma_{\nu\rho}^{\mu}(x)$$

$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}(x)$ 称为仿射联络, 它用于定义 4-张量场的协变微商. 例如:

$$\nabla_{\mu} A^{\nu} = \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu\rho}^{\nu} A^{\rho}, \quad \nabla_{\mu} B_{\nu\rho} = \frac{\partial B_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} B_{\sigma\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} B_{\nu\sigma}$$

- GR 通过假设 $\nabla_{\mu} g_{\rho\sigma} = 0$, 使得 $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}(x)$ 与 $g_{\mu\nu}(x)$ 不独立. 这是一个纯粹的引力理论.
- 外尔试图通过把条件 $\nabla_{\mu} g_{\rho\sigma} = 0$ 替换为

$$(\nabla_{\mu} + A_{\mu}) g_{\rho\sigma} = 0$$

使得 $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}(x)$, $g_{\mu\nu}(x)$ 和新引入的 4-矢量场 $A_{\mu}(x)$ 三者之间彼此依赖. 如此构建的理论实际上在引力之外还涉及到了其他的相互作用力.

外尔理论的作用量泛函存在着一种新的对称性：

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu}(x) &\rightsquigarrow g'_{\mu\nu}(x) = \omega^2(x)g_{\mu\nu}(x), \\ A_\mu(x) &\rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu [\ln \omega^2(x)]\end{aligned}$$

- 这个对称变换与时空坐标 x^μ 的变换无关, 纯粹是场的变换. 对于 $g_{\mu\nu}(x)$ 而言, 它实际上是尺度伸缩变换 (Conformal).
- 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 的变换方式恰好是电磁势的规范变换, 因此外尔把 $A_\mu(x)$ 诠释成了电磁势.
- 爱因斯坦对外尔的电磁引力统一理论持反对态度. 如果外尔的理论是正确的, 那么引力场中原子发光的频率不仅依赖于原子目前的位置、也依赖于它的演化历史. 这个推论与实验相悖. 外尔早期关于规范变换的努力是一次失败的尝试.

量子力学(1925)、特别是波动力学(1926)问世后, 沉寂了大约十年的外尔重新研究了规范变换. 这一次他取得了重大成功!

20 世纪初叶, 伴随着原子光谱学的发展, 物理学家们逐渐认识到光与实物粒子都具有波动、粒子二重性. 正确地描写了电子等实物粒子波粒二象性的理论是所谓非相对论性量子力学:

- 实物粒子的状态由波函数 $\Psi(x)$ 描写. $\Psi(x)$ 本身不是可观测量、没有物理意义, 但 $|\Psi(x)|^2$ 是发现粒子的概率体密度.
- 波函数 $\Psi(x)$ 随时间的演化遵从薛定谔方程. 自由粒子的薛定谔方程为:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi$$

倘若不计粒子的自旋, 则自由粒子薛定谔方程的相对论性对应是所谓的 Klein-Gordon 方程:

$$\partial_\mu \partial^\mu \Psi(x) - \mu^2 \Psi(x) = 0$$

此处“波函数” $\Psi(x)$ 是一个 4-标量场, 其有效的质量参数为 $\mu = mc/\hbar$.

- 根据波函数的概率诠释(见上页), $\Psi(x)$ 与 $\Psi(x) \exp(i\theta)$ 在描写实物粒子量子态方面是完全等价的:

$$\Psi(x) \sim \Psi'(x) = \Psi(x) \exp(i\theta), \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

的确, $|\Psi(x)|^2 = |\Psi'(x)|^2$, 且当 θ 取实常数时 $\Psi(x)$ 与 $\Psi'(x)$ 服从同一个波动方程.

2: 倘若 $\theta = \theta(x)$, 等价性 $\Psi(x) \sim \Psi'(x) = \Psi(x) \exp(i\theta)$ 是否还存在?

朴素地看, 虽然 $\Psi(x)$ 与 $\Psi'(x) = \Psi(x)e^{i\theta(x)}$ 仍具有相同的绝对值¹⁰,

$$|\Psi(x)|^2 = |\Psi'(x)|^2$$

但因为

$$\partial_\mu \Psi'(x) = \partial_\mu [\Psi(x)e^{i\theta(x)}] = e^{i\theta(x)} [\partial_\mu \Psi(x) + i\Psi(x)\partial_\mu \theta(x)]$$

$\Psi(x)$ 与 $\Psi'(x) = \Psi(x)e^{i\theta(x)}$ 不满足相同的波动方程 \rightsquigarrow 不再等价.

¹⁰默认 $\theta(x) \in \mathbb{R}$.

外尔的规范原理

外尔的想法 (1929) 与众不同, 他认为:

- 波函数的概率诠释是量子力学中必须坚守的基本原则. 换言之, $\Psi(x)$ 与 $\Psi'(x) = \Psi(x)e^{i\theta}$ 在 $\theta = \theta(x)$ 情形下也是等价的.
- $\Psi(x)$ 与 $\Psi'(x) = \Psi(x)e^{i\theta(x)}$ 不能满足自由粒子波函数的波动方程, 说明自然界不存在真正的自由粒子. 实物粒子都要参与某种由 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 传递的相互作用.
- 为了标记实物粒子参与的相互作用, 外尔假设实物粒子携带某种荷 q . 为了让 $\Psi(x)$ 与 $\Psi'(x)$ 满足相同的波动方程, 外尔假设必须在波动方程中把 ∂_μ 替换为协变导数算符

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu(x)$$

如此应摒弃 Klein-Gordon 方程, 而改用如下波动方程

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \Psi(x) - \mu^2 \Psi(x) = 0$$

描写实物粒子波动性.

- 当实物粒子波函数发生位相变换

$$\Psi(x) \rightsquigarrow \Psi'(x) = \Psi(x)e^{iq\theta(x)}$$

时, 作为相互作用媒介的 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 要发生一个伴随的规范变换:

$$A_\mu(x) \rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x)$$

如此,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \Psi(x) &\rightsquigarrow \mathcal{D}'_\mu \Psi'(x) = [\partial_\mu - iqA'_\mu(x)] [\Psi(x)e^{iq\theta(x)}] \\ &= e^{iq\theta(x)} [\partial_\mu + iq\partial_\mu\theta(x) - iqA'_\mu(x)] \Psi(x) \\ &= e^{iq\theta(x)} [\partial_\mu - iqA_\mu(x)] \Psi(x) \\ &= e^{iq\theta(x)} \mathcal{D}_\mu \Psi(x) \end{aligned}$$

同理有:

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \Psi(x) \rightsquigarrow \mathcal{D}'_\mu \mathcal{D}'^\mu \Psi'(x) = e^{iq\theta(x)} \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \Psi(x)$$

这样, 实物粒子波函数满足的波动方程

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \Psi(x) - \mu^2 \Psi(x) = 0$$

在联合变换

$$\Psi(x) \rightsquigarrow \Psi'(x) = \Psi(x) e^{iq\theta(x)}, \quad A_\mu(x) \rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)$$

下实际上是不变的:

$$\mathcal{D}'_\mu \mathcal{D}'^\mu \Psi'(x) - \mu^2 \Psi'(x) = e^{i\theta(x)} [\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \Psi(x) - \mu^2 \Psi(x)] = 0$$

- 变换因子 $e^{i\theta(x)}$ 的全体按普通乘法形成 $U(1)$ 群. 因此, 上述联合变换称为局域的 $U(1)$ 规范变换. 4 -矢量场 $A_\mu(x)$ 称为 $U(1)$ 规范势, 其描写的相互作用传递媒介称为 $U(1)$ 规范场.
- 规范变换的存在意味着规范势 $A_\mu(x)$ 与

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x), \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

在描写 $U(1)$ 规范场方面完全等价. 因此, 规范势 $A_\mu(x)$ 的分量并不都是独立的动力学变量. 例如可以按 $A'_0(x) = \partial_0 \theta(x)$ 选择规范变换函数 $\theta(x) \rightsquigarrow A_0(x) = 0$.

- 规范变换函数 $\theta(x)$ 从物理上讲是完全任意的. 如果有需要, $\theta(x)$ 可以人为地随意指定. 指定 $\theta(x)$ 这件事通常称为选择“规范”. 例如可以通过求解微分方程

$$\partial^\mu A'_\mu(x) = \partial^\mu \partial_\mu \theta(x)$$

指定 $\theta(x)$, 它相当于是要求:

$$\partial^\mu A_\mu(x) = 0$$

这样确定的规范称为洛伦茨 (Lorenz) 规范. 洛伦茨规范最突出的优点是它具有参考系选择无关性, 因此是电动力学中最常用的规范选择. 电动力学中另一个使用频率较高的规范选择是库仑规范:

$$\nabla \cdot A(x) = \partial^i A_i(x) = 0$$

它没有参考系选择无关性. 前页提到的

$$A_0(x) = 0$$

也是一个合理的 (非洛伦兹协变的) 规范选择.

外尔规范原理小结：

- 1 波函数 $\Psi(x)$ 与 $\Psi(x)e^{iq\theta(x)}$ 的等价性要求实物粒子必须携带某种荷 q , 参与由规范势 $A_\mu(x)$ 传递的 $U(1)$ 规范相互作用, 使得 $\Psi(x)$ 满足波动方程¹¹:

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \Psi(x) - \mu^2 \Psi(x) = 0$$

式中 $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu(x)$.

- 2 物质场 $\Psi(x)$ 与规范势 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 的变换

$$\Psi(x) \rightsquigarrow \Psi'(x) = \Psi(x)e^{iq\theta(x)}, \quad A_\mu(x) \rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)$$

统称为 (局域的) $U(1)$ 规范变换.

- 3 物质场 $\Psi(x)$ 的波动方程

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \Psi(x) - \mu^2 \Psi(x) = 0$$

在局域规范变换下具有不变性. 这就是俗称的局域规范对称性.

¹¹ 此处假定 $\Psi(x)$ 是 4-标量场, 描写无自旋标量粒子的波动性.

\mathcal{E} : $U(1)$ 规范场就是电磁场.

- ① 通过之前的讨论我们知道一个不受约束的 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 并不能逻辑自洽地描写电磁势. 但如果进一步要求 $A_\mu(x)$ 是 $U(1)$ 规范势, 即要求 $A_\mu(x)$ 的拉氏密度具有局域规范变换

$$A_\mu(x) \rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)$$

下的不变性, 则 $A_\mu(x)$ 正是电磁场的势.

现在给出详细解释.

倘若电磁势可以用一个 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 描写, 那么用于构造电磁场拉氏密度的“元器件”只能如下五种 4-张量:

$$A_\mu(x), \quad \partial_\mu A_\nu(x), \quad J^\mu(x), \quad \eta_{\mu\nu}, \quad \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$$

此处 $J^\mu(x)$ 是电流密度 4-矢量. 在电磁场拉氏密度中使用 $J^\mu(x)$ 是为了反映电荷电流是电磁场场源的基本实验事实.

- 类比于标量场 $\Phi(x)$ 拉氏密度中的动能项,

$$\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi(x) \partial^\mu \Phi(x)$$

我们朴素地猜测电磁场 $A_\mu(x)$ 拉氏密度中的动能项是用“广义速度” $\partial_\mu A_\nu(x)$ 构造出的如下 4-标量:

$$\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu(x) \partial^\mu A^\nu(x)$$

引入“广义速度”的对称与反对称组合

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$$

$$G_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) + \partial_\nu A_\mu(x)$$

我们看到:

$$\partial_\mu A_\nu(x) = \frac{1}{2} [F_{\mu\nu}(x) + G_{\mu\nu}(x)]$$

猜测的电磁势动能项可以改写为：

$$\frac{1}{2} \partial_{\mu} A_{\nu}(x) \partial^{\mu} A^{\nu}(x) = \frac{1}{8} \left[F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + G_{\mu\nu}(x) G^{\mu\nu}(x) \right]$$

然而只有 $F_{\mu\nu}(x)$ 才是规范不变的场强, $G_{\mu\nu}(x)$ 并不具有规范变换下的不变性.

- ① 电磁场拉氏密度的动能项只能考虑规范不变的 4-标量：

$$F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)$$

而 $G_{\mu\nu}(x) G^{\mu\nu}(x)$ 项必须舍弃.

- ② 倘若采取国际单位制并计及电磁相互作用过程中的时间反演对称性和宇称守恒定律, 一般把电磁场拉氏密度中的动能项取为：

$$\mathcal{L}_K(x) = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)$$

式中 μ_0 为真空的磁导率.

- $F_{\mu\nu}(x)$ 称为法拉第张量, 或称为电磁场张量. 当电磁势做规范变换 $A_\mu(x) \rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x)$, 电磁场张量

$$F_{\mu\nu}(x) \equiv \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$$

的变换法则是:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(x) \rightsquigarrow F'_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu A'_\nu(x) - \partial_\nu A'_\mu(x) \\ &= \partial_\mu [A_\nu(x) + \partial_\nu\theta(x)] - \partial_\nu [A_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x)] \\ &= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \\ &= F_{\mu\nu}(x) \end{aligned}$$

即 $F_{\mu\nu}(x)$ 是规范变换下的不变量.

- 通过求 $F_{\rho\sigma}$ 与 \mathbb{M}_4 中全反对称不变张量 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 的缩并, 可以定义所谓对偶电磁场张量:

$$\mathcal{F}^{\mu\nu}(x) \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}(x)$$

它显然也是规范变换下的不变量.

- $\mathcal{F}^{\mu\nu}(x)$ 与 $F_{\mu\nu}(x)$ 的缩并可以形成如下规范不变的 4-标量:

$$\mathcal{F}^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)$$

这个 4-标量是 $\partial_\mu A_\nu(x)$ 的二次型. 或许我们可以考虑把它作为电磁场拉氏密度动能项的一个候选者. 然而由于 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 不是时间反演变换和空间反射变换下的不变张量¹², 这个 4 标量出现在拉氏密度中会破坏电磁相互作用过程中的宇称守恒. 计及这一点, 电磁场的拉氏密度中一般并不包括这个规范不变的 4-标量.

- 普通的 4-矢量场 $A_\mu(x)$ 的拉氏密度中可以包含一个质量项

$$\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A_\mu(x)A^\mu(x)$$

但此质量项也不具备规范变换下的不变性, 因此不能出现在电磁场的拉氏密度中.

¹² $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 在时间反演变换和空间反射变换下会改变符号.

答疑：

课后 (20220324) 有同学问：电磁场拉氏密度动能项中是否可以包含如下“广义速度”的二次型

$$(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) = (\partial_\mu A^\mu)^2$$

答案是不可以.

$\partial_\mu A^\mu(x)$ 没有规范变换 $A_\mu(x) \rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)$ 下的不变性：

$$\partial_\mu A^\mu(x) \rightsquigarrow \partial_\mu A'^\mu(x) = \partial_\mu A^\mu(x) + \partial_\mu \partial^\mu \theta(x)$$

问题中的二次型在规范变换下变成了：

$$(\partial_\mu A'^\mu)^2 = (\partial_\mu A^\mu)^2 + 2(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu \partial^\nu \theta) + (\partial_\nu \partial^\nu \theta)^2$$

即使分离出一些全导数项(丢掉), 也无法按照某个合理的理由把上式中涉及规范变换函数 $\theta(x)$ 的项全丢弃. 二次型 $(\partial_\mu A^\mu)^2$ 虽然是 4-标量, 但因其不具备规范变换下的不变性, 它没有资格出现在电磁场的拉氏密度中.

或许有同学读到某些参考书¹³上把电磁场拉氏密度的动能项写成了

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$$

上式的结果与本讲义前页的答疑并无内在矛盾. 上式右端两项均无规范变换下的对称性, 但二者之和是规范不变的. 以我之见, 上式的做法不是从第一原理出发构造拉氏密度, 它只不过是在知道了拉氏密度的正确形式后凑答案而已. 不难看出:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= 2\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - 2\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu \\ &= 2\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - 2\partial_\mu (A_\nu \partial^\nu A^\mu) + 2A_\nu \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) \\ &= 2\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - 2\partial_\mu (A_\nu \partial^\nu A^\mu) + 2\partial^\nu (A_\nu \partial_\mu A^\mu) - 2(\partial_\mu A^\mu)^2 \end{aligned}$$

丢弃了无关紧要的全导数项后, 我们有:

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$$

¹³例如网红讲义: David Tong, Quantum Field Theory, Eq.(1.18), Page 16.

- 根据 $A_\mu(x)$ 与 $F_{\mu\nu}(x)$ 还可以构造出两个 4-标量:

$$A_\mu(x)A_\nu(x) \begin{cases} F^{\mu\nu}(x) \\ \mathcal{F}^{\mu\nu}(x) \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \mathcal{F}^{\mu\nu}(x) \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}(x)$$

姑且不论此二 4-标量在规范变换下是否不变, 因为它们恒等于零, 它们自然不会出现在电磁场的拉氏密度中.

- 电磁场拉氏密度的相互作用项有如下候选 4-标量:

$$J^\mu(x)A_\mu(x)$$

在规范变换下, $J^\mu(x)A_\mu(x)$ 的变换性质是:

$$\begin{aligned} J^\mu(x)A'_\mu(x) &= J^\mu(x)A_\mu(x) + J^\mu(x)\partial_\mu\theta(x) \\ &= J^\mu(x)A_\mu(x) + \partial_\mu[J^\mu(x)\theta(x)] - [\partial_\mu J^\mu(x)]\theta(x) \end{aligned}$$

上式右端第二项 $\partial_\mu(J^\mu\theta)$ 是全导数项, 它的存在与否不影响作用量泛函, 可以视而不见. 欲使 $J^\mu(x)A_\mu(x)$ 具有规范变换下的不变性, 必要条件是存在电荷守恒定律, $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$.

- 通常把电流密度 4-矢量 $J^\mu(x)$ 的分量形式表为：

$$J^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$$

式中 $\rho(x)$ 与 $\mathbf{j}(x)$ 分别诠释为电荷电流体系的电荷体密度与电流密度矢量。如此，洛伦兹不变的连续性方程

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

可以用分量形式重新表达为：

$$\frac{\partial \rho(r, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}(r, t) = 0$$

其积分形式是：

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(r, t) d^3x = - \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}$$

这正是我们期望的电荷守恒定律。之所以存在电荷守恒定律，是因为电磁相互作用具有 $U(1)$ 规范变换下的对称性。

- 电磁场拉氏密度的相互作用项似乎还可以有如下几个候选4-标量：

$$J^\mu(x)J^\nu(x) \left\{ \begin{array}{l} F_{\mu\nu}(x) \\ \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) \end{array} \right. , \quad J^\mu(x)A^\nu(x) \left\{ \begin{array}{l} F_{\mu\nu}(x) \\ \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) \end{array} \right.$$

然而前二者恒为零, 后二者不具有规范变换下的不变性. 因此, 它们都无资格出现在电磁场的拉氏密度表达式中.

综合起来, 倘若我们不考虑4-电流密度 $J^\mu(x)$ 本身的动力学, 则电磁场的动力学应决定于如下拉氏函数密度:

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + J^\mu(x) A_\mu(x)$$

拉氏密度中, 两项的系数原则上都是任意的, 对其做出具体规定相当于选择了某种特殊的单位制¹⁴. 按此拉氏密度, 我们有:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu(x)} = J^\nu(x), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu(x))} = -\frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu}(x)$$

¹⁴我们采取国际单位制, μ_0 是真空的磁导率, 并按习惯取 $\lambda = 1$.

代入到电磁场的拉氏方程

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu(x))} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu(x)} = 0$$

可以将其明确地表为：

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = -\mu_0 J^\nu(x)$$

这就是电磁场的动力学方程. 此外, 根据电磁场张量的定义式

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$$

不难看出 $F_{\mu\nu}(x)$ 还须服从约束条件：

$$\partial_\rho F_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu F_{\nu\rho}(x) + \partial_\nu F_{\rho\mu}(x) = 0$$

假若你愿意, 你可以把此约束条件称为电磁场张量必须满足的毕安琪 (Bianchi) 恒等式. 拉氏方程与毕安琪恒等式联合提供了描写电磁场性质的理论基础, 它们就是协变形式的 Maxwell 方程组.

计算 Levi-Civita 全反对称张量 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 与电磁场毕安琪恒等式

$$\partial_\rho F_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu F_{\nu\rho}(x) + \partial_\nu F_{\rho\mu}(x) = 0$$

的缩并, 我们有:

$$\begin{aligned} 0 &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left[\partial_\rho F_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu F_{\nu\rho}(x) + \partial_\nu F_{\rho\mu}(x) \right] \\ &= -\partial_\rho \left[\epsilon^{\sigma\rho\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) \right] - \partial_\mu \left[\epsilon^{\sigma\mu\nu\rho} F_{\nu\rho}(x) \right] - \partial_\nu \left[\epsilon^{\sigma\nu\rho\mu} F_{\rho\mu}(x) \right] \\ &= 3\partial_\rho \left[\epsilon^{\rho\sigma\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) \right] \end{aligned}$$

借助于对偶电磁场张量

$$\mathcal{F}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}(x)$$

我们最终把电磁场的毕安琪恒等式简洁地表达为:

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu}(x) = 0$$

电磁场张量 $F_{\mu\nu}(x)$ 的物理内涵：

电磁场张量

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$$

是闵氏空间 \mathbb{M}_4 中的 2 阶反对称张量, $F_{\mu\nu}(x) = -F_{\nu\mu}(x)$, 其独立分量的数目为

$$\left. \frac{d(d-1)}{2} \right|_{d \rightarrow 4} = 6$$

我们规定这些分量的物理内涵为：

$$F^{0i} = \frac{1}{c} E^i, \quad F^{ij} = \epsilon^{ijk} B_k$$

或者等价地,

$$E^i = c F^{0i}, \quad B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F^{jk}$$

此处 $\mathbf{E} = E^i \mathbf{e}_i$ 与 $\mathbf{B} = B^i \mathbf{e}_i$ 是欧氏空间 \mathbb{E}_3 中电磁场的电场强度与磁感应强度.

现在讨论电磁场基本方程组

$$\frac{1}{\mu_0} \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = -J^\nu(x), \quad \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu}(x) = 0$$

的物理内涵：

- 拉氏方程 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 J^\nu$ 在 $\nu = 0$ 时表达为：

$$-\mu_0 c \rho = -\mu_0 J^0 = \partial_\mu F^{\mu 0} = \partial_i F^{i0} = -\frac{1}{c} \partial_i E^i = -\frac{1}{c} \nabla \cdot E$$

回忆初等电磁学或者物理光学等前置课程中学过的光速与电磁常数的关系，

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

上式可改写为：

$$\nabla \cdot E = \rho / \epsilon_0$$

这正是电高斯定律.

- 拉氏方程 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 J^\nu$ 在 $\nu = i$ 时表达为：

$$\begin{aligned} -\mu_0 j^i &= -\mu_0 J^i = \partial_\mu F^{\mu i} = \partial_0 F^{0i} + \partial_k F^{ki} \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial E^i}{\partial t} + \epsilon^{kij} \partial_k B_j \\ &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E^i}{\partial t} - (\nabla \times \mathbf{B})^i \end{aligned}$$

亦即：

$$\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}$$

这是安培麦克斯韦方程, 其中包含着位移电流修正项.

- 欲了解毕安琪恒等式的物理内涵, 须事先了解对偶电磁场张量 $\mathcal{F}^{\mu\nu}(x)$ 的物理内涵 (Optional):

$$\mathcal{F}^{0i} = B^i, \quad \mathcal{F}^{ij} = -\frac{1}{c} \epsilon^{ijk} E_k$$

或者等价地,

$$B^i = \mathcal{F}^{0i}, \quad E_i = -\frac{c}{2} \epsilon_{ijk} \mathcal{F}^{jk}$$

- 毕安琪恒等式 $\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu}(x) = 0$ 在 $\nu = 0$ 情形下表达为：

$$0 = \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu 0} = \partial_i \mathcal{F}^{i0} = -\partial_i B^i$$

亦即：

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

这是磁高斯定律. 从归纳法的视角看, 这是电磁场能获得规范场属性的实验基础. 它也在经典场论意义下排除了点磁荷存在的可能性¹⁵.

- 毕安琪恒等式 $\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu}(x) = 0$ 在 $\nu = i$ 情形下表达为：

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu i} = \partial_0 \mathcal{F}^{0i} + \partial_k \mathcal{F}^{ki} = \frac{1}{c} \frac{\partial B^i}{\partial t} - \frac{1}{c} \epsilon^{kij} \partial_k E_j \\ &= \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} \right)^i \end{aligned}$$

亦即：

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

这是法拉第电磁感应定律.

¹⁵但磁高斯定律原则上仍允许磁单极的存在.

两个重要的 4-标量

使用电磁场张量与其对偶张量, 可以构造出如下两个彼此独立的洛伦兹标量:

$$F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x), \quad F_{\mu\nu}(x)\mathcal{F}^{\mu\nu}(x)$$

它们的物理内涵分别是:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= F_{0\nu}F^{0\nu} + F_{i\nu}F^{i\nu} = F_{0j}F^{0j} + F_{i0}F^{i0} + F_{ij}F^{ij} \\ &= -\frac{2}{c^2}E_iE^i + \epsilon_{ijk}\epsilon^{ijl}B^kB_l \\ &= 2\left(\mathbf{B}^2 - \frac{\mathbf{E}^2}{c^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} &= F_{0\nu}\mathcal{F}^{0\nu} + F_{i\nu}\mathcal{F}^{i\nu} = F_{0j}\mathcal{F}^{0j} + F_{i0}\mathcal{F}^{i0} + F_{ij}\mathcal{F}^{ij} \\ &= -\frac{2}{c}E_iB^i - \frac{1}{c}\epsilon_{ijk}\epsilon^{ijl}B^kE_l \\ &= -\frac{4}{c}\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

4-标量

$$\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = B^2 - \frac{E^2}{c^2}, \quad -\frac{c}{4}F_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} = E \cdot B$$

的存在意味着：

- ① 倘若电磁场在某一惯性系中表现为纯粹的电场，则一定找不到另一惯性系使得电磁场在其中表现为纯粹的磁场。反之亦然。
- ② 倘若电磁场在某一惯性系中表现为纯粹的电场或者纯粹的磁场，则在任何一个别的惯性系中此电磁场的电场强度矢量必然正交于其磁感应强度。
- ③ 利用毕安琪恒等式不难看出：

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\mathcal{F}^{\mu\nu} = 2(\partial_\mu A_\nu)\mathcal{F}^{\mu\nu} \\ &= 2\partial_\mu(A_\nu\mathcal{F}^{\mu\nu}) - 2A_\nu(\partial_\mu\mathcal{F}^{\mu\nu}) \\ &= 2\partial_\mu(A_\nu\mathcal{F}^{\mu\nu}) \end{aligned}$$

这是 \mathbb{M}_4 中的全散度. 对于拓扑性质平庸的 \mathbb{M}_4 而言, 即使 $F_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}$ 项出现在拉氏密度中, 也不会产生实质性的贡献.

顺便指出, 虽然

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}$$

也是一个 4-标量, 但它实际上就是 $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. 无须重复考虑.

事实上,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F^{\rho\sigma}F_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\delta_{\rho}^{\alpha}\delta_{\sigma}^{\beta}-\delta_{\rho}^{\beta}\delta_{\sigma}^{\alpha}\right)F^{\rho\sigma}F_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2}\left(F^{\alpha\beta}-F^{\beta\alpha}\right)F_{\alpha\beta} \\ &= -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\end{aligned}$$

直接考虑其物理内涵, 我们有:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} &= 2\mathcal{F}_{i0}\mathcal{F}^{i0} + \mathcal{F}_{ij}\mathcal{F}^{ij} \\ &= -2B_iB^i + \frac{1}{c^2}\epsilon^{ijk}\epsilon_{ijl}E^lE_k \\ &= 2\left(\frac{E^2}{c^2} - B^2\right)\end{aligned}$$

拓展:

规范不变的 4-标量

$$F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}$$

倘若出现在拓扑非平庸时空中某个场论体系的拉氏密度中, 就称其为 Chern-Simons (CS) 项.

- 因为

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} &= 2\partial_\mu (A_\nu \mathcal{F}^{\mu\nu}) = \partial_\mu (\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu F_{\rho\sigma}) \\ &= 2\partial_\mu (\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_\rho A_\sigma) \\ &= \partial_\mu K^\mu \end{aligned}$$

4-矢量

$$K^\mu = 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_\rho A_\sigma$$

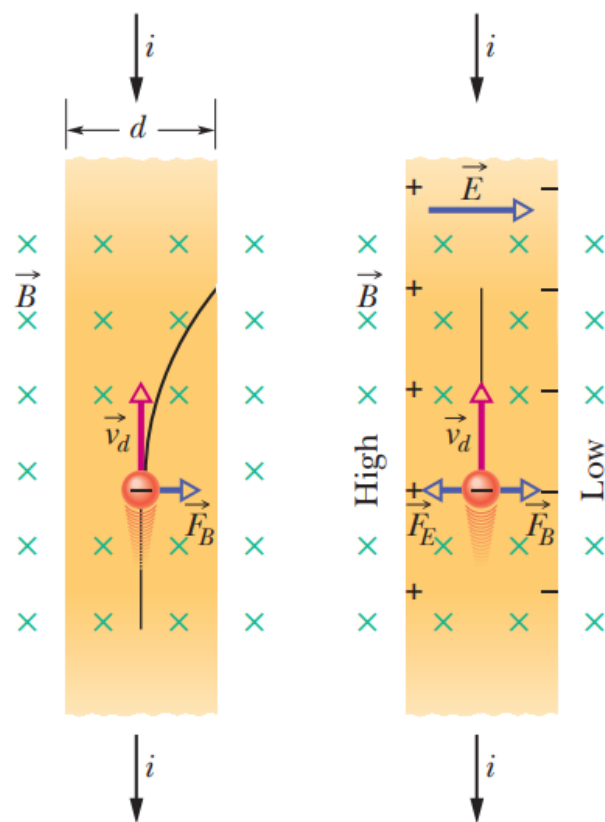
称为(阿贝尔)Chern-Simons 流密度.

- CS 项意味着时间反演对称性的破坏与宇称不再守恒. 因此, 在 QCD 的非微扰研究中常计及非阿贝尔 CS 项的贡献以企探索 \mathcal{P} 与 \mathcal{T} 这两个分立对称性的破坏程度.

- 磁场的存在会破坏时间反演对称性. 因此, CS 项常出现在 $(1+2)$ 维时空的电磁相互作用拉氏密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \alpha \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho} - J^\mu A_\mu$$

中, 从理论上解释与理解 $(1+2)$ 维时空中发现的分数统计和分数量子霍尔效应¹⁶.



¹⁶例如: Daniel Arovas, Lecture notes on quantum hall effect, 2020, in progress.

Quantum Hall Effect

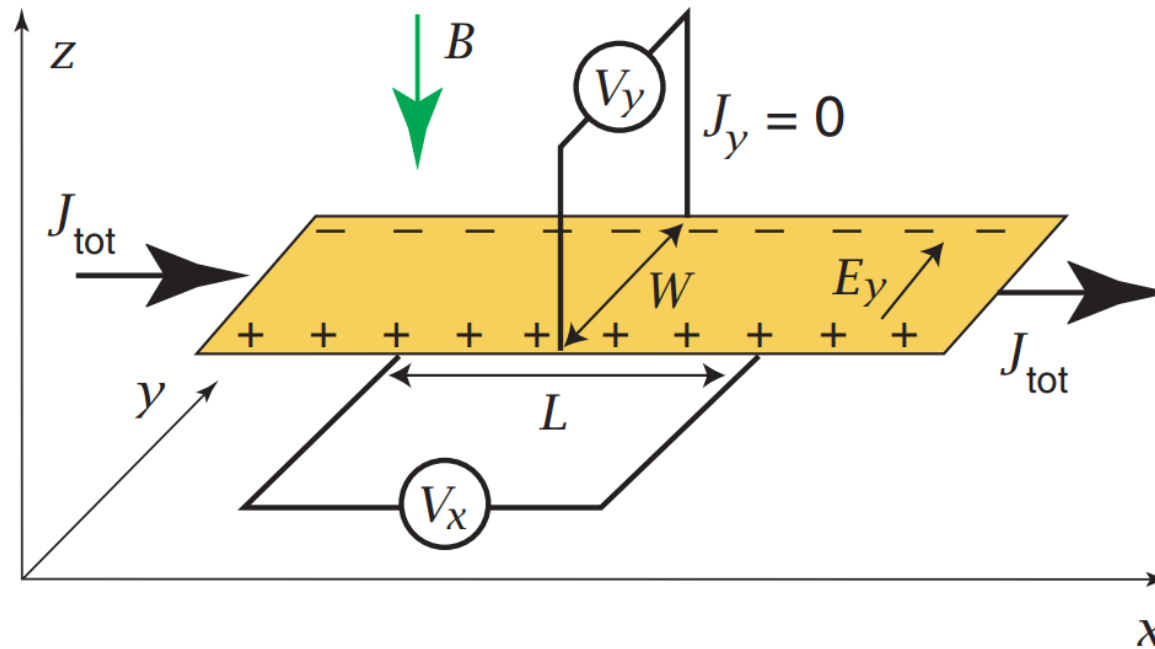


Fig. 1 Hall and diagonal resistivities R_{xy} and R_{xx} are independent of sample properties and given by $R_{xy} = V_y/J_{\text{tot}} \rightarrow \nu^{-1}(2\pi\hbar/e^2)$, $R_{xx} = -WV_x/LJ_{\text{tot}} \rightarrow 0$, in quantum Hall (QH) states. Here, ν is the filling factor.

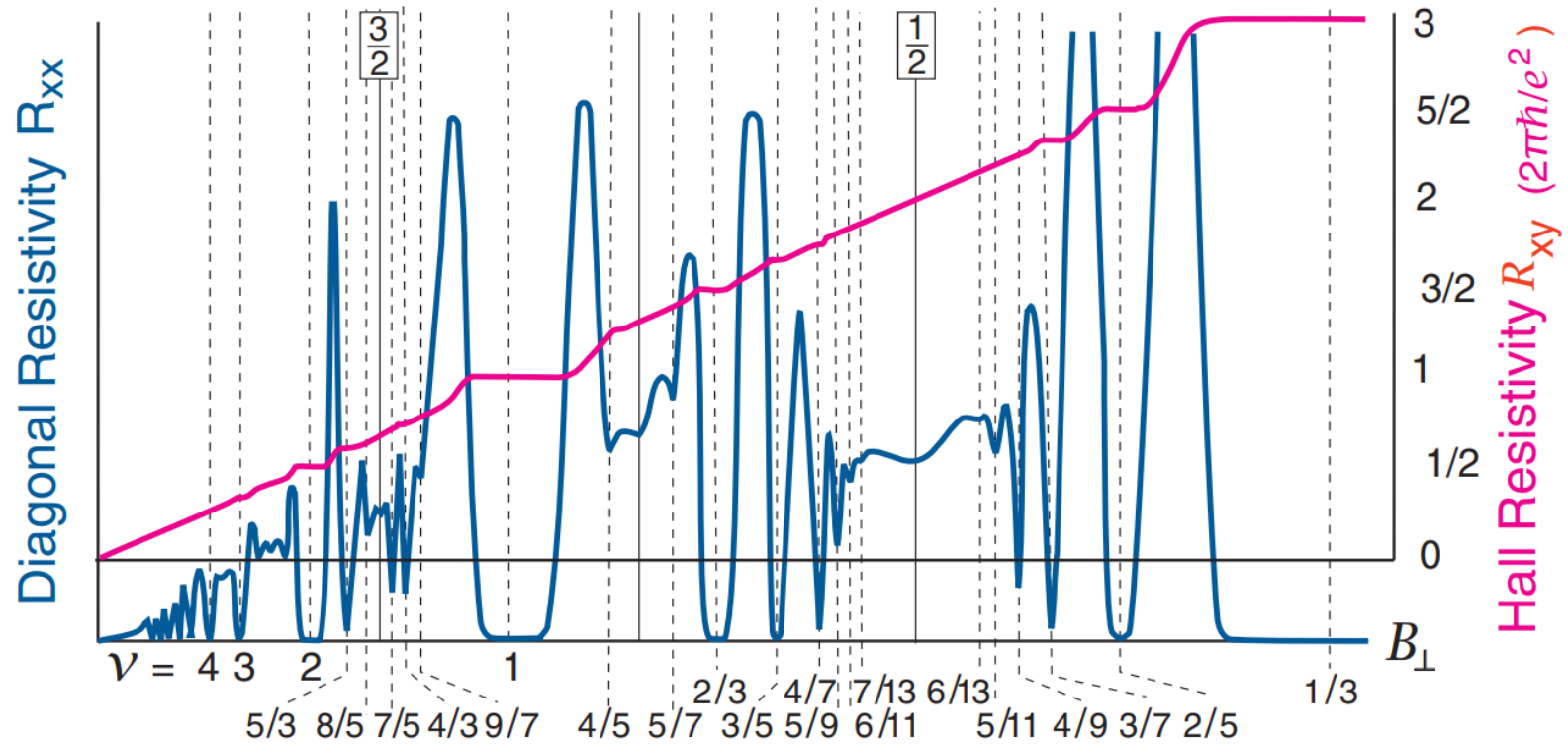
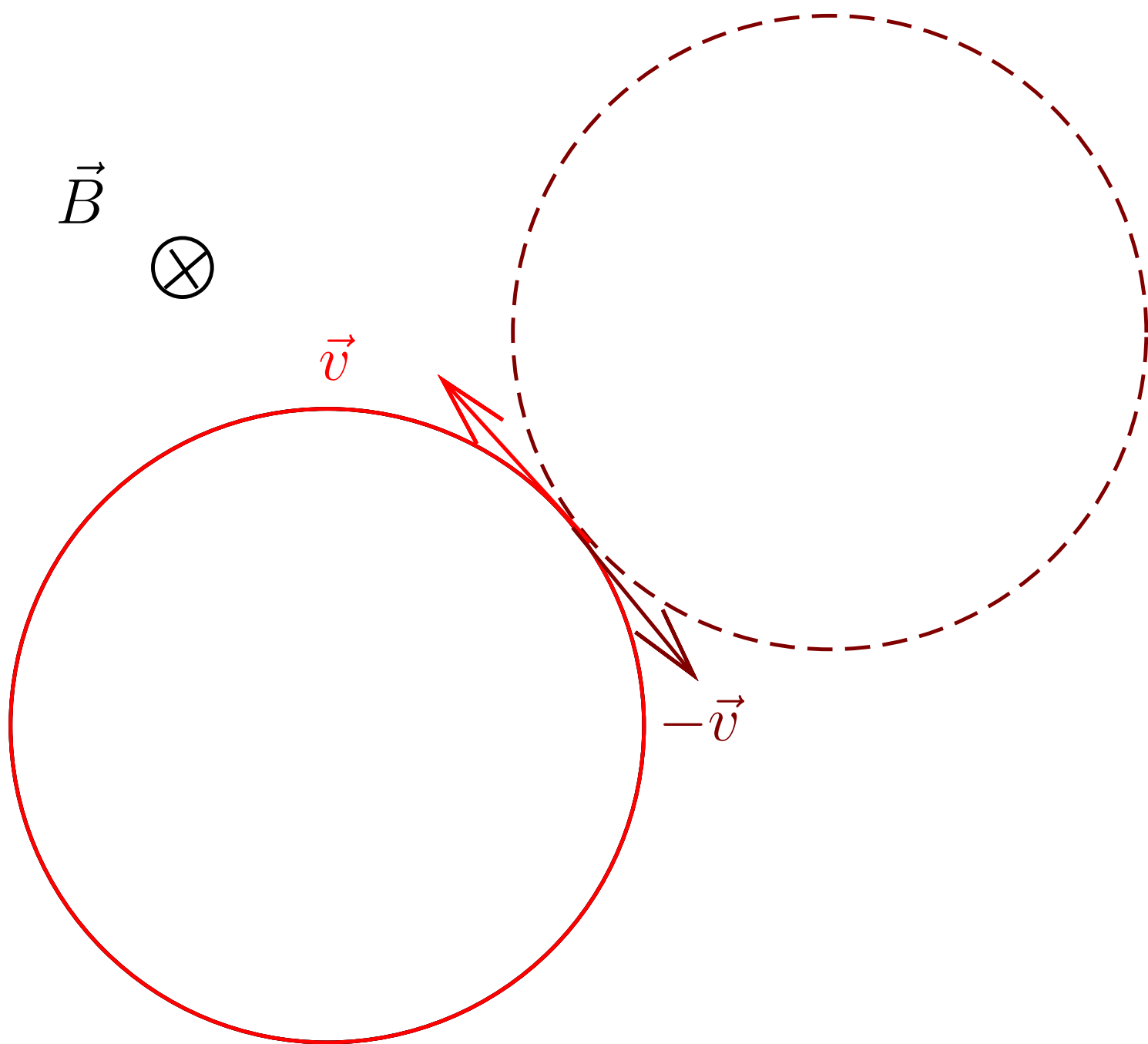


Fig. 2 QH states are detected by plateaux developed in the Hall resistivity R_{xy} or dips in the diagonal resistivity R_{xx} .

磁场的存在破坏时间反演对称性



\mathbb{M}_3 与 \mathbb{M}_4 中 Chern-Simons 项的比较:

如前所述, 对于 $(1+3)$ 维时空 \mathbb{M}_4 中的 $U(1)$ 规范场而言, 其拉氏密度中候选的 Chern-Simons 项为:

$$\mathcal{L}_{\text{CS}}^{(4)} = \alpha F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{\alpha}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}$$

$\mathcal{L}_{\text{CS}}^{(4)}$ 显然地是一个规范不变的 4-标量. 因为

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{CS}}^{(4)}}{\partial A^\nu} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{CS}}^{(4)}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \alpha \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} F_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 2\alpha \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} = 4\mathcal{F}^{\mu\nu}$$

$\mathcal{L}_{\text{CS}}^{(4)}$ 对规范势 $A_\nu(x)$ 拉氏方程的贡献是:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{CS}}^{(4)}}{\partial A^\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{CS}}^{(4)}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -4\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu}$$

考虑到毕安琪恒等式, $\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$, 这个贡献实际上为零.

- 对于 \mathbb{M}_4 中的 $U(1)$ 规范场而言, 拉氏密度中计及 CS 项与否都不影响规范场的运动方程.

(1 + 2) 时空 \mathbb{M}_3 中的情形与此不同. \mathbb{M}_3 中的全反对称不变张量是 $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ ¹⁷. 因此, \mathbb{M}_3 中规范场的毕安琪恒等式为:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$$

$U(1)$ 规范场拉氏密度中候选的 Chern-Simons 项为:

$$\mathcal{L}_{\text{CS}}^{(3)} = \alpha \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\rho F_{\mu\nu}$$

容易看出, $\mathcal{L}_{\text{CS}}^{(3)}$ 也是局域规范变换 $\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \theta(x)$ 下的不变量:

$$\delta \mathcal{L}_{\text{CS}}^{(3)} = \alpha \epsilon^{\mu\nu\rho} (\delta A_\rho) F_{\mu\nu} = \alpha \epsilon^{\mu\nu\rho} (\partial_\rho \theta(x)) F_{\mu\nu} = \partial_\rho (\alpha \theta(x) \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu})$$

最后一步使用了毕安琪恒等式.

¹⁷我们约定 $\epsilon^{012} = 1$.

$\mathcal{L}_{\text{CS}}^{(3)}$ 对“广义坐标” $A_\mu(x)$ 以及“广义速度” $\partial_\nu A_\mu(x)$ 的偏导数为：

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{CS}}^{(3)}}{\partial A^\nu} = \alpha \epsilon^{\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma},$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{CS}}^{(3)}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \alpha \epsilon^{\beta\rho\sigma} A_\sigma \frac{\partial F_{\beta\rho}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 2\alpha \epsilon^{\mu\nu\sigma} A_\sigma$$

因此, $\mathcal{L}_{\text{CS}}^{(3)}$ 对规范场拉氏方程的贡献为：

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{CS}}^{(3)}}{\partial A^\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{CS}}^{(3)}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \alpha \epsilon^{\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} - 2\alpha \epsilon^{\mu\nu\sigma} \partial_\mu A_\sigma = 4\alpha \epsilon^{\nu\rho\sigma} \partial_\rho A_\sigma$$

这个贡献不为零.

- 对于 \mathbb{M}_3 中的 $U(1)$ 规范场而言, 拉氏密度中计及 CS 项的贡献会严重影响规范场的运动方程.

电磁场强度的洛伦兹推动变换

电场强度 \mathbf{E} 与磁感应强度 \mathbf{B} 联合构成电磁场张量 $F_{\mu\nu}(x)$, 它们在洛伦兹变换 $x^\mu \rightsquigarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ 下的变换法则自然是:

$$F_{\mu\nu}(x) \rightsquigarrow F'_{\mu\nu}(x') = F_{\rho\sigma}(x) \tilde{\Lambda}^\rho_\mu \tilde{\Lambda}^\sigma_\nu$$

对于无量纲牵连速度为 β 的洛伦兹推动变换, 逆洛伦兹变换矩阵 Λ 非零的矩阵元为:

$$\tilde{\Lambda}^0_0 = \gamma, \quad \tilde{\Lambda}^0_i = \gamma\beta_i, \quad \tilde{\Lambda}^i_0 = \gamma\beta^i, \quad \tilde{\Lambda}^i_j = \delta^i_j + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j.$$

式中 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ 是相对论收缩因子.

