中 国 科 学 技 术 大 学
2014 - 2015学年第二学期期中考试试卷

考试科目： 线性代数与解析几何 得分：________________

所在院、系：______________ 姓名：__________ 学号：____________

装订线 答题时不要超过此线

一、 填空题:【共20分,每空4分】

1. a, b为$\mathbb{R}^3$中向量，$|a|=\sqrt{3}, |b|=1$，数量积$a \cdot b=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 则以$a+2b$和$a+b$为邻边的平行四边形的面积为$\underline{\frac{3}{2}}$.

2. 过点$(1,-1,1)$和$(2,0,-1)$，且与x轴平行的平面方程为$\underline{2y+z+1=0}$.

3. 令$A=S_{ij}D_i(\lambda)T_{ij}(\lambda)$其中$S_{ij}$, $D_i(\lambda)$, $T_{ij}(\lambda)$是三种初等方阵。则$A^{-1}=\underline{\ T_{ij}(-\lambda)D_i(\frac{1}{\lambda})S_{ij}\ }$.

4. 设A, B为三阶可逆方阵，$|A|=\lambda, |B|=\mu$，$M=\begin{pmatrix} O & A^* \\ 2B & O \end{pmatrix}$，其中$A^*$为$A$的伴随矩阵. 则$|M|=\underline{\quad -8\lambda^2\mu \quad}$.

5. 设A为n阶方阵，$|A|=\lambda$，A的每行元素之和为$\mu\neq 0$，A_{ij}为a_{ij}的代数余子式. 则$A_{11}+A_{21}+\cdots+A_{n1}=\underline{\frac{\lambda}{\mu}}$

二、 【20分】判断题：对的请简单说明理由，错的请举出反例.

1. 三个向量a, b, c共面，则a能写成b, c的线性组合.

错误，例如取某坐标系后三个向量的坐标分别为$a=(0,0,0), b=(1,0,0), c=(0,1,0)$,则$a, b, c$共面，但$a$不能写成$b, c$的线性组合.

2. 若线性方程组变元的个数多于方程的个数，则方程组一定有无穷组解.

错误，举一矛盾方程组为例即可.

3. 两个n阶上三角方阵的乘积仍为上三角阵.

正确. 设$A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$为n阶上三角阵，则当$i>j$时，$a_{ij}=0$和$b_{ij}=0$成立. 令$C=A\cdot B=(c_{ij})$，则$c_{ij}=\sum\limits_{1\le k\le n}a_{ik}b_{kj}$. 注意到，当$i>j$时，和式中的每一项$a_{ik}b_{kj}$均为0，故$c_{ij}=0(\forall i>j)$. 故$C$为上三角阵.

4. 初等变换不会改变矩阵的秩.

正确. A经初等变换后的矩阵与A相抵，相抵的矩阵有相同的秩.

三、【8分】直线$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$的系数满足什么条件才能使直线在坐标平面$Oxz$内?

解：直线落在平面内$\Longleftrightarrow$直线与平面有交，且其方向与平面法向垂直.$\Longleftrightarrow$ 方程组$\begin{cases}A_1x+C_1z+D_1=0\\A_2x+C_2z+D_2=0\end{cases}$有解，且$(A_1,B_1,C_1)\times(A_2,B_2,C_2)\cdot(0,1,0)=0$

$$\Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}(\neq\frac{B_1}{B_2})$$

四、【8分】方阵A交换第k,l行得到B，则伴随矩阵B^*可由A^*经过怎样的初等变换得到？

解：由已知有$B=S_{kl}A$. $B^*=A^*S_{kl}^*$. 又$S_{kl}S_{kl}^*=-I\Longrightarrow S_{kl}^*=-S_{kl}$. 所以$B^*=-A^*S_{kl}$. 故$B^*$可由$A^*$先交换第$k$, l列，然后再把所得矩阵的每个列(行)乘以-1得到.

五、【12分】λ为何值时，方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$无解，有唯一解，有无穷多解？有解时，解出这个方程组。

解

$$M=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3\end{pmatrix}.$$

当$\lambda=1$时, $\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. 此时方程组有无穷多解，通解为：

$$\{(1,0,0)+t_1(-1,1,0)+t_2(-1,0,1)|t_1,\,t_2\in F\}.$$

当$\lambda\neq 1$时，可继续行变换消元得

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & 1 & -1 & -\lambda\\ 0 & 0 & \lambda+2 & \lambda^2+2\lambda+1\end{pmatrix}.$$

故$\lambda=-2$时，无解；$\lambda\neq-2$时，有唯一解.

综上，$\lambda=-2$时，无解；$\lambda\neq-2,1$时，有唯一解$(-\frac{\lambda+1}{\lambda+2},\frac{1}{\lambda+2},\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2})$；$\lambda=1$时有无穷多解，通解为：$\{(1,0,0)+t_1(-1,1,0)+t_2(-1,0,1)|t_1,\,t_2\in F\}$..

六、【12分】设A是元素全为1的n阶方阵，$B=diag(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，其中$a_1a_2\cdots a_n\neq 0$，求$A+B$的行列式与逆.

解$(A+B)^{-1}=-\frac{1}{s}\begin{pmatrix}\frac{1-a_1s}{a_1^2} & \frac{1}{a_1a_2} & \cdots & \frac{1}{a_1a_n}\\ \frac{1}{a_2a_1} & \frac{1-a_2s}{a_2^2} & \cdots & \frac{1}{a_2a_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{1}{a_na_1} & \frac{1}{a_na_2} & \cdots & \frac{1-a_ns}{a_n^2}\end{pmatrix}$, 其中$s=1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$.

$$\det(A+B)=(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_n\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right).$$

七、【10分】A, B分别为$m\times n$和$n\times p$阶矩阵且$A\cdot B = O$. 求证：rank(A)+rank$(B)\leq n$.

证: 因为

$$\begin{pmatrix} I & A \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} AB & O \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & O \\ -C & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & -I \\ I & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ I & B \end{pmatrix},$$

所以$\mathrm{rank}(AB)+n = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} AB & O \\ O & I \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ I & B \end{pmatrix} \geq \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \mathrm{rank}(A)+$ rank(B).因为$AB = O$,所以rank(A)+rank$(B)\leq n$.

八、【10分】$A \in F^{m\times n}$. 则$rank(A) = r \iff$ 存在列满秩的矩阵$B \in F^{m\times r}$和行满秩的矩阵$C \in F^{r\times n}$使得$A = B\cdot C$(此事实称为矩阵的满秩分解定理).

证 必要性: 设rank$(A) = r$.则存在m阶与n阶可逆方阵P和Q, 使得

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q.$$

记

$$B = P\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}_{m\times r}, \quad C = (I_r, O)_{r\times n}Q.$$

则rank(B) = rank$(C) = r$,即B与C分别是列满秩与行满秩的,并且$A = BC$.

充分性：设$A = BC$,其中B与C分别是列满秩与行满秩的.由书上例题知

$$B = P\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}_{m\times r}, \quad C^T = Q^T\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}_{n\times r},$$

其中P与Q^T分别是m阶与n阶可逆方阵.于是

$$A = P\begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}_{m\times r}(I_r, O)_{r\times n}Q = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q.$$