



数学分析习题课讲义上册解析

第一版 (不定期更新)

作者: Xu Shun

组织: 公众号: 顺数人

时间: July 30, 2020



目录

第一版序言	1
1 引论	2
1.1 关于习题课教案的组织	2
1.2 书中常用记号	2
1.3 几个常用的初等不等式	2
1.4 逻辑符号与对偶法则	5
2 数列极限	7
2.1 数列极限的基本概念	7
2.2 收敛数列的基本性质	8
2.3 单调数列	10
2.4 Cauchy 命题与 Stolz 定理	12
2.5 自然对数的底 e 和 Euler 常数 γ	15
2.6 由迭代生成的数列	18
2.7 对于教学的建议	20
3 实数系的基础定理	37
3.1 确界的概念和确界的存在定理	37
3.2 闭区间套定理	38
3.3 凝聚定理	39
3.4 Cauchy 收敛准则	40
3.5 覆盖定理	41
3.6 数列的上极限和下极限	42
3.7 对于教学的建议	45
4 函数极限	54
4.1 函数极限的定义	54
4.2 函数极限的基本性质	57
4.3 两个重要极限	61
4.4 无穷小量、有界量、无穷大量和阶的比较	63
4.5 对于教学的建议	65
5 连续函数	73
5.1 连续性概念	73
5.2 零点存在定理与介值定理	76
5.3 有界性定理与最值定理	78

5.4	一致连续性与 Cantor 定理	79
5.5	单调函数	81
5.6	周期 3 蕴涵混沌	82
5.7	对于教学的建议	82
6	导数与微分	96
6.1	导数及计算	96
6.2	高阶导数及其他求导法则	98
6.3	一阶微分及其形式不变性	102
6.4	对于教学的建议	103
7	微积分基本定理	117
7.1	微分学中值定理	117
7.2	Taylor 定理	120
7.3	对于教学的建议	124
8	微分学的应用	136
8.1	函数极限的计算	136
8.2	函数的单调性	140
8.3	函数的极值与最值	142
8.4	函数的凸性	144
8.5	不等式	149
8.6	函数作图	155
8.7	方程求根与近似计算	155
8.8	对于教学的建议	157
9	不定积分	174
9.1	不定积分的计算方法	174
9.2	几类可积函数	176
9.3	对于教学的建议	179
10	定积分	182
10.1	定积分概念与可积条件	182
10.2	定积分的性质	183
10.3	变限积分与微积分基本定理	186
10.4	定积分的计算	188
10.5	对于教学的建议	193
11	积分学的应用	209
11.1	积分学在几何计算中的应用	209

11.2 不等式	212
11.3 积分估计与近似计算	215
11.4 积分学在分析中的其他应用	222
11.5 对于教学的建议	227
12 广义积分的定义	239
12.1 广义积分的定义	239
12.2 广义积分的敛散性判别法	240
12.3 广义积分的计算	245
12.4 广义积分的特殊性质	250
12.5 对于教学的建议	251

第一版序言

本答案是由公众号【顺数人】的创建者徐大顺及其他的几位学弟学妹，还有两位热心网友的帮助下共同编写而成的。其中这几位学弟学妹贡献本答案的绝大部分手写版答案，编辑工作由徐大顺完成。部分答案来源于网上公开的资料，在此对这些公开资料的作者表示感谢，是他们的贡献让本答案制作时间缩短。即便如此还有十几道题目没有做出来。这时候热心网友的力量体现出来了，他们帮助我解决这些题目。在此也表达对他们们的感谢。

总体来说，本答案从六月初开始编写，到八月一号正式发布第一版，用时大概两个月的时间。由于时间紧任务重，所以答案中肯定会有不少的笔误甚至是错误，也请大家谅解。由于本答案是免费发布，所以不存在专门的人员去做勘误，只能做到不定期更新版本，我们的反馈 qq 群为：630057150，此为付费群，筛去一些无关人员。

另外我们也接受捐助，仅支持微信支付和支付宝支付：



最后请大家关注我们的公众号【顺数人】，也希望每一位数学人都能学有所成，我们会！

二零二零年八月一号

——大顺致上

第1章 引论

1.1 关于习题课教案的组织

1.2 书中常用记号

1.3 几个常用的初等不等式

1.3.1 练习题

- (1) 当 $h = -1$ 时显然成立. 当 $-2 \leq h < -1$ 时, 令 $f(h) = (1+h)^n - nh - 1$ 则 $f'(h) = n[(1+h)^n - 1] \leq 0$, 故 $f(h)$ 在 $[-2, -1)$ 上递减, $f(h) > f(-1) = n - 1 \geq 0$
(2) 同 (1). 推广形式为 $(1+h)^n \geq C_n^k h^k (h \geq 0, 1 \leq k \leq n)$
(3) 当 $n = 1$ 时, 显然成立. 假设当 $n = k$ 时不等式成立, 则 $n = k + 1$ 时, 因为 a_i 同号, 若 a_i 均正, 那么

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{k+1} (1+a_i) &= \prod_{i=1}^k (1+a_i) + a_{k+1} \prod_{i=1}^k (1+a_i) \\ &\geq 1 + \sum_{i=1}^k a_i + a_{k+1} \prod_{i=1}^k (1+a_i) \\ &\geq 1 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i \end{aligned}$$

同理可证其他情形。

- (1) 设 $a_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, 则

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > n$$

故

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} > n!$$

- (2) (法一) 同 (1)

(法二) 由 $(n!)^2 = (n \cdot 1)((n-1) \cdot 2) \cdots (1 \cdot n) \leq \left(\frac{(n \cdot 1)((n-1) \cdot 2) \cdots (1 \cdot n)}{n}\right)^n$ 又

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n k(n+1-k) \\ &= n \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

故 $(n!)^2 \leq \left(\frac{n(n+1)(n+2)}{6n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{\sqrt{6}}\right)^n$

(3) 第二个更优, 因为 n 较大时, $\left(\frac{n+2}{\sqrt{6}}\right)^n$ 更靠近 $n!$

(4) 由均值不等式知, $\frac{\sum_{k=1}^n k^r}{n} \geq \sqrt[r]{(n!)^r}$ 整理即得.