回想电磁场张量的物理内涵,

$$E_i = -cF_{0i}, \quad B^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk}$$

我们看到:

$$E'_i = -cF'_{0i} = -cF_{\rho\sigma} \tilde{\Lambda}^\rho_0 \tilde{\Lambda}^\sigma_i = -cF_{0\sigma} \tilde{\Lambda}^0_0 \tilde{\Lambda}^\sigma_i - cF_{k\sigma} \tilde{\Lambda}^k_0 \tilde{\Lambda}^\sigma_i$$

亦即：

$$\begin{aligned} E'_i &= -cF_{0j} \tilde{\Lambda}^0{}_0 \tilde{\Lambda}^j{}_i - cF_{k0} \tilde{\Lambda}^k{}_0 \tilde{\Lambda}^0{}_i - cF_{kj} \tilde{\Lambda}^k{}_0 \tilde{\Lambda}^j{}_i \\ &= -\gamma cF_{0i} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \beta_i \beta^j cF_{0j} - \gamma c\beta^j F_{ji} \\ &= \gamma E_i - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \beta_i \beta^j E_j + \gamma c\beta^j \epsilon_{ijk} B^k \end{aligned}$$

换言之，

$$E' = \gamma E - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{E}) \boldsymbol{\beta} + \gamma c \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{B}$$

同理有：

$$\begin{aligned} B'^i &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F'_{jk} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{\mu\nu} \tilde{\Lambda}^\mu{}_j \tilde{\Lambda}^\nu{}_k \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{0l} \tilde{\Lambda}^0{}_j \tilde{\Lambda}^l{}_k + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{m0} \tilde{\Lambda}^m{}_j \tilde{\Lambda}^0{}_k + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{ml} \tilde{\Lambda}^m{}_j \tilde{\Lambda}^l{}_k \\ &= \epsilon^{ijk} F_{0l} \tilde{\Lambda}^0{}_j \tilde{\Lambda}^l{}_k + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{ml} \tilde{\Lambda}^m{}_j \tilde{\Lambda}^l{}_k \end{aligned}$$

亦即：

$$\begin{aligned} B'^i &= \gamma \epsilon^{ijk} \beta_j F_{0k} + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk} + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \epsilon^{ijk} F_{jl} \beta^l \beta_k \\ &= -\frac{\gamma}{c} \epsilon^{ijk} \beta_j E_k + B^i + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \epsilon^{ijk} \epsilon_{jlm} B^m \beta^l \beta_k \\ &= B^i - \frac{\gamma}{c} (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{E})^i + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \left(\delta_l^k \delta_m^i - \delta_m^k \delta_l^i \right) B^m \beta^l \beta_k \\ &= B^i - \frac{\gamma}{c} (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{E})^i + \frac{\gamma^2 \beta^2}{\gamma + 1} B^i - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{B}) \beta^i \\ &= \gamma B^i - \frac{\gamma}{c} (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{E})^i - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{B}) \beta^i \end{aligned}$$

换言之，

$$\boxed{\boldsymbol{B}' = \gamma \boldsymbol{B} - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{B}) \boldsymbol{\beta} - \frac{\gamma}{c} \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{E}}$$

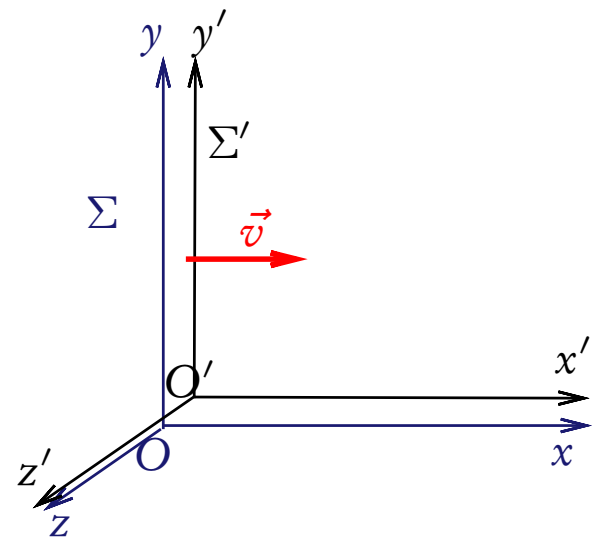
所以, 电场与磁场是同一个电磁场的两个侧面. 在给定参考系中, 电磁场的电场与磁场表现出不同性质. 但是当参考系变换时, 它们可以互相转化.

电磁场强度在两个惯性系之间的反变换关系式是:

$$\mathbf{E} = \gamma \mathbf{E}' - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}') \boldsymbol{\beta} - \gamma c \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}'$$

$$\mathbf{B} = \gamma \mathbf{B}' - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}') \boldsymbol{\beta} + \frac{\gamma}{c} \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}'$$

例： 求出以速度 $\mathbf{v} = c\boldsymbol{\beta}$ 相对于惯性系 Σ 作匀速直线运动的点电荷 Q 所激发的电磁场场强分布.



解：

选择 Σ' 系为点电荷自身系. 由于在 Σ' 系中点电荷始终处在静止状态, 故 Σ' 系中只存在静电场:

$$\mathbf{E}' = \frac{Q\mathbf{r}'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}, \quad \mathbf{B}' = 0$$

按照洛伦兹推动变换, Q 在实验室系 Σ 中激发的电磁场场强为:

$$\mathbf{E} = \gamma\mathbf{E}' - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}'), \quad \mathbf{B} = \frac{\gamma}{c}\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}'$$

求上述第一式与牵连速度 $\boldsymbol{\beta}$ 的矢量积, 可知 $\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E} = \gamma \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}'$. 所以实验室参考系中电磁场强是彼此正交的:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}$$

此外, 一旦求出了实验室系中的电场强度分布, 上式可以使我们立刻获得磁感应强度的分布.

以下专心计算 Σ 系中的电场强度分布. 场点位置矢量在二惯性系 Σ 和 Σ' 之间的洛伦兹推动变换是

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}) - \gamma c \boldsymbol{\beta} t$$

假设 Σ 系中的观察者是在 $t = 0$ 时刻进行测量, 则有:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r})$$

且

$$\begin{aligned} r'^2 &= \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' \\ &= r^2 + \frac{2\gamma^2}{\gamma + 1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r})^2 + \frac{\gamma^4 \beta^2}{(\gamma + 1)^2} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r})^2 \\ &= r^2 + \gamma^2 (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r})^2 \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \mathbf{E}' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 [r^2 + \gamma^2 (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r})^2]^{3/2}} \left[\mathbf{r} + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}) \right]$$

于是：

$$\begin{aligned} E &= \gamma E' - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \beta (\beta \cdot E') \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 [r^2 + \gamma^2 (\beta \cdot r)^2]^{3/2}} \left[\gamma r + \frac{\gamma^3}{\gamma + 1} \beta (\beta \cdot r) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \beta (\beta \cdot r) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma^4 \beta^2}{(\gamma + 1)^2} \beta (\beta \cdot r) \right] \\ &= \frac{\gamma Q r}{4\pi\epsilon_0 [r^2 + \gamma^2 (\beta \cdot r)^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

运动点电荷 Q 激发的电磁场在实验室系 Σ 中的磁感应强度为：

$$B = \frac{1}{c} \beta \times E = \frac{\gamma \mu_0 Q (v \times r)}{4\pi [r^2 + \gamma^2 (\beta \cdot r)^2]^{3/2}}$$

若点电荷作极低速运动, $v \ll c$, 可以略去 β^2 级项且取 $\gamma \approx 1$,

$$\rightsquigarrow E \approx \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad B \approx \frac{\mu_0 Q (v \times r)}{4\pi r^3}$$

场量的连续变换

为了讨论电磁相互作用服从的守恒定律, 我们需要研究电磁规范势 $A_\mu(x)$ 的变换性质.

- $A_\mu(x)$ 的变换可以仅仅是场空间内部的变化, 例如局域规范变换

$$A_\mu(x) \rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)$$

- $A_\mu(x)$ 的变换也可以是时空点位置坐标的改变在场空间诱导的变换. 例如洛伦兹变换

$$x^\mu \rightsquigarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}$$

可以诱导出电磁势的如下变换:

$$A_\mu(x) \rightsquigarrow A'_\mu(x') = A_\nu(x) \tilde{\Lambda}^\nu{}_\mu$$

$$\tilde{\Lambda}^\nu{}_\mu = \eta_{\mu\rho} \Lambda^\rho{}_\sigma \eta^{\sigma\nu}$$

- 倘若场量 $A_\mu(x)$ 以及时空点位置坐标的改变存在无穷小形式, 这类改变就称为连续变换.
- 电磁势在场空间的无穷小变换记为:

$$\delta_0 A_\mu(x) = A'_\mu(x) - A_\mu(x)$$

- 我们把时空点位置坐标的无穷小变换记为

$$x^\mu \rightsquigarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$$

它在场空间诱导的电磁势无穷小变换是:

$$\delta A_\mu(x) = A'_\mu(x') - A_\mu(x)$$

显然,

$$\begin{aligned} \delta A_\mu(x) &= A'_\mu(x + \delta x) - A_\mu(x) \approx \left[A'_\mu(x) + \delta x^\nu \partial_\nu A'_\mu(x) \right] - A_\mu(x) \\ &\approx \delta_0 A_\mu(x) + \delta x^\nu \partial_\nu A_\mu(x) + \mathcal{O}((\delta x)^2) \end{aligned}$$

所以, 精确到无穷小变换变换参数的一次幂, 我们有:

$$\delta A_\mu(x) = \delta_0 A_\mu(x) + \delta x^\nu \partial_\nu A_\mu(x)$$

- 无穷小的局域规范变换:

$$\delta x^\mu = 0, \quad \delta A_\mu(x) = \delta_0 A_\mu(x) = \partial_\mu \theta(x)$$

- 通常认为电磁势等场量在时空点位置坐标的平移变换下保持不变

$$x^\mu \rightsquigarrow x'^\mu = x^\mu + b^\mu, \quad A_\mu(x) \rightsquigarrow A'_\mu(x') = A_\mu(x)$$

所以, 无穷小的时空平移变换表达为:

$$\delta x^\mu = \epsilon^\mu, \quad \delta A_\mu(x) = 0, \quad \delta_0 A_\mu(x) = -\epsilon^\nu \partial_\nu A_\mu(x)$$

- 洛伦兹变换矩阵 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 服从条件 $\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}$. 设 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 的无穷小形式为：

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \eta^{\mu\rho}\omega_{\rho\nu}$$

$\omega_{\mu\nu}$ 是无穷小的洛伦兹变换实参数¹⁸，我们看到：

$$\begin{aligned}\eta_{\rho\sigma} &= \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\mu\nu}(\delta^\mu_\rho + \omega^\mu{}_\rho)(\delta^\nu_\sigma + \omega^\nu{}_\sigma) \\ &= \eta_{\rho\sigma} + \omega_{\rho\sigma} + \omega_{\sigma\rho} + \mathcal{O}(\omega^2) \quad \rightsquigarrow \boxed{\omega_{\rho\sigma} = -\omega_{\sigma\rho}}\end{aligned}$$

因此，逆洛伦兹矩阵的无穷小形式是：

$$\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu = \eta_{\nu\rho}\Lambda^\rho{}_\sigma\eta^{\sigma\mu} = \delta^\mu_\nu - \eta^{\mu\rho}\omega_{\rho\nu}$$

电磁势 $A_\mu(x)$ 相关的无穷小洛伦兹变换最终表达为：

$$\begin{aligned}\delta x^\mu &= \eta^{\mu\rho}\omega_{\rho\nu}x^\nu, & \delta A_\mu(x) &= \omega_{\mu\nu}A^\nu(x), \\ \delta_0 A_\mu(x) &= \omega_{\mu\nu}A^\nu(x) + \omega_{\rho\sigma}x^\rho\partial^\sigma A_\mu(x)\end{aligned}$$

¹⁸我们约定： $\omega^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\rho}\omega_{\rho\nu}$.

解释:

电磁势作为一个协变的 4-矢量, 它遵循的洛伦兹变换为:

$$A_\mu(x) \rightsquigarrow A'_\mu(x') = A_\nu(x) \tilde{\Lambda}^\nu{}_\mu$$

对于无穷小洛伦兹变换,

$$A'_\mu(x') = A_\nu(x) \left(\delta^\nu_\mu - \eta^{\nu\rho} \omega_{\rho\mu} \right) = A_\mu(x) + \omega_{\mu\rho} A^\rho(x)$$

所以,

$$\begin{aligned} \delta A_\mu(x) &= \omega_{\mu\nu} A^\nu(x) \\ &= \frac{1}{2} (\omega_{\mu\nu} - \omega_{\nu\mu}) A^\nu(x) = \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \left(\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \delta^\alpha_\nu \delta^\beta_\mu \right) A^\nu(x) \\ &= \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} (\Sigma^{\alpha\beta})_{\mu\nu} A^\nu(x) \end{aligned}$$

式中

$$(\Sigma^{\alpha\beta})_{\mu\nu} = \delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \delta^\alpha_\nu \delta^\beta_\mu$$

是洛伦兹群 $O(1,3)$ 在其矢量表示中生成元的矩阵元.

时空点位置坐标 x^μ 的无穷小洛伦兹变换为：

$$\delta x^\mu = \eta^{\mu\rho} \omega_{\rho\sigma} x^\sigma$$

因此，电磁势的无穷小洛伦兹变换可以表达为如下纯粹的场空间中 $A_\mu(x)$ 的改变：

$$\begin{aligned}\delta_0 A_\mu(x) &= \delta A_\mu(x) - \delta x^\nu \partial_\nu A_\mu(x) \\ &= \omega_{\mu\nu} A^\nu(x) + \omega_{\rho\sigma} x^\rho \partial^\sigma A_\mu(x) \\ &= \frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} (\Sigma^{\rho\sigma})_{\mu\nu} A^\nu(x) + \frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} (x^\rho \partial^\sigma - x^\sigma \partial^\rho) A_\mu(x)\end{aligned}$$

亦即，

$$\delta_0 A_\mu(x) = \frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} \left[\eta_{\mu\nu} (x^\rho \partial^\sigma - x^\sigma \partial^\rho) + (\Sigma^{\rho\sigma})_{\mu\nu} \right] A^\nu(x)$$

下面考虑电磁相互作用的诺特定理.

诺特定理

诺特定理断言：相应于体系作用量泛函在任意一种连续变换下的不变性，体系存在着一个守恒定律。现在以电磁相互作用为例讨论诺特定理。电磁场的作用量泛函是：

$$S[A_\mu] = \int d^4x \mathcal{L}(x) = \int d^4x \mathcal{L}(A_\mu(x), \partial_\nu A_\mu(x))$$

式中，

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J^\mu A_\mu + \mathcal{L}_m(x)$$

电磁势的规范变换 $\delta_0 A_\mu(x) = \partial_\mu \theta(x)$ 是纯粹的场空间中场量的改变，

$$\delta_0 \mathcal{L} = J^\mu \delta_0 A_\mu = J^\mu \partial_\mu \theta(x) = \partial_\mu [J^\mu \theta(x)] - \theta(x) \partial_\mu J^\mu$$

所以，作用量泛函在局域规范变换下的不变性意味着存在电荷守恒定律：

$$0 = \delta_0 S[A_\mu] = - \int d^4x \theta(x) \partial_\mu J^\mu \quad \rightsquigarrow \quad \partial_\mu J^\mu = 0$$

现在考虑作用量泛函在时空点位置坐标的连续变换

$$x^\mu \rightsquigarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$$

下的不变性所导致的守恒定律. 注意到:

$$\delta S = \int d^4x (\delta \mathcal{L}) + \int (\delta d^4x) \mathcal{L}$$

- 因为场空间电磁势的无穷小变换 $\delta_0 A_\mu(x)$ 引起的拉氏密度改变为:

$$\begin{aligned} \delta_0 \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu(x)} \delta_0 A_\mu(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu(x))} \delta_0 (\partial_\nu A_\mu(x)) \\ &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu(x)} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu(x))} \right] \delta_0 A_\mu(x) \\ &\quad + \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu(x))} \delta_0 A_\mu(x) \right) \\ &= \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu(x))} \delta_0 A_\mu(x) \right) \end{aligned}$$

- 直接因为 x^μ 的无穷小变换引起的拉氏密度改变为：

$$\delta_1 \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial x^\mu} \delta x^\mu = \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}$$

所以，

$$\delta \mathcal{L} = \delta_0 \mathcal{L} + \delta_1 \mathcal{L} = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu(x))} \delta_0 A_\mu(x) \right) + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}$$

接下来再考虑 $\delta(d^4x)$. 因为

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu + \partial_\nu (\delta x^\mu)$$

其行列式为：

$$\det \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) = \prod_{a=0}^3 [1 + \partial_a (\delta x^a)] = 1 + \partial_\mu (\delta x^\mu)$$

由此知：

$$\delta(d^4x) = d^4x' - d^4x = \left[\det \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) - 1 \right] d^4x = d^4x \partial_\mu (\delta x^\mu)$$

所以, 时空坐标的无穷小变化

$$x^\mu \rightsquigarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$$

可能引起的电磁相互作用体系作用量泛函的改变为:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \left[\delta(d^4x) \mathcal{L} + d^4x \delta \mathcal{L} \right] \\ &= \int d^4x \left[\mathcal{L} \partial_\mu (\delta x^\mu) + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu(x))} \delta_0 A_\mu(x) \right) \right] \\ &= \int d^4x \partial_\mu \left[\mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu(x))} \delta_0 A_\nu(x) \right] \\ &= \int d^4x \partial_\mu \mathcal{J}^\mu\end{aligned}$$

式中,

$$\mathcal{J}^\mu = \mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu(x))} \delta_0 A_\nu(x)$$

- 倘若时空坐标变换 δx^μ 是电磁相互作用体系的一种对称性：

$$\delta S = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0$$

如此，

$$\mathcal{J}^\mu = \mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu(x))} \delta_0 A_\nu(x)$$

就称为与此对称性相联系的守恒流 4-矢量。

- 回忆矢量场 $A_\mu(x)$ 的能量动量张量 $T^{\mu\nu}$ 的定义：

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\rho)} \partial^\nu A_\rho - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

可以把守恒流 4-矢量改写为：

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \delta_0 A_\nu + \delta x_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\rho)} \partial^\nu A_\rho - T^{\mu\nu} \right) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu(x))} \delta A_\nu(x) - T^{\mu\nu}(x) \delta x_\nu \end{aligned}$$

时空平移对称性

在无穷小的时空平移变换下,

$$\delta x_\nu = \epsilon_\nu, \quad \delta A_\nu(x) = 0$$

倘若电磁相互作用体系具有时空平移对称性, $\delta S = 0$, 相应的守恒流 4-矢量为:

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{J}^\mu(x) = -T^{\mu\nu}(x) \epsilon_\nu$$

所以,

- 与时空平移对称性相联系的守恒定律本质上是电磁相互作用体系的能量动量守恒定律:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}(x) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial T^{0\nu}}{\partial t} = -c \partial_i T^{i\nu}$$

- 定义 4-矢量 \mathcal{M}^μ :

$$\mathcal{M}^\mu \equiv - \int d^3x T^{0\mu}(x)$$

它实际上就是体系能量动量守恒定律中出现的守恒量：

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{M}^\mu}{dt} &= c \int d^3x \partial_i T^{i\mu}(x) \\ &= c \oint_{\infty} ds_i T^{i\mu}(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

- 电磁相互作用体系的能量与动量分别定义为：

$$E = - \int d^3x T^{00}(x)$$

$$P^i = -\frac{1}{c} \int d^3x T^{0i}(x)$$

换言之，

$$\mathcal{M}^\mu = (E, cP)$$

电磁场的能量动量 4-张量

- 自由电磁场的拉氏密度为

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

所以, 电磁场对于电磁相互作用体系能量动量张量的贡献为:

$$T_{\text{em}}^{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0} F^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4\mu_0} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

2: 能否把 $T_{\text{em}}^{\mu\nu}$ 诠释为电磁场的能量动量 4-张量?

- ① 很明显, $T_{\text{em}}^{\mu\nu}$ 不是规范变换下的不变量.
- ② 倘若电磁相互作用的理论可以作为一个可靠的物理理论, 那么 $T_{\text{em}}^{\mu\nu}$ 不具有规范变换下的不变性就是一条不可接受的缺点. 我们的结论是: $T_{\text{em}}^{\mu\nu}$ 没有获得能被解读为电磁场能量动量 4-张量的资格.

- 因为

$$\partial^\nu A_\rho = \eta^{\nu\sigma} \partial_\sigma A_\rho = \eta^{\nu\sigma} (F_{\sigma\rho} + \partial_\rho A_\sigma) = -\eta^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma} + \eta^{\nu\sigma} \partial_\rho A_\sigma$$

我们可以把 $T_{\text{em}}^{\mu\nu}$ 改写为：

$$\begin{aligned} T_{\text{em}}^{\mu\nu} &= \frac{1}{\mu_0} \left(\eta^{\nu\sigma} F^{\mu\rho} F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) - \frac{1}{\mu_0} \eta^{\nu\sigma} F^{\mu\rho} \partial_\rho A_\sigma \\ &= \Theta^{\mu\nu} + T_{\text{D}}^{\mu\nu} \end{aligned}$$

式中，

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(\eta^{\nu\sigma} F^{\mu\rho} F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)$$

而

$$T_{\text{D}}^{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0} \eta^{\nu\sigma} F^{\mu\rho} \partial_\rho A_\sigma$$

使用自由电磁场的 Maxwell 方程 $\partial_\rho F^{\mu\rho} = 0$ ，我们可以把 $T_{\text{D}}^{\mu\nu}$ 表达为一个全导数：

$$T_D^{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0} \partial_\rho (\eta^{\nu\sigma} F^{\mu\rho} A_\sigma)$$

① $T_D^{\mu\nu}$ 自动满足守恒定律：

$$\partial_\mu T_D^{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0} \partial_\mu \partial_\rho (\eta^{\nu\sigma} F^{\mu\rho} A_\sigma) = 0 \rightsquigarrow \partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = \partial_\mu T_{\text{em}}^{\mu\nu}$$

② $T_D^{0\mu}$ 在 \mathbb{E}_3 上的体积分为零：

$$\begin{aligned} \int d^3x T_D^{0\mu} &= -\frac{1}{\mu_0} \int d^3x \partial_i (\eta^{\mu\sigma} F^{0i} A_\sigma) \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \oint_\infty ds_i (\eta^{\mu\sigma} F^{0i} A_\sigma) \\ &= 0 \end{aligned}$$

所以，

$$\mathcal{M}_{\text{em}}^\mu \equiv - \int d^3x T_{\text{em}}^{0\mu}(x) = - \int d^3x \Theta^{0\mu}(x)$$

综合以上因素,通常把电磁场本身的能量动量张量定义为:

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(\eta^{\nu\sigma} F^{\mu\rho} F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)$$

$\Theta^{\mu\nu}$ 具有如下特点:

- 它是规范不变的二阶 4-张量.
- 它是对称张量, $\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu}$.
- 它是无迹张量,

$$\Theta^{\mu}_{\mu} = \eta_{\mu\nu} \Theta^{\mu\nu} = 0$$

- 它服从守恒定律:

$$\partial_{\mu} (\Theta^{\mu\nu} + T_{\text{m}}^{\mu\nu}) = 0$$

分量 $\Theta^{0\mu}$ 在 \mathbb{E}_3 上的体积分诠释为电磁场本身的能量与动量:

$$(E, cP) = \mathcal{M}^{\mu} = - \int d^3x \Theta^{0\mu}(x)$$

现在讨论 $\Theta^{\mu\nu}$ 诸分量的物理内涵：

$$\begin{aligned}\Theta^{00} &= \frac{1}{\mu_0} \left(\eta^{0\sigma} F^{0\rho} F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4} \eta^{00} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \\ &= \frac{1}{\mu_0} F^{0i} F_{0i} - \frac{1}{4\mu_0} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{\mu_0 c^2} E^2 - \frac{1}{2\mu_0} \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right)\end{aligned}$$

显然，

$$u = -\Theta^{00} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right)$$

正是我们期望的电磁场在 \mathbb{E}_3 中的能量体密度.

$$\begin{aligned}
\Theta^{0i} &= \frac{1}{\mu_0} \eta^{i\sigma} F^{0\rho} F_{\rho\sigma} = \frac{1}{\mu_0} \eta^{ik} F^{0j} F_{jk} \\
&= -\frac{1}{\mu_0 c} \epsilon^{ijk} E_j B_k \\
&= -\frac{1}{\mu_0 c} (E \times B)^i
\end{aligned}$$

换言之,

$$S = -c \Theta^{0i} e_i = \frac{1}{\mu_0} E \times B$$

正是通常描写电磁能量传输性质的能流密度矢量.

① 电磁场在 \mathbb{E}_3 中的动量密度矢量定义为:

$$g = -\frac{1}{c} \Theta^{0i} e_i = \epsilon_0 E \times B$$

显然, $S = c^2 g$.

$$\begin{aligned}
\Theta^{ij} &= \frac{1}{\mu_0} \left(\eta^{j\sigma} F^{i\rho} F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4} \eta^{ij} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \\
&= \frac{1}{\mu_0} \eta_{\rho\sigma} F^{i\rho} F^{\sigma j} + \frac{1}{4\mu_0} \eta^{ij} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{\mu_0} F^{0i} F^{0j} - \frac{1}{\mu_0} \eta_{kl} F^{ik} F^{jl} + \frac{1}{4\mu_0} \eta^{ij} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{\mu_0 c^2} E^i E^j - \frac{1}{\mu_0} \eta^{jl} \epsilon^{imk} \epsilon_{lnk} B_m B^n + \frac{1}{2\mu_0} \eta^{ij} \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2} \right) \\
&= \epsilon_0 E^i E^j - \frac{1}{\mu_0} \left(\eta^{ij} B^2 - B^i B^j \right) + \frac{1}{2\mu_0} \eta^{ij} \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2} \right) \\
&= \epsilon_0 E^i E^j + \frac{1}{\mu_0} B^i B^j - \frac{1}{2} \eta^{ij} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right)
\end{aligned}$$

通常把

$$\mathcal{T}^{ij} = -\Theta^{ij} = -\epsilon_0 E^i E^j - \frac{1}{\mu_0} B^i B^j + \frac{1}{2} \eta^{ij} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right)$$

称为电磁场在 \mathbb{E}_3 中的动量流密度张量.

能量动量守恒定律

- ① 倘若所考虑的体系是纯粹的电磁场

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

没有电荷电流体系与其发生相互作用，则体系的能量动量守恒定律为：

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu}(x) = 0$$

- ② 能够对电磁相互作用体系提供完整描写的拉氏密度是：

$$\mathcal{L}_{\text{Full}} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J^\mu A_\mu + \mathcal{L}_{\text{m}}$$

电磁场充当电荷电流分布 $(J^\mu, \mathcal{L}_{\text{m}})$ 发生电磁相互作用的媒介。体系的能量动量守恒定律为：

$$\partial_\mu [\Theta^{\mu\nu}(x) + T_{\text{m}}^{\mu\nu}(x)] = 0$$

式中

$$T_{\text{m}}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{m}}}{\partial(\partial_{\mu}A_{\rho})} \partial^{\nu}A_{\rho} - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{m}}$$

是电荷电流分布本身的能量动量 4-张量.

我们暂时不关心电荷电流分布的动力学¹⁹, 仅仅把 J^{μ} 看作是电磁场的源:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J^{\mu} A_{\mu}$$

在此情形下, 如何表述体系的能量动量守恒定律呢?

- 虽然不完整的拉氏密度 \mathcal{L} 舍弃了对作为电磁场源的电荷电流分布的动力学描写, 但它仍提供了对于电磁场本身动力学的完整描写. 根据 \mathcal{L} 可以推导出 Maxwell 方程组

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = -\mu_0 J^{\nu}$$

并定义电磁场规范不变的能量动量 4-张量 $\Theta^{\mu\nu}(x)$.

¹⁹即暂时不讨论 \mathcal{L}_{m} 与 $T_{\text{m}}^{\mu\nu}$.

电磁场的能量动量 4 张量 $\Theta^{\mu\nu}(x)$

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(\eta^{\nu\sigma} F^{\mu\rho} F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)$$

具有对称、无迹和规范变换不变性等性质,但在电磁场源存在的情形下 $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu}(x) \neq 0$. 这是因为电磁场与其源之间不可避免的存在着能量与动量的交换:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Theta^{\mu\nu} &= \frac{1}{\mu_0} \partial_\mu \left(\eta^{\nu\sigma} F^{\mu\rho} F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \\ &= -\eta^{\nu\sigma} J^\rho F_{\rho\sigma} + \frac{1}{\mu_0} \eta^{\nu\sigma} F^{\mu\rho} \partial_\mu F_{\rho\sigma} + \frac{1}{2\mu_0} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \partial_\mu F_{\alpha\beta} \\ &= -\eta^{\nu\sigma} J^\rho F_{\rho\sigma} + \frac{1}{2\mu_0} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \left(\partial_\mu F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\mu} + \partial_\beta F_{\mu\alpha} \right) \\ &= -\eta^{\nu\sigma} J^\rho F_{\rho\sigma} \end{aligned}$$

亦即:

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = -J_\mu F^{\mu\nu}$$

或者：

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} + J_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

这就是计入了电磁场源(但未考虑其动力学)时电磁相互作用体系的能量动量守恒定律. 回忆

$$J^\mu = (c\rho, j), \quad \Theta^{00} = -u, \quad \Theta^{0i} = -\frac{S^i}{c}, \quad F^{0i} = \frac{E^i}{c}, \quad F^{ij} = \epsilon^{ijk} B_k$$

$\nu = 0$ 时上式的物理内涵为：

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \Theta^{\mu 0} + J_\mu F^{\mu 0} = \frac{1}{c} \frac{\partial \Theta^{00}}{\partial t} + \partial_i \Theta^{i0} + j_i F^{i0} \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{c} \partial_i S^i - j_i \frac{E^i}{c} = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot S + j \cdot E \right) \end{aligned}$$

亦即，

$$-\nabla \cdot S = \frac{\partial u}{\partial t} + j \cdot E$$

求其在 \mathbb{E}_3 上某个区域 V 上的的体积分,

$$-\oint_{\partial V} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{S} = \frac{d}{dt} \int_V u d^3x + \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3x$$

由于上式右端第二项恰为洛伦兹力做功的功率, 上式正是我们期望的电磁场源存在情形下的能量守恒定律.

倘若 $\nu = i$, 我们有:

$$\Theta^{0i} = -cg^i, \quad \Theta^{ij} = -\mathcal{T}^{ij}$$

因此,

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \Theta^{\mu i} + J_\mu F^{\mu i} = \frac{1}{c} \frac{\partial \Theta^{0i}}{\partial t} + \partial_k \Theta^{ki} - c\rho F^{0i} + j_k F^{ki} \\ &= -\frac{\partial g^i}{\partial t} - \partial_i \mathcal{T}^{ki} - \rho E^i + \epsilon^{kil} j_k B_l \\ &= -\left(\frac{\partial g}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{T} + \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right)^i \end{aligned}$$

亦即：

$$-\nabla \cdot \mathcal{T} = \frac{\partial g}{\partial t} + \rho E + j \times B$$

求其在 \mathbb{E}_3 上某个区域 V 上的体积分，

$$-\oint_{\partial V} ds \cdot \mathcal{T} = \frac{d}{dt} \int_V g d^3x + \int_V (\rho E + j \times B) d^3x$$

这恰可解读为电磁场源存在情形下的动量守恒定律.

- \mathcal{T} 可解读为单位时间内垂直通过界面 ∂V 上单位面元从区域 V 流出 (到外部环境中) 的动量.
- 单位时间内通过界面 ∂V 流出区域 V 的总电磁动量为：

$$F = \oint_{\partial V} ds \cdot \mathcal{T}$$

按照牛顿第二定律, 这就是区域 V 中的电磁场通过界面 ∂V 施加给外部环境的合力.

- 洛伦兹力情形下的牛顿第二定律表为：

$$\frac{d\wp}{dt} = \rho E + j \times B$$

式中 \wp 是电荷电流分布机械动量体密度，

$$\mathbf{P} = \int_V \wp d^3x = \sum_i \mathbf{p}_i$$

因此，积分形式的动量守恒定律可重新表为：

$$-\oint_{\partial V} d\mathbf{s} \cdot \mathcal{T} = \frac{d}{dt} \left(\int_V \mathbf{g} d^3x + \sum_i \mathbf{p}_i \right)$$

所以，即使区域 V 内外没有电磁动量交换， $\mathcal{T}^{ij} = 0$ ，作为电磁场源的电荷电流分布本身的总机械动量也是不守恒的²⁰：

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{p}_i \neq 0$$

²⁰换言之，牛顿第三定律在电磁相互作用过程中不成立。

空间转动对称性

为简单起见, 本小节的研究对象仅限于自由电磁场:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

在无穷小的洛伦兹变换下,

$$\delta x_\mu = \omega_{\mu\sigma} x^\sigma, \quad \delta A_\mu(x) = \frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} (\Sigma^{\rho\sigma})_{\mu\nu} A^\nu(x)$$

自由电磁场天然地具有洛伦兹变换下的不变性, $\delta S = 0$. 相应的守恒流 4-矢量为:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^\mu(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu(x))} \delta A_\nu(x) - T^{\mu\nu}(x) \delta x_\nu \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu(x))} \left[\frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} (\Sigma^{\rho\sigma})_{\nu\alpha} A^\alpha(x) \right] - \omega_{\nu\alpha} T^{\mu\nu}(x) x^\alpha \\ &= -\frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} (\Sigma^{\rho\sigma})_{\nu\alpha} A^\alpha(x) \right] - \omega_{\rho\sigma} T^{\mu\rho}(x) x^\sigma \end{aligned}$$

亦即：

$$\mathcal{J}^\mu = -\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\tilde{\mathcal{M}}^{\mu\rho\sigma}$$

式中，

$$\tilde{\mathcal{M}}^{\mu\rho\sigma} = \frac{1}{\mu_0}F^{\mu\nu}(\Sigma^{\rho\sigma})_{\nu\alpha}A^\alpha(x) + [T^{\mu\rho}(x)x^\sigma - T^{\mu\sigma}(x)x^\rho]$$

因为 \mathcal{J}^μ 是自由电磁场与洛伦兹不变性相联系的守恒流 4-矢量， $\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0$ ， $\tilde{\mathcal{M}}^{\mu\rho\sigma}$ 自然也就是电磁场与洛伦兹不变性相联系的守恒 3 阶 4-张量：

$$\partial_\mu \tilde{\mathcal{M}}^{\mu\rho\sigma} = 0$$

- ① 在洛伦兹变换中，参数 ω_{ij} 描写无穷小空间转动. 自由电磁场与空间转动对称性相联系的守恒定律即为：

$$\partial_\mu \tilde{\mathcal{M}}^{\mu ij} = 0$$

现在的问题是：应该在物理上如何诠释上式中出现的 9 个守恒 4-矢量 $\tilde{\mathcal{M}}^{\mu ij}$ ？

暂且回避守恒 4-矢量 $\tilde{\mathcal{M}}^{\mu ij}$ 的诠释问题, 我们先设法克服守恒 4-张量 $\tilde{\mathcal{M}}^{\mu\rho\sigma}$ 表达式的缺点 $\rightsquigarrow \tilde{\mathcal{M}}^{\mu\rho\sigma}$ 中出现了 $T^{\mu\rho}(x)$. 由于 $T^{\mu\rho}(x)$ 不能诠释为电磁场的能量动量 4-张量, 它的出现阻碍了我们合理理解 $\tilde{\mathcal{M}}^{\mu\rho\sigma}$ 的物理内涵.

2: 那么, 能否使用

$$\mathcal{M}^{\mu\rho\sigma} = \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu} (\Sigma^{\rho\sigma})_{\nu\alpha} A^\alpha(x) + [\Theta^{\mu\rho}(x) x^\sigma - \Theta^{\mu\sigma}(x) x^\rho]$$

替代 $\tilde{\mathcal{M}}^{\mu\rho\sigma}$ 作为自由电磁场联系于洛伦兹不变性的守恒 4-张量?

如前述, $T^{\mu\nu}(x)$ 与自由电磁场能量动量张量 $\Theta^{\mu\nu}(x)$ 之间的关系是:

$$T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + T_D^{\mu\nu}$$

$T_D^{\mu\nu}$ 自动满足守恒定律 $\partial_\mu T_D^{\mu\nu} = 0$ 且具有表达式

$$T_D^{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0} \partial_\rho (F^{\mu\rho} A^\nu) = -\frac{1}{\mu_0} F^{\mu\rho} \partial_\rho A^\nu$$

我们看到：

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{\mu\rho\sigma} - \mathcal{M}^{\mu\rho\sigma} = T_D^{\mu\rho}(x) x^\sigma - T_D^{\mu\sigma}(x) x^\rho$$

进而，

$$\begin{aligned}\partial_\mu \mathcal{M}^{\mu\rho\sigma} &= \partial_\mu \widetilde{\mathcal{M}}^{\mu\rho\sigma} - \partial_\mu [T_D^{\mu\rho}(x) x^\sigma - T_D^{\mu\sigma}(x) x^\rho] \\ &= -T_D^{\mu\rho}(x) \partial_\mu x^\sigma + T_D^{\mu\sigma}(x) \partial_\mu x^\rho \\ &= -T_D^{\mu\rho}(x) \delta_\mu^\sigma + T_D^{\mu\sigma}(x) \delta_\mu^\rho \\ &= T_D^{\rho\sigma}(x) - T_D^{\sigma\rho}(x)\end{aligned}$$

回忆

$$T_D^{\rho\sigma} = \frac{1}{\mu_0} \partial_\mu (F^{\mu\rho} A^\sigma)$$

前面的表达式实际上是如下连续性方程：

$$\partial_\mu \left[\mathcal{M}^{\mu\rho\sigma} - \frac{1}{\mu_0} (F^{\mu\rho} A^\sigma - F^{\mu\sigma} A^\rho) \right] = 0$$

所以,能替代 $\tilde{\mathcal{M}}^{\mu\rho\sigma}$ 作为自由电磁场联系于洛伦兹不变性的守恒4-张量并不是 $\mathcal{M}^{\mu\rho\sigma}$, 而是:²¹

$$M^{\mu\rho\sigma} \equiv \mathcal{M}^{\mu\rho\sigma} - \frac{1}{\mu_0} (F^{\mu\rho} A^\sigma - F^{\mu\sigma} A^\rho)$$

进一步注意到:

$$F^{\mu\rho} A^\sigma - F^{\mu\sigma} A^\rho = F^{\mu\nu} (\delta_\nu^\rho \delta_\alpha^\sigma - \delta_\nu^\sigma \delta_\alpha^\rho) A^\alpha = F^{\mu\nu} (\Sigma^{\rho\sigma})_{\nu\alpha} A^\alpha$$

我们有:

$$M^{\mu\rho\sigma} = \Theta^{\mu\rho} x^\sigma - \Theta^{\mu\sigma} x^\rho$$

- 3 阶 4-张量 $M^{\mu\rho\sigma}$ 表达式中不出现裸露的规范势因子, 因此它明显地具有规范变换下的不变性.
- $M^{\mu\rho\sigma}$ 具有后二指标交换的反对称性:

$$M^{\mu\rho\sigma} = -M^{\mu\sigma\rho}$$

²¹K. Bhattacharya 等人的新著 Introduction to advanced electrodynamics 上的 (9.101) 式看起来完全错了.

- $M^{\mu\rho\sigma}$ 就是自由电磁场联系于洛伦兹不变性的守恒 4-张量:

$$\partial_\mu M^{\mu\rho\sigma} = 0$$

其中分量 $M^{\mu ij}$ 形成了自由电磁场联系于空间转动对称性的守恒角动量 4-矢量.

求连续性方程 $\partial_\mu M^{\mu\rho\sigma} = 0$ 在 \mathbb{E}_3 某个区域 V 中的体积分,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \partial_\mu M^{\mu\rho\sigma} d^3x \\ &= \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_V M^{0\rho\sigma} d^3x + \int_V \partial_i M^{i\rho\sigma} d^3x \\ &= \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_V M^{0\rho\sigma} d^3x + \oint_{\partial V} ds_i M^{i\rho\sigma} = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_V M^{0\rho\sigma} d^3x \end{aligned}$$

最后一步使用了场量 (法分量) 在边界面 ∂V 上为零的假设.

所以，自由电磁场联系于洛伦兹不变性的守恒定律改写为：

$$\frac{d}{dt} M^{\rho\sigma} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M^{\rho\sigma} = \int_V M^{0\rho\sigma} d^3x$$

守恒量 $M^{\rho\sigma}$ 的被积函数可表为：

$$M^{0\rho\sigma} = \Theta^{0\rho} x^\sigma - \Theta^{0\sigma} x^\rho$$

回忆

$$\begin{aligned} \Theta^{00} &= -u, & u &= \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \\ \Theta^{0i} &= -c g^i = -\frac{S^i}{c}, & g &= \frac{S}{c^2} = \epsilon_0 E \times B \end{aligned}$$

我们有：

$$\begin{aligned} M^{00i} &= \Theta^{00} x^i - \Theta^{0i} x^0 = -u x^i + c^2 g^i t = -(ur - c^2 gt)^i \\ M^{0jk} &= \Theta^{0j} x^k - \Theta^{0k} x^j = -c g^j x^k + c g^k x^j = c \epsilon^{jkl} (r \times g)_l \end{aligned}$$

我们看到：

- M^{0jk} 的物理本质是 $\mathbf{r} \times \mathbf{g}$ ，其在区域 V 中的体积分

$$\mathbf{M} \equiv \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{g} d^3x$$

正是自由电磁场联系于空间转动对称性的守恒量。我们把它诠释为区域 V 中电磁场的角动量。

- M^{00i} 的物理内涵是 $ur - c^2 tg$ 。其在区域 V 中的体积分是自由电磁场联系于洛伦兹推动不变性的守恒量：²²

$$\frac{d}{dt} \int_V (ur - c^2 tg) d^3x = 0$$

自由电磁场联系于洛伦兹推动不变性的守恒定律可改写为：

$$0 = \frac{d}{dt} \int_V (ur) d^3x - c^2 \int_V \mathbf{g} d^3x - c^2 t \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{g} d^3x$$

²²进一步的讨论请参阅：H. Muller-Kirsten, *Electrodynamics, an introduction including quantum effects*, World Scientific, 2004, Page 434.

假设区域 V 中没有电荷电流分布, V 内外也无电磁能量、动量的交换:

$$\frac{d}{dt} \int_V u \, d^3x = \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{g} \, d^3x = 0$$

在此情形下,

$$\frac{d}{dt} \int_V (ur) \, d^3x = c^2 \int_V \mathbf{g} \, d^3x$$

倘若定义区域 V 中自由电磁场的“能量中心”:

$$r_c \equiv \frac{\int_V (ur) \, d^3x}{\int_V u \, d^3x}$$

此能量中心的运动速度为:

$$v_c = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \frac{\frac{d}{dt} \int_V (ur) \, d^3x}{\int_V u \, d^3x} = c^2 \frac{\int_V \mathbf{g} \, d^3x}{\int_V u \, d^3x} = \frac{\mathbf{G} c^2}{U}$$

式中 U 与 \mathbf{G} 分别是区域 V 中电磁场的总能量和总动量:

$$U = \int_V u \, d^3x, \quad G = \int_V g \, d^3x$$

所以, 电磁场作用量泛函具有洛伦兹推动变换下的不变性意味着其能量中心的运动类似于一个能量为 U 动量为 G 的相对论性质点的运动.

接下来讨论电磁场角动量的物理内涵. 我们对 $F^{\mu\nu}$ 所赋予的物理内涵意味着

$$\epsilon_{ijk} B^k = F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = \epsilon_{ijk} (\nabla \times A)^k \quad \rightsquigarrow \quad B = \nabla \times A$$

进而,

$$\begin{aligned} g &= \epsilon_0 E \times B = \epsilon_0 E \times (\nabla \times A) = \epsilon_0 e_i \epsilon_{ijk} \epsilon^{mnk} E_j \partial^m A^n \\ &= \epsilon_0 e_i E_j (\partial^i A^j - \partial^j A^i) = \epsilon_0 E_j \nabla A^j - \epsilon_0 (E \cdot \nabla) A \end{aligned}$$

以及:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_0} r \times g &= E_j (r \times \nabla) A^j - E^j (r \times \partial_j A) \\ &= E_j (r \times \nabla) A^j - \partial_j [E^j (r \times A)] + (\nabla \cdot E) (r \times A) + E^j [(\partial_j r) \times A] \\ &= E_j (r \times \nabla) A^j - \partial_j [E^j (r \times A)] + E \times A \end{aligned}$$

求其在 \mathbb{E}_3 某个区域 V 中的体积分,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M} &= \int_V \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{g} \, \mathrm{d}^3x \\ &= \epsilon_0 \int_V E_j (\boldsymbol{r} \times \nabla) A^j \, \mathrm{d}^3x + \epsilon_0 \int_V \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{A} \, \mathrm{d}^3x \\ &\quad - \epsilon_0 \int_V \partial_j [E^j (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{A})] \, \mathrm{d}^3x \\ &= \epsilon_0 \int_V E_j (\boldsymbol{r} \times \nabla) A^j \, \mathrm{d}^3x + \epsilon_0 \int_V \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{A} \, \mathrm{d}^3x - \epsilon_0 \oint_{\partial V} \mathrm{d}s_j E^j (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{A}) \end{aligned}$$

假设电磁场仅分布于区域 V 之内、无场强法分量通过边界面 ∂V 溢出:

$$\oint_{\partial V} \mathrm{d}s_j E^j (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{A}) = 0$$

如此,

$$\boldsymbol{M} = \epsilon_0 \int_V E_j (\boldsymbol{r} \times \nabla) A^j \, \mathrm{d}^3x + \epsilon_0 \int_V \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{A} \, \mathrm{d}^3x$$

换言之,

$$\mathbf{M} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$$

其中,

① \mathbf{l} 称为电磁场的轨道角动量:

$$\mathbf{l} = \epsilon_0 \int_V d^3x E_j (\mathbf{r} \times \nabla) A^j$$

之所以如此命名是因为其被积函数中含有复合算符 $(\mathbf{r} \times \nabla)$, 而量子力学体系的轨道角动量算符是 $-i\hbar(\mathbf{r} \times \nabla)$.

② \mathbf{s} 称为电磁场的自旋角动量:

$$\mathbf{s} = \epsilon_0 \int_V d^3x \mathbf{E} \times \mathbf{A}$$

自旋角动量的特点是其被积函数不显含场点的位置矢径 \mathbf{r} .

为了对量子物理中光子的自旋有一点感觉, 现在考虑真空中一列具有确定频率的时谐电磁波且具有圆极化. 假设该电磁波的频率为 ω , 传播方向为直角坐标系的 X^3 轴正向²³, 则此时谐电磁波可用矢量势

$$\mathbf{A} = A(r)[\mathbf{e}_1 \cos(\omega t) + \mathbf{e}_2 \sin(\omega t)], \quad k = \omega/c$$

描写. 把磁感应强度的定义式 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 与法拉第定律结合起来,

$$0 = \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

因此, 在物理上可以有:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \omega A(r)[\mathbf{e}_1 \sin(\omega t) - \mathbf{e}_2 \cos(\omega t)] \quad \rightsquigarrow [A(r)]^2 = \frac{E^2}{\omega^2}$$

进一步地,

$$\mathbf{E} \times \mathbf{A} = \omega [A(r)]^2 \mathbf{e}_3 = \frac{E^2}{\omega} \mathbf{e}_3$$

²³ 直角坐标系三个独立方向的基矢分别记为 \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$).

所以,

$$\mathbf{s} = \epsilon_0 \int_V d^3x \mathbf{E} \times \mathbf{A} = \frac{e_3}{\omega} \epsilon_0 \int_V d^3x E^2$$

回忆电磁场总能量的表达式:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3x E^2 + \frac{1}{2\mu_0} \int_V d^3x B^2$$

且对于真空中的平面电磁波而言²⁴,

$$\frac{1}{\mu_0} B^2 = \epsilon_0 E^2 \quad \rightsquigarrow \quad U = \epsilon_0 \int_V d^3x E^2$$

我们又可以把圆极化的平面电磁波自旋角动量表达为:

$$\mathbf{s} = \frac{U}{\omega} \mathbf{e}_3$$

²⁴证明请参见本课程后续课件, 或者郭硕鸿先生的著作《电动力学》第三版第116页之(1.30)式.

- ① 倘若频率为 ω 的一系列平面电磁波恰好对应于量子物理中的一个光子, 它的能量须表为:

$$U = \hbar\omega$$

式中的 \hbar 称为 Planck 常数, 它具有角动量的量纲、其实验值是:

$$\hbar \approx 1.054 \times 10^{-34} \text{ Joule} \cdot \text{s}$$

于是, 光子的自旋角动量写为:

$$s = \hbar e_3$$

鉴于 s 的量值只是 \hbar 的一倍, 所以称光子的自旋为 1.²⁵

²⁵ $s_3 = \pm 1$, 对应于平面电磁波有两个独立的极化方向.

电磁场的哈密顿程式

电磁场的拉氏密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J^\mu A_\mu$$

通过场强 $F_{\mu\nu}$ 依赖于 $\partial_\rho A_\sigma$, 其中 $\partial_0 A_\sigma$ 是场空间中“广义坐标” A_σ 所对应的“广义速度”. 现把 $A_\sigma(x)$ 重新解读为相空间中的正则坐标, 与其共轭的正则动量定义为:

$$\pi^\sigma(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\sigma(x))} = -\frac{1}{\mu_0} F^{0\sigma}(x)$$

电磁场的动力学决定于哈密顿密度:

$$\mathcal{H} = \pi^\mu \partial_0 A_\mu - \mathcal{L}$$

与基本的等式泊松括号:

$$\{A_\rho(t, x), \pi^\sigma(t, y)\} = \delta_\rho^\sigma \delta^{(3)}(x - y)$$

- ① 不幸的是：电磁场与“正则坐标” $A_0(x)$ 共轭的“正则动量” $\pi^0(x)$ 恒等于零，

$$\pi^0(x) = -\frac{1}{\mu_0} F^{00}(x) = 0$$

它使得基本泊松括号²⁶

$$\{A_0(t, x), \pi^0(t, y)\} = \delta^{(3)}(x - y)$$

无法逻辑自洽地成立. $\rightsquigarrow \pi^0(x)$ 不是电磁场的动力学变量，它仅是一个约束.

2: 应该怎么建立电磁场的哈密顿形式体系？

²⁶在经典场论意义下，任意两个电磁场量 $F(t, x)$ 与 $G(t, y)$ 的等时泊松括号按照泛函导数的积分定义：

$$\{F(t, x), G(t, y)\} = \int d^3z \left[\frac{\delta F(t, x)}{\delta A_\mu(t, z)} \frac{\delta G(t, y)}{\delta \pi^\mu(t, z)} - \frac{\delta G(t, y)}{\delta A_\mu(t, z)} \frac{\delta F(t, x)}{\delta \pi^\mu(t, z)} \right]$$

含有约束的哈密顿程式

为了合理地建立电磁场的哈密顿表述, 我们须事先了解狄拉克的约束理论. 为方便计, 暂时考虑质点组构成的力学体系.

- ① 在相空间中, 由体系的正则坐标与正则动量构成的正则共轭变量为 (q_a, p_a) ($a = 1, 2, \dots, N$).
- ② 作为工作假定, 暂且认为这些正则变量彼此独立 (不一定为真),

$$\{q_a, p_b\} = \delta_{ab}, \quad \{q_a, q_b\} = \{p_a, p_b\} = 0$$

泊松括号的定义为:

$$\{F, G\} = \sum_{a=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial q_a} \frac{\partial G}{\partial p_a} - \frac{\partial G}{\partial q_a} \frac{\partial F}{\partial p_a} \right)$$

- ③ 动力学决定于哈密顿量 $H(q, p) = \sum_{a=1}^N p_a \dot{q}_a - L(q, \dot{q})$:

$$\frac{dq_a}{dt} = \{q_a, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \quad \frac{dp_a}{dt} = \{p_a, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_a}$$

- 倘若因为拉氏量 $L(q, \dot{q})$ 的内部结构或者人为施加的某些外部条件, 正则变量之间存在函数关系:

$$\phi_m(q, p) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

即正则变量彼此间存在着相互关联, 以致于某些正则变量不独立. 我们称 $\phi_m(q, p) = 0$ ($1 \leq m \leq M$) 为初级约束.

- 当体系运动时, 我们要求初级约束仍然成立:

$$\frac{d\phi_m}{dt} = \{\phi_m, H\} \approx 0 \rightsquigarrow \phi_n(q, p) = 0, \quad n = M+1, \dots, M+N$$

新出现的这些约束就称为次级约束.²⁷

- 进一步要求次级约束在体系运动时成立,

$$\frac{d\phi_n}{dt} = \{\phi_n, H\} \approx 0 \rightsquigarrow \phi_l(q, p) = 0, \quad l = M+N+1, \dots$$

直至找出体系中隐藏的所有次级约束.

²⁷ 这里出现近似等号 \approx 的意思是: 在涉及约束 ϕ_m 的泊松括号 $\{\phi_m, A\}$ 计算完成之前时暂时不能使用约束条件 $\phi_m = 0$. 下同.

- 把体系中的约束区分为初级约束和所有次级约束这种分类虽然是必要的,但并不重要.以下把它们笼统地记为

$$\chi_r(q, p) = 0, \quad 1 \leq r \leq S$$

- 计算泊松括号:

$$C_{rs}(q, p) \approx \{\chi_r(q, p), \chi_s(q, p)\}, \quad 1 \leq r, s \leq S$$

对于指定的 r , 倘若存在不全为零的系数 u_s 使得代数方程 $\sum_{s=1}^S C_{rs} u_s = 0$ 成立, 则称 $\chi_r(q, p) = 0$ 为体系的第一类约束. 否则称 $\chi_r(q, p) = 0$ 为体系的第二类约束.

- 存在第一类约束意味着体系中含有非物理自由度. 可以人为施加新的外来约束条件将其转化为第二类约束, 从而消除掉体系中所有的非物理自由度²⁸.
- 第二类约束的存在说明之前定义的泊松括号并不能提供对体系动力学的恰当描写, 应该由所谓的 Dirac 括号所替代:

²⁸ 某些特殊情形下也可以通过直接求解第一类约束的方法消除非物理自由度.

$$\{f, g\}_D = \{f, g\} - \sum_{r, s} \{f, \chi_r\} C_{rs}^{-1} \{\chi_s, g\}$$

此处 $C = (C_{rs})$, C^{-1} 是 C 的逆矩阵:

$$\sum_s C_{rs} C_{st}^{-1} = \delta_{rt}$$

当所有的约束都是第二类约束时, $\det C \neq 0$, C^{-1} 显然是存在的.

- 第二类约束 $\chi_r(q, p) = 0$ 与其满足的 Dirac 括号相容:

$$\begin{aligned} \{\chi_r, g\}_D &= \{\chi_r, g\} - \sum_{t, s} \{\chi_r, \chi_t\} C_{ts}^{-1} \{\chi_s, g\} \\ &= \{\chi_r, g\} - \sum_s \left[\sum_t C_{rt} C_{ts}^{-1} \right] \{\chi_s, g\} \\ &= \{\chi_r, g\} - \sum_s \delta_{rs} \{\chi_s, g\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

因此可以安全地从体系的动力学描写中舍去.

从 C 矩阵之矩阵元的定义

$$C_{rs}(q, p) \approx \{\chi_r(q, p), \chi_s(q, p)\}$$

可知：

- ① C 矩阵是反对称矩阵, $C_{rs} = -C_{sr}$.
- ② 倘若 C 有逆 C^{-1} , C^{-1} 也必为反对称矩阵 $C_{rs}^{-1} = -C_{sr}^{-1}$.
- ③ 物理体系中第二类约束的总数必定是偶数个.

不难验证, Dirac 括号具有如下重要性质:

- ① 反交换律:

$$\{f, g\}_D = -\{g, f\}_D$$

- ② 分配律:

$$\{f, gh\}_D = \{f, g\}_D h + g \{f, h\}_D$$

- ③ 雅可比恒等式:

$$\{f, \{g, h\}_D\}_D + \{g, \{h, f\}_D\}_D + \{h, \{f, g\}_D\}_D = 0$$

电磁场的哈密顿表述

回到电磁场.

因为存在初级约束 $\pi^0 = 0$, 电磁场的拉氏密度表达为:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \pi^\mu \partial_0 A_\mu - \mathcal{L} \\ &= \pi^i \partial_0 A_i + \frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \\ &= -\frac{1}{\mu_0} F^{0i} F_{0i} - \frac{1}{\mu_0} F^{0i} \partial_i A_0 + \frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \partial_i (F^{0i} A_0) - \frac{1}{2\mu_0} F^{0i} F_{0i} + \frac{1}{4\mu_0} F^{ij} F_{ij} - J^i A_i \\ &\quad + \left[\frac{1}{\mu_0} \partial_i F^{0i} - J^0 \right] A_0\end{aligned}$$

体系的哈密顿量是 \mathcal{H} 在 \mathbb{E}_3 中的体积分:

$$H = \int d^3x \left[-\frac{1}{2\mu_0} F^{0i} F_{0i} + \frac{1}{4\mu_0} F^{ij} F_{ij} - J^i A_i - A_0 \left(\frac{1}{\mu_0} \partial_i F^{i0} + J^0 \right) \right]$$

于是存在如下次级约束：

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dt} \pi^0(t, \mathbf{x}) = \left\{ \pi^0(t, \mathbf{x}), H \right\} \\
 &\approx - \int d^3 y \left\{ \pi^0(t, \mathbf{x}), A_0(t, \mathbf{y}) \right\} \left[\frac{1}{\mu_0} \partial_i F^{i0}(t, \mathbf{y}) + J^0(t, \mathbf{y}) \right] \\
 &= \int d^3 y \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left[\frac{1}{\mu_0} \partial_i F^{i0}(t, \mathbf{y}) + J^0(t, \mathbf{y}) \right] \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \partial_i F^{i0}(t, \mathbf{x}) + J^0(t, \mathbf{x})
 \end{aligned}$$

这实际上是电高斯定律 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$. 因为 $\pi^\mu = F^{\mu 0}/\mu_0$, 我们现在把前两个约束表达为：

$$\begin{aligned}
 \chi_1 &\approx \pi^0 = 0 \\
 \chi_2 &\approx \partial_i \pi^i + J^0 = 0
 \end{aligned}$$

体系中不再存在更多个次级约束. 这是因为 $\dot{\chi}_2 = 0$ 自动成立：

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d\chi_2}{dt} \approx c \partial_0 (\partial_i \pi^i + J^0) = c \left[-\frac{1}{\mu_0} \partial_i (\partial_0 F^{0i}) + \partial_0 J^0 \right] \\
&= c \left[-\frac{1}{\mu_0} \partial_i (\partial_\mu F^{\mu i}) + \frac{1}{\mu_0} \partial_i (\partial_j F^{ji}) + \partial_0 J^0 \right] \\
&= c \left[\partial_i J^i + \frac{1}{\mu_0} \partial_i \partial_j F^{ji} + \partial_0 J^0 \right] \\
&= \partial_\mu J^\mu \\
&= 0
\end{aligned}$$

容易看出：

$$\{\chi_1, \chi_1\} \approx \{\chi_1, \chi_2\} \approx \{\chi_2, \chi_2\} \approx 0$$

所以 χ_1 和 χ_2 都是第一类约束.

为了消除第一类约束带来的非物理自由度, 需要人为地施加新的约束条件, 即取规范. 电动力学中经常采取的两种规范是:

- ① Lorenz 规范 $\rightsquigarrow \partial^\mu A_\mu = 0$.
- ② 库仑规范 $\rightsquigarrow \partial^i A_i = 0$.

以下我们采取库仑规范,即在体系中引入第三个约束:

$$\chi_3 \approx \partial^i A_i = 0$$

采取了库仑规范后, $\chi_2 = 0$ 可重新表为:

$$\begin{aligned} c\rho &= J^0 = -\frac{1}{\mu_0} \partial_i F^{i0} = -\frac{1}{\mu_0} \partial_i (\partial^i A^0 - \partial^0 A^i) \\ &= -\frac{1}{\mu_0} [\partial_i \partial^i A^0 + \partial_0 (\partial_i A^i)] \\ &= -c^2 \epsilon_0 \nabla^2 A^0 \quad \rightsquigarrow \quad \nabla^2 A^0(t, \mathbf{x}) = -\frac{\rho(t, \mathbf{x})}{c \epsilon_0} \end{aligned}$$

它允许我们进一步引入第四个约束:

$$\chi_4 \approx A^0(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{4\pi c \epsilon_0} \int d^3 y \frac{\rho(t, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = 0$$

电磁场体系中存在着且仅存在着这四个约束.

引入约束矩阵 C , 其矩阵元定义为:

$$C_{rx, sy} \approx \{\chi_r(t, x), \chi_s(t, y)\}, \quad 1 \leq r, s \leq 4$$

我们有:

$$C_{1x, 4y} = -C_{4x, 1y} = -\delta^{(3)}(x - y)$$

$$C_{2x, 3y} = -C_{3x, 2y} = \nabla^2 \delta^{(3)}(x - y)$$

显然有 $\det C \neq 0$, 表明这四个约束都已经转换成了第二类约束.

经典电动力学

Chapter 3. 静电学

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院近代物理系

hyang@ustc.edu.cn

May 2, 2022

① 静电学基础

- 静电唯一性定理
- 格林函数法
- 几个典型的格林函数
- 静电势分布的多极展开

② 静电相互作用能与静电力

- 电荷分布与外电场相互作用能的多级展开
- 电荷分布与外电场的相互作用力

③ 电介质

- 电介质的宏观描写
- 电介质分界面上的静电边界条件

静电基本方程

我们已经在相对性原理与规范原理的基础上建立起描写电磁现象的基本方程组, 即麦克斯韦方程组:

$$\frac{1}{\mu_0} \partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu, \quad \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$$

和洛伦兹力公式:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = q F_{\mu\nu} U^\nu$$

- 这些方程可以用 \mathbb{E}_3 中的矢量等价地表为:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

与

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \frac{dW}{dt} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$$

- 接下来是事情自然是在各种典型情形下求解这组方程, 用这些解描写各种电磁现象, 深化我们对于电磁相互作用的理解.

最简单的情形是所有场量均不随时间改变的静态:¹

$$\frac{\partial B}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

此时麦克斯韦方程组中的电场与磁场解耦, 分别形成静电学:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times E = 0$$

与静磁学:

$$\nabla \cdot B = 0, \quad \nabla \times B = \mu_0 j$$

本章讨论静电学.

¹静态情形下所有场量均不随时间变化. 除了场强的时间导数为零之外, 还有:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial j}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} = 0.$$

根据电场强度的定义,

$$\frac{E^i}{c} = F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0$$

在静电场情形下²:

$$E^i = -c \partial^i A^0 = -\partial^i \phi \quad \leftrightarrow \quad \boxed{A^0(r) \equiv \frac{\phi(r)}{c}, \quad A(r) = A}$$

习惯上称 $\phi(r)$ 为静电场 $E(r)$ 的静电势:

$$E(r) = -\nabla \phi(r)$$

- $E(r) = -\nabla \phi(r)$ 与毕安琪恒等式 $\nabla \times E = 0$ 相容. 事实上, 我们常常使用前者取代后者.
- 规范变换 $A_\mu(x) \rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)$ 退化为:

$$\phi(x) \rightsquigarrow \phi'(x) = \phi(x) + C$$

即 $\theta(t, x) = C t + \alpha_i x^i$ (α_i 为任意常数). 常数 C 的不确定性称为静电势零点选择的任意性.

²此处默认 A 为 \mathbb{E}_3 中的常矢量.

把 $E(r) = -\nabla\phi(r)$ 与电高斯定律相结合, 我们有:

$$\frac{\rho(r)}{\epsilon_0} = \nabla \cdot E(r) = -\nabla \cdot \nabla\phi(r)$$

即

$$\nabla^2\phi(r) = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$$

这个泊松方程就是静电学的基本方程.

2: 哪些因素可以完全确定静电场的分布?

静电唯一性定理:

对于给定的电荷分布 $\rho(r) \in V$, 静电势的分布 $\phi(r)$ 唯一地取决于 ϕ 在区域边界面 $\partial V = S$ 上所满足的 Dirichlet 边界条件 ($\phi|_S$ 给定) 或者 Neumann 边界条件 ($\frac{\partial\phi}{\partial n}|_S$ 给定).

使用反证法证明. 假设在给定边界 S 上电势 $\phi|_S$ 或者电势的法向导数 $\partial\phi/\partial n|_S$ 的前提下, 区域 V 内的电势仍不唯一. 即假设静电泊松方程存在着 $\phi_1(r)$ 和 $\phi_2(r)$ 两个解, 使得:

$$\nabla^2\phi_1 = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla^2\phi_2 = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

以及 $\phi_1|_S = \phi_2|_S$, 或者

$$\left. \frac{\partial\phi_1}{\partial n} \right|_S = \left. \frac{\partial\phi_2}{\partial n} \right|_S$$

- 构造新函数:

$$u(r) = \phi_1(r) - \phi_2(r)$$

显然, $u(r)$ 服从拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 u = 0$$

且满足的边界条件 $u|_S = 0$, 或者 $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = 0$.

使用第一格林公式,

$$\int_V d^3x (\Phi \nabla^2 \Psi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi) = \oint_S ds \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n}$$

且取 $\Phi = \Psi = u$, 我们有:

$$\int_V d^3x (u \nabla^2 u + \nabla u \cdot \nabla u) = \oint_S ds u \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

亦即:

$$\int_V d^3x (\nabla u)^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \nabla u = 0 \quad \rightsquigarrow \quad u = C (\text{常数})$$

所以,

$$\phi_1(r) = \phi_2(r) + C$$

但静电势的附加常数对于静电场场强的分布没有影响. 这就证明了静电唯一性定理.

导体表面的特殊性：

若区域 V 的界面 S 是导体表面，则因为静电平衡状态下导体表面的等势面特点， $\phi_1|_S$ 和 $\phi_2|_S$ 均为常数， $u|_S = \phi_1|_S - \phi_2|_S$ 自然亦为常数。所以， u 满足的第一格林公式可进一步写为：

$$\begin{aligned}\int_V d^3x (\nabla u)^2 &= \oint_S ds u \frac{\partial u}{\partial n} = u|_S \left(\oint_S ds \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \oint_S ds \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right) \\ &= -u|_S \left(\oint_S ds \cdot \mathbf{E}_1 - \oint_S ds \cdot \mathbf{E}_2 \right)\end{aligned}$$

显然，为了保证 $\nabla u = 0$ ，除了指定界面 S 上的电势之外，也可以指定导体表面 S 上携带的电荷总量 Q

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \oint_S ds \cdot \mathbf{E}_1 = \oint_S ds \cdot \mathbf{E}_2$$

这一特点是普通几何分界面不具备的。施加静电边界条件时，无须指定导体表面上的电荷面密度 $\sigma = -\epsilon_0 \partial \phi / \partial n|_S$ ，只需指定 S 上携带的总电荷量或者 S 的静电势。

第二格林公式

虽然唯一性定理指明了静电泊松方程 $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$ 的定解条件, 但它本身并未给出求解泊松方程边值问题的具体思路. 不过, 唯一性定理的数学基础(第一格林公式)

$$\int_V d^3x (\Phi \nabla^2 \Psi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi) = \oint_S ds \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n}$$

的一个派生公式(第二格林公式), 提供了求解泊松方程的一种最重要的方法: [格林函数法](#).

在第一格林公式中交换两个标量场的地位, 可得:

$$\int_V d^3x (\Psi \nabla^2 \Phi + \nabla \Psi \cdot \nabla \Phi) = \oint_S ds \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

二式相减, 有:

$$\int_V d^3x \Phi \nabla^2 \Psi = \int_V d^3x \Psi \nabla^2 \Phi + \oint_S ds \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)$$

此式就是第二格林公式.

格林函数:

- 位置矢量为 \mathbf{x}' 处的单位点电荷所激发的静电势分布 $\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 称为静电场的格林函数.
- 静电格林函数服从泊松方程:

$$\nabla^2 \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

- 考虑包含源点 \mathbf{x}' 在内的空间区域 V , 其边界面为 S . 倘若

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Big|_S = 0$$

称 $\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 为第一类边值问题的格林函数. 倘若

$$\frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n} \Big|_S = -\frac{1}{\epsilon_0 S}$$

称 $\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 为第二类边值问题的格林函数.

根据第二格林公式,

$$\int_V d^3x \Phi \nabla^2 \Psi = \int_V d^3x \Psi \nabla^2 \Phi + \oint_S ds \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)$$

区域 V 中静电势的第一类边值问题

$$\nabla^2 \phi(r) = -\rho(r)/\epsilon_0, \quad \phi(r)|_S = \varphi(r)$$

的解是:

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \int_V d^3x' \phi(r') \delta^{(3)}(r - r') \\ &= -\epsilon_0 \int_V d^3x' \phi(r') \nabla'^2 \mathcal{G}(r', r) \\ &= -\epsilon_0 \int_V d^3x' \mathcal{G}(r', r) \nabla'^2 \phi(r') - \epsilon_0 \oint_S ds' \left(\phi \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'} - \mathcal{G} \frac{\partial \phi}{\partial n'} \right) \\ &= \int_V d^3x' \mathcal{G}(r', r) \rho(r') - \epsilon_0 \oint_S ds' \varphi \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'} \end{aligned}$$

静电势的第二类边值问题

$$\nabla^2 \phi(r) = -\rho(r)/\epsilon_0, \quad \left. \frac{\partial \phi(r)}{\partial n} \right|_S = \zeta(r)$$

的解是：

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \int_V d^3x' \phi(r') \delta^{(3)}(r - r') \\ &= -\epsilon_0 \int_V d^3x' \phi(r') \nabla'^2 \mathcal{G}(r', r) \\ &= -\epsilon_0 \int_V d^3x' \mathcal{G}(r', r) \nabla'^2 \phi(r') - \epsilon_0 \oint_S ds' \left(\phi \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'} - \mathcal{G} \frac{\partial \phi}{\partial n'} \right) \\ &= \int_V d^3x' \mathcal{G}(r', r) \rho(r') + \frac{1}{S} \oint_S ds' \phi(r') + \epsilon_0 \oint_S ds' \mathcal{G}(r', r) \zeta(r') \\ &= \langle \phi \rangle_S + \int_V d^3x' \mathcal{G}(r', r) \rho(r') + \epsilon_0 \oint_S ds' \mathcal{G}(r', r) \zeta(r') \end{aligned}$$

典型区域的格林函数

- ① 很显然, 格林函数法的核心在于使用格林函数. 格林函数从何而来呢?

无界空间的静电格林函数:

位于地点 r' 的单位点电荷在无界空间激发的静电势为

$$\mathcal{G}(r, r') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|}$$

按照数学恒等式 $\nabla^2 |r - r'|^{-1} = -4\pi\delta^{(3)}(r - r')$, 我们有:

$$\nabla^2 \mathcal{G}(r, r') = -\delta^{(3)}(r - r')/\epsilon_0$$

且:

$$\mathcal{G}(r, r') \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0$$

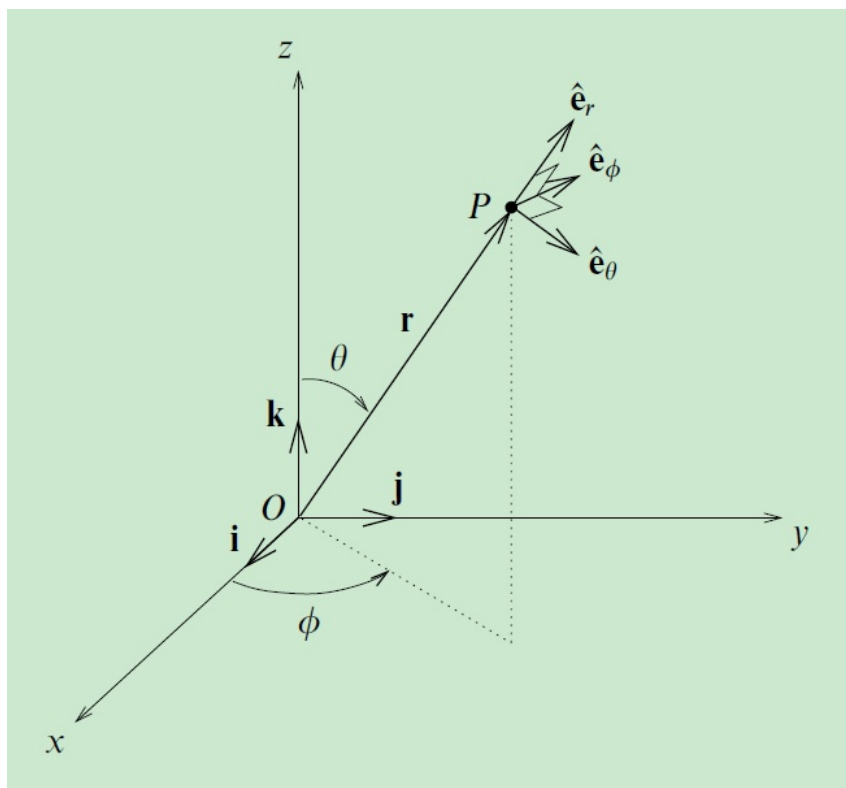
故此 $\mathcal{G}(r, r')$ 正是无界空间第一类静电边值问题的格林函数.

球坐标系中 ∇^2 的表达式:

$\nabla^2\phi$ 在笛卡尔直角坐标系中的表达式非常简单,

$$\nabla^2\phi = \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} + \frac{d^2\phi}{dz^2}$$

但是在静电学中, 倘若考虑到静电场分布区域的几何形状, 上式给出的 $\nabla^2\phi$ 使用起来往往很笨拙. 我们常需要在其他曲线坐标系中写出 $\nabla^2\phi$ 的表达式.



以球坐标系为例. ϕ 的梯度表达为:

$$\nabla\phi = e_r \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{e_\theta}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \frac{e_\phi}{r\sin\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\phi}$$

现在的问题是:

$$\nabla^2\phi = \nabla \cdot \nabla\phi = ?$$

现在介绍球坐标系里矢量分析的独孤剑法³. 三个球坐标的梯度分别是:

$$\nabla r = \mathbf{e}_r, \quad \nabla \theta = \frac{\mathbf{e}_\theta}{r}, \quad \nabla \varphi = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r \sin \theta}$$

因为梯度场无旋, 我们有恒等式:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{e}_r}{r^2 \sin \theta} \right) = 0, \quad \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{e}_\theta}{r \sin \theta} \right) = 0, \quad \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} \right) = 0$$

使用矢量分析恒等式

$$\nabla \times (fg) = \nabla f \times g + f \nabla \times g$$

我们有

$$\frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} = \mathbf{e}_r \times \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} = \nabla r \times \nabla \theta = \nabla \times (r \nabla \theta) - r \nabla \times \nabla \theta$$

即:

$$\frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} = \nabla \times (r \nabla \theta)$$

³It is only a joke.

同理有：

$$\frac{e_r}{r^2 \sin \theta} = \nabla \times (\theta \nabla \varphi), \quad \frac{e_\theta}{r \sin \theta} = \nabla \times (\varphi \nabla r)$$

因为旋度场无散, 我们有恒等式:

$$\nabla \cdot \left(\frac{e_r}{r^2 \sin \theta} \right) = 0, \quad \nabla \cdot \left(\frac{e_\theta}{r \sin \theta} \right) = 0, \quad \nabla \times \left(\frac{e_\varphi}{r} \right) = 0$$

再辅之以

$$\nabla \cdot (fg) = \nabla f \cdot g + f \nabla \cdot g$$

$$\nabla(\phi\psi) = \phi \nabla \psi + \psi \nabla \phi$$

这五个恒等式就构成了球坐标系中进行矢量分析的绝杀技.

现在我们使用这些恒等式在球坐标系中计算 $\nabla^2 \phi$:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \phi &= \nabla \cdot \left(e_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{e_\theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{e_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) \\
&= \nabla \cdot \left[\frac{e_r}{r^2 \sin \theta} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{e_\theta}{r \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{e_\varphi}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) \right] \\
&= \left(\frac{e_r}{r^2 \sin \theta} \right) \cdot \nabla \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \left(\frac{e_\theta}{r \sin \theta} \right) \cdot \nabla \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \\
&\quad + \left(\frac{e_\varphi}{r} \right) \cdot \nabla \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) \\
&= \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}$$

亦即：

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \hat{\mathcal{D}}^2 \phi$$

式中出现的

$$\hat{\mathcal{D}}^2 \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

是定义域在单位球面上的复平方可积函数构成的函数空间 \mathcal{H} 中的线性自伴算符, 其本征值方程是：

$$\hat{\mathcal{D}}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = -l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

- 算符 $\hat{\mathcal{D}}^2$ 的本征值为 $-l(l+1)$, l 称为角量子数, 其可能的取值为非负整数 $l = 0, 1, 2, \dots$.
- $\hat{\mathcal{D}}^2$ 属于本征值 $-l(l+1)$ 的本征函数 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ 称为球谐函数：

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad -l \leq m \leq l$$

- $P_l^m(\cos \theta)$ 称为缔合勒让德多项式：

$$P_l^m(x) \equiv \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}(x^2-1)^l}{dx^{l+m}}$$

$m=0$ 情形下的 $P_l^0(x)$ 简记作 $P_l(x)$ 并称为勒让德多项式：

$$P_l(x) \equiv \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l(x^2-1)^l}{dx^l}$$

几个低阶的勒让德多项式的显示表达式为：

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

- 球谐函数具有对称性 $Y_{l,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \varphi)$. 几个低阶球谐函数 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ 的显示表达式是：

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi}$$

- 球谐函数满足正交归一条件：

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

和完备性公式：

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta', \varphi') = \frac{1}{\sin \theta} \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi')$$

其全体形成了复函数空间 \mathcal{H} 的一组完备基. 单位球上的任意函数可以表达为球谐函数的线性组合：

$$\mathcal{A}(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

叠加系数为：

$$a_{lm} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \mathcal{A}(\theta, \varphi)$$

球壳空间的静电格林函数：

首先须把格林函数满足的微分方程 $\nabla^2 \mathcal{G}(r, r') = -\delta^{(3)}(r - r')/\epsilon_0$ 在球坐标系中表出。由于

$$\begin{aligned} 1 &= \int_V d^3x \delta^{(3)}(r - r') \\ &= \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \delta^{(3)}(r - r') \end{aligned}$$

$\delta^{(3)}(r - r')$ 在球坐标系中应表为：

$$\begin{aligned} \delta^{(3)}(r - r') &= \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \left[\frac{1}{\sin \theta} \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi') \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \sum_{lm} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

所以，可以把格林函数 $\mathcal{G}(r, r')$ 的表达式在球坐标系中试设为：

$$\mathcal{G}(r, r') = \sum_{lm} g_{lm}(r, r') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

注意到

$$\nabla^2(g_{lm}Y_{lm}) = 2\nabla g_{lm} \cdot \nabla Y_{lm} + Y_{lm}\nabla^2 g_{lm} + g_{lm}\nabla^2 Y_{lm}$$

其中：

$$\nabla g_{lm} \cdot \nabla Y_{lm} = \nabla g_{lm}(r, r') \cdot \nabla Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0$$

$$\nabla^2 g_{lm} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dg_{lm}(r, r')}{dr} \right]$$

$$\nabla^2 Y_{lm} = \frac{1}{r^2} \hat{\mathcal{D}}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = -\frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

可知 $g_{lm}(r, r')$ 服从微分方程：

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dg_{lm}(r, r')}{dr} \right] - l(l+1)g_{lm}(r, r') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(r - r')$$

这个方程表明 $g_{lm}(r, r')$ 实际上与参数 m 无关. 此后我们将其记为 $g_l(r, r')$.

- 倘若 $r \neq r'$, $g_l(r, r')$ 满足的方程退化为：

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dg_l(r, r')}{dr} \right] - l(l+1)g_l(r, r') = 0$$

设

$$g_l(r, r') = \frac{h_l(r, r')}{r}$$

上式化为：

$$\frac{d^2 h_l}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} h_l = 0$$

取试探解 $h_l = r^s$, 知 $s(s-1) - l(l+1) = 0$. 参数 s 有两个可能取值, 即 $s = -l$ 和 $s = l+1$. $h_l(r, r')$ 的通解为：

$$h_l(r, r') = \frac{a_l(r')}{r^l} + b_l(r')r^{l+1} \quad (r' \neq r)$$

换言之, $r' \neq r$ 情形下 $g_l(r, r')$ 的一般结构是：

$$g_l(r, r') = \frac{a_l(r')}{r^{l+1}} + b_l(r')r^l$$

- 求 $g_l(r, r')$ 所满足的微分方法在区间

$$r' - 0^+ \leq r \leq r' + 0^+$$

的积分, 并假设 $g_l(r, r')$ 在 $r = r'$ 处取值有限, 不难看出 $\frac{dg_l}{dr}$ 在 $r = r'$ 处发生了跃变:

$$\left[\frac{dg_l}{dr} \right]_{r \rightarrow r' + 0^+} - \left[\frac{dg_l}{dr} \right]_{r \rightarrow r' - 0^+} = -\frac{1}{\epsilon_0 r'^2}$$

- 假设静电场存在于半径分别为 $r = a$ 和 $r = b$ 的两个同心球面界定的球壳之间 ($a < b$). 对于第一类静电边值问题而言, 格林函数在区域的边界面上为零:

$$\mathcal{G}(r, r')|_{r=a} = \mathcal{G}(r, r')|_{r=b} = 0$$

因为当 $r \neq r'$ 时 $g_l(r, r')$ 的通解是

$$g_l(r, r') = \frac{a_l(r')}{r^{l+1}} + b_l(r')r^l$$

倘若 $r < r'$,

$$g_l(r, r') = b_l(r') \left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right)$$

倘若 $r > r'$,

$$g_l(r, r') = a_l(r') \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right)$$

综合以上两种情形, 我们有:

$$g_l(r, r') = c_l(a, b) \left(r'_{<}^l - \frac{a^{2l+1}}{r'_{<}^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r'_{>}^{l+1}} - \frac{r'_{>}^l}{b^{2l+1}} \right)$$

式中 $r_{<}(r_{>})$ 是 r 与 r' 中的较小者(较大者), 常系数 $c_l(a, b)$ 待定.

现在使用 $\frac{dg_l}{dr}$ 的跃变条件确定 $c_l(a, b)$. 倘若 $r = r' + 0^+$,

$$g_l(r, r') = c_l(a, b) \left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right)$$

由此知:

$$\left. \frac{dg_l(r, r')}{dr} \right|_{r \rightarrow r' + 0^+} = -\frac{c_l(a, b)}{r'^2} \left[1 - \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[(l+1) + l \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right]$$

倘若 $r = r' - 0^+$,

$$g_l(r, r') = c_l(a, b) \left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right)$$

由此知：

$$\left. \frac{dg_l(r, r')}{dr} \right|_{r \rightarrow r' - 0^+} = \frac{c_l(a, b)}{r'^2} \left[l + (l+1) \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[1 - \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right]$$

帶入到 $\frac{dg_l}{dr}$ 的跃变方程中，可得：

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\epsilon_0 r'^2} &= \left[\frac{dg_l}{dr} \right]_{r \rightarrow r' + 0^+} - \left[\frac{dg_l}{dr} \right]_{r \rightarrow r' - 0^+} \\ &= -\frac{c_l(a, b)}{r'^2} \left[1 - \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[(l+1) + l \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right] \\ &\quad - \frac{c_l(a, b)}{r'^2} \left[l + (l+1) \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[1 - \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right] \end{aligned}$$

化简知：

$$c_l(a, b) = \frac{1}{(2l+1)\epsilon_0 \left[1 - (a/b)^{2l+1}\right]}$$

所以，球壳空间中第一类静电边值问题的格林函数是：

$$\mathcal{G}(r, r') = \sum_{lm} \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{(2l+1)\epsilon_0 \left[1 - (a/b)^{2l+1}\right]} \left(r_{<}^l - \frac{a^{2l+1}}{r_{<}^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right)$$

- 球内空间 ($a = 0$) 第一类静电格林函数：

$$\mathcal{G}(r, r') = \sum_{lm} \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{(2l+1)\epsilon_0} \left(\frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right)$$

- 球外空间 ($b \rightarrow \infty$) 第一类静电格林函数：

$$\mathcal{G}(r, r') = \sum_{lm} \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{(2l+1)\epsilon_0} \left(\frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} - \frac{a^{2l+1}}{r_{>}^{l+1} r_{<}^{l+1}} \right)$$

- 无界空间 ($a = 0, b \rightarrow \infty$) 第一类静电边值问题的格林函数:

$$\mathcal{G}(r, r') = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{lm} \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{(2l+1)} \frac{r'^l}{r^{l+1}}$$

如前所述,

$$\mathcal{G}(r, r') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|}$$

所以:

$$\frac{1}{|r - r'|} = 4\pi \sum_{lm} \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{(2l+1)} \frac{r'^l}{r^{l+1}}$$

此式是数学物理中最著名的级数展开之一.

静电势分布的多极展开

电荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ 在无界空间激发的静电势分布是：

$$\phi(\mathbf{r}) = \int d^3x' \rho(\mathbf{r}') \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

上式中的积分是全空间.

倘若电荷分布仅仅存在于空间中一个小区域 Ω 中⁴, 则上面的静电势分布可以等价地表为：

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} d^3x' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

进一步假设我们只关心远场区 ($r \equiv |\mathbf{r}| \gg R$) 的电势分布,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \left[r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &\approx \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{3(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}')^2 - r'^2}{2r^3} \end{aligned} \quad \leftarrow \mathbf{e}_r \equiv \frac{\mathbf{r}}{r}$$

⁴即假设仅仅当 $r' \equiv |\mathbf{r}'| \lesssim R$ 时才有 $\rho(\mathbf{r}') \neq 0$.

如此, 远场区的静电势分布可以近似表达为:

$$\phi(r) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} \int_{\Omega} d^3x' \rho(r') + \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \cdot \int_{\Omega} d^3x' \mathbf{r}' \rho(r') + \frac{1}{2r^3} \int_{\Omega} d^3x' \left[3(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}')^2 - r'^2 \right] \rho(r') \right\}$$

在笛卡尔直角坐标系中,

$$3(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}')^2 - r'^2 = \frac{3}{r^2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r'^2 = \frac{3}{r^2} x^i x^j x'_i x'_j - r'^2 = \frac{x^i x^j}{r^2} (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2)$$

所以:

$$\phi(r) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2r^5} \sum_{ij} Q_{ij} x^i x^j \right]$$

式中,

$$Q = \int_{\Omega} d^3x' \rho(r'), \quad \mathbf{p} = \int_{\Omega} d^3x' \mathbf{r}' \rho(r'), \quad Q_{ij} = \int_{\Omega} d^3x' (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(r')$$

分别称为电荷分布的总电荷、电偶极矩矢量与电四极矩张量.

使用无界空间静电第一类边值问题格林函数的另一表达式

$$\mathcal{G}(r, r') = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{lm} \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{(2l+1)} \frac{r'^l_{<}}{r^{l+1}_{>}}$$

我们可以把无界空间中静电势的分布重新表达为：

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \int d^3x' \rho(r') \mathcal{G}(r, r') \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{(2l+1)} \int d^3x' \rho(r') \frac{r'^l_{<}}{r^{l+1}_{>}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \end{aligned}$$

倘若电荷仅分布于线度为 R 的小区域 Ω^5 ，则在 Ω 内 $r_{<} = r'$ ， $r_{>} = r$ 。所以，

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{(2l+1)} \left[\frac{1}{r^{l+1}} \int_{\Omega} d^3x' \rho(r') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \right] \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{lm} \frac{1}{2l+1} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

⁵我们暂把 Ω 看做是一个半径为 R 的球体。

式中

$$q_{lm} \equiv \int_{\Omega} d^3x' \rho(r') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi')$$

称为电荷分布的球多极矩. 容易看到:

$$q_{00} = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}}, \quad q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_3, \quad q_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_1 \pm ip_2).$$

q_{2m} 本质上就是电四极矩张量诸分量的线性组合. 静电势球多极展开的优点在于它简洁地给出了高阶项的贡献.

例:

- ① 接地导体内部存在着一个半径为 R 的球形空腔, 空腔中心放置了一个偶极矩为 \boldsymbol{p} 的电偶极子. 求空腔内部的静电势分布.

解：

本问题显然属于第一类静电边值问题. 我们打算使用格林函数法解之：

$$\phi(r) = \int_V d^3x' \mathcal{G}(r', r) \rho(r') - \epsilon_0 \oint_S ds' \varphi \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'}$$

式中，

- $\mathcal{G}(r, r')$ 是球内空间的格林函数，

$$\mathcal{G}(r, r') = \sum_{lm} \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{(2l+1)\epsilon_0} \left(\frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{R^{2l+1}} \right)$$

- 因为导体接地, $\varphi|_S = 0$. 所以,

$$\epsilon_0 \oint_S ds' \varphi \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'} = 0$$

- $\rho(r')$ 是电偶极子的电荷体密度.

电偶极矩 \mathbf{p} 可在笛卡尔直角坐标系中写为 $\mathbf{p} = p^i \mathbf{e}_i = \delta_j^i \mathbf{e}_i p^j$. 因为电偶极子置于球心(坐标原点), 我们有:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p} &= \mathbf{p} \int d^3x' \delta^{(3)}(\mathbf{r}') = \mathbf{e}_i p^j \int d^3x' \delta_j^i \delta^{(3)}(\mathbf{r}') \\
 &= \mathbf{e}_i p^j \int d^3x' \frac{\partial x'^i}{\partial x'^j} \delta^{(3)}(\mathbf{r}') \\
 &= \mathbf{e}_i p^j \int d^3x' \frac{\partial}{\partial x'^j} [x'^i \delta^{(3)}(\mathbf{r}')] - \mathbf{e}_i p^j \int d^3x' x'^i \frac{\partial \delta^{(3)}(\mathbf{r}')}{\partial x'^j} \\
 &= - \int d^3x' \mathbf{r}' [\mathbf{p} \cdot \nabla' \delta^{(3)}(\mathbf{r}')]
 \end{aligned}$$

比较此式与电偶极矩的定义式

$$\mathbf{p} = \int_{\Omega} d^3x' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}')$$

可知电偶极子的电荷体密度是:

$$\rho(\mathbf{r}') = -\mathbf{p} \cdot \nabla' \delta^{(3)}(\mathbf{r}')$$

现在求空腔内部的静电势分布：

$$\begin{aligned}
 \phi(r) &= \int_{\Omega} d^3x' \mathcal{G}(r', r) \rho(r') \\
 &= - \int_{\Omega} d^3x' \mathcal{G}(r', r) \mathbf{p} \cdot \nabla' \delta^{(3)}(r') \\
 &= - \int_{\Omega} d^3x' \nabla' \cdot [\mathcal{G}(r', r) \mathbf{p} \delta^{(3)}(r')] + \int_{\Omega} d^3x' \nabla' \cdot [\mathcal{G}(r', r) \mathbf{p}] \delta^{(3)}(r') \\
 &= \nabla' \cdot [\mathcal{G}(r', r) \mathbf{p}] \Big|_{r'=0} \\
 &= \mathbf{p} \cdot \nabla' \mathcal{G}(r', r) \Big|_{r'=0}
 \end{aligned}$$

上式涉及的梯度运算完成后须取 $r' = 0$ 。因此，可在格林函数中取 $r_{<} = r'^6$ ：

$$\mathcal{G}(r, r') = \sum_{lm} \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{(2l+1)\epsilon_0} r'^l \left(\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{R^{2l+1}} \right)$$

⁶亦即取 $r_{>} = r$ 。

回忆

$$\nabla' = e_{r'} \frac{\partial}{\partial r'} + \frac{e'_\theta}{r'} \frac{\partial}{\partial \theta'} + \frac{e_{\varphi'}}{r' \sin \theta'} \frac{\partial}{\partial \varphi'}$$

以及低阶球谐函数的表达式

$$Y_{00}(\theta', \varphi') = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \quad Y_{10}(\theta', \varphi') = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta'$$

$$Y_{1,\pm 1}(\theta', \varphi') = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta' e^{\pm i\varphi}$$

我们看到格林函数中 $l=0$ 与 $l \geq 2$ 的项都不会对空腔内的静电势产生影响：

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{1}{3\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3} \right) \mathbf{p} \cdot \nabla' \left[r' \sum_{m=-1}^1 Y_{1m}^*(\theta', \varphi') Y_{1m}(\theta, \varphi) \right] \Big|_{r'=0} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3} \right) \mathbf{p} \cdot \left(e_{r'} + e'_\theta \frac{\partial}{\partial \theta'} + \frac{e_{\varphi'}}{\sin \theta'} \frac{\partial}{\partial \varphi'} \right) \\ &\quad [\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')] \Big|_{\theta'=\varphi'=0} \end{aligned}$$

化简得：

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3} \right) p \cdot \left(e_{r'} \cos \theta + e_{\theta'} \sin \theta \cos \varphi + e_{\varphi'} \sin \theta \sin \varphi \right) \Big|_{\theta'=\varphi'=0}$$

笛卡尔直角坐标系与球坐标系基矢的变换关系是：

$$\begin{aligned} e_{r'} &= e_3 \cos \theta' + e_1 \sin \theta' \cos \varphi' + e_2 \sin \theta' \sin \varphi' \\ e_{\theta'} &= -e_3 \sin \theta' + e_1 \cos \theta' \cos \varphi' + e_2 \cos \theta' \sin \varphi' \\ e_{\varphi'} &= -e_1 \sin \varphi' + e_2 \cos \varphi' \end{aligned}$$

因此有：

$$e_{r'} \Big|_{\theta'=\varphi'=0} = e_3, \quad e_{\theta'} \Big|_{\theta'=\varphi'=0} = e_1, \quad e_{\varphi'} \Big|_{\theta'=\varphi'=0} = e_2$$

导体空腔内的静电势分布最终表达为：

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3} \right) p \cdot e_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) p \cdot r$$

静电场的能量

电磁场的能量体密度为：

$$u = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right)$$

对于静电场, $B = 0$, 其能量体密度退化为：

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

- ① 静电场不能脱离电荷分布独立存在, $\nabla \cdot E = \rho/\epsilon_0$. 此外, 它是无旋的矢量场

$$\nabla \times E = 0 \quad \rightsquigarrow \quad E = -\nabla \phi \quad \rightsquigarrow \quad \nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0$$

静电场的总能量可表为：

$$W = \int d^3x u = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\int_{r \leq R} d^3x E^2 \right] \Big|_{R \rightarrow \infty}$$

因为

$$E^2 = \nabla\phi \cdot \nabla\phi = \nabla \cdot (\phi \nabla\phi) - \phi \nabla^2\phi = \nabla \cdot (\phi \nabla\phi) + \frac{\rho}{\epsilon_0}\phi$$

且

$$\left[\int_{r \leq R} d^3x \nabla \cdot (\phi \nabla\phi) \right] \Big|_{R \rightarrow \infty} = \left[\oint_{r=R} ds \cdot (\phi \nabla\phi) \right] \Big|_{R \rightarrow \infty} = 0$$

我们可以把静电场的总能量重新表达为：

$$W = \frac{1}{2} \int d^3x \rho\phi$$

或者等价地，

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d^3x \rho\phi$$

式中 Ω 是电荷分布 $\rho(r)$ 占据的空间区域.