3. 由平均值不等式知

$$\frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}$$

整理即得.

4. 证明由均值不等式

$$\frac{ab+bc+ca}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

即

$$\sqrt[3]{abc} \leq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$$

对于

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

两边平方并化简, 得

$$ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$$

此即排序不等式, 即证. n 个非负数的情况证明完全类似.

5. (1) 由

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

得

$$|a| = |a-b+b| \leq |a-b|+|b|$$

即

$$|a-b| \geq |a|-|b|$$

同理可证另一个式子。

(2) 由三点不等式

$$|a_1| - \sum_{k=2}^n |a_k| \leq |a_1| - \left| \sum_{k=2}^n a_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$$

左边不可为

$$\left| |a_1| - \sum_{k=2}^n |a_k| \right|$$

例如取 $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = -2, n = 3$

(3) 当 $|a+b| = 0$ 时, 显然成立. 当 $|a+b| \neq 0$ 时 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} = \frac{1}{1+\frac{1}{|a+b|}} \leq$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{|a+b|}} = \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

$$(4) |(a+b)^n - a^n| = |C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n| \leq |C_n^1 a^{n-1} b| + \cdots + |C_n^{n-1} a b^{n-1}| + |b^n| = (|a| + |b|)^n - |a|^n$$

6. (1) $n=1$ 时, 显然成立. 假设当 $n=k$ 时不等式成立, 则 $n=k+1$ 时

$$\begin{aligned} (a_1^2 + \cdots + a_{k+1}^2)(b_1^2 + \cdots + b_{k+1}^2) &\geq (a_1^2 + \cdots + a_k^2)(b_1^2 + \cdots + b_k^2) + a_{k+1}^2(b_1^2 + \cdots + b_k^2) \\ &+ b_{k+1}^2(a_1^2 + \cdots + a_k^2) + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 \geq (a_1 b_1 + \cdots + a_k b_k)^2 + a_{k+1}^2(b_1^2 + \cdots + b_k^2) \\ &+ b_{k+1}^2(a_1^2 + \cdots + a_k^2) + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 \end{aligned}$$

欲证

$$\begin{aligned} (a_1^2 + \cdots + a_{k+1}^2)(b_1^2 + \cdots + b_{k+1}^2) \\ \geq (a_1 b_1 + \cdots + a_{k+1} b_{k+1})^2 \end{aligned}$$

另需证

$$(a_1 b_1 + \cdots + a_k b_k)^2 + a_{k+1}^2(b_1^2 + \cdots + b_k^2) + b_{k+1}^2(a_1^2 + \cdots + a_k^2) + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 \geq (a_1 b_1 + \cdots + a_{k+1} b_{k+1})^2$$

即

$$(a_1 b_{k+1} - a_{k+1} b_1)^2 + \cdots + (a_k b_{k+1} - a_{k+1} b_k)^2 \geq 0$$

显然成立.

(2) 利用完全平方非负性即得.

(3) $(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) = 0$ 时, 显然成立.

$(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) \neq 0$ 时, 由提示知

$$\frac{|a_k|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}} \frac{|b_k|}{\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}} \leq \frac{\left(\frac{a_k}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}\right)^2 + \left(\frac{b_k}{\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}}\right)^2}{2}$$

令 $k=1, 2, \dots, n$, 将所有的式子加起来凑虎两边平方并化简即得.

(4) 按照提示, 化简即得, 注意平方差公式的运用.

7. 证明原不等式等价于

$$\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{i=1}^n (1-x_i)} \leq \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^n}{[\sum_{i=1}^n (1-x_i)]^n}$$

$n=2$ 时,

$$\begin{aligned} &\frac{(x_1 + x_2)^2}{(1-x_1 + 1-x_2)^2} - \frac{x_1 x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} \\ &= \frac{(x_1 - x_2)^2 (1-x_1-x_2)}{(1-x_1 + 1-x_2)^2 (1-x_1)(1-x_2)} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$n = 2^2$ 时

$$\begin{aligned} & \frac{x_1 x_2 x_3 x_4}{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)} \\ & \leq \left(\frac{x_1+x_2}{2-x_1-x_2} \right)^2 \left(\frac{x_3+x_4}{2-x_3-x_4} \right)^2 \\ & = \left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}}{1-\frac{x_1+x_2}{2}} \right)^2 \left(\frac{\frac{x_3+x_4}{2}}{1-\frac{x_3+x_4}{2}} \right)^2 \\ & \leq \left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_3+x_4}{2}}{1-\frac{x_1+x_2}{2} + 1-\frac{x_3+x_4}{2}} \right)^4 \\ & = \left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{1-x_1+1-x_2+1-x_3+1-x_4} \right)^4 \end{aligned}$$

类似地, $n = 2^k$ ($\forall k \in \mathbb{N}_+$) 时, 不等式成立. 此即向前部分. 由原书上平均值不等式“向后”证明部分, 我们可以知道

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n-1} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} 1 + \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right)$$

记 $M = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i}{n-1}$. 当不等式对于某个 $n > 2$ 成立时, 下证对于 $n-1$ 成立

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{(1-x_1) + \cdots + (1-x_n)} \right)^n \\ & = \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n + M}{(1-x_1) + \cdots + (1-x_n) + (1-M)} \right)^n \\ & \geq \frac{x_1 \cdots x_n}{(1-x_1) \cdots (1-x_n) 1-M} \end{aligned}$$

注意到,

$$\frac{M}{1-M} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{(1-x_1) + \cdots + (1-x_n)}$$

即证, 对于 $n-1$ 的情况不等式成立. 合并以上向前向后两部分的证明, 可见不等式对于每个正整数 n 成立.