现在假设空间中的电荷分布为：

$$\rho(r) = \rho_1(r) + \rho_2(r)$$

其中 $\rho_i(r)$ 仅在区域 Ω_i 中不为零. 鉴于电动力学是一个线性理论, 静电势服从的泊松方程是线性微分方程, 空间中的静电势分布可表为：

$$\phi(r) = \phi_1(r) + \phi_2(r)$$

这里 $\phi_i(r)$ 是电荷分布 $\rho_i(r)$ 激发的静电势, $\nabla^2 \phi_i = -\rho_i/\epsilon_0$. 空间中的总静电能是：

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int d^3x (\rho_1 + \rho_2)(\phi_1 + \phi_2) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \rho_1 \phi_1 + \frac{1}{2} \int d^3x \rho_2 \phi_2 + \boxed{\frac{1}{2} \int d^3x (\rho_1 \phi_2 + \rho_2 \phi_1)} \end{aligned}$$

最后一项显然在物理上应诠释为两个电荷分布之间的静电相互作用能：

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int d^3x (\rho_1 \phi_2 + \rho_2 \phi_1)$$

静电相互作用能

静电相互作用能表达式中的两项实际上完全相等. 这是因为

$$\begin{aligned}\int d^3x \rho_1 \phi_2 &= \epsilon_0 \int d^3x (\nabla \cdot \mathbf{E}_1) \phi_2 \\&= \epsilon_0 \int d^3x \nabla \cdot (\phi_2 \mathbf{E}_1) - \epsilon_0 \int d^3x \nabla \phi_2 \cdot \mathbf{E}_1 \\&= \left[\epsilon_0 \oint_{r=R} d\mathbf{s} \cdot \phi_2 \mathbf{E}_1 \right] \Big|_{R \rightarrow \infty} + \epsilon_0 \int d^3x \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \\&= \epsilon_0 \int d^3x \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1\end{aligned}$$

最后一步的结果关于指标 1 与 2 的交换对称,

$$\rightsquigarrow \int d^3x \rho_2 \phi_1 = \epsilon_0 \int d^3x \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1$$

所以, 两个电荷分布之间的静电相互作用能可以重新表达为:

$$W_{\text{int}} = \epsilon_0 \int d^3x \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2$$

或者,

$$W_{\text{int}} = \int d^3x \rho_1 \phi_2 = \int d^3x \rho_2 \phi_1$$

最后这个表达式还可以等价地写为:

$$W_{\text{int}} = \int_{\Omega_1} d^3x \rho_1 \phi_2 = \int_{\Omega_2} d^3x \rho_2 \phi_1$$

电荷分布与外电场的相互作用能:

假设把占据了空间区域 Ω 的电荷分布 $\rho(r)$ 置于外静电场 E_{ext} 中,

$$E_{\text{ext}} = -\nabla \phi_{\text{ext}}, \quad \nabla^2 \phi_{\text{ext}}(r) = 0, \quad \forall r \in \Omega$$

外电场的静电势在 Ω 内变化缓慢,

$$\phi_{\text{ext}}(r) \approx \phi_{\text{ext}}(0) + r \cdot [\nabla \phi_{\text{ext}}(r)] \Big|_{r \rightarrow 0} + \frac{1}{2} \sum_{ij} x^i x^j \left[\frac{\partial^2 \phi_{\text{ext}}(r)}{\partial x^i \partial x^j} \right] \Big|_{r \rightarrow 0} + \dots$$

或者,

$$\begin{aligned}\phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r}) &\approx \phi_{\text{ext}}(0) + \boldsymbol{r} \cdot [\nabla \phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r})] \Big|_{\boldsymbol{r} \rightarrow 0} \\ &\quad + \frac{1}{6} \sum_{ij} \left(3x^i x^j - \delta^{ij} r^2 \right) \left[\frac{\partial^2 \phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r})}{\partial x^i \partial x^j} \right] \Big|_{\boldsymbol{r} \rightarrow 0} + \dots\end{aligned}$$

将此式代回到相互作用静电能的表达式, 知:

$$\begin{aligned}W_{\text{int}} &= \int_{\Omega} d^3x \, \rho(\boldsymbol{r}) \phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r}) \\ &= \int_{\Omega} d^3x \, \rho(\boldsymbol{r}) \left\{ \phi_{\text{ext}}(0) + \boldsymbol{r} \cdot [\nabla \phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r})] \Big|_{\boldsymbol{r} \rightarrow 0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \sum_{ij} \left(3x^i x^j - \delta^{ij} r^2 \right) \left[\frac{\partial^2 \phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r})}{\partial x^i \partial x^j} \right] \Big|_{\boldsymbol{r} \rightarrow 0} + \dots \right\} \\ &\approx Q\phi_{\text{ext}}(0) + \boldsymbol{p} \cdot [\nabla \phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r})] \Big|_{\boldsymbol{r} \rightarrow 0} + \frac{1}{6} \sum_{ij} Q^{ij} \left[\frac{\partial^2 \phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r})}{\partial x^i \partial x^j} \right] \Big|_{\boldsymbol{r} \rightarrow 0}\end{aligned}$$

或者：

$$W_{\text{int}} \approx Q\phi_{\text{ext}}(0) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}(0) - \frac{1}{6} \sum_{ij} Q^{ij} \left[\frac{\partial E_i^{\text{ext}}}{\partial x^j} \right] \Big|_{r \rightarrow 0}$$

电荷分布与外电场的相互作用力：

电荷分布 ρ 在外静电场 $\mathbf{E}_{\text{ext}} = -\nabla\phi_{\text{ext}}$ 中受到的静电力为：

$$\mathbf{F} = \int d^3x \mathbf{f} = \int_{\Omega} d^3x \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

式中的 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 是位矢为 \mathbf{r} 的地点 P 处的总电场强度：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{\text{self}}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r})$$

- $\mathbf{E}_{\text{self}}(\mathbf{r})$ 是电荷分布 ρ 自身在 P 点激发的静电场强度：

$$\mathbf{E}_{\text{self}}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi_{\text{self}}(\mathbf{r}) = -\nabla \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} d^3x' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]$$

因为

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

我们有：

$$\mathbf{E}_{\text{self}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} d^3x' \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

电荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ 作用于自身的总静电力为⁷：

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{self}} &= \int_{\Omega} d^3x \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{\text{self}}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Omega} d^3x d^3x' \rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 0 \end{aligned}$$

- $\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ 是外电场在 P 点激发的静电场强度：

$$\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{E}_{\text{ext}}(0) + \sum_i x^i \left[\frac{\partial \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r})}{\partial x^i} \right] \bigg|_{\mathbf{r} \rightarrow 0} + \frac{1}{2} \sum_{ij} x^i x^j \left[\frac{\partial^2 \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r})}{\partial x^i \partial x^j} \right] \bigg|_{\mathbf{r} \rightarrow 0}$$

⁷我们约定这里的电荷分布不包括点电荷组。

外电场的电势满足拉普拉斯方程,

$$\nabla^2 \phi_{\text{ext}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \nabla^2 E_{\text{ext}} = 0 \quad \leftarrow \rho \quad E_{\text{ext}} = -\nabla \phi_{\text{ext}}$$

所以, 外电场施加给电荷分布 $\rho(r)$ 的总静电力为:

$$\begin{aligned} F_{\text{ext}} &= \int_{\Omega} d^3x \rho(r) E_{\text{ext}}(r) \\ &\approx QE_{\text{ext}}(0) + \mathbf{p} \cdot \nabla E_{\text{ext}}(r) \Big|_{r \rightarrow 0} + \frac{1}{6} \sum_{ij} Q^{ij} \left[\frac{\partial^2 E_{\text{ext}}(r)}{\partial x^i \partial x^j} \right] \Big|_{r \rightarrow 0} \end{aligned}$$

很显然, 静电力属于保守力:

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = -\nabla W_{\text{int}}$$

- 多极矩存在时, 外电场对电荷分布也会施加力矩的作用:

$$\boldsymbol{\tau} = \int d^3x \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \int_{\Omega} d^3x \mathbf{r} \times [\rho(r) \mathbf{E}_{\text{ext}}(r)] \approx \mathbf{p} \times \mathbf{E}_{\text{ext}}(0)$$

- 点电荷激发的静电场总能量是发散的：

$$W = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right) = \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0} \int d^3x \frac{q^2}{r^4} \rightsquigarrow \infty$$

或者，设点电荷 q 处于位矢为 r' 的地点， $\rho(r) = q\delta^{(3)}(r - r')$ ，其在空间激发如下静电势分布

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|}$$

q 的静电场总能量为：

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int d^3x \rho(r) \phi(r) \\ &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int d^3x \frac{\delta^{(3)}(r - r')}{|r - r'|} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 |r' - r'|} \propto \frac{1}{0} \end{aligned}$$

这个计算表明，经典电磁理论中的点电荷、点电荷组模型并不总能提供数学上有意义的对电荷分布的描写。

- 不过, 点电荷的概念在研究相互作用方面很胜任. 设空间中存在着两个点电荷 q_1 与 q_2 , 它们占据地点的位置矢量分别为 r_1 和 r_2 . 如此,

$$\rho_i(r) = q_i \delta^{(3)}(r - r_i) \quad (i = 1, 2)$$

q_1 在空间激发的静电势分布为:

$$\phi_1(r) = \int d^3x' \frac{\rho_1(r')}{4\pi\epsilon_0|r - r'|} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0|r - r_1|}$$

q_2 与 q_1 之间的静电相互作用能与力分别为:

$$W_{12} = \int d^3x \rho_2(r) \phi_1(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0|r_1 - r_2|}$$

与

$$F_{2 \rightarrow 1} = -\nabla_{r_1} W_{12} = \frac{q_1 q_2 (r_1 - r_2)}{4\pi\epsilon_0|r_1 - r_2|^3}$$

最后一式正是预期的库仑定律, 但这里它没有以电动力学出发点的面目出现.

电介质及其宏观描写

电介质是由原子、分子等微观组分⁸构成的导电性极差的绝缘材料：

- 电介质分子具有、或者有能力具有非零的分子电偶极矩 \mathbf{p}_i .
- 电介质内部的静电势决定于泊松方程：

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_i \rho_i(\mathbf{r})$$

其中 \mathbf{p}_i 对 $\rho_i(\mathbf{r})$ 的贡献是 $\rho_i(\mathbf{r}) = -\mathbf{p}_i \cdot \nabla \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$.

- 通常我们仅关心电介质的宏观性质，需要对上述“微观”描写在一个微观大、宏观小的区域内求平均。请留意 3 种不同的尺度： $d \sim$ 分子尺度, $L \sim$ 求平均值的尺度, $R \sim$ 电介质尺度。微观大、宏观小的确切涵义是：

$$d \ll L \ll R$$

⁸以下统称“分子”。

2: 怎么对场点 r 处的物理量 $\Psi(r)$ 求平均?

朴素地讲, 我们可以以 r 点为球心、以 L 为半径在电介质内部指定一个球体 $B_L(r)$, 然后把 $\Psi(r)$ 的平均值定义为

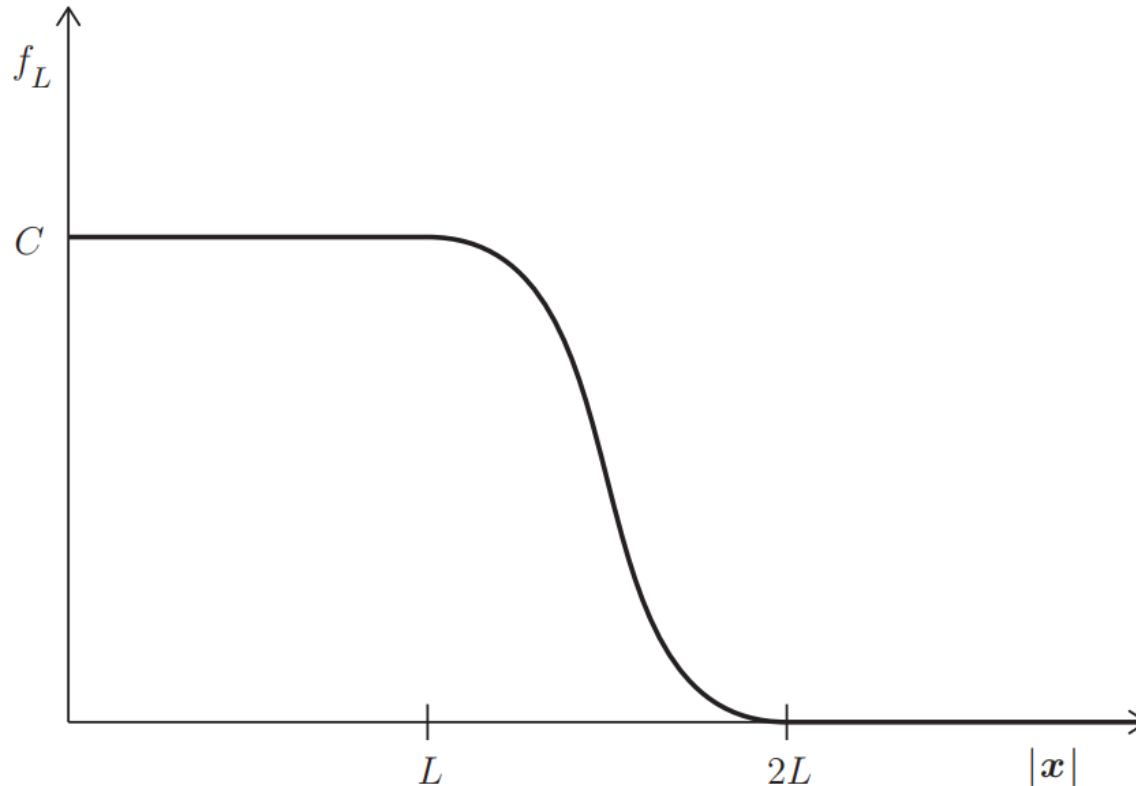
$$\langle \Psi(r) \rangle = \frac{\int_{B_L(r)} d^3x' \Psi(r')}{4\pi L^3/3}$$

不过, 此平均值强烈地依赖于物理量 $\Psi(r)$ 在 $B_L(r)$ 球界面上的取值 $\Psi(r)|_{|r|=L}$, 从而强烈地依赖于参数 L 的选择. 这是明显的缺点.

借鉴统计力学中定义宏观量的方法, 我们可以在电介质内部引入类配分函数 $f_L(r)$:

- $f_L(r)$ 是一个光滑的、正定的、球对称函数.
- $f_L(r)$ 无量纲.
- 倘若 $0 \leq |r| \leq L$, $f_L(r) = C > 0$.
- 倘若 $|r| \geq 2L$, $f_L(r) = 0$.

- 倘若 $L < |r| < 2L$, $f_L(r)$ 单调地插入在 0 和 C 之间.
- $\int d^3x f_L(r) = 1$.



使用类配分函数 $f_L(r)$, 我们把电介质中的与微观物理量 $\Psi(r)$ 对应的**宏观物理量**定义为:

$$\langle \Psi \rangle (r) \equiv \int d^3x' \Psi(r') f_L(r - r')$$

如此定义宏观量的一个优点是求平均运算与对空间坐标微商运算对易：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \langle \Psi \rangle}{\partial x^i}(r) &= \frac{\partial}{\partial x^i} \int d^3x' \Psi(r') f_L(r - r') \\
 &= \int d^3x' \Psi(r') \frac{\partial}{\partial x^i} f_L(r - r') \\
 &= - \int d^3x' \Psi(r') \frac{\partial}{\partial x'^i} f_L(r - r') \\
 &= - \int d^3x' \frac{\partial}{\partial x'^i} [\Psi(r') f_L(r - r')] + \int d^3x' \frac{\partial \Psi(r')}{\partial x'^i} f_L(r - r') \\
 &= \int d^3x' \frac{\partial \Psi(r')}{\partial x'^i} f_L(r - r') \\
 &= \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right\rangle(r)
 \end{aligned}$$

求宏观平均值 $\langle \rangle$ 与求微商 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 这两种运算的次序无关性(即所谓对易性)为我们研究电介质的宏观性质提供了极大的便利.

电介质中的宏观电荷分布 $\langle \rho \rangle(r)$:

从微观角度讲, 电介质中的电荷体密度可表为:

$$\rho(r) = \sum_i \rho_i(r)$$

其中 $\rho_i(r)$ 是身处地点 r_i 的第 i 个“分子”的电荷体密度, 它非零值集中在位矢 r_i 处尺度为 d 的小区域内 ($d \ll L$). $\rho_i(r)$ 对电介质中宏观电荷体密度的贡献是:

$$\langle \rho_i \rangle(x) = \int d^3x' \rho_i(r') f_L(r - r')$$

将类配分函数 $f_L(r - r')$ 在 $r' = r_i$ 处做泰勒展开,

$$\begin{aligned} f_L(r - r') &= f_L[(r - r_i) - (r' - r_i)] \\ &= f_L(r - r_i) - (r' - r_i) \cdot \nabla_r f_L(r - r') \Big|_{r'=r_i} + \mathcal{O}[(r' - r_i)^2] \\ &\approx f_L(r - r_i) - (r' - r_i) \cdot \nabla_r f_L(r - r_i) \end{aligned}$$

我们有：

$$\begin{aligned}\langle \rho_i \rangle (x) &= \int d^3x' \rho_i(r') f_L(r - r') \\ &\approx \left[\int d^3x' \rho_i(r') \right] f_L(r - r_i) \\ &\quad - \left[\int d^3x' \rho_i(r') (r' - r_i) \right] \cdot \nabla_r f_L(r - r_i) \\ &\approx q_i f_L(r - r_i) - p_i \cdot \nabla_r f_L(r - r_i)\end{aligned}$$

此处 q_i 与 p_i 分别是电介质中第 i 个分子的总电荷量和电偶极矩矢量，

$$q_i = \int d^3x' \rho_i(r'), \quad p_i = \int d^3x' \rho_i(r') r'$$

所以，电介质中的宏观电荷体密度是：

$$\langle \rho \rangle (r) = \sum_i \langle \rho_i \rangle (x) \approx \sum_i [q_i f_L(r - r_i) - p_i \cdot \nabla_r f_L(r - r_i)]$$

使用数学恒等式

$$f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \int d^3x' \delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

又可把上式改写为：

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle(\mathbf{r}) &= \int d^3x' \left[\sum_i q_i \delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \right. \\ &\quad \left. - \sum_i \mathbf{p}_i \delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \right] f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= \int d^3x' [\rho_f(\mathbf{r}') - \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}}] f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned}$$

式中

$$\rho_f(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad \mathbf{P}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{p}_i \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

分别诠释为电介质内部自由电荷⁹体密度与总电偶极矩的体密度。

⁹“自由电荷”这个术语有误导嫌疑，因为这些电荷并不能在电介质内部自由移动。

宏观电荷体密度 $\langle \rho \rangle (r)$ 表达式中的第一项是：

$$\int d^3x' \rho_f(r') f_L(r - r') = \langle \rho_f \rangle (r)$$

它诠释为电介质内部宏观的自由电荷体密度. 第二项是：

$$\begin{aligned} - \int d^3x' P(r') \cdot \nabla_r f_L(r - r') &= -\nabla \cdot \left[\int d^3x' P(r') f_L(r - r') \right] \\ &= -\nabla \cdot \langle P \rangle (r) \end{aligned}$$

它诠释为电介质内部宏观的极化电荷体密度：

$$\langle \rho_P \rangle (r) \equiv -\nabla \cdot \langle P \rangle (r)$$

此处出现的的宏观物理量

$$\langle P \rangle (r) \equiv \int d^3x' P(r') f_L(r - r')$$

称为电介质的极化强度矢量.

综合起来, 我们有:

$$\langle \rho \rangle = \langle \rho_f \rangle + \langle \rho_P \rangle = \langle \rho_f \rangle - \nabla \cdot \langle P \rangle$$

电介质内部宏观的静电学方程:

在电介质内部定义宏观的静电势分布:

$$\langle \phi \rangle(r) \equiv \int d^3x' \phi(r') f_L(r - r')$$

则 $\langle \phi \rangle$ 服从如下泊松方程:

$$\nabla^2 \langle \phi \rangle = -\frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0} = -\frac{\langle \rho_f \rangle}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \langle P \rangle$$

这就是宏观的静电学基本方程. 很明显, 上式使用起来并不方便.

根据 $\langle E \rangle = -\nabla \langle \phi \rangle$ 定义电介质内部的宏观电场强度, 我们有:

$$\nabla \times \langle E \rangle = 0, \quad \nabla \cdot \langle E \rangle = \frac{\langle \rho_f \rangle}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \langle P \rangle$$

通常定义电介质的**电位移矢量** $\langle D \rangle$:

$$\langle D \rangle = \epsilon_0 \langle E \rangle + \langle P \rangle$$

如此, 描写电介质宏观电磁性质的静电学基本方程可以重新表达为:

$$\nabla \cdot \langle D \rangle = \langle \rho_f \rangle, \quad \nabla \times \langle E \rangle = 0$$

- 求解宏观静电学方程需要事先指定介质中的 $\langle \rho_f \rangle$ 和 $\langle P \rangle$. 这对于 $\langle \rho_f \rangle$ 的确是可能的. 我们通常认为电介质在整体上是电中性的, 除非通过外部因素把“自由电荷”安插进电介质从而使得 $\langle \rho_f \rangle \neq 0$.
- 遗憾的是, 介质的极化强度 $\langle P \rangle$ 并不能事先确定, $\langle P \rangle$ 强烈地依赖于介质中的总电场强度 $\langle E \rangle$.

- 倘若 $\langle E \rangle$ 的量值不是特别的大, 介质的极化强度 $\langle P \rangle$ 会线性地依赖于介质中的总电场强度 $\langle E \rangle$:

$$\langle P_i \rangle(r) = \epsilon_0 \sum_k \chi_i^k(r) \langle E_k \rangle(r)$$

以系数 $\chi_i^k(r)$ 作为矩阵元构成的矩阵称为电介质的极化率张量.

- 倘若电介质是均匀的线性介质, 则 $\chi_i^k(r) = \chi_i^k$ 不依赖于求极化率的地点.
- 倘若电介质不但是均匀的, 而且是各向同性的, 则极化率张量仅有一个独立分量 $\chi_i^k(r) = \chi \delta_i^k$,

$$\langle P \rangle = \epsilon_0 \chi \langle E \rangle$$

χ 称为电介质的极化率. 此情形下,

$$\langle D \rangle = \epsilon \langle E \rangle \quad \Leftarrow \epsilon = \epsilon_0(1 + \chi)$$

寻常电介质均有 $\chi > 0$. 所以通常有 $\epsilon > \epsilon_0$.

- 对于均匀且各向同性的线性电介质而言,

$$\langle \rho_f \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{D} \rangle = \epsilon \nabla \cdot \langle \mathbf{E} \rangle = -\epsilon \nabla^2 \langle \phi \rangle$$

换言之, 电介质内部的宏观静电学方程可表为:

$$\nabla^2 \langle \phi \rangle = -\langle \rho_f \rangle / \epsilon$$

电介质分界面上的静电边界条件:

设空间中存在着两种电介质, 介电常数分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 . P 为介质分界面上的一点, 在 P 点附近局部范围内介质的分界面可视为 $z=0$ 的 xy 平面, \mathbf{e}_3 为其单位法矢量, 从介质 1 指向介质 2. 我们可以把 P 点处的宏观电场强度分布表达为:

$$\langle \mathbf{E} \rangle = \langle \mathbf{E}_1 \rangle \theta(-z) + \langle \mathbf{E}_2 \rangle \theta(z)$$

式中 $\theta(s)$ 是 Heaviside 阶梯函数.

同理, P 点处的宏观电位移分布与自由电荷体密度可分别表达为:

$$\langle \boldsymbol{D} \rangle = \langle \boldsymbol{D}_1 \rangle \theta(-z) + \langle \boldsymbol{D}_2 \rangle \theta(z), \quad \langle \rho_f \rangle = \langle \rho_{f1} \rangle \theta(-z) + \langle \rho_{f2} \rangle \theta(z) + \sigma_f \delta(z)$$

这里 σ_f 表示分界面上的自由电荷面密度.

根据宏观的电高斯定律,

$$\begin{aligned} \langle \rho_f \rangle &= \nabla \cdot \langle \boldsymbol{D} \rangle \\ &= [\nabla \cdot \langle \boldsymbol{D}_1 \rangle] \theta(-z) + [\nabla \cdot \langle \boldsymbol{D}_2 \rangle] \theta(z) + \nabla \theta(-z) \cdot \langle \boldsymbol{D}_1 \rangle \\ &\quad + \nabla \theta(z) \cdot \langle \boldsymbol{D}_2 \rangle \\ &= \langle \rho_{f1} \rangle \theta(-z) + \langle \rho_{f2} \rangle \theta(z) + \delta(z) \boldsymbol{e}_3 \cdot (\langle \boldsymbol{D}_2 \rangle - \langle \boldsymbol{D}_1 \rangle) \end{aligned}$$

比较此式与之前列出的 $\langle \rho_f \rangle$ 表达式, 我们看到:

$$\boldsymbol{n}_{12} \cdot (\langle \boldsymbol{D}_2 \rangle - \langle \boldsymbol{D}_1 \rangle) \Big|_S = \sigma_f$$

这是静电边值条件之一, 式中 $\boldsymbol{n}_{12} = \boldsymbol{e}_3$ 表示介质分界面上的单位法矢量.

根据电介质中宏观的毕安恒等式,

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \times \langle E \rangle \\ &= [\nabla \times \langle E_1 \rangle] \theta(-z) + [\nabla \times \langle E_2 \rangle] \theta(z) + \nabla \theta(-z) \times \langle E_1 \rangle \\ &\quad + \nabla \theta(z) \times \langle E_2 \rangle \\ &= \delta(z) e_3 \times (\langle E_2 \rangle - \langle E_1 \rangle) \end{aligned}$$

我们看到:

$$\left. n_{12} \times (\langle E_2 \rangle - \langle E_1 \rangle) \right|_S = 0$$

这是另一个基本的静电边值条件, 它表明电场强度的切分量在介质分界面上是连续的.

① 也可以把电介质分界面上 P 点处的宏观静电势分布表达为:

$$\langle \phi \rangle = \langle \phi_1 \rangle \theta(-z) + \langle \phi_2 \rangle \theta(z)$$

由此可推论:

$$\langle E \rangle = \langle E_1 \rangle \theta(-z) + \langle E_2 \rangle \theta(z) + e_3 \delta(z) (\langle \phi_1 \rangle - \langle \phi_2 \rangle)$$

理论的自洽性要求静电势在分界面上连续: $\left. \langle \phi_1 \rangle \right|_S = \left. \langle \phi_2 \rangle \right|_S$.

经典电动力学

Chapter 4. 静磁学

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院近代物理系

hyang@ustc.edu.cn

May 5, 2022

① 静磁学基本方程

- 无界空间中的静磁场
- 点磁荷与磁单极辨析

② 磁多极展开

- 磁偶极子
- 再论磁偶极子的磁场

③ 静磁场的能量

- 电流与外磁场之间的相互作用磁能
- 相互作用静磁能的多极展开
- 磁偶极子与外磁场的相互作用能量
- 磁偶极子与外磁场之间的相互作用有效势能
- $W_i^{(1)}$ 与 U 之间的联系

④ 磁介质

- 磁介质的宏观描写
- 磁介质内部的静磁学方程组
- 磁介质分界面上的静磁边界条件

⑤ 静磁边值问题简介

静磁场

电磁场量不随时间变化的情形下, 电磁场退化为静电场与静磁场. 麦克斯韦方程组中描写静磁场的方程为:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

- 磁感应强度 \mathbf{B} 完全取决于矢势 \mathbf{A} 的分布:

$$B^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk} = \epsilon^{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x^j} \rightsquigarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

此定义式的理论基础是磁高斯定律 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

- 因为旋度场无散, 静磁现象中的电流分布必然是稳恒电流:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \rightsquigarrow \oint_S \mathrm{d}\mathbf{s} \cdot \mathbf{j} = 0$$

- 静磁边界条件为:

$$n_{12} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \Big|_S = 0, \quad n_{12} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \Big|_S = \mu_0 \boldsymbol{\alpha}$$

式中 α 是界面 S 上面电流分布的线密度. 此外显然有:

$$n_{12} \cdot (j_2 - j_1) \Big|_S = 0$$

- 规范变换 $A_\mu(x) \rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)$ 在静磁问题中退化为:

$$A(r) \rightarrow A'(r) = A(r) + \nabla \chi(r)$$

即 $\theta(x) = Ct + \chi(r)$. 可以人为地选择规范函数 $\chi(r)$ 指定矢势的散度. 静磁学中常取**库仑规范**:

$$\nabla \cdot A = 0$$

在库仑规范中, 静磁学基本方程可重新表为矢势的诸笛卡尔直角分量满足的泊松方程:

$$\begin{aligned} \mu_0 j &= \nabla \times B \\ &= \nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A \\ &= -\nabla^2 A \end{aligned}$$

亦即：

$$\nabla^2 A = -\mu_0 j$$

无界空间中的静磁场：

矢势泊松方程可以通过格林函数法求解。类似于静电学，我们约定静磁第一类边值问题的格林函数的定解条件是：

$$\nabla^2 \mathcal{G}(r, r') = -\mu_0 \delta^{(3)}(r - r'), \quad \mathcal{G}(r, r') \Big|_{r \in S} = 0$$

因此，无界空间中的格林函数为：

$$\mathcal{G}(r, r') = \frac{\mu_0}{4\pi|r - r'|} \quad \leftarrow \nabla^2 \frac{1}{|r - r'|} = -4\pi\delta^{(3)}(r - r')$$

无界空间的静磁矢势分布为：

$$A(r) = \int d^3x' j(r') \mathcal{G}(r, r') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{j(r')}{|r - r'|}$$

无界空间的静磁场的磁感应强度分布为：

$$\begin{aligned} B(r) &= \nabla \times A(r) = \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{j(r')}{|r - r'|} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \nabla \frac{1}{|r - r'|} \times j(r') \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{(r - r')}{|r - r'|^3} \times j(r') \end{aligned}$$

亦即：

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{j(r') \times (r - r')}{|r - r'|^3}$$

这正是著名的比奥-萨法尔定律。初等电磁学中通常仅研究线电流分布激发的静磁场，此情形下比萨定律可表为：

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C dl \times \frac{(r - r')}{|r - r'|^3}$$

式中 C 为存在稳恒电流分布的闭合曲线。

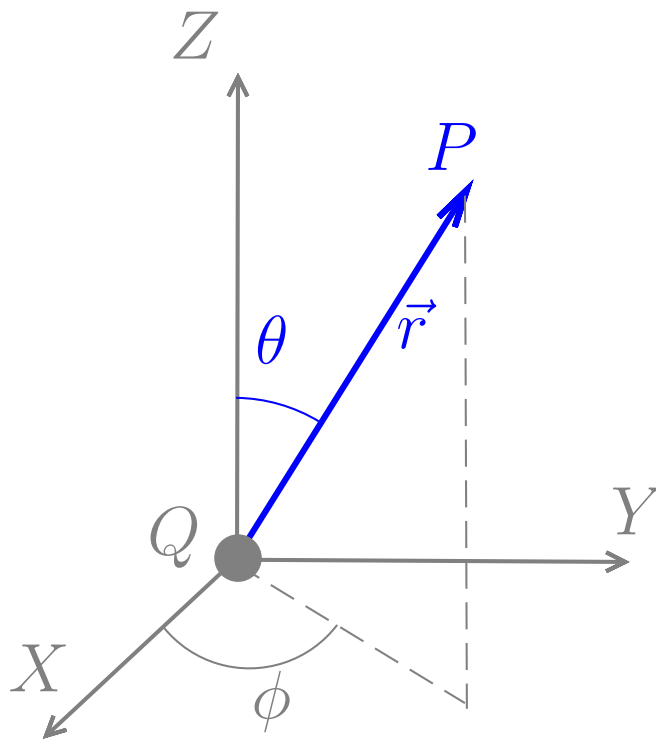
2: 经典电磁学理论上允许存在点磁荷吗?

倘若经典电磁理论允许存在点磁荷 Q , 则类比于点电荷, 占据坐标原点的点磁荷 Q 应在空间激发一个球对称的静磁场, 其磁感应强度分布应为:

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{r^3}$$

采用球坐标系后,

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \mathbf{e}_r$$



计及 $e_r = \nabla r$, 我们有:

$$\frac{e_r}{r^2} = \frac{1}{r^2} \nabla r = -\nabla \left(\frac{1}{r} \right), \quad \rightsquigarrow \quad B(r) = -\nabla \left(\frac{\mu_0 Q}{4\pi r} \right) = -\nabla [\phi(r)]$$

换言之, 此点磁荷激发静磁场似乎可以用磁标势

$$\phi(r) = \frac{\mu_0}{4\pi r}$$

描写. 然而从物理上讲这个结论似是而非. 电磁场是 $U(1)$ 规范场. 根据规范原理, 磁场在本质上必须通过矢势描写.

由于球坐标系基矢满足关系式 $e_r = e_\theta \times e_\varphi$, 我们也可以把点磁荷的磁感应强度改写为:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{r^2} e_r = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{e_\theta \times e_\varphi}{r^2} = \frac{\mu_0 Q \sin \theta}{4\pi} \left(\frac{e_\theta}{r} \times \frac{e_\varphi}{r \sin \theta} \right) \\ &= \frac{\mu_0 Q \sin \theta}{4\pi} \nabla \theta \times \nabla \varphi = -\frac{\mu_0 Q}{4\pi} \nabla (\cos \theta) \times \nabla \varphi \\ &= -\frac{\mu_0 Q}{4\pi} \nabla \times (\cos \theta \nabla \varphi) \end{aligned}$$

最后一步使用了数学恒等式 $\nabla \times \nabla \psi = 0$.

此式似乎建议我们可以对点磁荷的磁场引入矢势描写：

$$B = \nabla \times A, \quad A = -\frac{\mu_0 Q}{4\pi} \cos \theta \nabla \varphi = -\frac{\mu_0 Q e_\varphi}{4\pi r} \cot \theta$$

不幸的是, 这仅仅是一个错觉. 理由如下：

- 磁感应强度与候选矢势的定义域不同. 很显然, 点磁荷磁感应强度

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{r^2} e_r$$

的定义域为 $r > 0$. 但候选矢势

$$A(r) = -\frac{\mu_0 Q e_\varphi}{4\pi r} \cot \theta$$

的定义域却是 $r > 0, \theta \neq 0, \pi$. 换言之, 空间中的一条直线 (即 x^3 轴) 被排除在候选矢势的定义域之外.

- 根据矢势的规范变换, 可以把点磁荷的候选磁矢势选择为:

$$A_{\pm}(r) = A(r) \pm \nabla \varphi = \pm \frac{\mu_0 Q (1 \mp \cos \theta) e_{\varphi}}{4\pi r \sin \theta}$$

从而扩大它们的定义域. 具体地说,

$$A_{+}(r) = \frac{\mu_0 Q (1 - \cos \theta) e_{\varphi}}{4\pi r \sin \theta}, \quad (r > 0, \theta \neq \pi)$$

而

$$A_{-}(r) = -\frac{\mu_0 Q (1 + \cos \theta) e_{\varphi}}{4\pi r \sin \theta}, \quad (r > 0, \theta \neq 0)$$

但是, 不可能通过规范变换把矢势的定义域扩大到与点磁荷磁感应强度的定义域完全相同 ($r > 0, 0 \leq \theta \leq \pi$).

- 从规范原理的视角看, 球对称的矢量场分布

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{r^3} \mathbf{r}$$

是不能诠释为一个静磁场的磁感应强度的, 因为其散度为 $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 Q \delta^{(3)}(\mathbf{r})$, \rightsquigarrow 动摇了电磁场的规范场本性的理论基础.

- 可以考虑缩小磁感应强度的定义域, 同时达到让 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 与 \mathbf{A} 具有完全相同的定义域并确保磁高斯定律 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 成立两个目的. 例如, 我们认为与矢势

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 Q (1 - \cos \theta) \mathbf{e}_\varphi}{4\pi r \sin \theta}, \quad (r > 0, \theta \neq \pi)$$

对应的磁感应强度分布不是具有球对称性的矢量场

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{r^3}$$

而是

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{r^3} \mathbf{r} + \mu_0 Q \mathbf{e}_3 \theta(-x^3) \delta(x^1) \delta(x^2)$$

显然, 上述 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的定义域是相同的, 都是 $r > 0, \theta \neq \pi$. 这个 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 明显的不具有球对称性, 但它满足磁高斯定律:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) + \mu_0 Q \left[\frac{\partial \theta(-x^3)}{\partial x^3} \right] \delta(x^1) \delta(x^2) = 0$$

因此, 电磁场属于规范场的数学基础没有破坏.

2: 现在的问题是: 还能把没有球对称性的矢量场

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{r^3} \mathbf{r} + \mu_0 Q e_3 \theta(-x^3) \delta(x^1) \delta(x^2)$$

诠释为点磁荷激发的磁感应强度分布吗?

显然不能. 我们把上述 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 诠释为占据了负 x^3 轴的磁单极子激发的磁感应强度分布¹. 此磁单极在物理图像上不是一个坐落在坐标原点处的点磁荷, 而是一个端点在坐标原点且沿负 x^3 轴无限延伸的、横截面趋于零的半无限长载流螺线管.

例:

- ① 半径为 a 的导线圆环载有电流强度 I , 求矢势和磁感应强度.

¹通常把这里的负 x^3 轴称为 Dirac 弦.

解：

因电流分布于空间有限区域, 其激发的静磁场矢势可由下式计算:

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{Idl}{r}$$

式中 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$.

设场点 P 的球坐标为 (R, θ, ϕ) , 则:

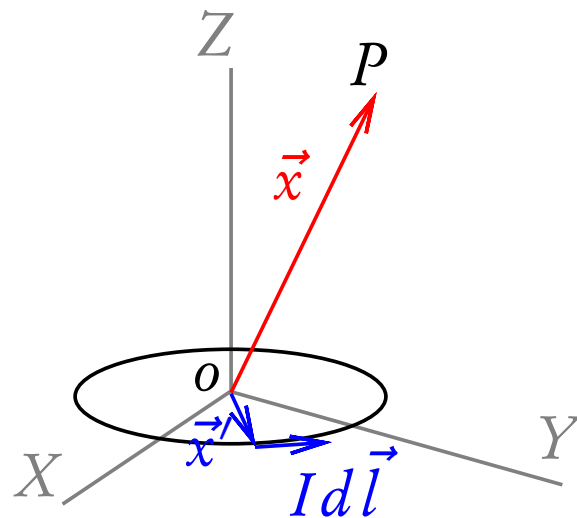
$$\mathbf{x} = R\mathbf{e}_R = R\cos\theta\mathbf{e}_3 + R\sin\theta\cos\phi\mathbf{e}_1 + R\sin\theta\sin\phi\mathbf{e}_2$$

载流圆环位于赤道面上. 任一源点的球坐标可写为 $(a, \pi/2, \phi')$, 其相对于坐标原点的位置矢量可表为:

$$\mathbf{x}' = a\mathbf{e}_{R'} = a\cos\phi'\mathbf{e}_1 + a\sin\phi'\mathbf{e}_2$$

可以把环形导线上的电流元表达为:

$$Idl = Id\mathbf{x}' = Ia(-\sin\phi'\mathbf{e}_1 + \cos\phi'\mathbf{e}_2)d\phi'$$



ϕ' 的取值范围是 $0 \leq \phi' \leq 2\pi$. 进一步注意到:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' &= Ra \sin \theta (\cos \phi \cos \phi' + \sin \phi \sin \phi') \\ &= Ra \sin \theta \cos(\phi - \phi') \end{aligned}$$

场点、源点之间的距离可以表达为:

$$\begin{aligned} r &= |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \\ &= \sqrt{R^2 + a^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'} = \sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \sin \theta \cos(\phi - \phi')} \end{aligned}$$

把 $I d\mathbf{l}$ 与 r 的表式代回到矢势的计算公式中, 并计及直角坐标系基矢是常矢量这一常识, 我们得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \left[-\mathbf{e}_1 \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi' d\phi'}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \sin \theta \cos(\phi - \phi')}} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{e}_2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi' d\phi'}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \sin \theta \cos(\phi - \phi')}} \right] \end{aligned}$$

做变量代换 $\alpha = \phi' - \phi$ ，并计及数学恒等式：

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \alpha d\alpha}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \sin \theta \cos \alpha}} = 0$$

可以把矢势的表达式简化为：

$$A = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} (-\sin \phi e_1 + \cos \phi e_2) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \sin \theta \cos \alpha}}$$

场点 P 处的球坐标沿方位角 ϕ 方向的单位基矢可以通过整体直角坐标基矢表为，

$$e_\phi = \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi e_R = -\sin \phi e_1 + \cos \phi e_2$$

所以，

$$A = e_\phi \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \sin \theta \cos \alpha}}$$

即 P 点磁场的矢势只有 ϕ 分量，且此分量只依赖于两个球坐标 R 与 θ ，和方位角 ϕ 的大小无关。此表达式中涉及的积分是椭圆积分，无解析表达式。

现在设场点 P 的位置满足条件：

$$2Ra \sin \theta \ll R^2 + a^2$$

这个条件描写

- $R \gg a$, 远场
- $R \sin \theta \ll a$, 近轴

两种近似情形。此条件成立的情形中，

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \sin \theta \cos \phi'}} \\ & \approx \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} \left[1 + \left(\frac{Ra \sin \theta \cos \phi'}{R^2 + a^2} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{Ra \sin \theta \cos \phi'}{R^2 + a^2} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{5}{2} \left(\frac{Ra \sin \theta \cos \phi'}{R^2 + a^2} \right)^3 + \dots \right] \end{aligned}$$

利用此展开式, 并注意到当 n 为非负整数时,

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \phi' d\phi' = \frac{\pi^2 2^{2n+1}}{(2n)! [\Gamma(1/2 - n)]^2}, \quad \int_0^{2\pi} \cos^{2n+1} \phi' d\phi' = 0$$

可以求出矢势的近似表达式如下:

$$A = A_\phi(R, \theta) e_\phi$$

式中,

$$A_\phi(R, \theta) \approx \frac{\mu_0 I a}{4\sqrt{R^2 + a^2}} \frac{R a \sin \theta}{R^2 + a^2} \left[1 + \frac{15}{8} \frac{R^2 a^2 \sin^2 \theta}{(R^2 + a^2)^2} \right]$$

下面求磁感应强度的分布:

$$\begin{aligned} B &= \nabla \times A = \nabla \times (A_\phi e_\phi) = \nabla \times \left[(R \sin \theta A_\phi) \frac{e_\phi}{R \sin \theta} \right] \\ &= \nabla (R \sin \theta A_\phi) \times \frac{e_\phi}{R \sin \theta} \\ &= \left[e_R \partial_R (R \sin \theta A_\phi) + \frac{e_\theta}{R} \partial_\theta (R \sin \theta A_\phi) \right] \times \frac{e_\phi}{R \sin \theta} \end{aligned}$$

亦即：

$$\mathbf{B} = \frac{e_R}{R^2 \sin \theta} \partial_\theta (R \sin \theta A_\phi) - \frac{e_\theta}{R \sin \theta} \partial_R (R \sin \theta A_\phi)$$

设场点 P 位于远场区, $R \gg a$, 则：

$$A_\phi \approx \frac{\mu_0 I a^2}{4R^2} \sin \theta \left(1 + \frac{15}{8} \frac{a^2 \sin \theta}{R^2} \right) \approx \frac{\mu_0 I a^2}{4R^2} \sin \theta$$

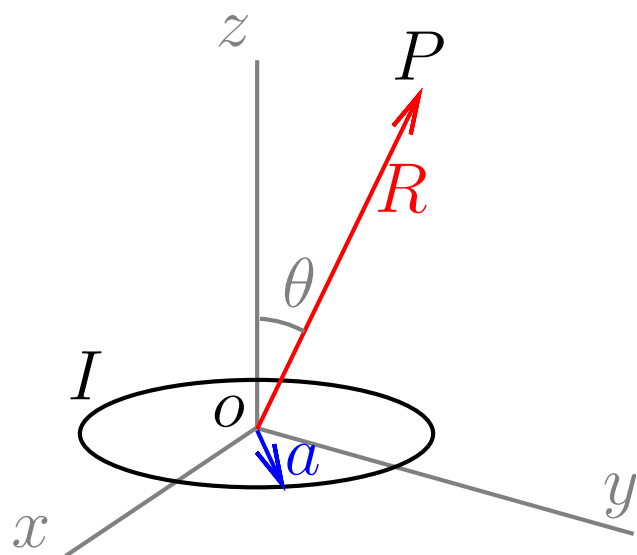
通过简单的计算可知：

$$\partial_\theta (R \sin \theta A_\phi) \approx \frac{\mu_0 I a^2}{2R} \sin \theta \cos \theta, \quad \partial_R (R \sin \theta A_\phi) \approx -\frac{\mu_0 I a^2}{4R^2} \sin^2 \theta$$

代入到 \mathbf{B} 的表达式中, 有：

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{4R^3} \left(2 \cos \theta \mathbf{e}_R + \sin \theta \mathbf{e}_\theta \right)$$

将来我们会看到, 上式实际上是磁偶极子激发的磁感应强度. 所以, 闭合载流导线对于远处的场点而言相当于是一个磁偶极子.



按照本题的分析, 半径 $a \rightsquigarrow 0$ 但 $m = I\pi a^2$ 保持有限的环形载流导线在空间激发的静磁矢势为:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\mu_0 I a^2}{4R^2} \sin \theta e_\phi \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3} \end{aligned}$$

式中 $\mathbf{m} = m \mathbf{e}_3$ 是载流线圈的磁偶极矩, $\mathbf{R} = R \mathbf{e}_R$ 是场点 P 相对于载流线圈中心的位置矢量. 采取柱坐标系, $\mathbf{R} = \rho \boldsymbol{\rho} + z \mathbf{e}_3$, 则有:

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_R \\ &= \mathbf{e}_3 \times \sin \theta (\cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2) \\ &= \sin \theta (\cos \phi \mathbf{e}_2 - \sin \phi \mathbf{e}_1) \\ &= \sin \theta \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

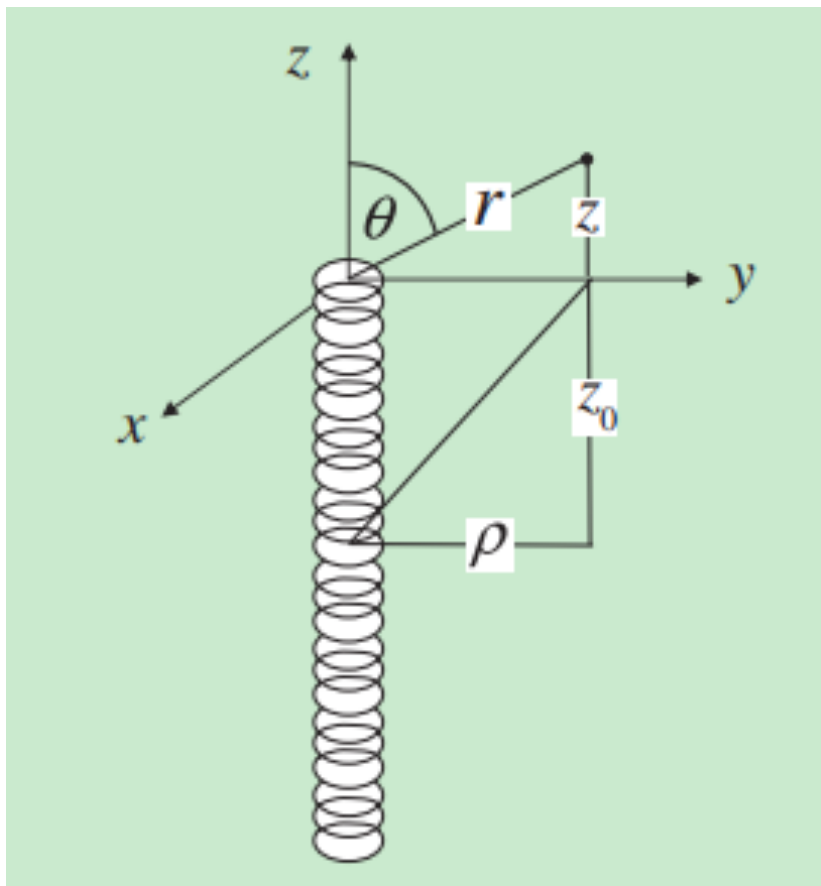
$$A = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_\phi$$

例：

- 1 请计算半无限长的载流螺线管在空间激发的静磁场的矢势和磁感应强度分布.

解：

如图示，设螺线管占据 $-z$ 轴，单位长度的磁偶极矩为 ge_3 ，



螺线管上纵向坐标为 z_0 的载流圆环在场点 P 处激发的静磁矢势为：

$$dA = \frac{\mu_0 g dz_0}{4\pi} \frac{\rho}{[\rho^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} e_\phi$$

半无限长载流螺线管在场点 P 处激发的静磁矢势为：

$$\begin{aligned} A &= \int dA \\ &= e_\phi \frac{\mu_0 g \rho}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{dz_0}{[\rho^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \\ &= e_\phi \frac{\mu_0 g \rho}{4\pi} \frac{1}{\rho^2} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right] \end{aligned}$$

引入 P 点的球坐标 (r, θ, ϕ) . 由前页示意图知：

$$\rho = r \sin \theta, \quad z = r \cos \theta$$

故半无限长载流螺线管在长点 P 处激发的矢势可重新表为：

$$A = \frac{\mu_0 g (1 - \cos \theta)}{4\pi r \sin \theta} e_\phi$$

显然, 此矢势的定义域为 $r > 0, 0 \leq \theta < \pi$, 即矢势在排除了原点及 $-z$ 轴的空间中有效.

半无限长载流螺线管在场点 P 处激发的磁感应强度分布为:

$$\begin{aligned} B &= \nabla \times A = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left[\frac{g(1 - \cos \theta)}{r \sin \theta} e_\phi \right] \\ &= \frac{\mu_0 g}{4\pi} \nabla(1 - \cos \theta) \times \frac{e_\phi}{r \sin \theta} \\ &= \frac{\mu_0 g}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} e_\theta \times \frac{e_\phi}{r \sin \theta} \\ &= \frac{\mu_0 g}{4\pi} \frac{e_r}{r^2} \end{aligned}$$

这正是期望中的平方反比律, 但其定义域是 $r > 0, 0 \leq \theta < \pi$.

顿悟:

- ① 从经典电动力学的角度看, 磁单极就是半无限长的载流螺线管.

矢势的磁多极展开

给定电流分布在空间激发的静磁矢势是：

$$A(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{r}, \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$$

写出此式时已经选择无穷远点为矢势零点. 如果电流分布于小区域内, 而场点距离该区域非常远, 则可以将 $1/r$ 按照 $(1/R)$ 作泰勒展开:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - x'_i \partial_i \frac{1}{R} + \frac{1}{2!} x'_i x'_j \partial_i \partial_j \frac{1}{R} + \dots$$

式中, $R = |\mathbf{x}|$.

将此展开式代入到矢势的表达式中, 可得:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}') \left[\frac{1}{R} - x'_i \partial_i \frac{1}{R} + \frac{1}{2!} x'_i x'_j \partial_i \partial_j \frac{1}{R} + \dots \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi R} \int_V d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}') + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{x_i}{R^3} \int_V d^3x' x'_i \mathbf{j}(\mathbf{x}') + \dots \end{aligned}$$

这里利用了数学恒等式²:

$$\partial_i \frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2} \partial_i R = -\frac{1}{R^2} \partial_i \sqrt{x^j x_j} = -\frac{1}{2R^2} \frac{2x^j (\partial_i x_j)}{\sqrt{x^k x_k}} = -\frac{x^j \delta_{ij}}{R^3} = -\frac{x_i}{R^3}$$

矢势展开式的前两项分别是:

$$A^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \int_V d^3 x' j(\mathbf{x}')$$

和

$$A^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi R^3} x_i \int_V d^3 x' x'_i j(\mathbf{x}')$$

为了看清矢势多极展开各项的物理意义, 现在构造一个**静磁学恒等式**. 我们已经约定电流分布于小区域 V 中, 没有电流溢出 V 的边界面 S . 所以, 若以 f, g 表示源点坐标的两个任意的标量函数, 则有:

$$\oint_S ds' \cdot [f(\mathbf{x}') g(\mathbf{x}') j(\mathbf{x}')] = 0$$

²场点位置矢径的长度是 $R = |\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^i x_i}$.

利用奥高定理可以将此式左端改写为区域 V 上的体积分：

$$\int_V d^3x' \nabla' \cdot [f(x') g(x') j(x')]$$

注意到，

$$\nabla' \cdot (f g j) = (f \nabla' g + g \nabla' f) \cdot j + f g \nabla' \cdot j$$

以及稳恒电流连续性方程 $\nabla' \cdot j(x') = 0$ ，我们有：

$$\int_V d^3x' \left[f(x') j(x') \cdot \nabla' g(x') + g(x') j(x') \cdot \nabla' f(x') \right] = 0$$

- 取 $f = 1$, $g = x'_i$. 在直角坐标系中，

$$\nabla' f = 0, \quad \nabla' g = e^j \partial'_j x'_i = e^j \delta_{ij} = e_i$$

上述恒等式退化为：

$$0 = \int_V d^3x' j(x') \cdot e_i = \int_V d^3x' j_i(x')$$

鉴于直角坐标系基矢是常矢量，上式的成立意味着：

$$\int_V d^3x' j(\mathbf{x}') = 0$$

所以，矢势多极展开的首项等于零：

$$A^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \int_V d^3x' j(\mathbf{x}') = 0$$

与静电标势情形不同，静磁矢势展开式不含“点磁荷”项，即不含与点电荷静电势对应的项。

- 取 $f = x'_i$, $g = x'_k$. 在直角坐标系中，

$$\nabla' f = e_j \partial'_j x'_i = e^j \delta_{ij} = e_i, \quad \nabla' g = e_k$$

上述恒等式退化为：

$$0 = \int_V d^3x' [x'_i j(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{e}_k + x'_k j(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{e}_i] = \int_V d^3x' [x'_i j_k(\mathbf{x}') + x'_k j_i(\mathbf{x}')]]$$

于是, 矢势多极展开式的第二项所涉及的积分可进一步简化. 选取直角坐标系使得 $\mathbf{j}(\mathbf{x}') = e^k j_k(\mathbf{x}')$, 则:

$$\begin{aligned} x^i \int_V d^3 x' x'_i j(\mathbf{x}') &= x^i e^k \int_V d^3 x' x'_i j_k(\mathbf{x}') \\ &= \frac{1}{2} x^i e^k \int_V d^3 x' \left[x'_i j_k(\mathbf{x}') - x'_k j_i(\mathbf{x}') \right] \\ &= \frac{1}{2} x^i e^k \int_V d^3 x' \epsilon_{ikl} \left[\mathbf{x}' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}') \right]_l \\ &= -\mathbf{x} \times \left[\frac{1}{2} \int_V d^3 x' \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') \right] \\ &= \mathbf{m} \times \mathbf{x} \end{aligned}$$

式中

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V d^3 x' \mathbf{x}' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}')$$

诠释为电流分布具有的磁偶极矩.

- ① 倘若稳恒电流分布于闭合导线 C , 则有 $j d^3 x' = Idl$. 此载流线圈表现为一个磁偶极子, 其磁偶极矩矢量表达为:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} I \oint_C \mathbf{x}' \times d\mathbf{l} = I\mathbf{S} \quad \leftarrow \text{ } \mathbf{S} = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{x}' \times d\mathbf{l}$$

此处的 \mathbf{S} 是闭合曲线 C 所包围曲面的面积矢量.

磁偶极子激发的磁矢势为:

$$\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{R^3}$$

式中 $R = |\mathbf{x}|$ 是场点到磁偶极子的距离.

现在计算磁偶极子所激发磁场的磁感应强度矢量:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(1)}(\mathbf{x}) &= \nabla \times \mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{x}) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left[\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{x}}{R^3} \right] = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left[\mathbf{m} \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \right] \end{aligned}$$

这里使用了数学恒等式:

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\mathbf{x}}{R^3}$$

进一步的化简需要计算 $\nabla \times (\vec{m} \times \nabla \psi)$, 此处 $\psi = 1/R$. 采用直角坐标系, 我们有:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times (m \times \nabla \psi) &= e_i \epsilon^{ijk} \partial_j (\epsilon_{kl n} m^l \partial^n \psi) \\
 &= e_i \epsilon^{ijk} \epsilon_{lnk} m^l \partial_j \partial^n \psi \\
 &= e_i (\delta_l^i \delta_n^j - \delta_n^i \delta_l^j) m^l \partial_j \partial^n \psi \\
 &= e_i m^i \partial_j \partial^j \psi - e_i m^j \partial_j \partial^i \psi = m \nabla^2 \psi - (m \cdot \nabla) \nabla \psi
 \end{aligned}$$

回忆

$$\nabla^2 \psi = \nabla^2 \frac{1}{R} = -4\pi \delta^{(3)}(x)$$

对于远场区的场点 ($x \neq 0$), $\nabla^2 \psi = 0$. 于是, 磁偶极子 m 在远场区激发的磁场的磁感应强度分布是:

$$B^{(1)}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} (m \cdot \nabla) \nabla \psi = -\frac{\mu_0}{4\pi} (m \cdot \nabla) \frac{x}{R^3}$$

磁标势：

- ① 磁偶极子磁感应强度的上列表达式启发我们可以引入磁标势

$$\phi_m^{(1)} = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}}{4\pi R^3}$$

描写磁偶极子的磁场, $\mathbf{B}^{(1)} = -\mu_0 \nabla \phi_m^{(1)}$.

理由如下. 选择笛卡尔直角坐标系做计算, 则 $\nabla = e^i \partial_i$, $\mathbf{x} = x^i e_i$ 且 $R = \sqrt{x^i x_i}$. 于是,

$$\partial_j \frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2} \partial_j R = -\frac{1}{R^2} \partial_j \sqrt{x^i x_i} = -\frac{2x_i (\partial_j x^i)}{2R^3} = -\frac{x_j}{R^3}$$

由此可知：

$$\frac{\mathbf{x}}{R^3} = e_j \frac{x^j}{R^3} = -e_j \partial^j \frac{1}{R} = -\nabla \frac{1}{R}$$

凭借此恒等式, 我们可以把磁偶极子的磁感应强度重新表达为:

$$\begin{aligned}
 B^{(1)}(\boldsymbol{x}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} (\boldsymbol{m} \cdot \nabla) \frac{\boldsymbol{x}}{R^3} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} (\boldsymbol{m} \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{R} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} m^j \partial_j \left[e_i \partial^i \frac{1}{R} \right] \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} e_i \partial^i \left[m^j \partial_j \left(\frac{1}{R} \right) \right] \\
 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} e_i \partial^i \left[m^j \frac{x_j}{R^3} \right] \\
 &= -\mu_0 \nabla \left[\frac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{x}}{4\pi R^3} \right] \\
 &= -\mu_0 \nabla \phi_m^{(1)} \quad \Leftarrow \phi_m^{(1)}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{x}}{4\pi R^3}
 \end{aligned}$$

当然, 这一结论仅在 $R \neq 0$ 的场点成立.

设磁偶极矩矢量沿 x^3 轴正向, $\vec{m} = m\vec{e}_3$. 对场点 P 的位置取球坐标 (R, θ, ϕ) , $\vec{x} = R\vec{e}_R$, 这里的 \vec{e}_R 是 P 点 R 增大方向的单位矢量:

$$\vec{e}_R = \cos \theta \vec{e}_3 + \sin \theta \cos \phi \vec{e}_1 + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_2$$

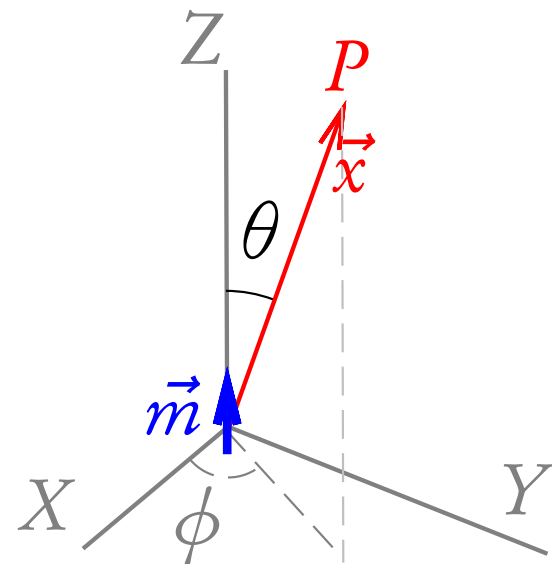
根据定义 $\vec{e}_\theta = \partial_\theta \vec{e}_R$ 和 $\vec{e}_\phi = \partial_\phi \vec{e}_R / \sin \theta$, P 点处另外两个球坐标系基矢是:

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_3 + \cos \theta \cos \phi \vec{e}_1 + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_\phi = -\sin \phi \vec{e}_1 + \cos \phi \vec{e}_2$$

所以,

$$\begin{aligned} \vec{m} \cdot \nabla &= m\vec{e}_3 \cdot \left(\vec{e}_R \partial_R + \frac{\vec{e}_\theta}{R} \partial_\theta + \frac{\vec{e}_\phi}{R \sin \theta} \partial_\phi \right) \\ &= m \left(\cos \theta \partial_R - \frac{\sin \theta}{R} \partial_\theta \right) \end{aligned}$$



场点 P 处的磁感应强度计算如下：

$$\begin{aligned} B &= -\frac{\mu_0}{4\pi} (m \cdot \nabla) \frac{x}{R^3} = -\frac{\mu_0 m}{4\pi} \left(\cos \theta \partial_R - \frac{\sin \theta}{R} \partial_\theta \right) \frac{e_R}{R^2} \\ &= -\frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} (-2 \cos \theta e_R - \sin \theta \partial_\theta e_R) = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} (2 \cos \theta e_R + \sin \theta e_\theta) \end{aligned}$$

- ① 对于一个由“载有电流强度为 I 且半径为 a 的圆环状导线”形成的磁偶极子, $m = \pi a^2 I$, 上式可等价地表达为：

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{4R^3} (2 \cos \theta e_R + \sin \theta e_\theta)$$

这恰为之前例题的结果.

- ② 磁偶极子 m 激发的磁场可以表达为与坐标系选择无关的形式：

$$B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(m \cdot x)x}{R^5} - \frac{m}{R^3} \right]$$

此处约定 $x = R e_R$, 且 $R > 0$.

再论磁偶极子的磁场

2: 倘若计及磁偶极子 m 占据的地点、即 $R = 0$ 处, m 激发的磁感应强度分布的表达式是什么?

我们在坚持磁高斯定律 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 成立的前提下回答此问题.

- 前面的讨论中实际上已经默认磁高斯定律在 $R > 0$ 情形下是成立的. 倘若 $R > 0$, 我们可以把磁偶极子的磁感应强度表达为矢势的旋度

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}}{R^5} - \frac{\mathbf{m}}{R^3} \right] = \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\mathbf{m} \times \mathbf{x})}{R^3} \right]$$

从而必然有:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}}{R^5} - \frac{\mathbf{m}}{R^3} \right] = 0, \quad \forall R > 0$$

- 现在的问题是: 怎么确保 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 在 $R \geq 0$ 情形下仍成立?

倘若计及 $\boldsymbol{x} = 0$ 的场点, 我们猜想

$$\nabla \cdot \left[\frac{3(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{x}}{R^5} - \frac{\boldsymbol{m}}{R^3} \right]$$

的值应与 $\delta^{(3)}(\boldsymbol{x})$ 有关. 为了检验这一猜想并使之精确化, 我们考虑如下数学恒等式:

$$\nabla^2 \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|} = -4\pi\delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$$

假设 $R = |\boldsymbol{x}| \gg |\boldsymbol{a}|$, 可以对上式两端分别进行泰勒级数处理. 精确到 $\mathcal{O}(a^2)$, 恒等式的右端表达为:

$$\begin{aligned} -4\pi\delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) &= -4\pi \left[\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}) - a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} a^i a^j \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}) + \dots \right] \\ &= -4\pi\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}) + 4\pi(\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{O}(a^2) \end{aligned}$$

而它的左端表达为：

$$\begin{aligned}\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} &= \nabla^2 \left[\frac{1}{R} - a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{1}{R} + \mathcal{O}(a^2) \right] \\ &= \nabla^2 \frac{1}{R} + \nabla^2 \left[\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{R^3} \right] + \mathcal{O}(a^2) \\ &= -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x}) + \nabla \cdot \nabla \left[\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{R^3} \right] + \mathcal{O}(a^2)\end{aligned}$$

我们现在需要计算标量函数

$$\psi(\mathbf{x}) \equiv \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{R^3}$$

的梯度. 首先考虑 $\mathbf{x} \neq 0$ 的情形. $\mathbf{x} \neq 0$ 意味着 $R > 0$. 所以：

$$\begin{aligned}\nabla \psi &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \nabla \left(\frac{1}{R^3} \right) + \frac{1}{R^3} \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \\ &= - \left[\frac{3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}}{R^5} - \frac{\mathbf{a}}{R^3} \right]\end{aligned}$$

为了计及 $\nabla\Psi$ 在 $\mathbf{x}=0$ 处可能存在的发散, 我们计算 $\nabla\Psi$ 在全空间的体积分. 不失一般性, 我们取 $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_3$. 使用奥高散度定理的推论

$$\int d^3x \nabla\Psi = \oint ds \Psi$$

可得:

$$\begin{aligned} \int d^3x \nabla\Psi &= \oint ds \Psi = \oint \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{R^3} \mathbf{e}_R R^2 d\Omega \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_R) [\mathbf{e}_3 \cos\theta \\ &\quad + \mathbf{e}_1 \sin\theta \cos\phi + \mathbf{e}_2 \sin\theta \sin\phi] \\ &= \mathbf{e}_3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_R) \cos\theta \\ &= 2\pi a \mathbf{e}_3 \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta \\ &= \frac{4\pi}{3} \mathbf{a} \end{aligned}$$

但是, 倘若挖掉原点处一个半径为 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 的球体, $\nabla\psi$ 在剩余空间 V_ϵ 中的体积分却并不与上式一致, 而是为零. 在 V_ϵ 中,

$$\nabla\psi = - \left[\frac{3(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{x}}{R^5} - \frac{\boldsymbol{a}}{R^3} \right]$$

式中 $\boldsymbol{x} = R \boldsymbol{e}_R$, $R > 0$. 因为在所取的坐标系中, $\boldsymbol{a} = a \boldsymbol{e}_3$, 我们可以把上式进一步表为:

$$\begin{aligned}\nabla\psi &= -\frac{a}{R^3} (3 \cos \theta \boldsymbol{e}_R - \boldsymbol{e}_3) \\ &= -\frac{a}{R^3} \left[(3 \cos^2 \theta - 1) \boldsymbol{e}_3 + 3 \cos \theta \sin \theta (\cos \phi \boldsymbol{e}_1 + \sin \phi \boldsymbol{e}_2) \right]\end{aligned}$$

联合使用定积分公式,

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi = 0$$

以及

$$\int_0^\pi (3 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta d\theta = 0$$

可知：

$$\begin{aligned}\int_{V_\epsilon} d^3x \nabla \Psi &= -a e_3 \int_\epsilon^\infty \frac{dR}{R} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi (3 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta d\theta \\ &= -2\pi a \ln(R/\epsilon) \Big|_{R \rightarrow \infty} \cdot \int_0^\pi (3 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta d\theta \\ &= 0\end{aligned}$$

以上计算表明：梯度 $\nabla \Psi$ 在半径为 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 的球体内的积分值应该为 $4\pi a/3$ 。因为该球体的体积近似为零， $\nabla \Psi$ 作为被积函数，它在原点处的值必然是发散的。

顿悟：

① $\nabla \Psi$ 的表达式中隐藏着正比于 $\delta^{(3)}(x)$ 的发散项：

$$\nabla \left(\frac{a \cdot x}{R^3} \right) = - \left[\frac{3(a \cdot x)x}{R^5} - \frac{a}{R^3} \right] + \frac{4\pi}{3} a \delta^{(3)}(x)$$

进而,

$$\nabla^2 \left(\frac{a \cdot x}{R^3} \right) = -\nabla \cdot \left[\frac{3(a \cdot x)x}{R^5} - \frac{a}{R^3} \right] + \frac{4\pi}{3} (a \cdot \nabla) \delta^{(3)}(x)$$

利用此式, 我们有:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{1}{|x - a|} &= -4\pi \delta^{(3)}(x) - \nabla \cdot \left[\frac{3(a \cdot x)x}{R^5} - \frac{a}{R^3} \right] \\ &\quad + \frac{4\pi}{3} (a \cdot \nabla) \delta^{(3)}(x) + \mathcal{O}(a^2) \end{aligned}$$

如此, 数学恒等式

$$\nabla^2 \frac{1}{|x - a|} = -4\pi \delta^{(3)}(x - a)$$

的成立意味着存在如下新的数学恒等式:

$$\nabla \cdot \left[\frac{3(a \cdot x)x}{R^5} - \frac{a}{R^3} \right] = -\frac{8\pi}{3} (a \cdot \nabla) \delta^{(3)}(x)$$

我们现在可以使用这个新的数学恒等式研究磁偶极子的磁感应强度分布. 假设计入了 $\mathbf{x} = 0$ 点之后, 磁偶极子 \mathbf{m} 在空间激发的磁场修正为:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}}{R^5} - \frac{\mathbf{m}}{R^3} \right] + \mathbf{B}'(\mathbf{x})$$

磁高斯定律 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 的成立要求:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}}{R^5} - \frac{\mathbf{m}}{R^3} \right] + \nabla \cdot \mathbf{B}'(\mathbf{x}) \\ &= -\frac{2\mu_0}{3} (\mathbf{m} \cdot \nabla) \delta^{(3)}(\mathbf{x}) + \nabla \cdot \mathbf{B}'(\mathbf{x}) \\ &= \nabla \cdot \left[\mathbf{B}'(\mathbf{x}) - \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{m} \delta^{(3)}(\mathbf{x}) \right] \end{aligned}$$

此方程的具有一般解:

$$\mathbf{B}'(\mathbf{x}) = \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{m} \delta^{(3)}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}$$

从物理上考虑,

$$B'(x) \Big|_{x \neq 0} = 0$$

故应取积分常矢量 $C = 0$. 至此求出了磁偶极子 m 所激发的磁感应强度分布的完整表达式:

$$B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(m \cdot x)x}{R^5} - \frac{m}{R^3} \right] + \frac{2\mu_0}{3} m \delta^{(3)}(x)$$

引伸:

倘若坐标原点 O 处存在着一个电偶极矩为 p 的电偶极子, 其电荷分布体密度为:

$$\rho(x) = -(p \cdot \nabla) \delta^{(3)}(x)$$

p 激发的静电场强度在远场区表为:

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(p \cdot x)x}{R^5} - \frac{p}{R^3} \right], \quad R > 0$$

式中 $x = R e_R$ 是场点相对于偶极子占据地点 O 的位矢.

对于上述电偶极子激发的静电场而言, 电高斯定律表为:

$$\nabla \cdot E(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0}(\mathbf{p} \cdot \nabla) \delta^{(3)}(\mathbf{x})$$

据此可推知电偶极子电场强度分布的完整表达式应该是³:

$$E(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}}{R^5} - \frac{\mathbf{p}}{R^3} \right] - \frac{\mathbf{p}}{3\epsilon_0} \delta^{(3)}(\mathbf{x})$$

例:

- 请检验磁偶极子的磁感应强度分布满足积分形式的磁高斯定律.

解:

以磁偶极子 \mathbf{m} 占据的地点 O 为球心构造一个半径为 $R > 0$ 的球面 S . 我们现在的任务是计算面积分:

³本周作业题.

$$\Phi_B = \oint_S \mathrm{d}\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}$$

因为 $R > 0$, 在球面 S 上我们有:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}}{R^5} - \frac{\mathbf{m}}{R^3} \right]$$

计及 $\mathrm{d}\mathbf{s} = R^2 \mathbf{e}_R \mathrm{d}\Omega$ 与 $\mathbf{x} = R \mathbf{e}_R$, 并取 $\mathbf{m} = m\mathbf{e}_3$, 知:

$$\mathrm{d}\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi R} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_R) \mathrm{d}\Omega = \frac{\mu_0 m}{2\pi R} \cos \theta \sin \theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$$

所以,

$$\oint_S \mathrm{d}\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta \mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 m}{R} \int_{-1}^1 \xi \mathrm{d}\xi = 0$$

此处 $\xi = \cos \theta$. 至此验证了积分形式的磁高斯定律.

例：

- 请计算磁偶极子磁感应强度在全空间的体积分.

解：

以磁偶极子 \boldsymbol{m} 占据的地点 O 为球心、以无穷小量 ϵ 为半径构造一个球面把空间划分为球内与球外二区域. 在球内区域 V_1 ,

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{2}{3}\mu_0\boldsymbol{m}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x})$$

我们有：

$$\int_{V_1} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}^3x = \frac{2}{3}\mu_0\boldsymbol{m}$$

在球外区域 V_2 ,

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{x}}{R^5} - \frac{\boldsymbol{m}}{R^3} \right]$$

取 $\mathbf{m} = m\mathbf{e}_3$, 可以把上式重新表为:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} [3 \cos \theta \mathbf{e}_R - \mathbf{e}_3] \\ &= \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} [e_3(3 \cos^2 \theta - 1) + e_1 \cos \theta \sin \theta \cos \phi + e_2 \cos \theta \sin \theta \sin \phi] \end{aligned}$$

因为,

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi = 0$$

磁感应强度在 V_2 中的体积分:

$$\int_{V_2} \mathbf{B}(\mathbf{x}) d^3x = \frac{\mu_0 m e_3}{4\pi} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dR}{R} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} (3 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta d\theta$$

亦即:

$$\int_{V_2} \mathbf{B}(\mathbf{x}) d^3x = \frac{1}{2} \mu_0 m [\ln(R/\epsilon)] \Big|_{R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0^+} \cdot \int_0^{\pi} (3 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta d\theta$$

上式中对极角积分的因子等于零,

$$\int_0^\pi (3 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 (3\xi^2 - 1) d\xi = \xi^3 \Big|_{-1}^1 - 2 = 0$$

因此我们有:

$$\int_{V_2} \mathbf{B}(\mathbf{x}) d^3x = 0$$

综合以上分析, 知磁偶极子 \mathbf{m} 激发的磁感应强度在全空间的体积分为:

$$\int \mathbf{B}(\mathbf{x}) d^3x = \frac{2}{3} \mu_0 \mathbf{m}$$

静磁场的能量

磁场的总能量表达为：

$$W = \int u \, d^3x \quad \Leftarrow u = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

上式中 u 是磁能密度，总能量体积分遍及磁场分布的全部区域。
在静磁现象中， $B = \nabla \times A$, $\nabla \times B = \mu_0 j$. 注意到：

$$\begin{aligned} B^2 &= (\nabla \times A) \cdot B = \epsilon^{ijk} (\partial_j A_k) B_i = \partial_j (\epsilon^{ijk} A_k B_i) - \epsilon^{ijk} A_k (\partial_j B_i) \\ &= \nabla \cdot (A \times B) + A \cdot (\nabla \times B) = \nabla \cdot (A \times B) + \mu_0 A \cdot j \end{aligned}$$

静磁场的总能量可以重新表达为：

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 \, d^3x = \frac{1}{2\mu_0} \oint_S (A \times B) \cdot d\mathbf{s} + \frac{1}{2} \int A \cdot j \, d^3x$$

假设无穷远处磁场的矢势为零，则上式右端第一项的面积分为零。所以，

$$W = \frac{1}{2} \int_V d^3x A \cdot j$$

式中的积分区域 V 仅仅代表电流的分布区域。

电流与外磁场之间的相互作用磁能

现在计算某电流分布 \mathbf{j} 在给定外磁场中的相互作用能量. 以 \mathbf{A}_e 表示外磁场的矢势, \mathbf{j}_e 表示产生此外磁场的电流分布. 以 \mathbf{A} 表示电流分布 \mathbf{j} 本身所激发磁场的矢势. 如此, 总的电流分布 $(\mathbf{j} + \mathbf{j}_e)$ 所激发的总的静磁场能量可写为:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int (\mathbf{j} + \mathbf{j}_e) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{A}_e) d^3x \\ &= \frac{1}{2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d^3x + \frac{1}{2} \int \mathbf{j}_e \cdot \mathbf{A}_e d^3x \\ &\quad + \frac{1}{2} \int (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A}_e + \mathbf{j}_e \cdot \mathbf{A}) d^3x \end{aligned}$$

所以, 电流 \mathbf{j} 与外磁场 \mathbf{B}_e 的相互作用能量是:

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A}_e + \mathbf{j}_e \cdot \mathbf{A}) d^3x$$

因为,

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j(x') d^3x'}{|x - x'|}, \quad A_e = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_e(x') d^3x'}{|x - x'|}$$

前页所得的相互作用能 W_{int} 表达式中的两项相等. 所以,

$$W_{\text{int}} = \int_V j \cdot A_e d^3x$$

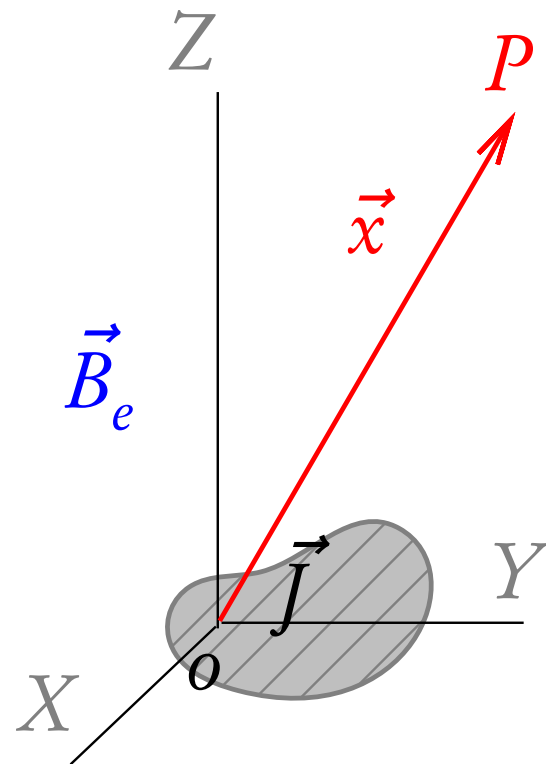
小区域内的电流分布与外磁场的相互作用

设外磁场 \mathbf{B}_e 的矢势为 \mathbf{A}_e , 给定电流分布 $\mathbf{j}(\mathbf{x})$
与此外磁场的相互作用能量是:

$$W_i = \int_V d^3x \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}_e(\mathbf{x})$$

以电流分布区域中的适当点为原点建立直角坐标系. 若电流分布于小区域 V 内, V 的线度远小于外磁场矢势 \mathbf{A}_e 发生显著变化的线度, 则可以把 $\mathbf{A}_e(\mathbf{x})$ 在坐标原点邻域上作泰勒展开,

$$\mathbf{A}_e(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_e(0) + x^i \partial_i \mathbf{A}_e(0) + \dots$$



结合以上两式, 并使用静磁学恒等式:

$$\int_V d^3x j_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \int_V d^3x \left[x_i j_k(\mathbf{x}) + x_k j_i(\mathbf{x}) \right] = 0$$

我们有：

$$\begin{aligned}
W_i &= \int_V d^3x \left[j_i A_{(e)}^i(0) + j_i x_k \partial^k A_{(e)}^i(0) + \dots \right] \\
&= A_{(e)}^i(0) \int_V d^3x j_i(\mathbf{x}) + [\partial^k A_{(e)}^i(0)] \int_V d^3x j_i(\mathbf{x}) x_k + \dots \\
&= \frac{1}{2} [\partial^k A_{(e)}^i(0)] \int_V d^3x \left[x_k j_i(\mathbf{x}) - x_i j_k(\mathbf{x}) \right] + \dots \\
&= \frac{1}{2} [\partial^k A_{(e)}^i(0)] \int_V d^3x \epsilon_{kij} \left[\mathbf{x} \times \mathbf{j}(\mathbf{x}) \right]^j + \dots \\
&= \epsilon_{kij} [\partial^k A_{(e)}^i(0)] \left[\frac{1}{2} \int_V d^3x \mathbf{x} \times \mathbf{j}(\mathbf{x}) \right]^j + \dots \\
&= \epsilon_{kij} [\partial^k A_{(e)}^i(0)] m^j + \dots \\
&= m^j [\nabla \times \mathbf{A}_e(0)]_j + \dots \\
&= \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e(0) + \dots
\end{aligned}$$

磁偶极子与外磁场的相互作用能量

以上结果表明,磁偶极子与外磁场之间的相互作用能量为:

$$W_i^{(1)} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e$$

这里出现的问题是: 如何理解 $W_i^{(1)}$? 换言之, 可否将 $W_i^{(1)}$ 诠释为磁偶极子与外磁场之间相互作用的有效“势能”?

物理小贴士:

$W_i^{(1)}$ 当 \mathbf{m} 与 \mathbf{B}_e 反向时取极小值. 所以, 倘若把 $W_i^{(1)}$ 解释为磁偶极子与外磁场体系的势能, 则意味着磁偶极子受外磁场作用时其磁矩 \mathbf{m} 将会倾向于与外磁场反向. 这个结论显然是荒谬的.

所以, 不能将磁偶极子与外磁场之间的相互作用能

$$W_i^{(1)} = m \cdot B_e$$

错误地诠释为磁偶极子与外磁场之间的相互作用势能. 事实上, 由于静磁场施加给电流分布的洛伦兹力

$$\mathbf{F} = j d^3x \times \mathbf{B}, \quad \rightsquigarrow \nabla \times \mathbf{F} \neq 0$$

不是保守力场⁴, 原则上不存在“静磁势能”这个概念.

⁴这个论断与 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ 的右端是否为零无关. 因为磁力的受力对象仍然是电荷 (虽然是运动电荷), 而不是磁荷.

现在从力和力矩的角度研究电流分布与外磁场之间的相互作用. 回忆洛伦兹力密度公式, $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}$. 所以, 在外磁场 \boldsymbol{B}_e 中给定电流分布 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})$ 将受到如下静磁力:

$$\boldsymbol{F} = \int_V d^3x \, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{x})$$

和力矩:

$$\boldsymbol{\tau} = \int_V d^3x \, \boldsymbol{x} \times [\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{x})]$$

仍然假设电流分布于小区域 V 中, 外磁场在 V 内没有明显变化. 在 V 中选择适当地点作为原点建立直角坐标系, 使得

$$\boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{x}) = e_i B_{(e)}^i(\boldsymbol{x})$$

把 $\boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{x})$ 在原点邻域上做泰勒展开:

$$\boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{B}_e(0) + x^i \partial_i \boldsymbol{B}_e(0)$$

代入到静磁力公式中，得：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \int_V d^3x \mathbf{j}(\mathbf{x}) \times \left[\mathbf{B}_e(0) + x^i \partial_i \mathbf{B}_e(0) + \dots \right] \\
 &= \epsilon_i \epsilon^{ijk} \int_V d^3x j_j(\mathbf{x}) \left[B_k^{(e)}(0) + x^l \partial_l B_k^{(e)}(0) + \dots \right] \\
 &= \epsilon_i \epsilon^{ijk} B_k^{(e)}(0) \left[\int_V d^3x j_j(\mathbf{x}) \right] + \epsilon_i \epsilon^{ijk} [\partial^l B_k^{(e)}(0)] \left[\int_V d^3x x_l j_j(\mathbf{x}) \right] + \dots \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon_i \epsilon^{ijk} [\partial^l B_k^{(e)}(0)] \int_V d^3x \left[x_l j_j(\mathbf{x}) - x_j j_l(\mathbf{x}) \right] + \dots \\
 &= \vec{e}_i \epsilon^{ijk} [\partial^l B_k^{(e)}(0)] \epsilon_{l j n} \left[\frac{1}{2} \int_V d^3x \mathbf{x} \times \mathbf{j}(\mathbf{x}) \right]^n + \dots \\
 &= \epsilon_i (\delta_l^i \delta_n^k - \delta_n^i \delta_l^k) [\partial^l B_k^{(e)}(0)] m^n + \dots \\
 &= \epsilon_i \partial^i [m^k B_k^{(e)}(0)] - \epsilon_i m^i \partial^k B_k^{(e)}(0) + \dots \\
 &= \nabla [m \cdot \mathbf{B}_e(0)] - m [\nabla \cdot \mathbf{B}_e(0)] + \dots
 \end{aligned}$$

计入磁荷体密度恒为零的电磁学基本假设⁵, 我们有:

$$\nabla \cdot B_e(0) = 0$$

所以, 外磁场 B_e 中磁偶极子 m 受到如下静磁力作用:

$$F = \nabla [m \cdot B_e(0)]$$

- ① 只有在非均匀的外磁场中, 磁偶极子才受到非零的静磁力.
- ② 对于磁偶极子与外磁场相互作用体系, 可以定义“等效静磁势能”:

$$U = -m \cdot B_e(0)$$

从而把静磁力写为 U 的负梯度 $F = -\nabla U$.

- ③ U 的极小值对应于 m 与 B_e 取向一致, 这和介质磁化的物理图像相符.
- ④ $U = -W_i^{(1)}$, 它表明 U 只是磁偶极子与外磁场相互作用总能量 $W_i^{(1)}$ 中的一部分, 不是全部.

⁵这是电磁场的规范场属性的基本前提, 目前认知水平下它也是一个实验事实.

进一步讨论电流分布在外磁场中所受到的力矩. 为简单计, 假设外磁场是均匀磁场, $\mathbf{B}_e(\mathbf{x}) \approx \mathbf{B}_e(0)$. 以前述直角坐标系为依托, 我们有:

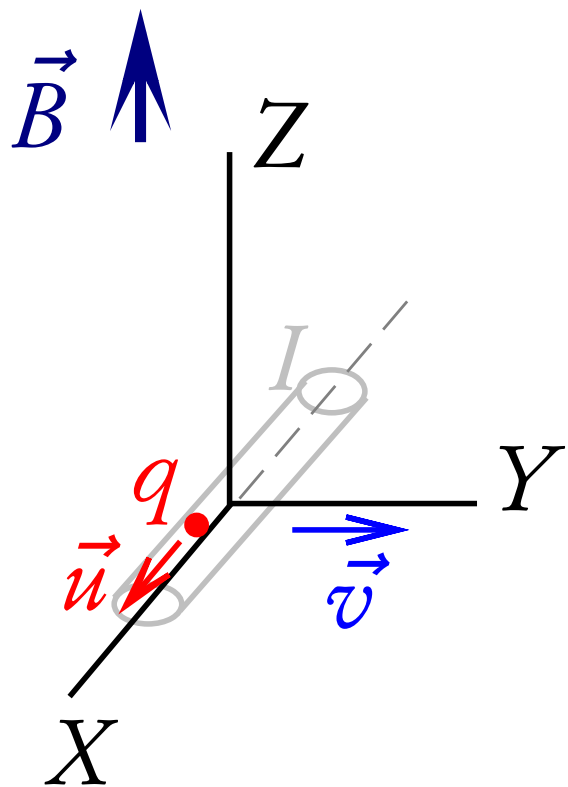
$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\tau} &= \int_V d^3x \, \mathbf{x} \times \left[\mathbf{j}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}_e(0) \right] \\
 &= \mathbf{e}^i \times (\mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^k) \int_V d^3x \, x_{ij} j_j(\mathbf{x}) B_k^{(e)}(0) \\
 &= (\delta^{ik} \mathbf{e}^j - \delta^{ij} \mathbf{e}^k) B_k^{(e)}(0) \frac{1}{2} \int_V d^3x \left[x_{ij} j_j(\mathbf{x}) - x_{ji} j_i(\mathbf{x}) \right] \\
 &= (\delta^{ik} \mathbf{e}^j - \delta^{ij} \mathbf{e}^k) B_k^{(e)}(0) \epsilon_{ijl} m^l \\
 &= \epsilon_{ijl} \mathbf{e}^j m^l B_{(e)}^i(0)
 \end{aligned}$$

即:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_e(0)$$

$w_i^{(1)}$ 与 U 之间的联系

让我们再仔细分析一下处于外磁场中的磁偶极子与外磁场的相互作用能 $w_i^{(1)}$ 与等效相互作用势能 U 之间的联系.



从考虑一段载流导线在外磁场中的运动入手.

导线中某载流子 q 参与两种运动. 一个分运动是沿电流方向的漂移, 速度为 u ;

$$Idl \propto qu$$

另一运动是随导线整体沿 Y 轴作机械运动, 速度为 v .

外磁场作用于此载流子上的洛伦兹力是:

$$F = q(u + v) \times B$$

外磁场提供的洛伦兹力在整体上对载流子并不做功. 但是:

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{F} = q(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot [(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{B}] \\ &= q[(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} + \mathbf{v})] \cdot \mathbf{B} \\ &= q(\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{B} \\ &= \mathbf{u} \cdot (q\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \mathbf{v} \cdot (q\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

- ① 第一项是洛伦兹力在载流子漂移方向做功的功率. 我们假设导线中的电流强度不随时间变化, 如此, 洛伦兹力在载流子漂移方向所作的功率将转化为电源电能的时间增加率:

$$\frac{dW_s}{dt} \propto \mathbf{u} \cdot (q\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- ② 第二项是洛伦兹力在载流子随导线整体机械运动方向做功的功率. 显然, 这部分功率若与机械运动的路径无关, 就有可能表现为载流导线与外磁场相互作用势能的时间增加率:

$$\frac{dU}{dt} \propto \mathbf{v} \cdot (q\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

洛伦兹力整体上对载流子不作功意味着：

$$\frac{dW_s}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0$$

解之，知：

$$W_s + U = \text{常数}$$

上式右端的常数意指其不随时间变化.我们假设在初始时刻载流导线与外磁场相距无穷远,彼此并无相互作用. 如此,应取此常数为零：

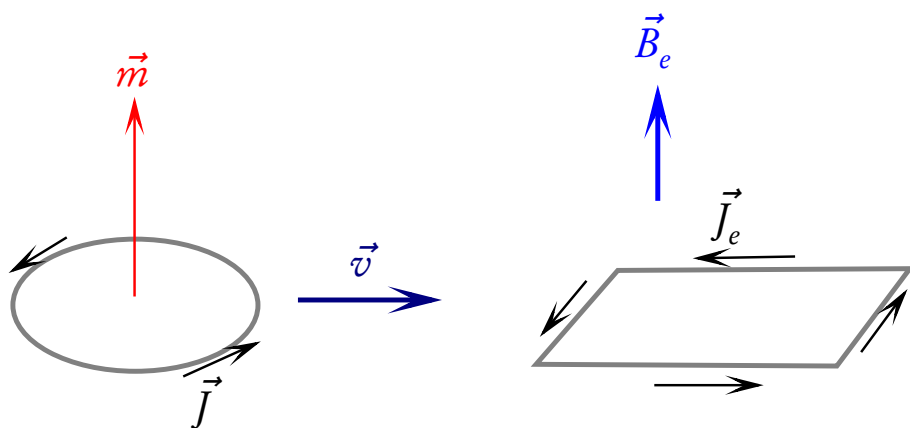
$$W_s + U = 0$$

因此，

对于处在外磁场中运动的载流导线而言，外磁场洛伦兹力对导线中电源所作的电功与其对导线整体运动所作的机械功完全抵消.