8. 由柯西不等式

$$(a^2 + c^2 + g^2 + t^2)(1+1+1+1) \geq (a+c+g+t)^2$$

即

$$a^2 + c^2 + g^2 + t^2 \geq \frac{1}{4}$$

其中等号成立的充分必要条件是 $a = c = g = t = \frac{1}{4}$

1.4 逻辑符号与对偶法则

1.4.1 练习题

- (1) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists a_0 \in A, \text{s.t. } a_0 > M$
- (2) $\exists a_0 \in A, \text{s.t. } a_0 < b$
- (3) $\exists a < c < d < b, \text{s.t. } f(c) > f(d)$

- (4) $\exists a < c < d < e < b$, s.t. $f(c) < f(d), f(e) < f(d)$ 或 $f(c) > f(d), f(e) > f(d)$
- (5) $\exists a \in A$ 但 $a \notin B$
- (6) $A - B = \emptyset$
- (7) $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}_+, \exists n_0 > N$, s.t. $|x_n| \geq \varepsilon_0$
- (8) $\exists M_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}_+, \exists n_0 > N$, s.t. $x_n \leq M_0$

第2章 数列极限

2.1 数列极限的基本概念

2.1.1 练习题

- (1) 由 $\left| \frac{3n^2}{n^2-4} - 3 \right| = \frac{12}{|n^2-4|}$ 可得
(2) 由 $\left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$ 可得
(3) 由 $1 \leq (1+n)^{\frac{1}{n}} \leq 2^{\frac{1}{n}} n^{\frac{1}{n}}$ 可得
(4) $\exists k > a$, 则 $\frac{a^n}{n!} = \frac{a^k}{k!} \left(\frac{a}{k}\right)^{n-k}$, 可得。
2. 若 $a = 0, \forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N, s.t. a_n < \varepsilon^2$, 可得 $\sqrt{a_n} < \varepsilon$; 若 $a \neq 0$, 由 $\sqrt{a_n} - \sqrt{a} = \frac{a_n - a}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}$ 可得。
3. $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$, 故由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$. 反之不成立, 考虑 $a_n = (-1)^n$.
4. (1) 只需证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^m = a^m$ 即可。
(2) 由 $b^{a_n} - b^a = b^a (b^{a_n - a} - 1)$ 可得只需证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ 的情况即证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b^{a_n} = 1$,
当 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ 时
当 $b > 1$ 时 $\forall \varepsilon > 0, \exists n > N$ 时 $\log_b(1 - \varepsilon) < a_n < \log_b(1 + \varepsilon)$,
$$\Rightarrow 1 - \varepsilon < b^{a_n} < 1 + \varepsilon \Rightarrow |b^{a_n} - 1| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} b^{a_n} = 1$$

当 $b = 1$ 时显然
当 $b < 1$ 时由 $b^{a_n} = \frac{1}{(\frac{1}{b})^{a_n}}$ 得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b^{a_n} = 1$
(3) 由 $\log_b a_n - \log_b a = \log_b \frac{a_n}{a}$ 得, 只需证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_b a_n = 0$ 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ 时,
当 $b > 1$ 时, $\forall \varepsilon > 0 \exists N, n > N$ 时, 有 $b^{-\varepsilon} < a_n < b^\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \log_b a_n < \varepsilon \Rightarrow$
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_b a_n = 0$$
 当 $0 < b < 1$ 时 $\log_b a_n = -\log_{\frac{1}{b}} a_n$ 故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_b a_n = 0$
(4) $a_n^b = e^{b \log a_n}$, 由 (2)(3) 问可得。
(5) 作和差化积

$$\sin a_n - \sin a = 2 \sin \left(\frac{a_n - a}{2} \right) \cos \left(\frac{a_n + a}{2} \right)$$

便有

$$\begin{aligned} |\sin a_n - \sin a| &\leq 2 \left| \sin \left(\frac{a_n - a}{2} \right) \right| \\ &\leq 2 \left| \left(\frac{a_n - a}{2} \right) \right| = |a_n - a| \end{aligned}$$

即得结论。

- $a^\varepsilon > 1$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 所以当 n 充分大时 $\sqrt[n]{n} < a^\varepsilon$, 取对数得 $\frac{\log_a n}{n} < \varepsilon$

2.2 收敛数列的基本性质

2.2.1 练习题

1. 必要性显然, 下证充分性.

设 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = A$. 则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists K_1, K_2 \in \mathbb{N}_+, \forall k > K_1, \forall k > K_2$ 成立

$$|a_{2k} - A| < \varepsilon, |a_{2k-1} - A| < \varepsilon$$

令 $N = \max\{2K_1, 2K_2 - 1\}$, 则对于 $\forall n > N$ 和上述 ε , 成立

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$

2. (1) 设 $M = \max\{a_1, \dots, a_n\}$ 则 $\sqrt[n]{M^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + \dots + a_p^n} \leq \sqrt[n]{pM^n}$ 只需注意

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p} = 1$$

$$(2) \frac{2n}{\sqrt{(n+1)^2}} < x_n < \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$(3) 1 < \left(1 + \dots + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} < n^{\frac{1}{n}}$$

(4) 由正数列 $\{a_n\}$ 收敛于正值知, 存在正数 m, M , 使得 $m < a_n < M$. 故 $\sqrt[n]{m} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{M}$

3. (1)

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{2^n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{2^n})}{1-x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \\ &= \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 \cdots (n+1)(n-1)}{2^2 \cdot 3^2 \cdots n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{2} (n-1)!}{(n!)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{1+2}\right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{1+2+\cdots+n}\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{1+\cdots+n}\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \frac{(k+2)(k-1)}{k(k+1)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+2)!}{6}(n-1)!}{n! \frac{(n+1)!}{2}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{n}\right) \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(4) 见 (5)

$$(5) \text{ 只需注意 } \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+\nu)} = \frac{1}{\nu} \left[\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+\nu-1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+\nu)} \right]$$

4.

$$\begin{aligned}
S_n - aS_n &= a + 3a^2 + \cdots + (2n-1)a^n - (a^2 + 3a^3 + \cdots + (2n-3)a^n + \\
(2n-1)a^{n+1}) &= a + 2(a^2 + \cdots + a^n) - (n-1)a^{n+1} \\
&= 2(a + a^2 + \cdots + a^n) - a - (2n-1)a^{n+1} \\
&= \frac{2a(1-a^n)}{1-a} - a - (2n-1)a^{n+1} \\
\Rightarrow (1-a) \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n &= \frac{2a}{1-a} - a = \frac{a(1+a)}{1-a} \\
\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n &= \frac{a(1+a)}{(1-a)^2}
\end{aligned}$$

5. 依题意, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A > 0$ 取 $\varepsilon = \frac{A}{2}$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N$ 成立 $|x_n - A| < \frac{A}{2}$, 即 $x_n > \frac{A}{2}$. 令 $m = \min \left\{ x_1, \cdots, x_N, \frac{A}{2} \right\} > 0$, 则 m 即为数列的正下界不一定有最小数的一个例子: $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ 6. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ 知, 对 $M = a_1 + 1, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N$, 成立 $a_n > M > a_1$, 则 a_1, \cdots, a_N 中最小者即为 $\{a_n\}$ 的最小数.7. 不妨设无界数列 $\{a_n\}$ 无上界, 即 $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_k \in \mathbb{N}_+$, 使得 $a_{n_k} > M$ 取 $M = 1$, 则 $\exists n_1 \in \mathbb{N}_+$, 使得 $a_{n_1} > 1$ 取 $M = \max\{a_{n_1}, 2\}$, 则 $\exists n_2 \in \mathbb{N}_+$ 且 $n_2 > n_1$, 使得 $a_{n_2} > a_{n_1}$ 且 $a_{n_2} > 2$ 以此类推, 可以构造数列 $\{a_{n_k}\}$ 使 $a_{n_k} > k$, 即 a_{n_k} 为无穷大量.8. 由于 $\{\sin 2n\}$ 极限不存在, 又 $\sin 2n = \frac{2 \sin n \cos n}{\sin^2 n + \cos^2 n}$

$$\Rightarrow \sin 2n = \frac{2 \tan n}{1 + \tan^2 n}$$

若在 $\{\tan n\}$ 极限存在 $\Rightarrow \{\sin 2n\}$ 极限存在, 矛盾故 $\{\tan n\}$ 极限不存在

9. $p < 1$ 时, $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$, 故

$$S_n > 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

我们知道调和数列是发散的, 所以 S_n 也是发散的。

2.3 单调数列

2.3.1 练习题

1. 不妨设 $x_1 \geq 0$ (1) 若 $\{x_n\}$ 单调递增或 $\{x_n\}$ 单调递减且 x_n 非负, 则 $\{x_n\}$ 从第一项开始单调.

(2) 若 $\{x_n\}$ 单调递减且存在某一项 $x_N < 0$, 则 $\{|x_n|\}$ 从 $|x_N|$ 开始单调反之不成立.

反例:

$$x_n = \begin{cases} n, n \text{ 为奇数} \\ -n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

2. 假设 $\{a_n\}$ 无上界. 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$$

这与 $\{b_n\}$ 单调减少矛盾. 同理可证 $\{b_n\}$ 收敛又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

3. 只证前半句, 后半句同理. 设数列为 $\{x_n\}$, 其极限为 A . 反设存在某一项 $x_{n_0} > A$, 因为 $\{x_n\}$ 单调增加, 所以对 $\forall n \geq n_0$ 有 $x_n \geq A$, 令 $\varepsilon_0 = x_{n_0} - A$, 则对任意给定的正整数 N , 存在 $n > \max\{N, n_0\}$, 使得

$$|x_n - A| \geq \varepsilon_0$$

这与 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 矛盾.

4. 依题意得

$$x_n = \frac{n+1}{2n+1} x_{n-1}$$

故 n 充分大时 $x_n < x_{n-1}$, 即 $\{x_n\}$ 递减. 又 $x_n > 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 设为 A 对

$x_n = \frac{n+1}{2n+1} x_{n-1}$ 两边取极限, 得 $A = 0$, 即 $\{x_n\}$ 极限为 0.

5. 同 4

6. 显然 $\{S_n\}$ 单调递增. 记 $\frac{1}{2^{p-1}} = r$, 则 $0 < r < 1$

由

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} &< \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}} = r \\ \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} &< \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} = r^2 \\ &\dots \\ \frac{1}{2^{kp}} + \frac{1}{(2^k+1)^p} + \dots + \frac{1}{(2^{k-1}-1)^p} &< \frac{2^k}{2^{kp}} = r^k \end{aligned}$$

可知

$$S_n \leq S_{2^{n-1}} < 1 + r + \dots + r^{n-1} < \frac{1}{1-r}$$

故由单调有界准则知 $\{S_n\}$ 收敛.

7. 由

$$x_n = \sin x_{n-1}, 0 < x_n < \frac{\pi}{2}$$

知

$$0 < x_n < \frac{\pi}{2}$$

故

$$x_n = \sin x_{n-1} < x_{n-1}$$

即 $\{x_n\}$ 单调递减, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 设为 $A (0 \leq A \leq 1)$ 对 $x_n = \sin x_{n-1}$ 两边取极限, 有

$$A = \sin A$$

因为 $A = 0$ 时上式成立, 故由数列极限唯一性知 $\{x_n\}$ 极限为 0.

8. 由提示可知

$$0 < a_n < \frac{2n-1}{(2n)^2}$$

取极限夹逼即得。

9. 证明依题意

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 \frac{2n+1}{2n+3} = \frac{(2n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} > 1$$

故 $\{a_n\}$ 单调递增. 又

$$a_n = 2 \left(\frac{2 \cdot 4}{3^2}\right) \left(\frac{4 \cdot 6}{5^2}\right) \dots \left(\frac{(2n-2)(2n)}{(2n-1)^2}\right) \frac{2n}{2n+1} < 2$$

故由单调有界准则知 $\{a_n\}$ 收敛.