这就是此情形下洛伦兹力不作功的真相.

现在考虑磁偶极子与外磁场之间的相互作用能：



- 为方便计, 把磁偶极子设想为一个圆形载流线圈.
- 假设外磁场由另一矩形载流线圈产生.
- 二载流线圈作相向机械运动, 相对运动速度为 v .

于是, 磁偶极子与外磁场之间总的相互作用能量应该是:

$$W_i^{(1)} = W_{\text{dipole}} + W_{\text{coil}} + U$$

- ① W_{dipole} 是矩形载流线圈磁场的洛伦兹力对磁偶极子线圈中的电源所作的电功.
- ② W_{coil} 是磁偶极子磁场的洛伦兹力对矩形载流线圈电路中电源所作的电功.
- ③ U 是二者因为相向机械运动而具有的相互作用势能.

因为磁场的洛伦兹力在整体上不作功,我们看到:

- 从矩形载流线圈的视角看:

$$W_{\text{dipole}} + U = 0$$

- 从磁偶极子的视角看:

$$W_{\text{coil}} + U = 0$$

此二式相加,则有:

$$W_{\text{dipole}} + W_{\text{coil}} + 2U = 0$$

所以,

$$\begin{aligned} W_i^{(1)} &= W_{\text{dipole}} + W_{\text{coil}} + U \\ &= (W_{\text{dipole}} + W_{\text{coil}} + 2U) - U \\ &= -U \end{aligned}$$

即：

$$W_i^{(1)} = -U$$

这正是我们知道的结论. 磁偶极子与外磁场的相互作用总能量是 $W_i^{(1)} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e$, 但反映其在外磁场中因为作机械运动而具有的相互作用势能是 $U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e$. 二者之差

$$W_i^{(1)} - U = -2U = 2\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e$$

其实是电源提供的以保持两个载流回路中电流强度均不随时间变化所需的电功⁶.

⁶进一步的讨论请参考 Feynman 等人的著作, [THE FEYNMAN LECTURES ON PHYSICS](#), Vol2, Chapter15 and Chapter16.

磁介质及其宏观描写

磁介质是由原子、分子等微观组分⁷构成的磁性材料：

- 磁介质分子具有、或者有能力具有非零的分子磁偶极矩 m_i .
- 磁介质内部的静磁场分布决定于麦克斯韦方程组：

$$\nabla \cdot B(r) = 0, \quad \nabla \times B(r) = -\mu_0 \sum_i m_i \times \nabla \delta^{(3)}(r)$$

其中 m_i 对 $j_i(r)$ 的贡献是 $j_i(r) = -m_i \times \nabla \delta^{(3)}(r - r_i)$.

- 通常我们仅关心磁介质的宏观性质，需要对上述“微观”描写在一个微观大、宏观小的区域内求平均。使用类配分函数 $f_L(r)$ ，我们把磁介质中的与微观物理量 $\Psi(r)$ 对应的宏观物理量 $\langle \Psi \rangle(r)$ 定义为：

$$\langle \Psi \rangle(r) \equiv \int d^3x' \Psi(r') f_L(r - r')$$

⁷以下统称“分子”。

磁介质中的宏观电流分布 $\langle j \rangle(r)$:

从微观角度讲, 磁介质中的电流体密度矢量可表为:

$$j(r) = j_f(r) + \sum_i j_i(r)$$

其中 $j_i(r)$ 是身处地点 r_i 的第 i 个“分子”的电流密度, 它非零值集中在位矢 r_i 处尺度为 d 的小区域内 ($d \ll L$). $j_i(r)$ 对介质中宏观电流密度的贡献是:

$$\langle j_i \rangle(r) = \int d^3x' j_i(r') f_L(r - r')$$

将类配分函数 $f_L(r - r')$ 在 $r' = r_i$ 处做泰勒展开,

$$\begin{aligned} f_L(r - r') &= f_L[(r - r_i) - (r' - r_i)] \\ &= f_L(r - r_i) - (r' - r_i) \cdot \nabla_r f_L(r - r') \Big|_{r'=r_i} + \mathcal{O}[(r' - r_i)^2] \\ &\approx f_L(r - r_i) - (r' - r_i) \cdot \nabla_r f_L(r - r_i) \end{aligned}$$

我们有：

$$\begin{aligned}
 \langle j_i \rangle (x) &= \int d^3 x' j_i(r') f_L(r - r') \\
 &= \left[\int d^3 x' j_i(r') \right] f_L(r - r_i) \\
 &\quad - \int d^3 x' j_i(r') [(r' - r_i) \cdot \nabla_r f_L(r - r_i)] \\
 &= - \int d^3 x' j_i(r') [r' \cdot \nabla_r f_L(r - r_i)] \\
 &= -e^b \left[\int d^3 x' j_{ib}(r') x'_a \right] \frac{\partial f_L(r - r_i)}{\partial x_a} \\
 &= -e^b \left[\frac{1}{2} \int d^3 x' (x'_a j_{ib}(r') - x'_b j_{ia}(r')) \right] \frac{\partial f_L(r - r_i)}{\partial x_a} \\
 &= -e^b \epsilon_{abc} m_i^c \frac{\partial f_L(r - r_i)}{\partial x_a} \\
 &= -m_i \times \nabla_r f_L(r - r_i)
 \end{aligned}$$

上式中 \mathbf{m}_i 是磁介质中第 i 个分子的磁偶极矩矢量：

$$\mathbf{m}_i = \frac{1}{2} \int d^3x' \mathbf{r}' \times \mathbf{j}_i(\mathbf{r}')$$

所以，磁介质中的宏观电流密度矢量为：

$$\langle \mathbf{j} \rangle(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_f(\mathbf{r}) + \sum_i \langle \mathbf{j}_i \rangle(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_f(\mathbf{r}) - \sum_i \mathbf{m}_i \times \nabla_{\mathbf{r}} f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

使用数学恒等式

$$f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \int d^3x' \delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

又可把上式改写为：

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{j} \rangle(\mathbf{r}) &= \mathbf{j}_f(\mathbf{r}) - \int d^3x' \left[\sum_i \mathbf{m}_i \delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \right] \times \nabla_{\mathbf{r}} f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= \mathbf{j}_f(\mathbf{r}) - \int d^3x' \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla_{\mathbf{r}} f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned}$$

式中

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \sum_i m_i \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

诠释为磁介质内部总磁偶极矩的体密度.

宏观电流密度矢量 $\langle \mathbf{j} \rangle(\mathbf{r})$ 表达式中的第二项可重新表为:

$$\begin{aligned} - \int d^3x' \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla_{\mathbf{r}} f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \nabla \times \left[\int d^3x' \mathbf{M}(\mathbf{r}') f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] \\ &= \nabla \times \langle \mathbf{M} \rangle(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

它诠释为电介质内部宏观的磁化电流密度矢量:

$$\langle \mathbf{j}_M \rangle(\mathbf{r}) \equiv \nabla \times \langle \mathbf{M} \rangle(\mathbf{r})$$

式中出现的的宏观物理量

$$\langle \mathbf{M} \rangle(\mathbf{r}) \equiv \int d^3x' \mathbf{M}(\mathbf{r}') f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

称为磁介质的磁化强度矢量.

综合起来, 我们有:

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \mathbf{j}_f + \langle \mathbf{j}_M \rangle = \mathbf{j}_f + \nabla \times \langle \mathbf{M} \rangle$$

磁介质内部宏观的静磁学方程:

在磁介质内部定义宏观的磁感应强度分布:

$$\langle \mathbf{B} \rangle(\mathbf{r}) \equiv \int d^3x' \mathbf{B}(\mathbf{r}') f_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

则因求宏观平均与对空间坐标求微商对易, 磁介质内部的静磁学方程组可表为:

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{B} \rangle = 0, \quad \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle = \mu_0 \langle \mathbf{j} \rangle = \mu_0 \mathbf{j}_f + \mu_0 \nabla \times \langle \mathbf{M} \rangle$$

很明显, 上式使用起来并不方便.

通常在磁介质中定义静磁场的**磁场强度** $\langle H \rangle$:

$$\langle H \rangle = \frac{\langle B \rangle}{\mu_0} - \langle M \rangle$$

如此, 宏观静磁学基本方程组可以重新表达为:

$$\nabla \cdot \langle B \rangle = 0, \quad \nabla \times \langle H \rangle = j_f$$

- 求解宏观静电学方程需要事先指定介质中的 j_f 和 $\langle M \rangle$. 对于 j_f 这的确是可能的.
- 遗憾的是, 介质的磁化强度 $\langle M \rangle$ 并不能事先确定, $\langle M \rangle$ 强烈地依赖于介质中的总磁感应强度分布 $\langle B \rangle$.
- 倘若 $\langle B \rangle$ 的量值不是特别的大, 介质的磁化强度 $\langle M \rangle$ 会线性地依赖于介质中的总磁场强度 $\langle H \rangle$:

$$\langle M_i \rangle(r) = \sum_k \chi_{(m)i}^k(r) \langle H_k \rangle(r)$$

以无量纲系数 $\chi_{(m)i}^k(r)$ 作为矩阵元构成的矩阵称为磁介质的**磁化率张量**.

- 倘若磁介质是均匀的线性介质, 则 $\chi_{(m)i}^k(r) = \chi_{(m)i}^k$ 不依赖于求极化率的地点.
- 倘若电介质不但是均匀的, 而且是各向同性的, 则极化率张量仅有一个独立分量 $\chi_{(m)i}^k(r) = \chi_m \delta_i^k$,

$$\langle \mathbf{M} \rangle = \chi_m \langle \mathbf{H} \rangle$$

χ_m 称为介质的磁化率. 此情形下,

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \mu \langle \mathbf{H} \rangle \quad \Leftarrow \mu = \mu_0(1 + \chi_m)$$

- 对于均匀且各向同性的线性磁介质而言,

$$\mathbf{j}_f = \nabla \times \langle \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{\mu} \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle = \frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \langle \mathbf{A} \rangle)$$

因此, 在库仑规范中 ($\nabla \cdot \langle \mathbf{A} \rangle = 0$), 磁介质内部的宏观静磁学方程可表为:

$$\boxed{\nabla^2 \langle \mathbf{A} \rangle = -\mu \mathbf{j}_f} \quad \Leftarrow \nabla \times \langle \mathbf{A} \rangle = \langle \mathbf{B} \rangle$$

磁介质分界面上的静磁边界条件:

设空间中存在着两种磁介质, 磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 . P 为介质分界面上的一点, 在 P 点附近局部范围内介质的分界面可视为 $z=0$ 的 xy 平面, e_3 为其单位法矢量, 从介质 1 指向介质 2. 我们可以把 P 点处的宏观磁感应强度分布表达为:

$$\langle B \rangle = \langle B_1 \rangle \theta(-z) + \langle B_2 \rangle \theta(z)$$

式中 $\theta(s)$ 是 Heaviside 阶梯函数. 同理, P 点处的宏观磁场强度分布与传导电流密度矢量可分别表达为:

$$\langle H \rangle = \langle H_1 \rangle \theta(-z) + \langle H_2 \rangle \theta(z), \quad j_f = j_f^{(1)} \theta(-z) + j_f^{(2)} \theta(z) + \alpha_f \delta(z)$$

这里 α_f 表示分界面上的传导电流线密度.

介质分界面附近矢势分布也可类似地表达为:

$$\langle A \rangle = \langle A_1 \rangle \theta(-z) + \langle A_2 \rangle \theta(z)$$

根据宏观的磁高斯定律,

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \cdot \langle \mathbf{B} \rangle \\ &= [\nabla \cdot \langle \mathbf{B}_1 \rangle] \theta(-z) + [\nabla \cdot \langle \mathbf{B}_2 \rangle] \theta(z) + \nabla \theta(-z) \cdot \langle \mathbf{B}_1 \rangle \\ &\quad + \nabla \theta(z) \cdot \langle \mathbf{B}_2 \rangle \\ &= \delta(z) \mathbf{e}_3 \cdot (\langle \mathbf{B}_2 \rangle - \langle \mathbf{B}_1 \rangle) \end{aligned}$$

我们看到:

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\langle \mathbf{B}_2 \rangle - \langle \mathbf{B}_1 \rangle) \Big|_S = 0$$

这是静磁边值条件之一, 式中 $\mathbf{n}_{12} = \mathbf{e}_3$ 表示介质分界面上的单位法矢量. 此边界条件断言: 磁感应强度的法分量在介质分界面上是连续的.

根据磁介质中宏观的安培环路定律,

$$\begin{aligned} j_f &= \nabla \times \langle H \rangle \\ &= [\nabla \times \langle H_1 \rangle] \theta(-z) + [\nabla \times \langle H_2 \rangle] \theta(z) + \nabla \theta(-z) \times \langle H_1 \rangle \\ &\quad + \nabla \theta(z) \times \langle H_2 \rangle \\ &= j_f^{(1)} \theta(-z) + j_f^{(2)} \theta(z) + \delta(z) e_3 \times (\langle H_2 \rangle - \langle H_1 \rangle) \end{aligned}$$

上式左端可表为:

$$j_f = j_f^{(1)} \theta(-z) + j_f^{(2)} \theta(z) + \alpha_f \delta(z)$$

比较以上二式, 我们看到:

$$n_{12} \times (\langle H_2 \rangle - \langle H_1 \rangle) \Big|_S = \alpha_f$$

这是另一个基本的静磁边值条件, 它表明磁场强度的切分量在介质分界面上有可能会跃变.

现在考虑矢势在介质分界面上服从的边界条件. 我们已经把磁介质分界面上 P 点处的宏观矢势表达为:

$$\langle A \rangle = \langle A_1 \rangle \theta(-z) + \langle A_2 \rangle \theta(z)$$

- 库仑规范条件意味着:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \cdot \langle A \rangle \\ &= [\nabla \cdot \langle A_1 \rangle] \theta(-z) + [\nabla \cdot \langle A_2 \rangle] \theta(z) + \nabla \theta(-z) \cdot \langle A_1 \rangle \\ &\quad + \nabla \theta(z) \cdot \langle A_2 \rangle \\ &= \delta(z) e_3 \cdot (\langle A_2 \rangle - \langle A_1 \rangle) \end{aligned}$$

由此可推论:

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\langle A_2 \rangle - \langle A_1 \rangle) \Big|_S = 0$$

- 宏观磁感应强度的定义式意味着：

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{B} \rangle &= \nabla \times \langle \mathbf{A} \rangle \\
 &= [\nabla \times \langle \mathbf{A}_1 \rangle] \theta(-z) + [\nabla \times \langle \mathbf{A}_2 \rangle] \theta(z) + \nabla \theta(-z) \times \langle \mathbf{A}_1 \rangle \\
 &\quad + \nabla \theta(z) \times \langle \mathbf{A}_2 \rangle \\
 &= \langle \mathbf{B}_1 \rangle \theta(-z) + \langle \mathbf{B}_2 \rangle \theta(z) + \delta(z) \mathbf{e}_3 \times (\langle \mathbf{A}_2 \rangle - \langle \mathbf{A}_1 \rangle)
 \end{aligned}$$

上式左端可表为：

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \langle \mathbf{B}_1 \rangle \theta(-z) + \langle \mathbf{B}_2 \rangle \theta(z)$$

比较以上二式，我们看到：

$$\mathbf{n}_{12} \times (\langle \mathbf{A}_2 \rangle - \langle \mathbf{A}_1 \rangle) \Big|_S = 0$$

综合以上二结论可知：矢势的所有分量在两种介质分界面上均是连续的，

$$\langle \mathbf{A}_1 \rangle \Big|_S = \langle \mathbf{A}_2 \rangle \Big|_S$$

此边界条件的核心内容来自于磁高斯定律, 因此它实际上等价于分界面上磁感应强度法分量的连续性.

介质分界面上磁场强度切分量的跃变条件只能以直接的方式转化为矢势边界条件. 对于线性、各向同性的均匀磁介质而言,

$$\langle \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{\mu} \langle \mathbf{B} \rangle = \frac{1}{\mu} \nabla \times \langle \mathbf{A} \rangle$$

所以, 静磁边界条件

$$\mathbf{n}_{12} \times (\langle \mathbf{H}_2 \rangle - \langle \mathbf{H}_1 \rangle) \Big|_S = \boldsymbol{\alpha}_f$$

在线性、各向同性磁介质情形下转换为:

$$\mathbf{n}_{12} \times \left(\frac{1}{\mu_2} \nabla \times \langle \mathbf{A}_2 \rangle - \frac{1}{\mu_1} \nabla \times \langle \mathbf{A}_1 \rangle \right) \Big|_S = \boldsymbol{\alpha}_f$$

静磁边值问题

小结:

库仑规范下求解静磁场分布的基本方法是求矢势微分方程

$$\nabla^2 \langle A \rangle = -\mu j_f$$

满足边界条件

$$\begin{aligned} \langle A_1 \rangle \Big|_S &= \langle A_2 \rangle \Big|_S \\ n_{12} \times \left(\frac{1}{\mu_2} \nabla \times \langle A_2 \rangle - \frac{1}{\mu_1} \nabla \times \langle A_1 \rangle \right) \Big|_S &= \alpha_f \end{aligned}$$

的解.

磁场轴对称分布情形下矢势的定解问题

若电流密度矢量沿 z 轴分布, 矢势满足的微分方程在库仑规范中退化为:

$$\nabla^2 A = -\mu j_f e_3$$

- ① 这个方程的解的一种可能的形式是:

$$A = A(x, y, z) e_3$$

- ② 库仑规范条件 $\nabla \cdot A = 0$ 进一步要求:

$$0 = \frac{\partial A(x, y, z)}{\partial z} \quad \rightsquigarrow \quad A = A(x, y)$$

由此求出的磁感应强度将与 z 坐标无关, 即磁场分布具有轴对称性:

$$A = A(x, y) e_3$$

设所涉及的物理问题宜采取柱坐标系, 二介质的分界面是半径为 $\rho = R$ 的圆柱面. 这样,

$$\mathbf{A} = A(\rho, \phi) \mathbf{e}_3$$

$A(\rho, \phi)$ 满足的微分方程是:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} = -\mu j_f$$

若 $j_f = 0$, 则此方程可以通过分离变量法求解. 通解的具体形式是:

$$\begin{aligned} A(\rho, \phi) = & (a_0 + b_0 \ln \rho)(c_0 + d_0 \phi) \\ & + \sum_{m>0} \left(a_m \rho^m + \frac{b_m}{\rho^m} \right) [c_m \sin(m\phi) + d_m \cos(m\phi)] \end{aligned}$$

通解中的积分常数应由矢势满足的边界条件确定.

矢势边界条件:

- ① 自然边界条件是 $\rho \rightarrow 0$ 和 $\rho \rightarrow \infty$ 两种情形下矢势的有限性⁸.

- ② $\rho = R$ 边界上矢势的连续性可表为:

$$A_{\text{in}}(\rho, \phi)|_{\rho=R} = A_{\text{out}}(\rho, \phi)|_{\rho=R}$$

- ③ 最后分析 $\rho = R$ 边界上的边界条件

$$e_\rho \times \left[\frac{1}{\mu_{\text{out}}} \nabla \times A_{\text{out}} - \frac{1}{\mu_{\text{in}}} \nabla \times A_{\text{in}} \right]_{\rho=R} = \alpha_f e_3$$

⁸ 此处默认电流是分布于空间有限区域. 倘若电流分布可以延伸到无穷远, 则 $A_{\text{out}}(\rho, \phi)|_{\rho \rightarrow \infty} \sim \ln \rho$.

注意到：

$$\begin{aligned}\nabla \times A &= \nabla \times [A(\rho, \phi) e_3] \\ &= \nabla A(\rho, \phi) \times e_3 \\ &= \left[e_\rho \partial_\rho A + \frac{e_\phi}{\rho} \partial_\phi A \right] \times e_3 \\ &= -e_\phi \partial_\rho A + \frac{e_\rho}{\rho} \partial_\phi A\end{aligned}$$

我们有：

$$e_\rho \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times A \right) = -e_3 \frac{1}{\mu} \partial_\rho A$$

所以，前述边界条件具体化为：

$$\frac{1}{\mu_{\text{out}}} \frac{\partial A_{\text{out}}(\rho, \phi)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} - \frac{1}{\mu_{\text{in}}} \frac{\partial A_{\text{in}}(\rho, \phi)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} = -\alpha_f$$

经典电动力学

Chapter 5. 时变电磁场

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院近代物理系

hyang@ustc.edu.cn

June 3, 2022

- ① 电磁势
 - 电磁势波动方程组
 - 推迟势
- ② 电磁波的产生机制
 - 计算辐射场的一般公式
 - 电磁学恒等式
 - 电偶极辐射场
 - 磁偶极辐射场
 - 电四极辐射场
- ③ 任意运动带电粒子的辐射电磁场
 - 李纳-维谢尔势
 - 加速带电粒子的辐射电磁场
- ④ 辐射阻尼
 - 电磁质量
 - 原子谱线的自然宽度
- ⑤ 电磁波的散射

规范势的演化方程

电磁场是规范场, 其动力学由电磁势 4-矢 $A_\mu(x) = (-\phi/c, \mathbf{A})$ 描写. $A_\mu(x)$ 的选择具有不唯一性¹,

$$A_\mu(x) \rightsquigarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)$$

但涉及电磁场的可观测物理量则是具有上述规范变换下不变性的 4-张量, 例如:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}, \quad \oint_{\mathcal{C}} dx^\mu A_\mu$$

电磁场的基本规律, 即麦克斯韦方程组, 可以通过规范不变的电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 表达为:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 J^\nu$$

式中 $J^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$ 为电荷电流分布的电流密度 4-矢.

¹这正是“规范场”一词的物理内涵.

讨论：

- 电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 的定义式等价于毕安琪恒等式，

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$$

所以，倘若强调电磁场的规范场属性，可以使用 $F_{\mu\nu}$ 的定义取代毕安琪恒等式在麦克斯韦方程组中的地位²。

- 麦克斯韦方程组 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 J^\nu$ 的成立要求存在自洽性条件：

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

它正是电荷守恒定律。

- 规范不变量

$$\oint_C dx^\mu A_\mu$$

虽然在经典电动力学中地位不显，但它对带电粒子的量子力学描写举足轻重。

²R. Wald, Advanced Classical Electromagnetism, 2022, PUP, Page 70.

电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 具有指标交换下的反对称性, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, 因此它的独立分量数目为 6. 我们规定这 6 个独立分量的物理内涵为电磁场的电场强度与磁感应强度:

$$F^{0i} = \frac{E^i}{c}, \quad F^{ij} = \epsilon^{ijk} B_k$$

换言之,

$$E_i = -c F_{0i} = -\frac{\partial A_i}{\partial t} + c \frac{\partial A_0}{\partial x^i} = -\frac{\partial \phi}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial t}$$
$$B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F^{jk} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial A^k}{\partial x_j}$$

亦即:

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

鉴于梯度场无旋、旋度场无散, 此二式自动地保证了磁高斯定律 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 与法拉第电磁感应定律 $\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0$.

因此,混合使用规范势与场强 E 与 B , 我们可以把麦克斯韦方程组表达为:

$$E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t}, \quad B = \nabla \times A, \quad \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\nabla \times B - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \mu_0 j$$

或者,我们可以使用前两个方程消除场强,把麦克斯韦方程组表达为规范势服从的演化方程:

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \nabla \cdot E = -\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot A$$

与

$$\begin{aligned}\mu_0 j &= \nabla \times B - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \\ &= \nabla \times (\nabla \times A) + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \\ &= \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\end{aligned}$$

使用常识 $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$, 以上二方程可重新表达为:

$$\begin{aligned} -\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot A &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \nabla^2 A + \nabla(\nabla\cdot A) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi &= \mu_0 j \end{aligned}$$

借助于规范势选择的不唯一性, 我们可以人为地规定 $\nabla\cdot A$ 的取值、从而简化上述方程组. 例如可以取**库仑规范**:

$$\nabla\cdot A = 0$$

在库仑规范中麦克斯韦方程组通过规范势表达为:

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \nabla^2 A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi &= \mu_0 j \end{aligned}$$

库仑规范是物理学家喜欢选择的规范之一. 物理学家喜欢选择的另一个规范是 **Lorenz 规范**:

$$\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0}$$

在 Lorenz 规范中麦克斯韦方程组通过规范势表达为:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi + \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \nabla^2 A = -\mu_0 j$$

上式中,

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \partial_\mu \partial^\mu$$

称为达朗贝尔算符, 简记为 \square :

$$\square = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$$

它实际上是一个 4-标量算符. 所以, 麦克斯韦方程组在 Lorenz 规范中表现为规范势服从的线性波动方程:

$$\square \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \square A = -\mu_0 j$$

或者：

$$\square A_\mu = -\mu_0 J_\mu$$

这个波动方程明显符合相对性原理的要求，它是狭义相对论承认的一条物理学规律。

例：

- ① 在库仑规范中，电磁场矢势所满足的运动方程可以写为如下非齐次的波动方程

$$\square A = -\mu_0 j_T$$

式中 j_T 为电流密度矢量的横分量 (无散分量)。 试证明之。

解：

借助于数学恒等式

$$-4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

我们有：

$$\begin{aligned} j(t, \mathbf{x}) &= \int d^3x' \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') j(t, \mathbf{x}') \\ &= \int d^3x' \left[-\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] j(t, \mathbf{x}') \\ &= \nabla^2 \left[-\frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{j(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \end{aligned}$$

灵活使用矢量分析恒等式：

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u}$$

可以把上式改写为：

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla \left[\nabla \cdot \int d^3x' \frac{\mathbf{j}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \left[\nabla \times \int d^3x' \frac{\mathbf{j}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right]$$

上式右端第一项是梯度场 (无旋), 第二项是旋度场 (无散). 所以它们分别是电流密度矢量的纵分量和横分量:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_L + \mathbf{j}_T$$

式中,

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_L &= -\frac{1}{4\pi} \nabla \left[\nabla \cdot \int d^3x' \frac{\mathbf{j}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \\ \mathbf{j}_T &= \frac{1}{4\pi} \nabla \times \left[\nabla \times \int d^3x' \frac{\mathbf{j}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \end{aligned}$$

它们分别具有性质:

$$\nabla \times \mathbf{j}_L = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{j}_T = 0$$

这个结论在矢量分析理论中称为亥姆赫兹定理. 上面的推导相当于给亥姆赫兹定理提供了一个构造性的证明.

下面对 j_L 的表达式作进一步的简化：

$$\begin{aligned} j_L(t, x) &= -\frac{1}{4\pi} \nabla \left[\nabla \cdot \int d^3x' \frac{j(t, x')}{|x - x'|} \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi} \nabla \left[\int d^3x' \nabla \frac{1}{|x - x'|} \cdot j(t, x') \right] \\ &= +\frac{1}{4\pi} \nabla \left[\int d^3x' \nabla' \frac{1}{|x - x'|} \cdot j(t, x') \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \nabla \left[\int d^3x' \nabla' \cdot \frac{j(t, x')}{|x - x'|} - \int d^3x' \frac{\nabla' \cdot j(t, x')}{|x - x'|} \right] \end{aligned}$$

右端第一项体积分可以通过奥高定理化为无穷远边界上的面积分, 结果为零：

$$\int d^3x' \nabla' \cdot \frac{j(t, x')}{|x - x'|} = \oint_{\infty} ds \cdot \frac{j(t, x')}{|x - x'|} \rightsquigarrow 0$$

所以,

$$j_L(t, x) = -\frac{1}{4\pi} \nabla \left[\int d^3x' \frac{\nabla' \cdot j(t, x')}{|x - x'|} \right]$$

另一方面, 我们注意到在库仑规范中, 规范势满足的运动方程组如下:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi &= -\mu_0 j \\ \nabla^2 \phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

利用标势运动方程的解

$$\phi(t, x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(t, x')}{|x - x'|}$$

以及电荷守恒定律, 即 $\nabla \cdot j + \partial_t \rho = 0$, 我们有:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \left[\int d^3x' \frac{\rho(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left[\int d^3x' \frac{\partial_t \rho(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left[\int d^3x' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \\
&= -\mu_0 \mathbf{j}_L(t, \mathbf{x})
\end{aligned}$$

代回到矢势的运动方程中, 并注意到 $\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{j}_L(t, \mathbf{x}) + \mathbf{j}_T(t, \mathbf{x})$, 即得:

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}_T$$

或者,

$$\square A = -\mu_0 \mathbf{j}_T$$

此式表明库仑规范中矢势的波动完全是由横向电流密度矢量激发的。事实上, 考虑到库仑规范条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, 矢势 \mathbf{A} 在库仑规范中只有横分量。

推迟势

现在求无界空间中规范势 (ϕ, A) 的一般解. 在 Lorenz 规范中, 标势、矢势满足的场方程形式相同, 故以下我们专注于求解标势的达朗贝尔方程

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\rho/\epsilon_0$$

定义无界空间中的含时格林函数 $\mathcal{G}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}')$:

$$\nabla^2 \mathcal{G}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{G}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}')}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(t - t') \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

$$\mathcal{G}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') \Big|_{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow \infty} = 0$$

此格林函数在物理上可诠释为处于时空点 (t', \mathbf{x}') 处的单位点电荷在另一时空点 (t, \mathbf{x}) 处激发的电磁标势. 上述方程具有空间坐标平移变换下的不变性. 所以,

$$\mathcal{G}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') = \mathcal{G}(t, t'; \mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

设 $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, 其量值为 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. 以 \mathbf{x}' 点为坐标原点建立球坐标系. 注意到无界空间中点电荷的规范势分布具有球对称性, 我们有:

$$\mathcal{G}(t, t'; \mathbf{x} - \mathbf{x}') = \mathcal{G}(t, t'; r)$$

所以, 格林函数满足的方程可简化为:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(t - t') \delta^{(3)}(r)$$

- 在除却坐标原点之外的任何场点处, $r \neq 0$, $\mathcal{G}(t, t'; r)$ 满足齐次波动方程:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t^2} = 0$$

考虑到标势随源点、场点之间距离的增加而减弱, 令:

$$\mathcal{G}(t, t'; r) = \frac{u(t, t'; r)}{r}$$

不难证明，在 $r \neq 0$ 的场点， $u(t, t'; r)$ 满足的方程在形式上可看做一维空间的波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

其通解为³：

$$u(t, t'; r) = f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

这里的解函数 f, g (暂时) 是完全任意的. 因此, 当 $r \neq 0$ 时,

$$\mathcal{G}(t, t'; r) = \frac{f(t - r/c)}{r} + \frac{g(t + r/c)}{r}$$

通解的第一项描写向外发散的球面波, 第二项描写向内汇聚的球面波. 研究辐射问题时, 电磁场是由原点处的电荷产生并向外发散的. 所以应取 $g = 0$,

$$\mathcal{G}(t, t'; r) = \frac{f(t - r/c)}{r}$$

³若电磁场由运动电荷激发, 则解可以通过距离 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'(t')|$ 依赖于 t' . 切记!

- 我们假设: 若 f 采取某个特殊的函数形式, 上述齐次波动方程的解

$$\mathcal{G}(t, t'; r) = \frac{f(t - r/c)}{r}$$

也是非齐次方程

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(t - t') \delta^{(3)}(r)$$

的解. 为了验证满足上述要求的函数 f 的存在性和确定它的具体形式, 现计算上述非齐次方程在以原点为球心、半径为 $R \rightarrow 0^+$ 的球面所包围的区域 V 中的体积分. 显然,

$$\begin{aligned} -\delta(t - t')/\epsilon_0 &= \int_V d^3x \left[-\frac{1}{\epsilon_0} \delta(t - t') \delta^{(3)}(r) \right] \\ &= 4\pi \int_0^R r^2 dr \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t^2} \right] \\ &= 4\pi \int_0^R r^2 dr \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \frac{f(t - r/c)}{r} \end{aligned}$$

$$= 4\pi \int_0^R r^2 dr \left[f(t - r/c) \nabla^2 \frac{1}{r} - 2 \nabla f(t - r/c) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{r} \nabla^2 f(t - r/c) - \frac{1}{c^2 r} \frac{\partial^2 f(t - r/c)}{\partial t^2} \right]$$

显然, 除第一项外, 其余各项的积分在 $R \rightarrow 0^+$ 极限下均趋于零. 而第一项在 $R \rightarrow 0^+$ 下的积分计算如下:

$$\begin{aligned} 4\pi \int_0^R r^2 dr f(t - r/c) \nabla^2 \frac{1}{r} \Big|_{R \rightarrow 0} &= \int_V d^3x f(t) \nabla^2 \frac{1}{r} \\ &= f(t) \int_V d^3x [-4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{r})] \\ &= -4\pi f(t) \end{aligned}$$

所以,

$$f(t) = \frac{\delta(t - t')}{4\pi\epsilon_0}, \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{f(t - r/c) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \delta(t - t' - r/c)}$$

于是, 无界空间中的含时格林函数求得为:

$$\mathcal{G}(t, t'; r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \delta(t - t' - r/c)$$

- ① 除过 $\delta(t - t' - r/c)$ 因子之外, 此格林函数在形式上恰为单位点电荷的静电标势.
- ② 对于 $r \neq 0$ 的场点而言, $\delta(t - t' - r/c)$ 因子取非零值的条件不是 $t' = t$, 而是:

$$t' = t - r/c < t$$

这表明 t 时刻场点 \boldsymbol{x} 处的规范标势是由较早时刻 t' 位于 \boldsymbol{x}' 的单位点电荷激发的.

- ③ 上述含时格林函数称为无界空间中的推迟 (Retarded) 格林函数, 可改记为 $\mathcal{G}_R(t, t'; r)$.
- ④ 推迟格林函数的发现表明电磁相互作用的传递需要一定的时间, 不是超距作用.

有了推迟格林函数 $\mathcal{G}_R(t, t'; r)$ 之后, 任意电荷分布 $\rho(t, \mathbf{x})$ 在空间中所激发的规范标势可由下式计算:

$$\begin{aligned}\phi(t, \mathbf{x}) &= \int d^3x' dt' \mathcal{G}_R(t, t'; r) \rho(t', \mathbf{x}') \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' dt' \frac{\rho(t', \mathbf{x}')}{r} \delta(t - t' - r/c)\end{aligned}$$

亦即,

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho(t - r/c, \mathbf{x}')}{r}$$

- Lorenz 规范中矢势与标势满足相同形式的波动方程. 所以,

$$A(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{j(t - r/c, \mathbf{x}')}{r}$$

规范势的上述表达式称为 Lorenz 规范中的“推迟势”公式.

例：

- 验证上述推迟势公式满足 Lorenz 规范条件.

解：

设 $t' = t - r/c$, 这里 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. 如此可以将上述 Lorenz 规范中的推迟势公式写作：

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho(t', \mathbf{x}')}{r}, \quad A(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{j(t', \mathbf{x}')}{r}$$

切记此二式所涉及的被积函数的两个自变量, 即 t' 和 \mathbf{x}' , 并不是相互独立的.

检验 Lorenz 规范条件需要求矢势的散度 $\nabla \cdot \mathbf{A}$, 为方便起见我们先求

$$\nabla \cdot \left[\frac{j(t', \mathbf{x}')}{r} \right]$$

$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ 的任意函数均有等价关系 $\nabla = -\nabla'$. 所以：

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \left[\frac{j(t', x')}{r} \right] &= \nabla \frac{1}{r} \cdot j(t', x') + \frac{1}{r} \nabla \cdot j(t', x') \\
&= \nabla \frac{1}{r} \cdot j(t', x') + \frac{1}{r} \nabla_{t'} \cdot \frac{\partial j(t', x')}{\partial t'} \\
&= -\nabla' \frac{1}{r} \cdot j(t', x') - \frac{1}{r} \nabla'_{t'} \cdot \frac{\partial j(t', x')}{\partial t'}
\end{aligned}$$

另一方面, 我们有:

$$\begin{aligned}
\nabla' \cdot \left[\frac{j(t', x')}{r} \right] &= \nabla' \frac{1}{r} \cdot j(t', x') + \frac{1}{r} \nabla' \cdot j(t', x') \\
&= \nabla' \frac{1}{r} \cdot j(t', x') + \frac{1}{r} \nabla'_{t'} \cdot \frac{\partial j(t', x')}{\partial t'} + \frac{1}{r} \nabla' \cdot j(t', x') \Big|_{t' \text{ 不变}}
\end{aligned}$$

比较知:

$$\nabla \cdot \left[\frac{j(t', x')}{r} \right] = -\nabla' \cdot \left[\frac{j(t', x')}{r} \right] + \frac{1}{r} \nabla' \cdot j(t', x') \Big|_{t' \text{ 不变}}$$

于是, 无界空间中推迟矢势的散度计算如下:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot A(t, \mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \nabla \cdot \left[\frac{j(t', \mathbf{x}')}{r} \right] \\
 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \nabla' \cdot \left[\frac{j(t', \mathbf{x}')}{r} \right] \\
 &\quad + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{1}{r} \nabla' \cdot j(t', \mathbf{x}') \Big|_{t' \text{ 不变}} \\
 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\infty} ds' \cdot \left[\frac{j(t', \mathbf{x}')}{r} \right] \\
 &\quad + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{1}{r} \nabla' \cdot j(t', \mathbf{x}') \Big|_{t' \text{ 不变}} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{1}{r} \nabla' \cdot j(t', \mathbf{x}') \Big|_{t' \text{ 不变}}
 \end{aligned}$$

利用电荷守恒定律,

$$\nabla' \cdot j(t', x') \Big|_{t' \text{ 不变}} + \frac{\partial}{\partial t'} \rho(t', x') = 0$$

并回忆 t' 的定义式 $t' = t - r/c$, 可以进一步把上式改写为:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot A(t, x) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{1}{r} \frac{\partial \rho(t', x')}{\partial t'} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{1}{r} \frac{\partial \rho(t', x')}{\partial t} \\ &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho(t', x')}{r} \right] \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} \end{aligned}$$

亦即:

$$\nabla \cdot A(t, x) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, x) = 0$$

这正是 Lorenz 规范条件.

2: 库仑规范中有无推迟势?

库仑规范中规范势满足的运动方程组为:

$$\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0, \quad \nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 j_T$$

在无界空间, 其解可表为:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho(t, \mathbf{x}')}{r},$$
$$A(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{j_T(\mathbf{x}', t - r/c)}{r}$$

这里 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. 所以, 尽管库仑规范中的标势具有超距传播的特点, **矢势仍是推迟势**.

电磁波的产生机制

电磁波是电磁场存在的基本形式. 麦克斯韦方程组告诉我们:

- 时变的电场、磁场相互激发, 在空间中就形成了电磁波.

于是, 产生电磁波的关键是产生随时间变化的电场和磁场.

- ① 从微观角度讲, 产生电磁波的前提条件是荷电粒子做加速运动. 做加速运动的荷电粒子所产生的电场与磁场均是随时间变化的.
- ② 从宏观角度讲, 产生电磁波的前提条件是存在随时间变化的电流分布, 例如频率为 ω 的交变电流密度矢量:

$$j(x, t) = j(x) \cos(\omega t)$$

电磁波由载有交变电流的天线发射出来.

以下讨论宏观电荷体系在其线度远小于电磁波波长情形下的辐射电磁场的性质.

计算辐射场的一般公式

当交变电流分布给定时,通常采用 Lorenz 规范中矢势的推迟势公式作为计算辐射电磁场的物理基础:

$$A(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}', t - r/c)}{r}$$

此处 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$.

- ① 如果你愿意,你也可以选择库仑规范中矢势的推迟势公式

$$A(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\mathbf{j}_T(\mathbf{x}', t - r/c)}{r}$$

作为计算辐射电磁场的出发点.

- ② 从库仑规范中电磁势表达式可知,辐射电磁场独立的动力学自由度仅有两个(可以选择为 \mathbf{A} 的两个横分量).

设交变电流分布随时间的周期性变化具有确定的频率 ω ,

$$j(t, \mathbf{x}) = j(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}$$

则：

$$\begin{aligned} A(t, \mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{j(\mathbf{x}') \exp[-i\omega(t - r/c)]}{r} \\ &= \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{j(\mathbf{x}') e^{i\omega r/c}}{r} \right\} e^{-i\omega t} \\ &= A(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

即电磁波的频率也将是 ω ，这里，

$$A(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{j(\mathbf{x}')}{r} e^{ikr}$$

式中，

$$k = \omega/c$$

e^{ikr} 是“推迟作用因子”，表示电磁波从交变电流所在地点传播至场点的过程中有位相滞后 kr 。

对于频率确定的交变电流而言,由矢势 A 的上述表达式出发可以完全确定电磁场:

- ① 电磁场的磁感应强度 B 可通过直接计算矢势的旋度求得:

$$B = \nabla \times A$$

- ② 求出 B 后,电场强度 E 可由麦克斯韦方程求得. 在电流分布区域之外, $j = 0$, 麦克斯韦方程写为:

$$\nabla \times B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{i\omega}{c^2} E = -\frac{ik}{c} E$$

所以,

$$E = \frac{ic}{k} \nabla \times B$$

式中 $k = \omega/c$.

矢势的展开式

Lorenz 规范中, 具有确定频率 ω 的交变电流所激发的电磁场由推迟矢势

$$A(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{j(\mathbf{x}')}{r} e^{ikr}$$

描写. 这里有三个线度值得注意:

- ① 电流分布区域 V 的线度: $l \sim \sqrt[3]{V}$.
- ② 电磁波的波长 $\lambda = 2\pi/k = 2\pi c/\omega$.
- ③ 场点到电流分布区域的距离 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$.

为简单起见, 我们仅研究分布于一个“小区域”内的交变电流所产生的辐射电磁场.

所谓“小区域”, 指的就是其线度远小于电磁波的波长以及观测距离 r :

$$l \ll \lambda, \quad l \ll r.$$

至于 r 与 λ 的关系, 又可以区别三种情况:

- ① 近场区: $r \ll \lambda$
- ② 感应区: $r \sim \lambda$
- ③ 辐射区: $r \gg \lambda$

三个区域中电磁场的特点是不同的:

- 在近场区, $r \ll \lambda \rightsquigarrow kr \ll 1$, 从而推迟因子 $e^{ikr} \approx 1$,

$$A(x) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{j(x')}{r}$$

这是静磁场的矢势. 即电磁场近似表现为静磁场.

- 在远场区, $r \gg \lambda \rightsquigarrow kr \gg 1$, 从而推迟因子 e^{ikr} 的贡献不可忽略. 通常是在远场区接收电磁波, 需要计算远场才能确定辐射功率和角分布. 这是我们的主要研究对象.
- 感应区是一个过渡区, 是数值计算的用武之地.

建立坐标系, 把坐标原点选择在电流的分布区域 V 内. 如此, $|\mathbf{x}'|$ 的数量级为 $l \sim \sqrt[3]{V}$. 设远处场点 P 相对于原点的位置矢量为:

$$\mathbf{x} = R \mathbf{e}_R, \quad R \gg l,$$

则 P 点与电流元 $\mathbf{j}(\mathbf{x}')d^3x'$ 之间的距离可表为:

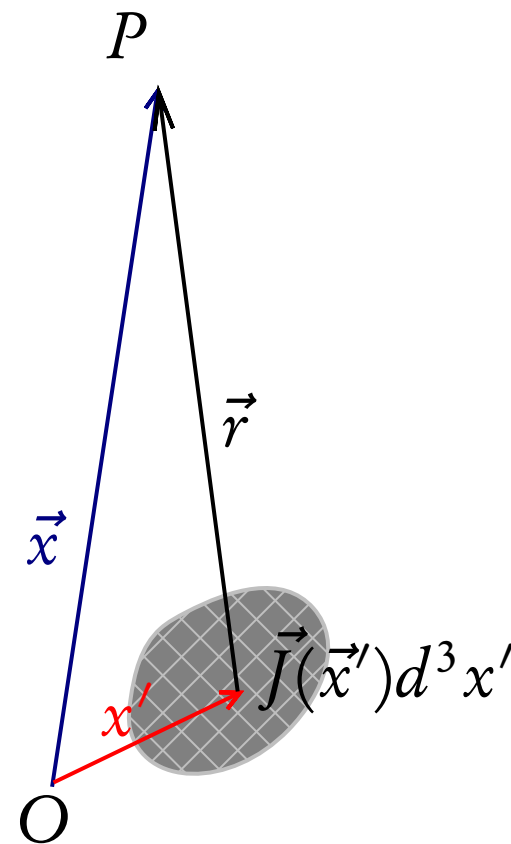
$$\begin{aligned} r &= |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = |R \mathbf{e}_R - \mathbf{x}'| \\ &= \sqrt{R^2 - 2R \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{x}' + \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}'} \\ &\approx R \left[1 - \frac{1}{R} \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{x}' \right] \end{aligned}$$

即:

$$r \approx R - \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{x}'$$

从而,

$$A(\mathbf{x}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}') \exp[ik(R - \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{x}')] }{R - \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{x}'}$$



或者,

$$A(\mathbf{x}) \approx \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int_V d^3x' \frac{j(\mathbf{x}') \exp \left[-i 2\pi \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{x}' / \lambda \right]}{1 - \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{x}' / R}$$

式中出现了两个小参数, 即 \mathbf{x}'/λ 和 \mathbf{x}'/R . 可以把推迟势对于这两个小参数做 Taylor 展开. 在计算远场区的矢势时, 只需保留 $1/R$ 的最低次项, 但需保留对位相因子中小参数 \mathbf{x}'/λ 展开的各级项. 所以,

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}) &\approx \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int_V d^3x' j(\mathbf{x}') \exp \left(-i 2\pi \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{x}' / \lambda \right) \\ &\approx \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i 2\pi / \lambda)^n}{n!} \int_V d^3x' j(\mathbf{x}') (\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{x}')^n \\ &\approx \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int_V d^3x' j(\mathbf{x}') \left(1 - \frac{i 2\pi}{\lambda} \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{x}' + \dots \right) \end{aligned}$$

最后一式中的各项对应于各级电磁多极辐射.