10. (1) 单调递减

(2) 不单调因为若 $\{\sin n\}$ 单调且 $\{\sin n\}$ 有界故 $\{\sin n\}$ 极限存在, 矛盾

(3) 考虑后项与前项的比值:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^{n-1} &= \frac{(n!)^{(n-1)/n}}{(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} (n!)^{-1/n} \\ &= \frac{n}{(n!)^{1/n}} \geq \frac{n}{n(n+1)/(2n)} = \frac{2n}{n+1} > 1 \end{aligned}$$

其中的不等号使用了 n 元的均值不等式, 故可知 $\{a_n\}$ 单调递增.

11. 不妨设 $\{a_n\}$ 单调递增, 且有一子列 $\{a_{k_n}\}$ 收敛, 则 $\{a_{k_n}\}$ 有界, 设为 A , 则对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 总有 $n \leq k_n$, 又因为 $\{a_n\}$ 单调递增, 则有

$$a_n < a_{k_n} \leq A$$

这说明 $\{a_n\}$ 单调递增且有上界, 故 $\{a_n\}$ 收敛.

12. 先证 $x_n > x_{n+1}$ 若 $x_n \leq x_{n+1}$ 可得

$$1 = x_n + \cdots x_n^n \leq x_{n+1} + \cdots x_{n+1}^n < x_{n+1} + \cdots x_{n+1}^{n+1} = 1$$

$\Rightarrow 1 < 1$ 矛盾

故 $x_n > x_{n+1}$ 且 $\{x_n\}$ 有界故 $\{x_n\}$ 极限存在又 $x_n < 1$ 且 $\frac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n} = 1 \Rightarrow x_n = \frac{1-x_n}{1-x_n^n}$

令 $n \rightarrow +\infty$ 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{2}$

2.4 Cauchy 命题与 Stolz 定理

2.4.1 练习题

1. $\forall M > 0, \exists N, n > N$ 时 $a_n > M$ 则

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} > \frac{n-N}{n}M + \frac{a_1 + \cdots + a_N}{n}$$

令 $n \rightarrow +\infty$ 得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = +\infty$

2. 令 $\sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, 由 $\{a_n\}$ 的单调增性质知 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, 故

$$\sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \frac{na_n}{n} = a_n$$

另一方面, 令 n 固定, $m > n$, 有

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m}{m} \\ &= \frac{n}{m}\sigma_n + \frac{a_{n+1} + \cdots + a_m}{m} \\ &\geq \frac{n}{m}\sigma_n + \frac{1}{m}(a_n + \cdots + a_n) = \frac{n}{m}\sigma_n + \frac{m-n}{m}a_n \end{aligned}$$

令 $m \rightarrow +\infty$, 得 $a \geq 0 + a_n = a_n$. 于是

$$\sigma_n \leq a_n \leq a$$

由夹逼定理可知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n$

3. 我们有

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{2n}}{2n} = \frac{1}{2} \frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}}{n} + \frac{1}{2} \frac{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}{n}$$

利用 Stolz 公式可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = b \end{aligned}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \cdots + a_{2n}}{2n} = \frac{a+b}{2}$, 同理可证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \cdots + a_{2n-1}}{2n-1} = \frac{a+b}{2}$, 综上可证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \frac{a+b}{2}$

4. Stolz 定理可得

5. 若 $A = 0$, 则有

$$0 \leq (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

已知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

所以由夹逼定理, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} = 0 = A$ 若 $A \neq 0$, 则对任意 $0 < \varepsilon < A$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使凡是 $n > N$, 都有

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < A + \frac{\varepsilon}{2}$$

则对 $(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}$ 进行放缩, 有

$$(a_1 a_2 \cdots a_N)^{1/n} \left(A - \frac{\varepsilon}{2} \right)^{(n-N)/n} \leq (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

可知左侧极限为 $A - \varepsilon/2$, 右侧极限为 A , 故存在 $N_0 \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N_0$ 时

$$\begin{aligned} (a_1 a_2 \cdots a_N)^{1/n} \left(A - \frac{\varepsilon}{2} \right)^{(n-N)/n} &> A - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = A - \varepsilon \\ \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} &< A + \varepsilon \end{aligned}$$

故取 $N' = \max(N, N_0)$, 则当 $n > N'$ 时, 有

$$A - \varepsilon < (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} < A + \varepsilon$$

这就说明了 $(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$

6. 令 $a_0 = 1$, 记 $b_n = a_n/a_{n-1} (n = 1, 2, 3, \dots)$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 b_2 \cdots b_n)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$$

7. 由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$ 知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{2n} - x_{2n-2}) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{2n+1} - x_{2n-1}) = 0$$

有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_2 + (x_4 - x_2) + \cdots + (x_{2n} - x_{2n-2})}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{2n} - x_{2n-2}) = 0$$

即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{2n}}{n} = 0$. 于是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{2n}}{2n} = 0$. 同理可得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{2n+1}}{2n+1} = 0$, 合起来就是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 0$$

8. 由上题可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n-1}}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = 0 - 0 = 0$$

9. 有如下结论: 设 $0 < x_1 < 1/q$, 其中 $0 < q \leq 1$ 并且 $x_{n+1} = x_n(1 - qx_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 1/q$$

取 $q = 1$, 即为本题所要证明的。下面我们证明上述结论。

用数学归纳法说明 $0 < x_n < 1/q$. $n = 1$ 时, 有 $0 < x_1 < 1/q$, 假设 $0 < x_{n-1} < 1/q$, 则 $x_n = x_{n-1}(1 - qx_{n-1}) < x_{n-1} < q$, 同时可以知道 $x_n > 0$, 则 $0 < x_n < 1/q$ 成立, 则同时有

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = 1 - qx_{n-1} < 1 \quad (*)$$

即 $\{x_n\}$ 严格递减, 而 $\{x_n\}$ 又有下界 0, 故设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, 对递推式两侧同时令 $n \rightarrow \infty$, 可以得到

$$x = x(1 - qx) \Rightarrow x = 0$$

则 $\{x_n\}$ 严格递减趋于 0, 那么对式 (*) 两侧同时令 $n \rightarrow \infty$ 就可以得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = 1$$

又因为 $\{1/x_n\}$ 严格递增趋于 $+\infty$, 则要求 nx_n 极限即求 $n/(1/x_n)$ 的极限, 可以使用 Stolz 定理, 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - (n-1)}{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n x_{n-1}}{x_{n-1} - x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n x_{n-1}}{qx_{n-1}^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{qx_{n-1}} = \frac{1}{q}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 1/q$

10. 令 $\alpha = a, \beta = b$, 先对要求的式子做一下处理:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} - ab \right| \\ &\leq \left| \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} - a \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \right| + \left| a \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} - ab \right| \quad (*) \end{aligned}$$

我们知道 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} - b \right) = 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| a \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} - ab \right| = 0$$

再考虑不等式 (*) 最后一部分加号前的一项, 记为 c_n , 因为数列 $\{b_n\}$ 收敛, 故 $\{b_n\}$ 有界, 即存在 $M \geq 0$, 使得 $|b_n| \leq M$, 则

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{|b_1(a_n - a) + b_2(a_{n-1} - a) + \cdots + b_n(a_1 - a)|}{n} \\ &\leq M \frac{|a_n - a| + |a_{n-1} - a| + \cdots + |a_1 - a|}{n} \end{aligned}$$

因为 $\{a_n - a\}$ 为无穷小, 则可知 $\{|a_n - a|\}$ 为无穷小, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n - a| + |a_{n-1} - a| + \cdots + |a_1 - a|}{n} = 0$$

故有 $c_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 则对不等式(*)使用夹逼定理可知 $\left| \frac{a_1 b_n + a_2 b_n - 1 + \cdots + a_n b_1}{n} - ab \right|$ 是无穷小, 得证.

2.5 自然对数的底 e 和 Euler 常数 γ

2.5.1 练习题

$$1. (1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{(n-1) \cdot \frac{n}{n-1}}} = \frac{1}{e}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$(3) \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2} \cdot 2} = e^2$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \cdot n} = +\infty$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2 \cdot \frac{1}{n}} = 1$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}} = e$$

$$2. \text{ 令 } \{a_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \right\}, \{b_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{n+k} \right\}$$

因为

$$\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n < \left(\frac{1+n \cdot (1+k/n)}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{k}{n+1}\right)^{n+1}$$

所以 $\{a_n\}$ 严格递增. 因为

$$\left(\frac{n}{n+k}\right)^{n+k} < \left(\frac{1+(n+k) \cdot \frac{n}{n+k}}{n+k+1}\right)^{n+k+1} = \left(\frac{n+1}{n+k+1}\right)^{n+k+1}$$

所以 $\{b_n\}$ 严格递减. 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^k$ 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{n+k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^k = e^k$$

所以有 $\{a_n\}$ 严格递增趋于 e^k , $\{b_n\}$ 严格递减趋于 e^k , 则有

$$\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n < e^k < \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{n+k}$$

对不等式取对数有

$$n \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right) < k < (n+k) \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

再同时取倒数及移项可以得到

$$\frac{k}{n+k} < \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right) < \frac{k}{n}$$

即题中不等式得证.

3. 设

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$$

则

$$\ln a_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \ln \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) + \cdots + \ln \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$$

又

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2+1} &< \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{n^2} \\ \frac{2}{n^2+1} &< \ln \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) < \frac{2}{n^2} \\ &\cdots \\ \frac{n}{n^2+1} &< \ln \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) < \frac{n}{n^2} \end{aligned}$$

将所有不等式相加, 可以得到

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)} < \ln a_n < \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

由夹逼定理可以知道 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = 1/2$, 也即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{e}$

4.

$$\left(1 + \frac{1}{[P_n]+1}\right)^{[P_n]} \leq \left(1 + \frac{1}{P_n}\right)^{P_n} \leq \left(1 + \frac{1}{[P_n]}\right)^{[P_n]+1}$$

可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{P_n}\right)^{P_n} = e$

5. 由第 7 题

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n+1)^{n+1}} &< \frac{1}{e^n} \\ \Rightarrow \frac{n!}{n^n} &< \frac{1}{e^n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (1+n) \\ \Rightarrow \frac{n!}{n^n} \cdot 2^n &< \left(\frac{2}{e}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (1+n) \end{aligned}$$

可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!2^n}{n^n} = 0$

6. 记

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad b_n = \ln n$$

显然 $\{b_n\}$ 严格递增趋于 $+\infty$, 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)}{\ln(1+1/n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(1+1/n)^{n+1})^{-1} = 1$$

所以由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} = 1$

7. 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时

$$\frac{2}{e} < 1 < \frac{4}{e}$$

成立, 设不等式对 $n-1$ 成立, 即

$$\left(\frac{n}{e}\right)^{n-1} < (n-1)! < e\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

然后考虑左侧不等式:

$$\begin{aligned} (n-1)! \cdot n &> \left(\frac{n}{e}\right)^{n-1} \cdot n = \frac{n^n}{e^{n-1}} = \frac{n^n}{e^n} \cdot e \\ &> \frac{n^n}{e^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{e}\right)^n \end{aligned}$$

再考虑右侧不等式:

$$\begin{aligned} (n-1)! \cdot n &< e\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot n = \frac{n^{n+1}}{e^n} = \frac{n^{n+1}}{e^{n+1}} \cdot e \\ &< \frac{n^{n+1}}{e^{n+1}} \cdot \left(\frac{1+n}{n}\right)^{n+1} = e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

则不等式对 n 也成立, 归纳结束.