电磁学恒等式

为了看清推迟矢势多极展开各项的物理意义, 类似于静磁学情形, 现在构造一个电磁学恒等式. 我们已经约定电流分布于小区域 V 中, 没有电流溢出 V 的边界面 S . 所以, 若以 f, g 表示源点坐标的两个任意的标量函数, 则有:

$$\oint_S ds' \cdot [f(x') g(x') j(x')] = 0$$

可以利用奥高定理将此式左端改写为区域 V 上的体积分:

$$\int_V d^3x' \nabla' \cdot [f(x') g(x') j(x')]$$

注意到

$$\nabla' \cdot (fgj) = (f\nabla' g + g\nabla' f) \cdot j + fg\nabla' \cdot j$$

以及交变电流情形下的电荷守恒定律: $\nabla' \cdot j(x') = i\omega\rho(x')$, 我们有:

$$\int_V d^3x' [fj(x') \cdot \nabla' g + gj(x') \cdot \nabla' f] = -i\omega \int_V d^3x' fg\rho(x')$$

- 取 $f = 1, g = x'^i$. 在直角坐标系中,

$$\nabla' f = 0, \quad \nabla' g = e^j \frac{\partial x'^i}{\partial x'^j} = e^j \delta_j^i = e^i$$

上述恒等式退化为：

$$-i\omega \int_V d^3x' x'^i \rho(x') = \int_V d^3x' j(x') \cdot e^i = \int_V d^3x' j^i(x')$$

鉴于直角坐标系基矢是常矢量, 上式的成立意味着：

$$\int_V d^3x' j(x') = -i\omega \mathbf{p} = \dot{\mathbf{p}}$$

式中的 \mathbf{p} 代表电流分布的电偶极矩： $\mathbf{p} = \int_V d^3x' \rho(x') \mathbf{x}'$.

所以, 推迟矢势多极展开的首项描写电偶极辐射：

$$\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \int_V d^3x' j(x') = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \dot{\mathbf{p}}$$

- 取 $f = x'_i$, $g = x'_k$. 在直角坐标系中,

$$\nabla' f = e_j \frac{\partial x'_i}{\partial x'_j} = e_j \delta_i^j = e_i, \quad \nabla' g = e_k$$

电磁学恒等式退化为:

$$-i\omega \int_V d^3x' x'_i x'_k \rho(x') = \int_V d^3x' [x'_i j_k(x') + x'_k j_i(x')]$$

回忆电荷体系的电四极矩定义,

$$\tilde{\mathcal{D}}_{ij} = 3 \int_V d^3x' x'_i x'_j \rho(x')$$

上述电磁学恒等式又可以写为:

$$\int_V d^3x' [x'_i j_k(x') + x'_k j_i(x')] = -\frac{i\omega}{3} \tilde{\mathcal{D}}_{ik} = \frac{1}{3} \dot{\tilde{\mathcal{D}}}_{ik}$$

采用直角坐标系, 可以把推迟矢势展开式的第二项表为:

$$\begin{aligned}
 A^{(1)}(\mathbf{x}) &= -i \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} (2\pi/\lambda) \int_V d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}') (\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{x}') \\
 &= -i \frac{\mu_0 k e^{ikR}}{4\pi R^2} \int_V d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}') (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') \\
 &= -i \frac{\mu_0 k e^{ikR}}{4\pi R^2} x^i \mathbf{e}^k \int_V d^3x' x'_i j_k(\mathbf{x}')
 \end{aligned}$$

上式中的积分还可进一步简化. 由上页求得的电磁学恒等式知:

$$\begin{aligned}
 x^i \mathbf{e}^k \int_V d^3x' x'_i j_k(\mathbf{x}') &= \frac{1}{2} x^i \mathbf{e}^k \int_V d^3x' \left[x'_i j_k(\mathbf{x}') - x'_k j_i(\mathbf{x}') \right] + \frac{1}{6} x^i \mathbf{e}^k \ddot{\mathcal{D}}_{ik} \\
 &= \frac{1}{2} x^i \mathbf{e}^k \int_V d^3x' \epsilon_{ikl} \left[\mathbf{x}' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}') \right]^l + \frac{1}{6} x^i \mathbf{e}^k \ddot{\mathcal{D}}_{ik} \\
 &= -\mathbf{x} \times \left[\frac{1}{2} \int_V d^3x' \mathbf{x}' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}') \right] + \frac{1}{6} x^i \mathbf{e}^k \ddot{\mathcal{D}}_{ik} \\
 &= -\mathbf{x} \times \mathbf{m} + \frac{1}{6} x^i \mathbf{e}^k \ddot{\mathcal{D}}_{ik}
 \end{aligned}$$

式中出现的

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V d^3x' \mathbf{x}' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}')$$

恰为电流分布的磁偶极矩矢量.

所以, 推迟矢势展开式的第二项描写“磁偶极矩”与“电四极矩”所产生的辐射:

$$A^{(1)}(\mathbf{x}) = -i \frac{\mu_0 k e^{ikR}}{4\pi R^2} \left(\mathbf{m} \times \mathbf{x} + \frac{1}{6} x_i \mathbf{e}_k \ddot{\mathcal{D}}^{ik} \right)$$

它们各自对应的推迟矢势如下:

$$A_m^{(1)}(\mathbf{x}) = -i \frac{\mu_0 k e^{ikR}}{4\pi R^2} \mathbf{m} \times \mathbf{x}$$

$$A_{\mathcal{D}}^{(1)}(\mathbf{x}) = -i \frac{\mu_0 k e^{ikR}}{24\pi R^2} x_i \mathbf{e}_k \ddot{\mathcal{D}}^{ik}$$

请注意这些矢势对于场点与源点之间的距离的依赖均是 $1/R$.

电偶极辐射场

如前所述, 频率为 ω 的振荡电偶极矩产生的辐射电磁场具有如下推迟矢势:

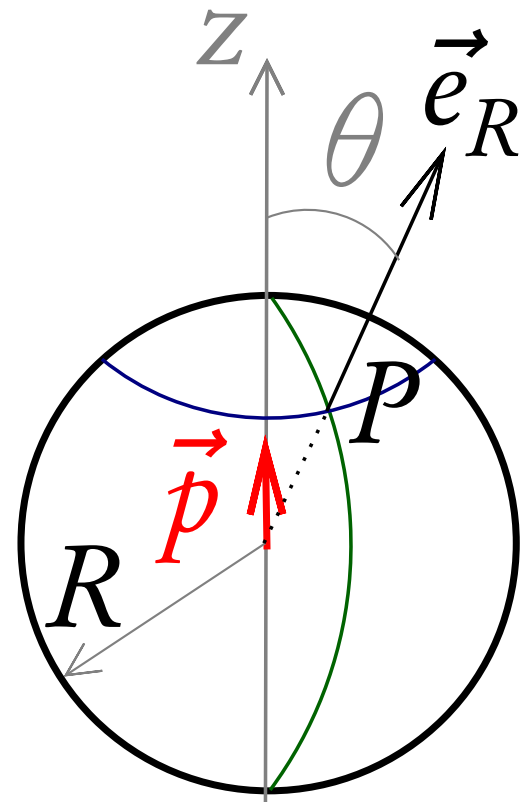
$$A(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \dot{\mathbf{p}}$$

在计算电磁场强时, 需要对 A 作用梯度算符 ∇ . 我们只需将计算精度保持在 $1/R$ 即可, 所以只需把 ∇ 仅需作用到推迟因子 e^{ikR} 上, 而无需将其作用于矢势的分母. 因为

$$\nabla e^{ikR} = \mathbf{e}_R \partial_R e^{ikR} = ik \mathbf{e}_R e^{ikR}$$

以及 $\partial_t e^{-i\omega t} = -i\omega e^{-i\omega t}$, 对辐射场的矢势或者场强求时间导数或旋度、散度相当于作代换:

$$\nabla \rightsquigarrow ik \mathbf{e}_R, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightsquigarrow -i\omega$$



所以,电偶极辐射场的磁感应强度可按如下方式计算:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = ik \boldsymbol{e}_R \times \left[\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \dot{\boldsymbol{p}} \right] \\ &= i\omega \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c R} \boldsymbol{e}_R \times \dot{\boldsymbol{p}} \\ &= -\frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 c^3 R} \boldsymbol{e}_R \times \ddot{\boldsymbol{p}} \\ &= \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 c^3 R} \ddot{\boldsymbol{p}} \times \boldsymbol{e}_R \end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \frac{i}{\omega} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \frac{ic}{k} ik \boldsymbol{e}_R \times \boldsymbol{B} \\ &= c\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{e}_R \\ &= \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} (\ddot{\boldsymbol{p}} \times \boldsymbol{e}_R) \times \boldsymbol{e}_R \end{aligned}$$

选择振荡电偶极矩的方向沿极轴, 则:

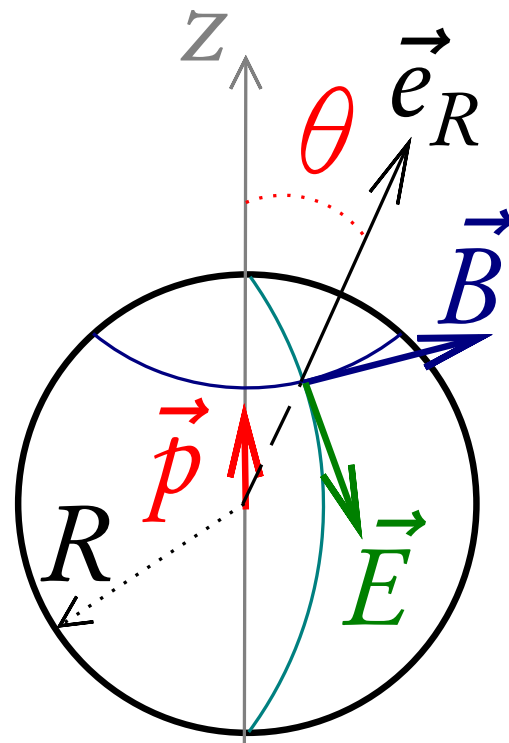
$$\ddot{\vec{p}} = |\ddot{\vec{p}}| \vec{e}_3$$

于是,

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{p}} \times \vec{e}_R &= |\ddot{\vec{p}}| \vec{e}_3 \times (\vec{e}_3 \cos \theta + \vec{e}_1 \sin \theta \cos \phi + \vec{e}_2 \sin \theta \sin \phi) \\ &= |\ddot{\vec{p}}| \sin \theta (\vec{e}_2 \cos \phi - \vec{e}_1 \sin \phi) \\ &= |\ddot{\vec{p}}| \sin \theta \left(\frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi \vec{e}_R \right) \\ &= |\ddot{\vec{p}}| \sin \theta \vec{e}_\phi \end{aligned}$$

进而,

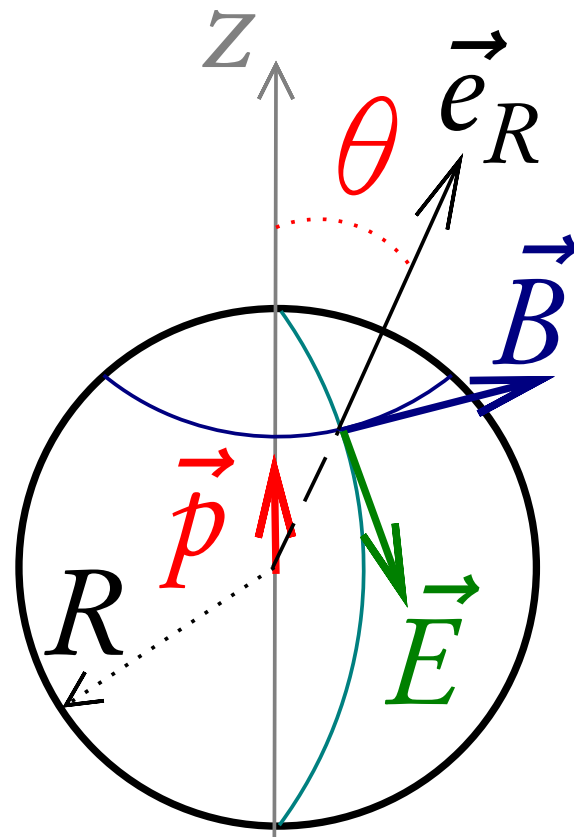
$$\begin{aligned} (\ddot{\vec{p}} \times \vec{e}_R) \times \vec{e}_R &= |\ddot{\vec{p}}| \sin \theta \vec{e}_\phi \times \vec{e}_R \\ &= |\ddot{\vec{p}}| \sin \theta \vec{e}_\theta \end{aligned}$$



于是, 电偶极辐射场的场强矢量具有如下分布形式:

$$\mathbf{B} = \frac{|\ddot{\mathbf{p}}| e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 c^3 R} \sin\theta \mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{E} = \frac{|\ddot{\mathbf{p}}| e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} \sin\theta \mathbf{e}_\theta$$



显见:

- ① 电偶极辐射场的 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 均是横场 (TEM 波).
- ② 磁力线是围绕极轴的闭合圆周, 电力线是经面上的闭合曲线,

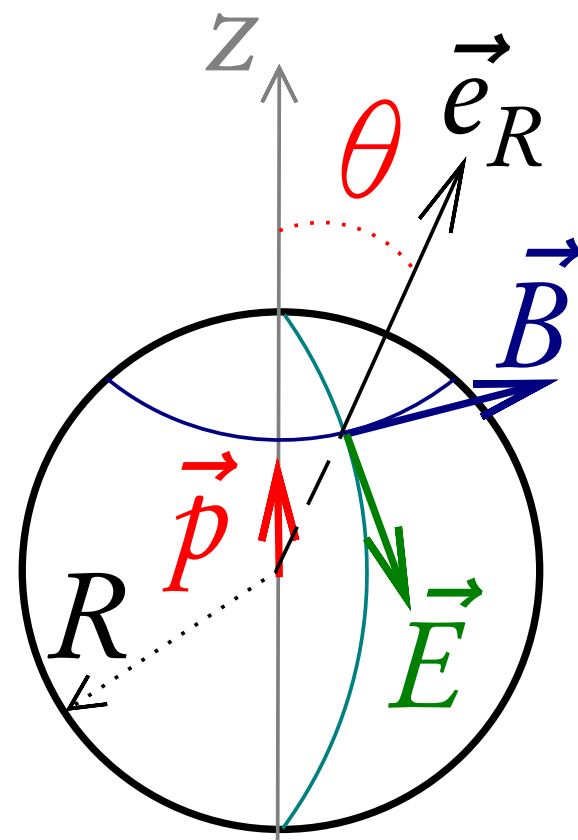
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = ik \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = ik \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{E} = 0.$$

辐射场的实际应用涉及计算其“辐射功率”和“角分布”. 这两个量均可通过计算辐射场的平均能流密度矢量求得.

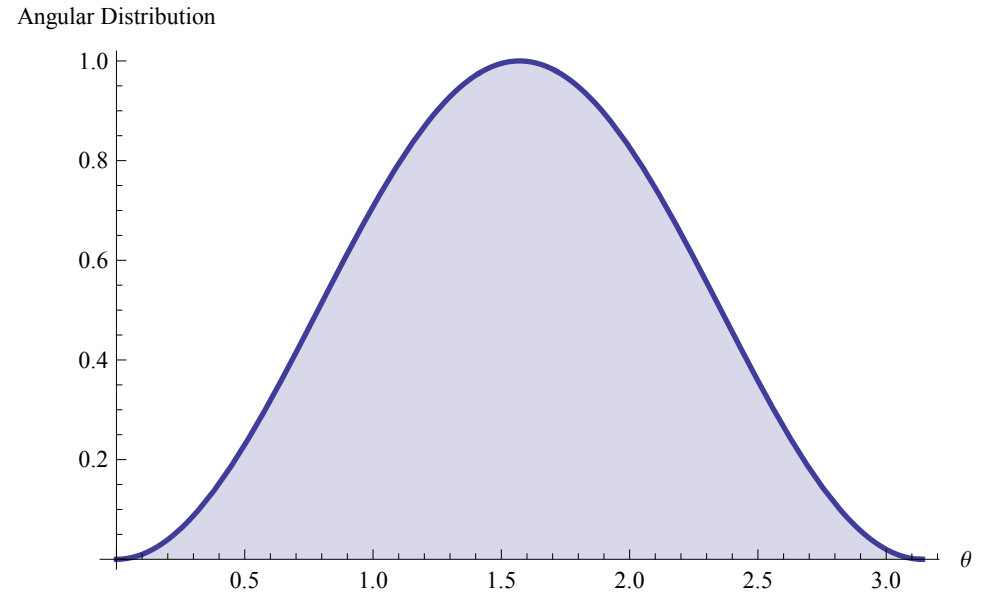
电偶极辐射场的平均能流密度计算如下:

$$\begin{aligned}\langle S \rangle &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}) = \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^2} \mathbf{e}_R\end{aligned}$$

- 正如所料, \mathbf{e}_R 是能流密度矢量的方向, 亦即电偶极辐射场的波矢 \mathbf{k} 的方向.
- $\langle S \rangle$ 的表式中, 因子 $\sin^2 \theta$ 描写电偶极辐射场能流分布的方向性, 称为电偶极辐射的角分布. 显然, 在 $\theta = \pi/2$ 的赤道面上辐射最强, 但沿电偶极轴线方向 ($\theta = 0, \pi$) 没有辐射.



电偶极辐射场的角分布的全貌如右图示：



求 $\langle S \rangle$ 在半径为 R 的球面上的面积分, 就得到了电偶极辐射场的总辐射功率:

$$\begin{aligned} P &= \oint \langle S \rangle \cdot \mathbf{e}_R R^2 d\Omega \\ &= \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \sin^2 \theta \\ &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2}{3c^3} \end{aligned}$$

电偶极辐射场的总辐射功率：

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2}{3c^3}$$

- ① 注意到对于频率为 ω 的交变电流分布, $\partial_t \sim -i\omega$. 所以, 若振荡电偶极矩随时间的演化由下式描写: $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 e^{-i\omega t}$, 且电偶极矩振幅 \mathbf{p}_0 不随时间变化, 则电偶极辐射总功率正比于偶极子振荡频率的四次幂 $P \propto \omega^4$.
- ② 实际应用中, 振荡电偶极子总是通过交变的电流分布实现的,

$$\dot{\mathbf{p}} = \int_V d^3x' J(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \propto I_0 e^{-i\omega t}$$

所以,

$$\ddot{\mathbf{p}} \propto -i\omega I_0 e^{-i\omega t}$$

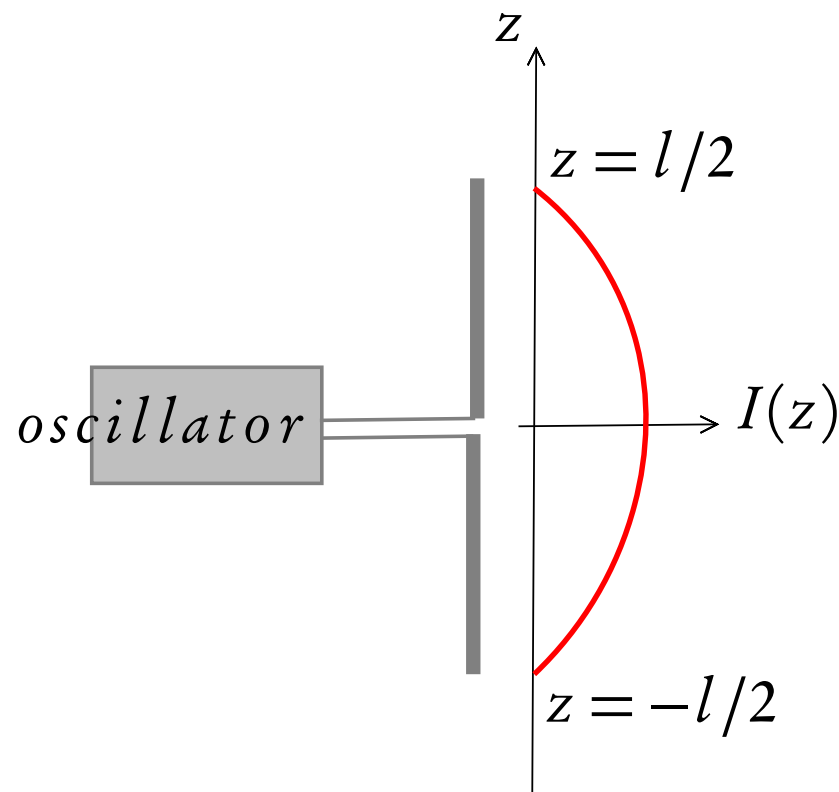
技术上只能保证交变电流的振幅 I_0 不随时间变化. 电偶极辐射场的总发射功率实际上正比于偶极子振荡频率的二次幂:

$$P \propto \omega^2$$

短天线的辐射场

作为振荡电偶极子的一个具体实例, 现在考虑一个长度为 l 的直线型天线, 如右图.

- 此天线为中心馈电型.
- 天线上下两半段上电流方向相同, 均沿 e_3 方向.
- 馈电点处电流强度有最大值 I_0 , 但在天线两端电流强度为零.



若为短天线, $l \ll \lambda = cT = 2\pi c/\omega$, 则天线上的电流分布近似为线性形式:

$$I(z) = I_0 \left[1 - 2\frac{|z|}{l} \right], \quad |z| \leq l/2$$

当然,

$$I(t, z) = I(z)e^{-i\omega t}$$

短天线的电偶极矩时间变换率计算如下：

$$\dot{\mathbf{p}} = \int_V d^3x' \mathbf{j}(t, \mathbf{x}') = \mathbf{e}_3 \int_{-l/2}^{+l/2} dz I(t, z) = \frac{1}{2} \mathbf{e}_3 I_0 l e^{-i\omega t}$$

从而，

$$\ddot{\mathbf{p}} = -i\omega \dot{\mathbf{p}} = -\frac{i}{2} \mathbf{e}_3 I_0 l \omega e^{-i\omega t} = -i\pi c I_0 (l/\lambda) \mathbf{e}_3 e^{-i\omega t}$$

短天线的电偶极辐射总功率为：

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2}{3c^3} \\ &= \frac{\pi}{12\epsilon_0 c} I_0^2 (l/\lambda)^2 = \frac{\pi}{12} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} I_0^2 (l/\lambda)^2 \end{aligned}$$

若保持天线上电流的峰值 I_0 不随时间变化，则短天线的电偶极辐射功率正比于 $(l/\lambda)^2$ 。

短天线的辐射电阻

短天线的电偶极辐射功率正比于 I_0^2 ,

$$P = \frac{\pi}{12} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} I_0^2 (l/\lambda)^2 \propto I_0^2$$

因此, 短天线在向外发射电磁波的过程中相当于一个电阻器, 其电偶极辐射功率相当于一个等效电阻上的损耗功率. 这个等效电阻称为短天线的“辐射电阻”, 记为 R_r ,

$$P = \frac{1}{2} R_r I_0^2$$

显然:

$$R_r = \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (l/\lambda)^2$$

查表知: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$. 由此算得:

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx \sqrt{\frac{4\pi}{8.85} \times 10^5} \approx 376.8 \ \Omega$$

所以,

$$R_r \approx 197 (l/\lambda)^2 \Omega$$

- 辐射电阻是表征天线辐射电磁波能力的一个参数. 天线的辐射电阻愈大, 表示在输入电流强度给定的前提下, 辐射功率愈大.
- 短天线的辐射电阻正比于 $(l/\lambda)^2$. 对于短天线而言, $l \ll \lambda$, 因此, 短天线的辐射能力是弱的.
- 要提高天线的辐射能力, 需要增大天线的长度以致 $l \sim \lambda$, 此时天线的辐射已不能用电偶极辐射来近似描写.

磁偶极辐射场

磁偶极辐射场的推迟矢势为：

$$A(\mathbf{x}) = -i \frac{\mu_0 k e^{ikR}}{4\pi R} \mathbf{m} \times \mathbf{e}_R$$

相应的电磁场强度计算如下⁴：

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = ik \mathbf{e}_R \times \mathbf{A} \\ &= \frac{\mu_0 k^2 e^{ikR}}{4\pi R} \mathbf{e}_R \times (\mathbf{m} \times \mathbf{e}_R) \\ &= -\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c^2 R} \mathbf{e}_R \times (\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{e}_R) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c^2 R} (\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{e}_R) \times \mathbf{e}_R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= i \frac{c^2}{\omega} \nabla \times \mathbf{B} = i \frac{c^2}{\omega} ik \mathbf{e}_R \times \mathbf{B} \\ &= -c \mathbf{e}_R \times \mathbf{B} \\ &= -\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c R} \mathbf{e}_R \times [(\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{e}_R) \times \mathbf{e}_R] = -\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c R} (\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{e}_R) \end{aligned}$$

⁴注意： $k = \omega/c$.

磁偶极辐射场的平均能流密度矢量计算如下. 注意到 $\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{B} = 0$, 我们有⁵:

$$\begin{aligned}
 \langle S \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} (\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}) \\
 &= \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} [(\mathbf{E}^* \times \mathbf{e}_R) \times \mathbf{B}] = \frac{c}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \mathbf{e}_R \\
 &= \frac{\mu_0}{32\pi^2 c^3 R^2} |(\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{e}_R) \times \mathbf{e}_R|^2 \\
 &= \frac{\mu_0}{32\pi^2 c^3 R^2} [\ddot{\mathbf{m}} \cdot \ddot{\mathbf{m}}^* - (\mathbf{e}_R \cdot \ddot{\mathbf{m}})(\mathbf{e}_R \cdot \ddot{\mathbf{m}}^*)] \mathbf{e}_R
 \end{aligned}$$

建立球坐标系, 把磁偶极子置于坐标原点且以 \mathbf{m} 的方向为极轴. 如此, $\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{m} = |\mathbf{m}| \cos \theta$, θ 为场点对应的极角. 可以把磁偶极辐射场的平均能流密度矢量改写为:

$$\langle S \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 |\mathbf{m}|^2}{32\pi^2 c^3 R^2} \sin^2 \theta \mathbf{e}_R$$

⁵事实上, 磁偶极辐射场是 TEM 波: $\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{E} = \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{B} = 0$.

磁偶极辐射场的总辐射功率为：

$$P = \frac{\mu_0 \omega^4 |m|^2}{12\pi c^3}$$

例： 一载流线圈半径为 a ，激发的交变电流的振幅为 I_0 ，角频率为 ω 。求辐射功率。

解： 载流线圈的磁偶极矩的大小为，

$$m = \pi a^2 I = \pi a^2 I_0 e^{-i\omega t}$$

其峰值是：

$$|m| = \pi a^2 I_0$$

所以，载流线圈的辐射功率为：

$$P = \frac{\mu_0 \omega^4 I_0^2 (\pi a^2)^2}{12\pi c^3} = \frac{4\pi^5}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 I_0^2$$

当电流峰值 I_0 不随时间变化时，磁偶极辐射的功率 $\propto (a/\lambda)^4$ ，因此磁偶极辐射比电偶极辐射小 $(a/\lambda)^2$ 数量级。小线圈的辐射能力比短天线更低。

电四极辐射场

电四极辐射场的推迟矢势是：

$$A(\mathbf{x}) = -i \frac{\mu_0 k e^{ikR}}{24\pi R^2} x_i \mathbf{e}_k \tilde{\mathcal{D}}^{ik} = \frac{e^{ikR} x_i \ddot{\mathcal{D}}^{ik}}{24\pi\epsilon_0 c^3 R^2} \mathbf{e}_k$$

式中，

$$\tilde{\mathcal{D}}_{ij} = 3 \int_V d^3x' x'_i x'_j \rho(\mathbf{x}')$$

由于 A 表达式中存在因子 x_i ，这是场点直角坐标的 i -分量，电四极辐射场的推迟矢势对场点的依赖仍是 $1/R$ 。

下面求电四极辐射场的场强。磁感应强度计算如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ &= ik \mathbf{e}_R \times \mathbf{A} = \frac{e^{ikR} x_i \ddot{\mathcal{D}}^{ik}}{24\pi\epsilon_0 c^4 R^2} (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_R) \end{aligned}$$

注意到数学恒等式，

$$x_i \delta^{ik} (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_R) = x^i \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_R = \mathbf{x} \times \mathbf{e}_R = R(\mathbf{e}_R \times \mathbf{e}_R) = 0$$

我们可以在 \mathbf{B} 的表达式中把有迹的电四极矩 $\tilde{\mathcal{D}}_{ik}$ 更换为无迹的电四极矩 \mathcal{D}_{ij} :

$$\mathcal{D}_{ij} = \int_V d^3x' (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(x')$$

显然,

$$\tilde{\mathcal{D}}_{ij} = \mathcal{D}_{ij} + \delta_{ij} \left[\int_V d^3x' r'^2 \rho(x') \right]$$

所以, 电四极辐射场的磁感应强度分布为:

$$\mathbf{B} = \frac{e^{ikR} x_i \ddot{\mathcal{D}}^{ik}}{24\pi\epsilon_0 c^4 R^2} (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_R)$$

其电场强度分布为:

$$\mathbf{E} = c \mathbf{B} \times \mathbf{e}_R = \frac{e^{ikR} x_i \ddot{\mathcal{D}}^{ik}}{24\pi\epsilon_0 c^3 R^2} [(\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_R) \times \mathbf{e}_R]$$

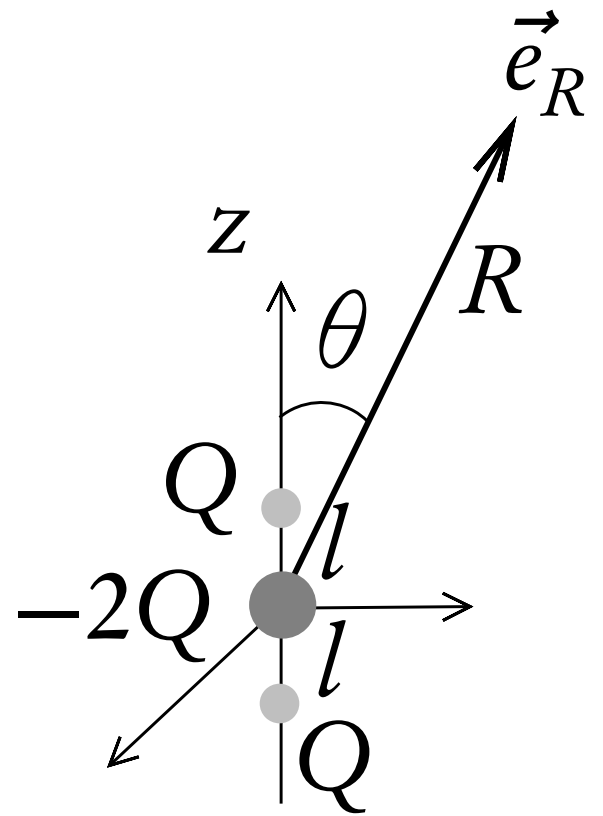
不难看出, 电四极辐射场仍是 TEM 波: $\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{B} = \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{E} = 0$.

电四极辐射场的平均能流密度矢量计算如下：

$$\begin{aligned}\langle S \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} (E^* \times B) \\ &= \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \operatorname{Re} [(cB^* \times e_R) \times B] \\ &= \frac{\epsilon_0 c^2}{2} |B|^2 e_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_i x_j \ddot{\mathcal{D}}^{*ik} \ddot{\mathcal{D}}^{jl}}{288\pi c^5 R^4} [\delta_{kl} - (e_k \cdot e_R)(e_l \cdot e_R)] e_R\end{aligned}$$

- ① 电四极辐射场的平均能流密度分布对于场点距离的依赖仍是所期望的 $1/R^2$ 衰减律.
- ② 电四极辐射场的角分布由因子 $[\delta_{kl} - (e_k \cdot e_R)(e_l \cdot e_R)]$ 确定.
- ③ 设电荷分布区域线度为 l , 则 $\mathcal{D}_{ij} \sim \mathcal{O}(l^2)$, 于是电四极辐射场的辐射功率正比于 $(l/\lambda)^4$, 它与磁偶极辐射同数量级, 但比电偶极辐射小 $(l/\lambda)^2$ 数量级.

例：求右图所示的电四极子以频率 ω 振荡时的辐射功率和角分布.



解：此电四极子的电荷体密度为：

$$\rho(\mathbf{x}') = Q\delta(x')\delta(y') [\delta(z' - l) - 2\delta(z') + \delta(z' + l)]$$

所以，电四极矩张量 $\tilde{\mathcal{D}}_{ij}$ 只有 33 分量非零：

$$\tilde{\mathcal{D}}_{33} = 3 \int_V d^3x' z'^2 \rho(\mathbf{x}') = 6Ql^2 \rightsquigarrow \ddot{\tilde{\mathcal{D}}}_{33} = 6Ql^2 (-i\omega)^3 = i6Ql^2 \omega^3$$

振荡电四极子也是通过交变电流实现的,相应的电流强度为:

$$I = \frac{dQ}{dt} = -i\omega Q e^{-i\omega t}$$

技术上所能控制的是保证电流强度的峰值 $I_0 = \omega Q$ 不随时间变化.利用 I_0 , 我们有:

$$\ddot{\ddot{\mathcal{D}}}_{33} = i6I_0 (\omega l)^2 = i24\pi^2 c^2 I_0 (l/\lambda)^2$$

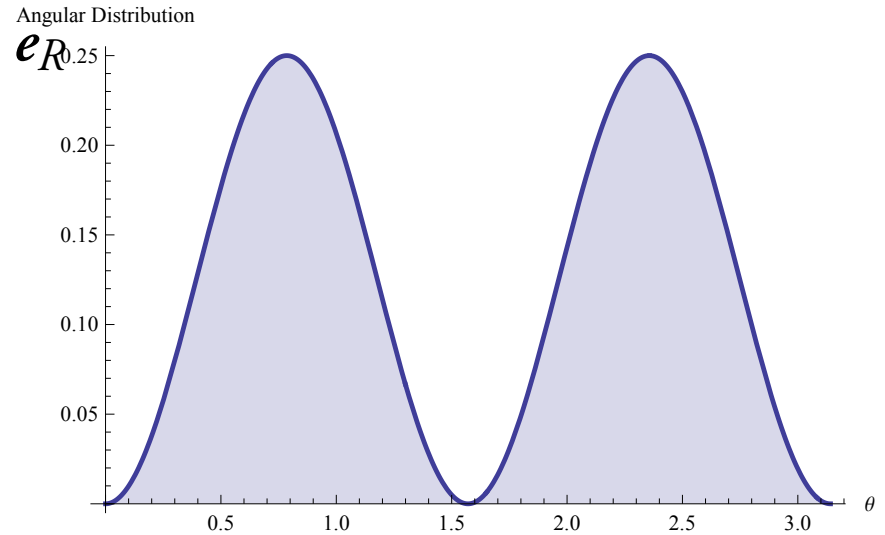
所以,

$$\begin{aligned} x_i x_j \ddot{\ddot{\mathcal{D}}}^{*ik} \ddot{\ddot{\mathcal{D}}}^{jl} [\delta_{kl} - (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_R)(\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_R)] \\ = r^2 \left| \ddot{\ddot{\mathcal{D}}}_{33} \right|^2 [1 - (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_R)^2] \\ = (R \cos \theta)^2 576 \pi^4 c^4 I_0^2 (l/\lambda)^4 (1 - \cos^2 \theta) \\ = 576 \pi^4 c^4 I_0^2 R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta (l/\lambda)^4 \end{aligned}$$

此电四极辐射场的平均能流密度因此写为:

$$\langle S \rangle = \frac{\pi^2 I_0^2}{2\epsilon_0 c R^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta (l/\lambda)^4 e_R$$

电四极辐射的角分布由因子 $\sin^2 \theta \cos^2 \theta$ 确定, 全貌如右图所示.



电四极辐射总功率为：

$$P = \oint \langle S \rangle \cdot e_R R^2 d\Omega$$

$$= \frac{\pi^2 I_0^2}{2\epsilon_0 c} (l/\lambda)^4 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta \cos^2 \theta = \frac{4\pi^3}{15} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^4 I_0^2$$

即电四极辐射场的辐射功率与磁偶极辐射具有相同的数量级.

任意运动带电粒子的电磁势

按照经典力学原理,若质点受到了外力的作用,则其将沿某个确定的轨道作加速运动.

现在把某带电粒子看成质点,设其沿某特定轨道运动、其位置矢量为 $\mathbf{x}_q(t')$.

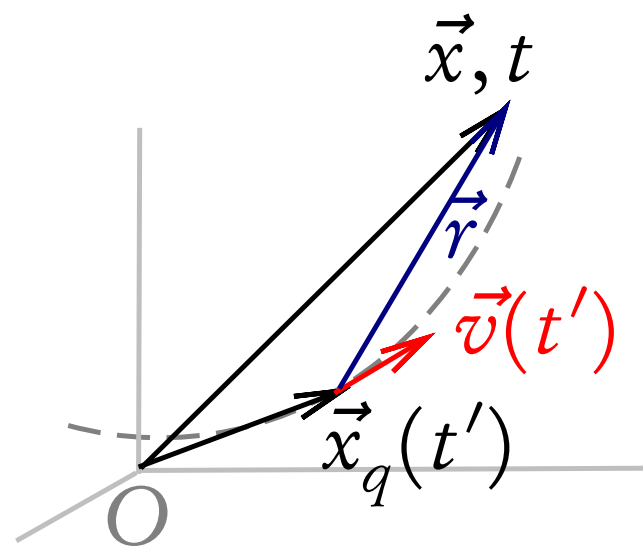
这个运动电荷将在周围空间激发电磁场.

由于电磁相互作用传播速度的有限性,位于场点 \mathbf{x} 处的观测者在时刻 t 的电磁势应该是带电粒子在较早时刻 t' 激发的,该时刻粒子处于 $\mathbf{x}_q(t')$ 点、其速度为 $\mathbf{v}(t')$.

t' 时刻带电粒子与给定场点之间的距离为:

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_q(t')| = c(t - t')$$

当下的任务是计算带电粒子在场点处所激发的电磁场的推迟势.



采取 Lorenz 规范. 惯性参考系中任意电荷电流分布在无界空间激发的电磁势是如下推迟势:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3y ds \frac{\delta(t - s - r/c)}{r} \rho(\mathbf{y}, s)$$

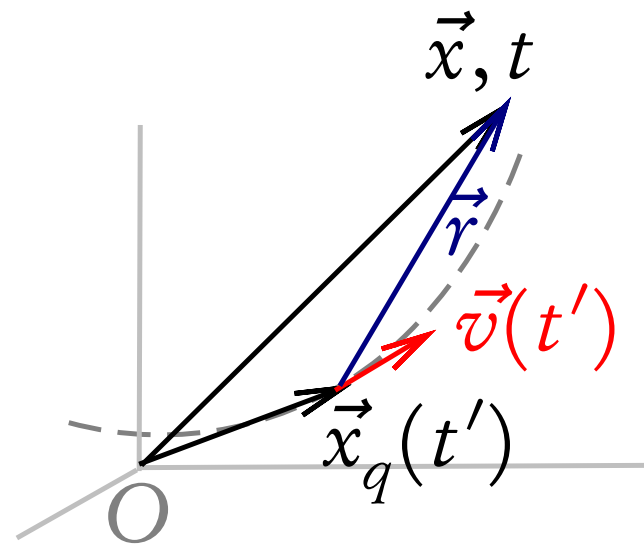
$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y ds \frac{\delta(t - s - r/c)}{r} \mathbf{j}(\mathbf{y}, s)$$

式中的 $r = |\mathbf{r}|$ 表示场点与源点之间的距离, $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ 是相应的位矢.

对于电荷量为 q 的运动电荷而言, 其电荷密度和电流密度分别为:

$$\rho(\mathbf{y}, s) = q\delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_q(s))$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{y}, s) = \rho(\mathbf{y}, s)\mathbf{v}(s) = q\mathbf{v}(s)\delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_q(s))$$



将其代入到推迟势公式中, 完成对空间坐标 d^3y 的积分, 即得:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3y ds \frac{\delta(t - s - r/c)}{r} q \delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_q(s)) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int ds \frac{\delta[t - s - r(s)/c]}{r(s)}\end{aligned}$$

式中 $r(s) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_q(s)|$. 同理有:

$$A(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int ds \frac{v(s) \delta[t - s - r(s)/c]}{r(s)}$$

接下来需要完成对时间变量 s 的积分, 然而这是有难度的. 我们知道

$$\int ds G(s) \delta(s - s^*) = G(s^*)$$

但现在遭遇的不是这样的积分, 而是

$$\int ds G(s) \delta[F(s)]$$

此处 $F(s)$ 不是自变量 s 的线性函数.

$$F(s) = t - s - \frac{r(s)}{c} = t - s - \frac{|x - x_q(s)|}{c}$$

幸好数学上对计算这类积分早有准备. 若函数 $F(x)$ 有一系列零点 x_i , 即 $F(x)|_{x=x_i} = 0$, 则:

$$\delta[F(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|F'(x_i)|}$$

注意到:

$$r(s) = |x - x_q(s)| = \sqrt{(x - x_q(s)) \cdot (x - x_q(s))} = \sqrt{(x_i - x_{qi}(s))(x^i - x_q^i(s))}$$

$$\frac{dr(s)}{ds} = -\frac{(x_i - x_{qi}(s))}{r(s)} \frac{dx_q^i(s)}{ds} = -\frac{(x_i - x_{qi}(s))}{r(s)} v^i(s) = -\frac{r(s) \cdot v(s)}{r(s)}$$

对于本问题而言, $F(s) = t - s - r(s)/c$,

$$F'(s) = -1 - \frac{1}{c} \frac{dr(s)}{ds} = -1 + \frac{r(s) \cdot v(s)}{cr(s)} = -1 + n(s) \cdot \beta(s)$$

这里 $n(s) = r(s)/r(s)$ 且 $\beta(s) = v(s)/c$.

$F(s)$ 的零点满足代数方程：

$$F(s) = t - s - r(s)/c = 0 \quad \rightsquigarrow t = s + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_q(s)|/c$$

从物理角度看, 这个方程的解是唯一的：

$$s = t'$$

t' 是带电粒子发射电磁波的时刻. 所以,

$$\delta[F(s)] = \frac{\delta(s - t')}{1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')}$$

因此, 以速度 $\mathbf{v}(t')$ 运动的带电粒子所激发的电磁场在 Lorenz 规范中具有推迟标势：

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int ds \frac{\delta[F(s)]}{r(s)} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int ds \frac{\delta(s - t')}{r(s)[1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')]} \end{aligned}$$

亦即：

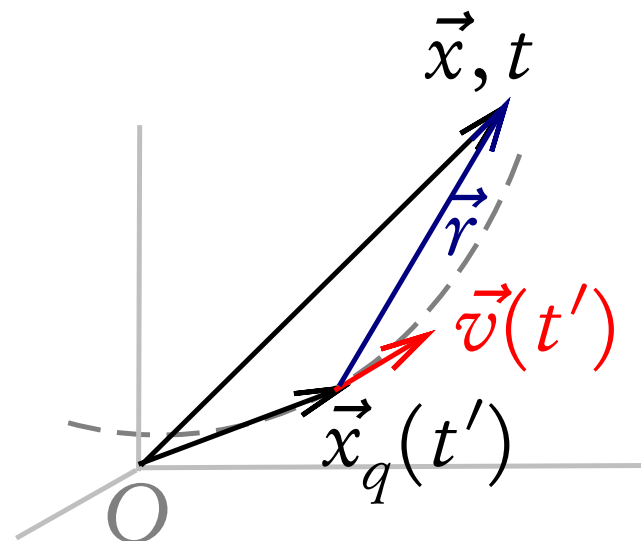
$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 [r(t') - \mathbf{r}(t') \cdot \mathbf{v}(t')/c]}$$

式中 $\mathbf{r}(t') = \mathbf{x} - \mathbf{x}_q(t')$, $r(t')$ 是其大小, 而 t' 由 $t' = t - r(t')/c$ 的解确定.

同理有：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v}(t')}{[r(t') - \mathbf{r}(t') \cdot \mathbf{v}(t')/c]}$$

推迟势的上述结果称为李纳-维谢尔 (Lienard-Wiechert) 势.



- 惯性参考系中, 李纳-维谢尔势只依赖于带电粒子的速度矢量, 而不依赖于其加速度.

李纳-维谢尔势的四维形式

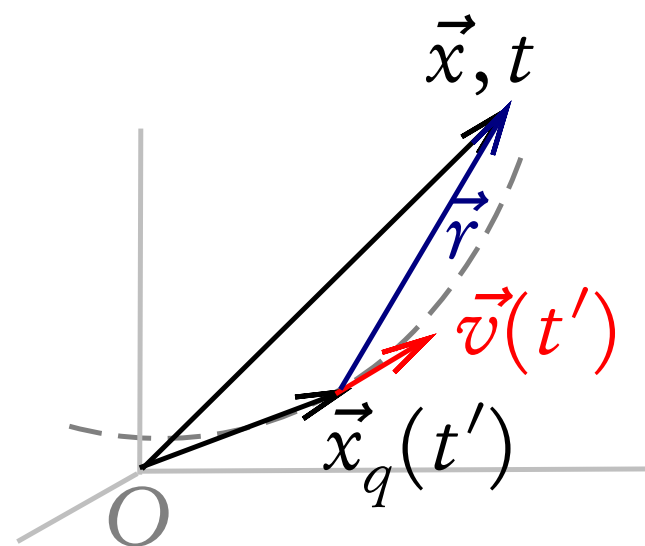
所以,

- 李纳-维谢尔势可以从带电粒子瞬时自身参考系中的静电库仑势出发、通过惯性系之间的洛伦兹推动变换求得.
- 构造一族惯性参考系 $\{\tilde{\Sigma}\}$, 其成员的数目原则上可以是无穷大. 在每一时刻, 总有一个 $\tilde{\Sigma}$ 与带电粒子保持相对静止. 称 $\tilde{\Sigma}$ 为粒子的瞬时自身系.
- 加速运动粒子的瞬时自身系与自身系是不同的概念. 自身系唯一但非惯性系, 而瞬时自身系是惯性系却不唯一.

在瞬时自身系 $\tilde{\Sigma}$ 中, 带电粒子激发的电磁势是静电库仑势:

$$\tilde{A} = 0, \quad \tilde{\phi} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \tilde{r}}$$

\tilde{r} 为在 $\tilde{\Sigma}$ 上测量到的粒子与场点之间的距离.



2: 那么, 实验室参考系中测得的李纳-维谢尔势如何由上面的静电库仑势导出呢?

一种选择是直接使用电磁势的洛伦兹推动变换,

$$A_\mu = \tilde{A}_\nu \Lambda^\nu_\mu$$

此处 $A_\mu = (-\phi/c, A)$ 与 $\tilde{A}_\mu = (-\tilde{\phi}/c, \tilde{A})$ 分别是实验室系和粒子瞬时自身系中的四维电磁势. 洛伦兹推动变换的非零矩阵元分别为:

$$\Lambda^0_0 = \gamma_v, \quad \Lambda^0_j = -\gamma_v \beta_j, \quad \Lambda^i_0 = -\gamma_v \beta^i, \quad \Lambda^i_j = \delta^i_j + \frac{\gamma_v^2}{\gamma_v + 1} \beta^i \beta_j$$

式中 $\beta = v(t')/c$, $\gamma_v = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

① 这个做法详见教材或者参考书, 例如郭硕鸿等教授的著作《电动力学》(第三版)第七章第一节. 此处略.

我们以下的方案是通过一些物理考虑,直接将李纳-维谢尔电磁场的四维势矢量构造出来.

- 李纳-维谢尔势的特点是势只依赖于带电粒子的速度、而不依赖于它的加速度. 与粒子速度相关的基础 4-矢量是其 4-速度 $V_\mu(\tau)$:

$$V_\mu(\tau) = \gamma_v (-c, \mathbf{v}(t'))$$

τ 是带电粒子的固有时,

$$t' = t'(\tau)$$

所以:

$$A_\mu \propto V_\mu(\tau) \Big|_{\text{Ret}}$$

- 上式右端的系数显然应该是一个 4-标量,且正比于粒子的电荷 q .
- 李纳-维谢尔势在粒子的瞬时自身系中应退化为静电库仑势. 因此,此系数 4-标量还应反比于距离 \tilde{r} 的一次幂.

从物理直观上看, 存在着一个与 \vec{r} 相关四维矢量, 它是观测者所在的时空点 (t, \mathbf{x}) 相对于带电粒子激发电磁波时所占据的时空点 $(t', \mathbf{x}_q(t'),)$ 的位置 4-矢量:

$$R^\mu(\tau) \equiv x^\mu - x_q^\mu(\tau) = (ct - ct'(\tau), \mathbf{x} - \mathbf{x}_q(t'(\tau)))$$

由于这两个时空点是通过电磁波讯号相联系的, 故 R^μ 是一个类光 4-矢. 无法单独通过 R^μ 构造出非零的 4-标量:

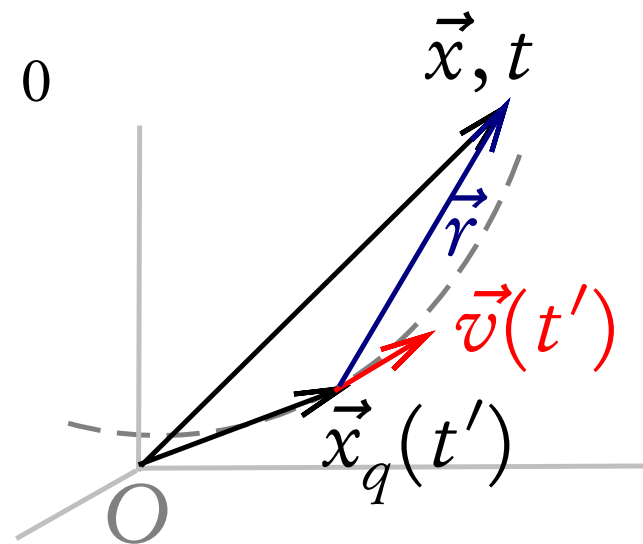
$$R^\mu(\tau)R_\mu(\tau) = -c^2[t - t'(\tau)]^2 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_q(\tau))^2 = 0$$

所以, 推迟时刻粒子的固有时 τ 决定于方程组

$$R^\mu(\tau)R_\mu(\tau) = 0, \quad t - t'(\tau) > 0$$

其解可以使用隐函数形式地表为:

$$t'(\tau) = t - \frac{1}{c} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_q(\tau)|$$



幸运的是, 可以通过 R^μ 与粒子 4-速度 V_μ 的缩并构造出一个非零的 4-标量:

$$R^\mu V_\mu \neq 0$$

这样, 李纳-维谢尔势显示的四维形式就可以写为:

$$A_\mu = \zeta \frac{q V_\mu}{(RV)} \Big|_{\text{Ret}} \quad \leftarrow \textcolor{red}{\mathcal{P}} \quad \textcolor{red}{(RV) \equiv R^\mu V_\mu}$$

因子 ζ 的引入是为了平衡量纲. 为了确定 ζ , 我们按上式计算一下粒子瞬时自身系中的标势 \tilde{A}_0 :

$$\tilde{A}_0 = \zeta \frac{q \tilde{V}_0}{\tilde{R}^0 \tilde{V}_0} = \zeta \frac{qc}{\tilde{r}} = \zeta \frac{q}{\tilde{r}}$$

因为 \tilde{A}_0 本质上是静电库仑势,

$$\tilde{A}_0 = -\tilde{\phi}/c = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{q}{\tilde{r}}$$

比较知:

$$\zeta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c}$$

带电粒子李纳-维谢尔势的四维形式最终写为：

$$A_\mu = \left(-\frac{\phi}{c}, A \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{qV_\mu}{(RV)} \Big|_{\text{Ret}}$$

Q: 它正确吗？

在实验室参考系中，

$$V_\mu = \gamma_v(-c, v(t'))$$

$$(RV) = R^\mu U_\mu = R^i V_i + R^0 V_0 = -c\gamma_v [r(t') - r(t') \cdot v(t')/c]$$

代回到 A_μ 的四维表述，即得：

$$A(x, t) = \frac{\mu_0 q v(t')}{4\pi [r(t') - r(t') \cdot v(t')/c]}, \quad \phi(x, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 [r(t') - v(t') \cdot v(t')/c]}$$

这个结论正是李纳-维谢尔势的标准表达式。

2: 可否从静电库仑定律出发通过洛伦兹推动变换求得加速带电粒子的电磁场场强?

- ① 结论是不行. 这是因为对于加速运动带电粒子而言, 其瞬时自身系中的电磁场并不是静电库仑定律描写的静电场.
- ② 但若认为粒子瞬时自身系中电磁场的场强分布是:

$$\tilde{E} = \frac{q\tilde{r}}{4\pi\epsilon_0\tilde{r}^3} + \frac{q\tilde{r} \times (\tilde{r} \times \dot{\beta})}{4\pi\epsilon_0 c\tilde{r}^3}, \quad \tilde{B} = \frac{q\dot{\beta} \times \tilde{r}}{4\pi\epsilon_0 c^2\tilde{r}^2}$$

由此出发则可以⁶. 问题在于怎么确立这个出发点?

- ③ 有了李纳-维谢尔势后, 计算运动带电粒子所激发电磁场场强的最经济方法是使用场强的定义式:

$$B = \nabla \times A, \quad E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t}$$

⁶虞炎华等, 四维协变式与高能带电粒子的电磁场, 大学物理, 7(1990)8-10.

两个辅助公式

t' 是场点时空坐标 (t, \mathbf{x}) 的隐函数,

$$t' = t - \frac{r(t')}{c}, \quad r(t') = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_q(t')|.$$

欲求场强, 须先求 $\partial t' / \partial t$ 和 $\nabla t'$. 首先注意到:

$$\frac{\partial r(t')}{\partial t'} = -\frac{\mathbf{r}(t') \cdot \mathbf{v}(t')}{r(t')}$$

式中 $\mathbf{r}(t') = \mathbf{x} - \mathbf{x}_q(t')$, $\mathbf{v}(t') = \frac{d\mathbf{x}_q(t')}{dt'}$ 是粒子在 t' 时刻的速度. 所以,

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial r(t')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = 1 + \frac{\mathbf{v}(t') \cdot \mathbf{r}(t')}{cr(t')} \frac{\partial t'}{\partial t}$$

由此得:

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \left[1 - \frac{\mathbf{v}(t') \cdot \mathbf{r}(t')}{cr(t')} \right]^{-1}$$

为简化表达式, 我们引入 $r(t')$ 方向的单位矢量 $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}(t')/r(t')$ 和粒子的无量纲速度 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}(t')/c$. 因此,

$$\frac{\partial r(t')}{\partial t'} = -c\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_r$$

且:

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_r}$$

接着计算 t' 对场点空间坐标的梯度:

$$\begin{aligned}\nabla t' &= -\frac{1}{c} \nabla r(t') \\ &= -\frac{1}{c} \nabla r(t') \Big|_{t'=常数} - \frac{1}{c} \frac{\partial r(t')}{\partial t'} \nabla t' = -\frac{\mathbf{e}_r}{c} + (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_r) \nabla t'\end{aligned}$$

从而,

$$\nabla t' = -\frac{\mathbf{e}_r/c}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_r}$$

低速带电粒子的电磁场

现在计算运动带电粒子所激发的电磁场场强. 先考虑低速情形, $v(t') \ll c$. 此情形下前述辅助公式退化为:

$$\frac{\partial t'}{\partial t} \approx 1, \quad \nabla t' \approx -\mathbf{e}_r/c$$

而李纳-维谢尔势近似表为:

$$\phi(\mathbf{x}, t) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r(t')} [1 + \boldsymbol{\beta}(t') \cdot \mathbf{e}_r], \quad A(\mathbf{x}, t) \approx \frac{q\boldsymbol{\beta}(t')}{4\pi\epsilon_0 c r(t')}$$

式中忽略了 β^2 以及 $\boldsymbol{\beta}$ 的更高幂次项的贡献. 下同. 场点 (\mathbf{x}, t) 处电磁场的电场强度计算如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \partial_t A \\ &= -\nabla\phi \Big|_{t'=常数} - \frac{\partial\phi}{\partial t'} \nabla t' - \partial_t A \end{aligned}$$

不难证明：

$$\left. \nabla(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_r) \right|_{t'=\text{常数}} = \frac{[\boldsymbol{\beta} - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r]}{r}, \quad \dot{\mathbf{e}}_r = -\frac{c[\boldsymbol{\beta} - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r]}{r}$$

式中的 $\dot{\mathbf{e}}_r$ 代表 \mathbf{e}_r 对 t' 的微商。

于是，

$$\begin{aligned} \left. \nabla \phi \right|_{t'=\text{常数}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left. \nabla \left[\frac{1 + \boldsymbol{\beta}(t') \cdot \mathbf{e}_r}{r(t')} \right] \right|_{t'=\text{常数}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} [-\mathbf{e}_r + \boldsymbol{\beta} - 2(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t'} \nabla t' &= (-\mathbf{e}_r/c) \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \partial_{t'} \left[\frac{1 + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_r}{r(t')} \right] \\ &= -\frac{q\mathbf{e}_r}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{(1 + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_r)}{r^2} c(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_r) + \frac{(\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{e}_r) + (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\mathbf{e}}_r)}{r} \right] \\ &= -\frac{q\mathbf{e}_r(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{q\mathbf{e}_r(\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{e}_r)}{4\pi\epsilon_0 c r} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \partial_{t'} [\beta / r(t')] \partial_{t'} t' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{\dot{\beta}}{r} - \frac{\beta}{r^2} (-c\beta \cdot e_r) \right] = \frac{q \dot{\beta}}{4\pi\epsilon_0 c r}$$

把这几个式子代回到电场强度的计算公式, 即得:

$$E = \frac{q e_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{q[\beta - 3(\beta \cdot e_r)e_r]}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{q e_r \times (e_r \times \dot{\beta})}{4\pi\epsilon_0 c r}$$

接下来计算场点处的磁感应强度:

$$B = \nabla \times A = \nabla \times A \Big|_{t'=\text{常数}} + \nabla t' \times \frac{\partial A}{\partial t'}$$

其中第一项简化为：

$$\begin{aligned}\nabla \times A \Big|_{t'=\text{常数}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \nabla \times [\beta(t')/r(t')] \Big|_{t'=\text{常数}} \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \beta(t') \times \nabla [1/r(t')] \Big|_{t'=\text{常数}} = \frac{q(\beta \times e_r)}{4\pi\epsilon_0 c r^2}\end{aligned}$$

这正是运动电荷激发的静磁感应强度. 第二项简化为：

$$\nabla t' \times \frac{\partial A}{\partial t'} = -(e_r/c) \times \frac{q\dot{\beta}}{4\pi\epsilon_0 c r} = \frac{q(\dot{\beta} \times e_r)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}$$

综合起来, 即有：

$$B = \frac{q(\beta \times e_r)}{4\pi\epsilon_0 c r^2} + \frac{q(\dot{\beta} \times e_r)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}$$

顿悟：

运动带电粒子激发的电磁场的场强矢量均可以分为两部分：

- ① 一部分不依赖粒子的加速度，场强的大小与场点到源点的距离的平方成反比。这样的电磁场称为似稳场，它还可以进一步区分为与粒子速度无关的静电库仑场和粒子速度引起的修正。似稳场衰减的很快，它总是与粒子不可分割地联系在一起且仅存在于带电粒子附近，故亦称为粒子的自场。
- ② 另一部分场强依赖于粒子的加速度，场强的大小仅与场点、源点距离的一次方成反比。这样的场称为辐射场。

略去似稳场后，得低速运动带电粒子当其有加速度 $c\dot{\beta}$ 时激发的辐射场场强如下：

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c r} e_r \times (e_r \times \dot{\beta}), \quad B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} (\dot{\beta} \times e_r)$$

使用数学恒等式

$$e_r \times [e_r \times (e_r \times A)] = A \times e_r$$

又可把辐射场的磁感应强度表为：

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{e}_r}{c} \times \mathbf{E}$$

- 若将 $\mathbf{p} = q\mathbf{x}_q$ 看作带电粒子的电偶极矩, 则 $\ddot{\mathbf{p}} = qc \dot{\boldsymbol{\beta}}$. 如此, 低速带电粒子的辐射场场强公式与电偶极辐射公式重合.
低速带电粒子做加速运动时将激发电偶极辐射场.
- 辐射能流密度矢量是：

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{q^2 \dot{\boldsymbol{\beta}}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c r^2} \sin^2 \Theta \mathbf{e}_r$$

此处 Θ 为 \mathbf{r} 与 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ 之间的夹角、它描写了辐射能流的方向性. 显然, 在与粒子加速度垂直的方向上辐射场能流最强.

- 总辐射功率为：

$$P = \oint \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_r r^2 d\Omega = \frac{q^2 \dot{\boldsymbol{\beta}}^2}{6\pi \epsilon_0 c}$$

任意运动带电粒子的电磁场

现在考虑带电粒子以任意速度运动时所激发的电磁场强度分布. 作为 \mathbb{M}_4 中张量运算的练习, 我们从协变的李纳-维谢尔电磁势 4-矢量出发:

$$A_\mu = \left(-\frac{\phi}{c}, \mathbf{A} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{qV_\mu}{(RV)} \Big|_{\text{Ret}}$$

所以,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{\partial_\mu V_\nu}{(RV)} - \frac{V_\nu \partial_\mu (RV)}{(RV)^2} - \{\mu \leftrightarrow \nu\} \right] \Big|_{\text{Ret}} \end{aligned}$$

对应于推迟时空点粒子的固有时 τ , $R^\mu(\tau) = x^\mu - x_q^\mu(\tau)$ 为类光 4-矢:

$$\begin{aligned} R^\mu(\tau)R_\mu(\tau) = 0 &\rightsquigarrow 0 = R_\mu(\tau)\partial_\nu R^\mu(\tau) = R_\mu(\tau) \left[\delta_\nu^\mu - \frac{dx_q^\mu(\tau)}{dx^\nu} \right] \\ &= R_\nu(\tau) - R_\mu(\tau) \frac{dx_q^\mu(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{dx^\nu} \end{aligned}$$

亦即：

$$R_\nu(\tau) - R_\mu(\tau)V^\mu(\tau)\frac{d\tau}{dx^\nu} = 0$$

$$\rightsquigarrow \frac{d\tau}{dx^\mu} = \frac{R_\mu}{(RV)}$$

使用

$$\mathcal{A}^\mu = \frac{dV^\mu}{d\tau} = \gamma_v^4 \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{c}, \mathbf{w} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \right)$$

标记粒子的 4-加速度. 则在场强的前述表达式中：

$$\partial_\mu V_\nu = \frac{d\tau}{dx^\mu} \mathcal{A}_\nu = \frac{R_\mu \mathcal{A}_\nu}{(RV)}$$

$$\partial_\mu R_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} [x_\nu - x_\nu^q(\tau)] = \eta_{\mu\nu} - \frac{dx_\nu^q(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{dx^\mu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{R_\mu V_\nu}{(RV)}$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu (RV) &= R^\nu \partial_\mu V_\nu + V^\nu \partial_\mu R_\nu = R^\nu \left[\frac{R_\mu \mathcal{A}_\nu}{(RV)} \right] + V^\nu \left[\eta_{\mu\nu} - \frac{R_\mu V_\nu}{(RV)} \right] \\ &= V_\mu + \frac{R_\mu [(R\mathcal{A}) + c^2]}{(RV)} \end{aligned}$$

利用这几个辅助等式, 我们可以把运动点电荷激发的电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 表达为:

$$F_{\mu\nu} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c(RV)^3} \left[c^2 R_\mu V_\nu + (R\mathcal{A}) R_\mu V_\nu - (RV) R_\mu \mathcal{A}_\nu - (\mu \leftrightarrow \nu) \right] \Big|_{\text{Ret}}$$

在实验室参考系中,

$$V_\mu \Big|_{\text{Ret}} = \gamma_v(-c, v(t')) = \gamma_v c(-1, \beta)$$

$$R^\mu \Big|_{\text{Ret}} = x^\mu - x_q^\mu(t') = (r, r)$$

$$\mathcal{A}^\mu \Big|_{\text{Ret}} = \gamma_v^4 [\beta \cdot w, w + \beta \times (\beta \times w)]$$

$$(RV) \Big|_{\text{Ret}} = -\gamma_v c r (1 - e_r \cdot \beta)$$

$$(R\mathcal{A}) \Big|_{\text{Ret}} = -\gamma_v^4 r (1 - e_r \cdot \beta) \beta \cdot w + \gamma_v^2 r e_r \cdot w$$

式中 β 与 w 分别是推迟时空点处带电粒子相对于实验室系观测者的无量纲速度和物理加速度,

$$\beta = \beta(t') = v(t')/c = \frac{1}{c} \frac{dx_q(t')}{dt'},$$

$$w = w(t') = \frac{dv(t')}{dt'},$$

$$\gamma_v = \gamma_v(t') = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$r = r(t') = x - x_q(t'), \quad r = r(t') = c(t - t') = |x - x_q(t')|$$

我们也引入了 r 方向的单位矢量 $e_r = r/r$.

$F_{\mu\nu}$ 本质上就是电场强度 E 与磁感应强度 B . 前者的笛卡尔直角分量为:

$$\begin{aligned} E_i &= -cF_{0i} \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0(RV)^3} \left\{ [c^2 + (R\mathcal{A})](R_0V_i - R_iV_0) - (RV)(R_0\mathcal{A}_i - R_i\mathcal{A}_0) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\gamma_v q r c}{4\pi\epsilon_0(RV)^3} \left\{ (\mathbf{e}_r - \boldsymbol{\beta})_i \left[c^2 + (R\mathcal{A}) - \frac{1}{c}\gamma_v^3(RV)(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{w}) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\gamma_v}{c}(RV)w_i \right\} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0\gamma_v^2 c^2 (1 - \mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\beta})^3 r^2} \left[(c^2 + \gamma_v^2 r \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{w})(\mathbf{e}_r - \boldsymbol{\beta})_i \right. \\
&\quad \left. - \gamma_v^2 r (1 - \mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\beta}) w_i \right] \\
&= \frac{q(\mathbf{e}_r - \boldsymbol{\beta})_i}{4\pi\epsilon_0\gamma_v^2 (1 - \mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\beta})^3 r^2} \\
&\quad + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 (1 - \mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\beta})^3 r} \left[(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{w})(\mathbf{e}_r - \boldsymbol{\beta})_i - (1 - \mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\beta}) w_i \right] \\
&= \frac{q(\mathbf{e}_r - \boldsymbol{\beta})_i}{4\pi\epsilon_0\gamma_v^2 (1 - \mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\beta})^3 r^2} \\
&\quad + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 (1 - \mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\beta})^3 r} \left\{ \mathbf{e}_r \times [(\mathbf{e}_r - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{w}] \right\}_i
\end{aligned}$$

后者的笛卡尔分量则是：

$$\begin{aligned}
 B_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F^{jk} \\
 &= \frac{q}{8\pi\epsilon_0 c (RV)^3} \epsilon_{ijk} \left\{ [c^2 + (R\mathcal{A})] (R^j V^k - R^k V^j) \right. \\
 &\quad \left. - (RV) (R^j \mathcal{A}^k - R^k \mathcal{A}^j) \right\} \\
 &= \frac{q}{8\pi\epsilon_0 c (RV)^3} \epsilon_{ijk} \left\{ [c^2 + (R\mathcal{A})] \gamma_v c r \epsilon^{jkl} (\mathbf{e}_r \times \boldsymbol{\beta})_l \right. \\
 &\quad \left. - (RV) r \epsilon^{jkl} \left[\gamma_v^2 (\mathbf{e}_r \times \mathbf{w}) + \gamma_v^4 (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{w}) (\mathbf{e}_r \times \boldsymbol{\beta}) \right]_l \right\} \\
 &= \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 (RV)^3} \gamma_v \left\{ [c^2 + (R\mathcal{A})] (\mathbf{e}_r \times \boldsymbol{\beta})_i \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{c} (RV) \left[\gamma_v (\mathbf{e}_r \times \mathbf{w})_i + \gamma_v^3 (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{w}) (\mathbf{e}_r \times \boldsymbol{\beta})_i \right] \right\} \\
 &= \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 (RV)^3} \gamma_v \left\{ \left[c^2 + (R\mathcal{A}) - \frac{1}{c} \gamma_v^3 (RV) (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{w}) \right] (\mathbf{e}_r \times \boldsymbol{\beta})_i \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\gamma_v}{c} (RV) (\mathbf{e}_r \times \mathbf{w})_i \right\}
 \end{aligned}$$

比较知：

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{e}_r}{c} \times \mathbf{E}$$

小结：

带电粒子做任意的加速运动时，其产生的电磁场强度分布为：

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & \frac{q}{4\pi\epsilon_0\gamma_v^2(1 - \mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\beta})^3 r^2} (\mathbf{e}_r - \boldsymbol{\beta}) \\ & + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 (1 - \mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\beta})^3 r} \mathbf{e}_r \times [(\mathbf{e}_r - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{w}] \\ \mathbf{B} = & \frac{\mathbf{e}_r}{c} \times \mathbf{E} \end{aligned}$$

与粒子加速度 \mathbf{w} 无关的项描写似稳场、与 \mathbf{w} 有关的项描写辐射场。

- ① (Optional Ex.) 请针对运动电荷激发的电磁场强检验电高斯定律 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$.

经典电动力学逻辑体系的缺陷

前面在研究加速带电粒子所激发的辐射电磁场时, 我们事先假设粒子在已知的轨道 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_q(t')$ 上运动, 具有速度 $\mathbf{v}(t') = \dot{\mathbf{x}}_q(t')$ 和加速度 $\mathbf{w}(t') = \dot{\mathbf{v}}(t')$.

- ① 微观粒子都具有波动、粒子二重性, 它们不会沿一条确定的轨道运动⁷.
- ② 即使局限于经典物理学范畴, 这种研究方法也是近似的. 当粒子激发辐射场时, 一部分能量和动量必然被辐射场带走, 因而粒子的运动必然受到阻尼.
 - 带电粒子的运动不是完全由外场作用力决定的. 粒子所激发的辐射场对粒子本身也有作用力, 即辐射阻尼.
 - 严格的关于带电粒子在外电磁场中运动规律的研究方法需要计及辐射电磁场的反作用力.

⁷详见量子力学.

电磁质量

现在研究带电粒子的电磁场对粒子自身的反作用.

首先考虑自场对带电粒子的反作用. 自场的特点是它与粒子始终纠缠在一起从而无法独立存在. 所以, 测量一个带电粒子的能量时, 总是把自场的能量包括在内. 按照质能关系 $W = mc^2$, 与自场能量相当的质量称为带电粒子的电磁质量, 它是不能从粒子总质量中分离出来的.

下面估计一下电子电磁质量的大小. 假设电子是一个半径为 r_e 的金属球面. 若电子处于静止状态, 则其自场就是静电库仑场. 它分布于球外, 其总的静电能是:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d^3x = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{r_e}^{\infty} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 (4\pi r^2) dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r_e}$$

所以, 电子的电磁质量为:

$$m_{\text{e.m.}} = W/c^2 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 c^2 r_e}$$

提醒：

- ① 粒子质量除了电磁质量外还可以有其他来源. 以 m_{e0} 表示电子的非电磁起源的质量、而 m_e 为电子质量的测量值, 则有:

$$m_e = m_{e0} + m_{e.m.}$$

- ② 若电子质量有显著的部分来源于电磁质量, 作为数量级估算, 我们有:

$$m_e \approx \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_e} \rightsquigarrow r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}$$

r_e 称为电子的经典半径. 其量值约为: $r_e \approx 2.8 \times 10^{-15}$ 米.

- ③ 按照粒子物理实验的一般性结论, 在直到 $r \geq 10^{-18}$ 米的尺度范围内, 电子仍然表现得像是一个无几何结构的点粒子. 所以, 这里用经典模型设想的电子结构图像是绝对错误的. r_e 完全不能正确地反映电子的几何结构.
- ④ 电磁质量的概念是合理的.

辐射阻尼

现在研究加速运动带电粒子所激发的电磁场对粒子本身的反作用力.

以电子为例. 当电子受到外力 F_e 作用而获得加速度时, 它将激发出辐射场. 用 F_s 表示辐射场对电子的反作用力, 谓之**辐射阻尼**, 则电子的经典运动方程应为:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \right] = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_s$$

2: $F_s = ?$

我们从能量守恒的角度考察辐射阻尼力的数学形式.

为简单起见以下仅讨论低速情形. 当粒子有加速度 $w \sim \dot{\beta}$ 时, 它所产生的辐射场的总功率是:

$$P = \frac{q^2 \dot{\beta}^2}{6\pi\epsilon_0 c}$$

辐射场的存在使得粒子受到阻尼力 F_s , 从而损失能量. 阻尼力对电子作负功, 猜测其功率应为辐射场总功率的负值:

$$F_s \cdot v = -\frac{q^2 \dot{\beta}^2}{6\pi\epsilon_0 c}$$

- ① 严格应用能量守恒定律时, 应该把电子自场的能量变化计算在内. 但上式并未考虑自场能量的变化, 因此它不可能是对每一瞬时都成立的方程.
- ② 粒子的瞬时速度 β 与瞬时加速度 $\dot{\beta}$ 一般是不相关的物理量. 上式右端不能写为一个矢量与粒子速度 β 点乘的形式.
- ③ 若电子作准周期运动, 完成一个周期后, 其自场恢复到原始状态, 这时辐射场阻尼力所作的负功等于辐射场在此周期内带走的能量.

设电子周期性运动的周期为 T . 在一个周期内, 辐射阻尼力对电子所作的总功为:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_0+T} F_s \cdot v \, dt &= - \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{q^2 \dot{v}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} dt \\ &= - \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{v} \cdot v \Big|_{t_0}^{t_0+T} + \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{q^2 \ddot{v}}{6\pi\epsilon_0 c^3} \cdot v \, dt\end{aligned}$$

当电子运动一周后, 其速度和加速度均恢复到原值, 因此上式第一项为零. 所以, 对电子运动一个周期的平均效应而言, 可将辐射阻尼力取作:

$$F_s = \frac{q^2 \ddot{v}}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

- ① 作为辐射阻尼的一个应用, 下面研究原子谱线的频率分布宽度.

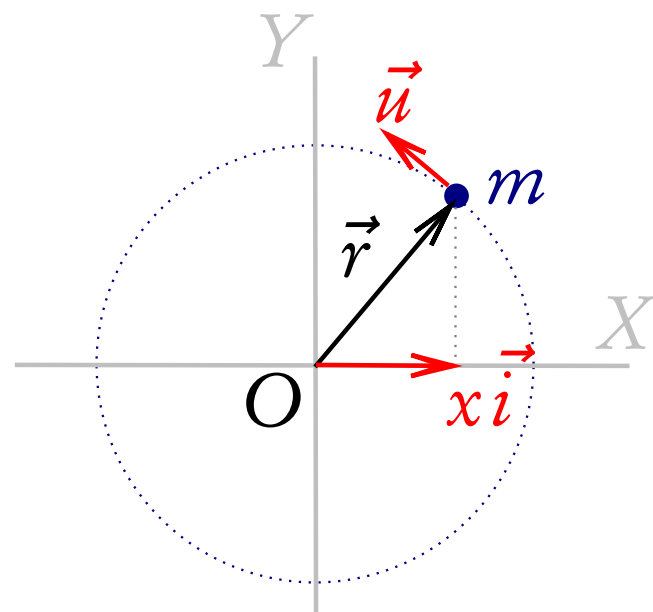
原子谱线的自然宽度

背景知识:

在原子内部,若电子在两能级之间跃迁就会产生一定频率的电磁辐射场、表现为一条原子谱线. 谱线不是严格单色的、其频率有一定的分布宽度.

原子谱线分受激辐射和自发辐射两种. 经典电动力学只能处理前者.

按照卢瑟福的经典原子模型,原子中电子绕核作圆周运动,其在 X 轴上的分运动可以看作一个简谐振动. 简谐振动所需的弹性恢复力由静电库仑力的 X -分量提供.



因此,我们采用经典简谐振子作为研究原子中电子加速运动激发辐射电磁场的模型,分析产生原子谱线宽度的原因.

设振子在 X 轴上运动, 弹性恢复力为 $F = -m\omega_0^2 x e_1$, ω_0 称为振子的固有频率. 振子由于激发辐射场而受到的来自辐射场的电磁阻尼力是:

$$F_s = \frac{e^2 \ddot{x}}{6\pi\epsilon_0 c^3} e_1$$

所以, 振子运动方程为:

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = \frac{e^2 \ddot{x}}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{2mr_e}{3c} \ddot{x} \quad \leftarrow r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$$

对原子产生的辐射场而言, 辐射阻尼力与原子核提供的弹性力相比可以作为微扰. 按照微扰论的思想, 我们首先把振子运动方程改写为:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{2r_e}{3c} \ddot{x} = \frac{\zeta}{\omega_0} \ddot{x}$$

式中

$$\zeta = \frac{2r_e\omega_0}{3c}$$

是一与辐射阻尼力相关的无量纲参数.

辐射阻尼力可以视为微扰意味着 $0 < \zeta \ll 1$. 因此允许我们把振子运动方程的解写为:

$$x(t) = x_0(t) + \zeta x_1(t) + \mathcal{O}(\zeta^2)$$

将此试探解带入到前页的运动方程, 精确到参数 ζ 的零次幂, 我们有:

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x_0 = X_0 e^{-i\omega_0 t}$$

在此近似解中, 积分常数 X_0 表示简谐振动的振幅, 可将其诠释为原子的半径.

上述近似解的一个推论是:

$$\ddot{x}_0 = -\omega_0^2 x_0 = i\omega_0^3 X_0 e^{-i\omega_0 t}$$

所以, $x(t)$ 的一级修正 $x_1(t)$ 服从方程:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \frac{\ddot{x}_0}{\omega_0} = i\omega_0^2 X_0 e^{-i\omega_0 t}$$

取此方程的试探解为 $x_1(t) = A(t)e^{-i\omega_0 t}$, 不难看出:

$$\ddot{A} - i\omega_0 \dot{A} = i\omega_0^2 X_0 \quad \rightsquigarrow A(t) = -X_0 \omega_0 t$$

所以,

$$x_1(t) = -X_0 \omega_0 t e^{-i\omega_0 t}$$

精确到 ζ 的一次幂, 振子运动方程的近似解为:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(t) + \zeta x_1(t) \\ &= x_0(t) (1 - \zeta \omega_0 t) \\ &= X_0 e^{-i\omega_0 t} \exp\left(-2r_e \omega_0^2 t / 3c\right) \\ &= X_0 e^{-\frac{\gamma}{2} t - i\omega_0 t} \quad \leftarrow \gamma = \frac{2r_e \omega_0^2}{3c} = \frac{e^2 \omega_0^2}{3\pi \epsilon_0 m c^3} \end{aligned}$$

这是一个振幅不断衰减的振子.

- 振子能量衰减到原值 $1/e$ 的时间称为振子的寿命. 对于一个经典谐振子而言, 其能量正比于振幅的平方. 故按照原子的经典振子模型, 原子的寿命是有限的, $\tau = 1/\gamma$.

- 由于振子振幅衰减, 它激发的辐射场场强也将不断衰减. 设振子在 $t = 0$ 时刻开始加速, 则其产生的辐射场电场强度为:

$$E(t) = \begin{cases} E_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t - i\omega_0 t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

这样的一系列电磁波不会是纯正弦波. 它可以理解为一系列不同频率正弦波的线性叠加. $E(t)$ 的傅里叶变换是:

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} E(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt E_0 \exp [i(\omega - \omega_0 + i\gamma/2)t] \\ &= \frac{E_0}{2\pi i} \frac{1}{\omega - \omega_0 + i\gamma/2} \end{aligned}$$

单位频率间隔中的辐射场能量 $W(\omega)$ 正比于 $|E(\omega)|^2$, 即:

$$W(\omega) \propto \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4}$$

所以,

- ① 若 $\omega = \omega_0$, $W(\omega)$ 取极大值.
- ② 若 $\omega = \omega_0 \pm \frac{\gamma}{2}$, 则 $W(\omega)$ 降为其极大值的一半.

因此, γ 又称为原子谱线的宽度.

评论:

- ① 用经典振子作为原子辐射模型时, 谱线宽度是一个常数 γ . 但实验上发现同一原子所发出的不同谱线其宽度变化很大. 所以, 原子辐射机制是完全不能用经典振子解释的.
- ② 实验发现: 原子处于基态时是稳定的, 不会产生辐射场. 这个结论是经典电动力学完全解释不了的. 按照经典电动力学, 根本就不会存在稳定的原子.
- ③ 辐射阻尼的概念以及寿命、谱线宽度之间的关系 $\tau = 1/\gamma$ 有普遍意义.

电磁波的散射

现在研究带电粒子与外来电磁波之间的相互作用.

一般图像:

若一定频率的外来电磁波投射到电子上,

- 电磁波的振荡电场将迫使电子以相同频率作强迫振动.
- 振动着的电子作加速运动、从而激发出辐射电磁场,把入射波的部分能量以辐射场的形式转移出去.

这种现象就称为电磁波的散射.

首先研究自由电子对电磁波的散射.

设入射电磁波的电场强度为 $E_0 e^{-i\omega t}$, 在其作用下电子作非相对论性的加速运动. 这样, 包括自作用力在内的电子运动方程是:

$$m\ddot{x} - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{x} = eE_0 e^{-i\omega t}$$

这个方程的稳态解是频率为 ω 的受迫振动: $x = x_0 e^{-i\omega t}$. 所以,

$$x_0 = -\frac{eE_0}{m\omega(\omega + i\gamma)}$$

式中的参数 γ 源自于辐射阻尼项的贡献：

$$\gamma = \frac{e^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 m c^3} = \frac{2\omega^2}{3c} \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} = \frac{2\omega^2}{3c} r_e = \frac{4\pi}{3} (r_e/\lambda)$$

这里的 r_e 表示电子的经典半径, λ 是入射电磁波的波长. 只要 $\lambda \gg r_e$ ⁸, 就可以忽略辐射阻尼项的贡献, 从而:

$$x_0 \approx -\frac{e}{m\omega^2} E_0, \quad \rightsquigarrow \quad x \approx -\frac{e}{m\omega^2} E_0 e^{-i\omega t}$$

非相对论带电粒子作加速运动时所激发的辐射场强度是:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \times \dot{\mathbf{u}}), \quad B = \frac{1}{c} \mathbf{e}_r \times E$$

⁸ 由于 $r_e \sim 10^{-15}$ 米, 而原子辐射常为可见光, $\lambda \sim 10^{-7}$ 米, 因此不等式 $\lambda \gg r_e$ 总是满足的.

把此公式用于描写外场中电子作受迫振动所激发的辐射场, 即所谓散射波, 则有:

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \times \ddot{\mathbf{x}}) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} [(\mathbf{e}_r \cdot \ddot{\mathbf{x}})\mathbf{e}_r - (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r)\ddot{\mathbf{x}}]$$

式中 \mathbf{e}_r 为散射波波矢方向的单位矢量. 所以,

$$\mathbf{E} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2 r} [(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}_0)\mathbf{e}_r - \mathbf{E}_0] e^{-i\omega t} = \frac{\textcolor{blue}{r}_e}{r} [(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}_0)\mathbf{e}_r - \mathbf{E}_0] \textcolor{red}{e^{-i\omega t}}$$

此处的 r_e 为电子的经典半径⁹.

散射波的平均能流密度矢量为:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}^* = \frac{1}{2\mu_0 c} \mathbf{E} \times (\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}^*) = \frac{\epsilon_0 c}{2} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{e}_r$$

倘若以 α 表示 \mathbf{e}_r 与入射波电场强度矢量 \mathbf{E}_0 之间的夹角, 则有:

⁹所以, 散射波与入射波具有相同的频率.

$$|E|^2 = \frac{r_e^2}{r^2} [E_0^2 - (e_r \cdot E_0)] = \frac{r_e^2}{r^2} E_0^2 \sin^2 \alpha$$

于是, 散射波的平均能流密度矢量可以重新表为:

$$\langle S \rangle = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \frac{r_e^2}{r^2} \sin^2 \alpha e_r = I_0 \frac{r_e^2}{r^2} \sin^2 \alpha e_r$$

式中的 I_0 定义为:

$$I_0 = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2}$$

它是入射电磁波的平均能流密度矢量的大小, 谓之入射波强度.

散射波总的平均功率定义为:

$$P = \oint \langle S \rangle \cdot e_r r^2 d\Omega = I_0 r_e^2 (2\pi) \int_0^\pi \sin^3 \alpha d\alpha = \frac{8\pi}{3} r_e^2 I_0$$

这个公式很有名, 称为 Thomson 散射公式.

自由电子对电磁波的散射截面

现在分析 Thomson 散射公式的物理意义：

$$P = \frac{8\pi}{3} r_e^2 I_0$$

- ① P 为散射波的总平均功率.
- ② I_0 为入射波的总平均功率, 即单位时间内垂直入射到单位截面上的电磁波能量.

所以, 被散射的能量相当于入射到面积为

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2$$

的截面上的能量. 这个面积称为自由电子对电磁波的散射截面, 简称 Thomson 截面.

带电粒子对电磁波散射截面的一般定义是：

$$\sigma = \frac{\text{散射波总平均功率}}{\text{入射波强度}}$$

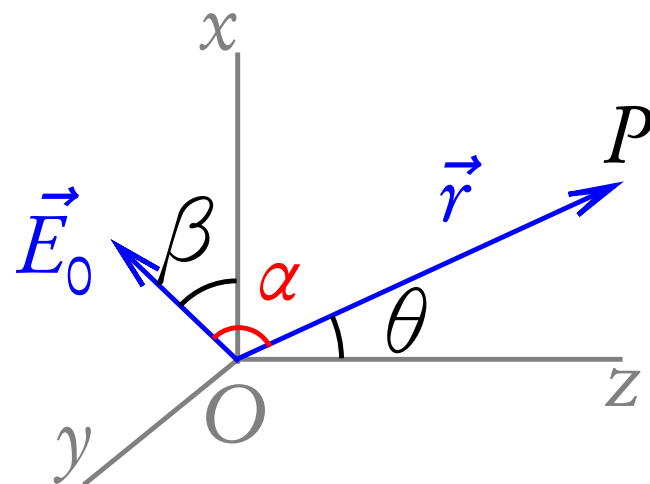
散射波的角分布

现在计算散射电磁波的角分布.

取坐标系如图示. 设入射波沿 z 轴方向传播, 其电场强度位于 xy 平面且与 x 轴夹角为 β ,

$$\vec{E}_0 = E_0(\cos \beta \vec{e}_1 + \sin \beta \vec{e}_2)$$

设场点 P 的位置矢径 \vec{r} 与 z 轴夹角为 θ , 其在 xy 平面上的投影与 x 轴夹角为 ϕ , 则有:



$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_3 + \sin \theta (\cos \phi \vec{e}_1 + \sin \phi \vec{e}_2)$$

如此,

$$\cos \alpha = \vec{E}_0 \cdot \vec{e}_r / E_0 = \sin \theta \cos(\phi - \beta)$$

入射波一般是非极化的. 因此, 需要把 $\langle S \rangle$ 对角 β 求平均才能得出合理的相对于非极化入射波的平均散射能流密度矢量.

回忆对于极化的入射波而言，

$$\langle S \rangle = I_0 \frac{r_e^2}{r^2} \sin^2 \alpha \mathbf{e}_r$$

其中只有因子 $\sin^2 \alpha$ 与入射波是否极化有关. 求此因子对 β 角的平均值, 即得:

$$\begin{aligned} \langle \sin^2 \alpha \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha \, d\beta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [1 - \sin^2 \theta \cos^2(\phi - \beta)] \, d\beta = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \end{aligned}$$

所以, 相对于非极化入射波的平均散射能流密度矢量是:

$$\langle S \rangle = I_0 \frac{r_e^2}{r^2} \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \mathbf{e}_r$$

立体角 $d\Omega$ 内的散射功率定义为:

$$\langle S \rangle \cdot \mathbf{e}_r = I_0 \frac{r_e^2}{r^2} \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta)$$

Thomson 微分散射截面

单位立体角内的散射功率与入射波强度的比值称为微分散射截面, 记作 $d\sigma/d\Omega$. 对于自由电子对非极化的入射电磁波而言, Thomson 微分散射截面为:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2}(1 + \cos^2 \theta)$$

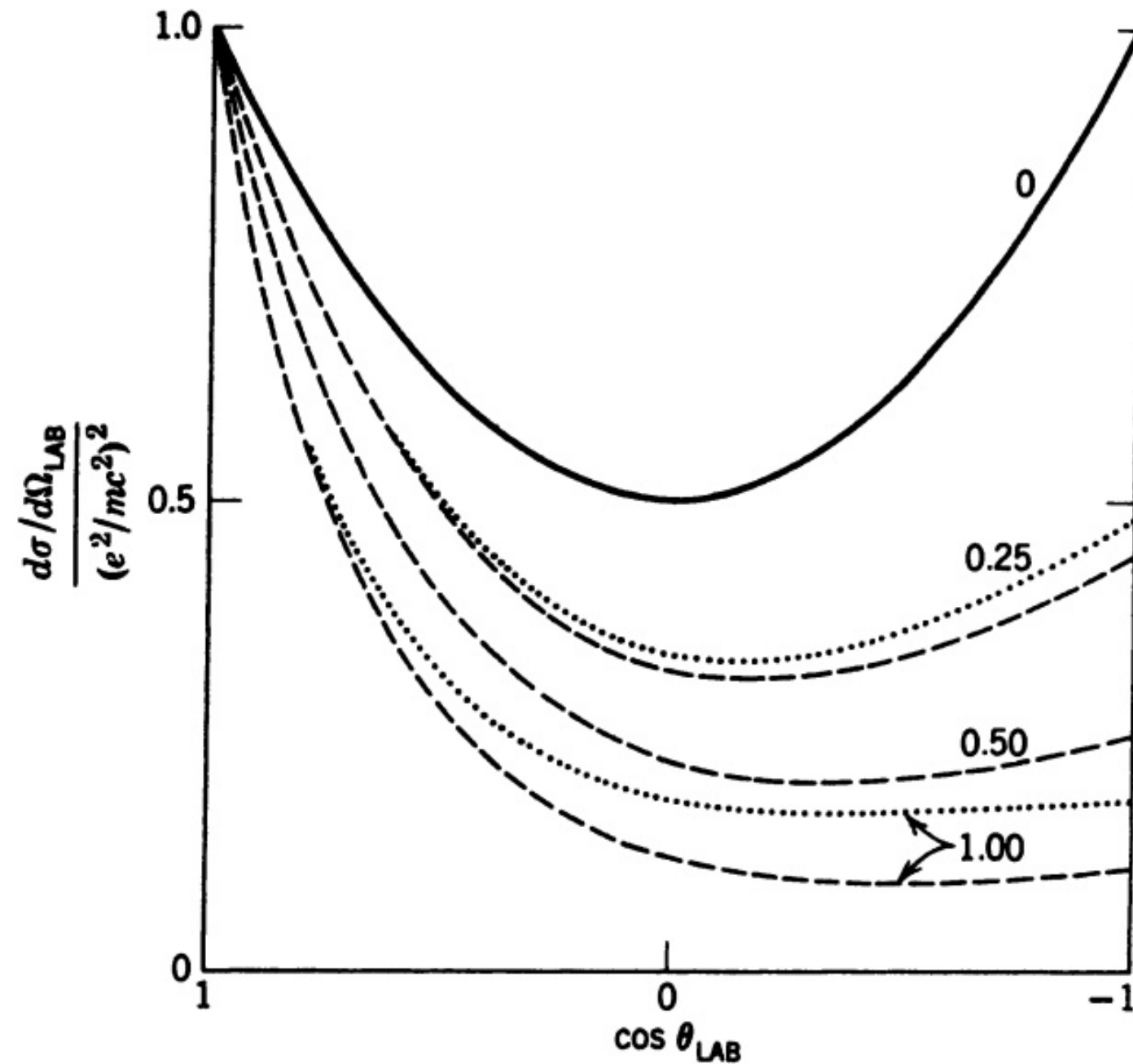
θ 称为散射角.

小结:

自由电子对自然光的 Thomson 散射具有如下特点,

- 散射波与入射波具有相同的频率.
- 散射波的强度与波的频率无关, 其角分布前后对称. 在平行于入射波的方向最强、在垂直于入射波的方向最弱.

自由电子对自然光散射的实验结果



评述:

- 若入射电磁波的频率很低, 实验结果与 Thomson 公式符合的很好.
- 对于高频入射波, Thomson 公式与实验完全不符. 这时, 电磁波的量子性质变得不可忽略, Thomson 公式须由 Compton 散射公式取而代之. 具体地讲, 散射波的频率与散射角有关:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{1 + \frac{\hbar\omega}{mc^2}(1 - \cos\theta)}$$

其强度分布不具有前后对称性:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2}(1 + \cos^2\theta)\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2$$

经典电动力学的局限性

以 Maxwell 方程组与 Lorentz 力公式为标志的经典电动力学在描写宏观电磁现象方面很成功.

但是, 它并不能成功地用于描写微观世界中的电磁现象. 究其原因:

- 它对带电粒子的描写只反映了其粒子性的一面.
- 它对电磁场的描写只反映了其波动性的一面.

事实上, 无论是带电粒子还是电磁场, 其行为都是既有波动性又有粒子性. 在微观领域, 这种波粒二象性变得很显著.

经典电动力学在微观层次是不适用的, 须由量子电动力学取代.