8. 证明先证明后一部分. 先考虑 $\{v_n\} = \{(1-1/n)^n\}$ 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1-1/n)^n$, 易得 $\{v_n\}$ 单调递增, 又因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n-1}}\right)^n = \frac{1}{e}$$

所以有

$$\frac{1}{4} < v_2 < v_3 < \cdots < v_n < \cdots < \frac{1}{e}$$

则要证右侧不等式就是证

$$s_{n-1} = 1^1 + 2^2 + \cdots + (n-1)^{n-1} < \frac{2n^n}{n-1} \cdot \frac{1}{e} < \frac{n^n}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = 2(n-1)^{n-1}$$

又因为

$$\begin{aligned} s_{n-1} &= 1^1 + 2^2 + \cdots + (n-2)^{n-2} + (n-1)^{n-1} \\ &< (n-2)(n-2)^{n-2} + (n-1)^{n-1} < 2(n-1)^{n-1} \end{aligned}$$

则右侧不等式成立. 再证明前一部分, 用同样的处理方法, 只需证明

$$\begin{aligned} \frac{n^n}{4(n-1)} &< \frac{n^n}{n-1} \cdot v_n < \frac{n^n}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = (n-1)^{n-1} \\ &< 1^1 + 2^2 + \cdots + (n-1)^{n-1} = s_{n-1} \end{aligned}$$

而 $(n-1)^{n-1} < s_{n-1}$ 是显然的. 故不等式得证.

$$\begin{aligned} 9. \quad P_n &= \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{a_k}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{a_k + 1}{a_k} \\ &= \frac{a_1 + 1}{a_1} \frac{a_2 + 1}{a_2} \cdots \frac{a_n + 1}{a_n} = \frac{a_1 + 1}{a_2} \frac{a_2 + 1}{a_3} \cdots \frac{a_{n-1} + 1}{a_n} \frac{a_n + 1}{a_1} \end{aligned}$$

由题中条件 $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 1$

$$P_n = \frac{1}{2} \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} \frac{a_n + 1}{1} = \frac{a_n + 1}{n!}$$

再由

$$P_n - P_{n-1} = \frac{a_n + 1}{n!} - \frac{a_{n-1} + 1}{(n-1)!} = \frac{a_n + 1 - n(a_{n-1} + 1)}{n!} = \frac{1}{n!}$$

得递推式

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + \frac{1}{n!} = P_n + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \\ &= P_1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

所以得

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e^1 = e$$

2.6 由迭代生成的数列

2.6.1 练习题

1. (1) $x_2 > x_1$ 假设 $x_n > x_{n-1} \Rightarrow x_{n+1} = \sqrt{a+x_n} > \sqrt{a+x_{n-1}} = x_n \Rightarrow \{x_n\}$ 单调递增

减
 $x_1 < \frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}$ 假设 $x_n < \frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sqrt{a+x_n} < \sqrt{a + \frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \text{ 存在, 设为 } x \text{ 则 } x^2 - x - a = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} - \sqrt{a + \frac{1}{4}} \text{ 舍去}\right)$$

故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}$

(2)

$$x_{n+1} = a^{\frac{1}{2}} x_n^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}} \cdot x_{n-1}^{\frac{1}{2^2}} \cdots = a^{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}} \cdot x_1^{\frac{1}{2^n}}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = a^{1 - \frac{1}{2^n}} \cdot x_1^{\frac{1}{2^n}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$$

2. 归纳可知 $0 < b_n < \frac{1}{A}$ 又 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2 - Ab_n$ 故 $\{b_n\}$ 单调递增且有界 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ 存在

设为 b 则 $1 = 2 - Ab \Rightarrow b = \frac{1}{A}$

3. $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{b}{4} > 1 \Rightarrow x_3 < 0 \Rightarrow x_4 < 0$ 归纳可知 $x_n < 0 (n \geq 3) \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = b(1 - x_n) > b (n \geq 3)$

$$\Rightarrow x_{n+1} < bx_n \Rightarrow x_{n+1} < \cdots < b^{n-2}x_3$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$$

4. 当 $|b| \leq 1$ 时 $\{x_n\}$ 收敛 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^2 + 1) \geq x_n \Rightarrow \{x_n\}$ 单增 $|b| \leq 1$ 归纳可知

$$x_n \leq 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$$

若 $|b| > 1$ 时 $x_2 = \frac{1+b^2}{2} > 1$ 若 $\{x_n\}$ 收敛, $\{x_n\}$ 单增且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ 又 $x_2 \leq x_n \Rightarrow x_2 \leq 1$ 矛盾

5. (i) 若 $b = 1$, 则 $x_n = x_{n-1} + 1 = \cdots = x_0 + n$. 这说明 $\{x_n\}$ 是发散列; 若 $b = -1$, 则

$x_{2n+1} - x_{2n-1} = 0 = x_{2n} - x_{2n-2} (n \in \mathbf{N})$. 这说明当 $x_0 = x_1$ 即 $x_1 = -x_0 + 1$ 或 $x_0 = 1/2$ 时, $\{x_n\}$ 收敛

(ii) 若 $b \neq \pm 1$, 则由题设知 $x_{n+1} - x_n = b^{n-1}(x_2 - x_1)$. 这说明 $x_{n+1} = \sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k) + x_1 = (x_2 - x_1) \sum_{k=1}^n b^{k-1} + a_1$. 注意到 $(a_2 - a_1) = (b-1)a_1 + 1$. 故有

$$x_{n+1} = (x_2 - x_1)(1 - b^n)/(1 - b) + x_1 = b^n \left(x_1 + \frac{1}{b-1} \right) - \frac{1}{b-1}$$

由此知, 若 $|b| > 1$, 则 $\{x_n\}$ 发散; 若 $|b| < 1$, 则 $\{x_n\}$ 收敛

6. (1) 存在例如 $a = b = 1$

(2) 存在例如 $a = 0, b = 1$

(3) 存在例如 $a = 1, b = 0$

(4) 存在例如 $a = 2, b = 0$ 时, $x_n = 2^{n-1}x_1$ 则 x_n 收敛 $\Leftrightarrow x_1 = 0$

7. 由题设知 $x_{n+1} + 1/x_n < 2 \leq x_n + 1/x_n$, 这说明 $\{x_n\}$ 是有界递减列, $\{x_n\}$ 收敛. 进一步, 若令 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, 则 $2 \leq a + 1/a \leq 2$, 即 $a = 1$

8. 由

$$\begin{aligned} x_1 - \sqrt{a} &= \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right) - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_0} (x_0^2 + a - 2x_0\sqrt{a}) \\ &= \frac{1}{2x_0} (x_0 - \sqrt{a})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

得

$$0 \leq x_2 - \sqrt{a} = \frac{1}{2} (x_1 - \sqrt{a}) \frac{(x_1 - \sqrt{a})}{x_1} \leq \frac{1}{2} (x_1 - \sqrt{a})$$

可得

$$\begin{aligned} 0 \leq x_n - \sqrt{a} &\leq \frac{1}{2} (x_{n-1} - \sqrt{a}) \leq \frac{1}{2^2} (x_{n-2} - \sqrt{a}) \leq \dots \\ &\leq \frac{1}{2^{n-1}} (x_1 - \sqrt{a}) \end{aligned}$$

可见 $\lim x_n = \sqrt{a}$.

9.

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \sqrt{A} &= \frac{x_n^3 + 3Ax_n - 3x_n^2\sqrt{A} - A^{\frac{3}{2}}}{3x_n^2 + A} \\ &= \frac{(x_n - \sqrt{A})^3}{3x_n^2 + A} \end{aligned}$$

若 $x_1 \geq \sqrt{A} \Rightarrow x_n \geq \sqrt{A}$ 则

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n^2 + 3A}{3x_n^2 + A} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{8A}{3x_n^2 + A} \right) \leq 1$$

$\Rightarrow \{x_n\}$ 的极限存在且易知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{A}$

若 $x_1 < \sqrt{A} \Rightarrow 0 < x_n < \sqrt{A}$ 则

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n^2 + 3A}{3x_n^2 + A} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{8A}{3x_n^2 + A} \right) > 1$$

$\Rightarrow \{x_n\}$ 的极限存在且易知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{A}$

2.7 对于教学的建议

2.7.1 第一组参考题

1. 设 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{2k-1} = a$, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = b$, 则只需证 $a = b$ 考虑 $\{a_{3k}\}$ 的两个子列 $\{a_{3k}\}$ 和 $\{a_{6k}\}$, 则

$$a = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{3k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{6k} = b$$

得证

2. $\{a_{2k-1}\}$, $\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{3k}\}$ 都单调递增且有界故 $\{a_{2k-1}\}$, $\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{3k}\}$ 都收敛, 由上题可知 $\{a_n\}$ 收敛
3. $a_{n+2} + a_{n+1} - (a_n + a_{n+1}) = a_{n+2} - a_{n+1}$ 收敛, 可得 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 收敛, $a_n + a_{n+1} - (a_{n+1} - a_n) = 2a_n$ 收敛, 故 $\{a_n\}$ 收敛
4. 若 $a > 1$, $\exists N$ 当 $n > N$ 时有

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > \frac{1+a}{2} > 1$$

可得

$$|a_n| > |a_N| \cdot \left(\frac{1+a}{2} \right)^{n-N}$$

令 $n \rightarrow +\infty$ 得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = +\infty$ 矛盾

5. 因为

$$\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 = \frac{1 + k/n^2 - 1}{\sqrt{1 + k/n^2} + 1} = \frac{k}{n^2} \frac{1}{\sqrt{1 + k/n^2} + 1}$$

则对 x_n 进行放缩, 有

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \right) \frac{1}{1 + \sqrt{1 + 1/n}} \leq \left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \right) \frac{1}{1 + \sqrt{1 + k/n^2}} \leq \left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \right) \frac{1}{1 + \sqrt{1 + 1/n^2}}$$

由夹逼定理可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{4}$

6. 设 $p(n) = s$, 对 n 进行质因数分解, 有

$$n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_m^{s_m}, \quad s_1 + s_2 + \cdots + s_m = s$$

因为 2 是最小的素数, 则有 $n \geq 2^s$, 同时取对数, 有 $\ln n \geq s \ln 2$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s}{n} \leq \frac{\ln n}{n \ln 2} = 0$$

下面说明 $\{\ln n/n\}$ 是无穷小: 已知 $n/e^n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 取 $n = \ln k$, 则有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{k} = \lim_{\ln k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{e^{\ln k}} = 0$$

命题得证。

7. 将 $a_0 = -(a_1 + a_2 + \cdots + a_p)$ 代入要求的式子, 可以得到

$$\begin{aligned} & a_0 \sqrt{n} + a_1 \sqrt{n+1} + \cdots + a_p \sqrt{n+p} \\ &= a_1(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + a_2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) + \cdots + a_p(\sqrt{n+p} - \sqrt{n}) \\ &= \frac{a_1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} + \frac{2a_2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} + \cdots + \frac{pa_p}{\sqrt{n+p} + \sqrt{n}} \end{aligned}$$

而我们知道

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ka_k}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n}} = 0$$

且 p 是有限数, 则所求极限为有限个无穷小的和, 也为无穷小, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + \cdots + a_p\sqrt{n+p}) = 0$$

8. $\exists \xi \in (n, n+1)$ 使得

$$(1+n)^k - n^k = \frac{k}{\xi^{1-k}}$$

令 $n \rightarrow +\infty$ 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(1+n)^k - n^k] = 0$$

9. (1) 不一定, 考虑 $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ 可得

$$y_n = n \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = (-1)^n \sqrt{n}$$

故极限不存在

(2) $y_n = nx_n - (n-1)x_{n-1} - x_{n-1}$ 可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx_n - (x_{n-1} + \cdots + x_0)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n-1} + \cdots + x_0}{n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

10. (1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = +\infty, \exists N, n > N$ 使得

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 2$$

可得

$$|a_n| \geq 2^{n-N} \cdot |a_N|$$

令 $n \rightarrow +\infty$ 可得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = +\infty$ 矛盾

(2) 用反证法, 如果 $\{a_n\}$ 有界, 设 $0 < a_n < M$, 其中 $n = 1, 2, \dots$ 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得凡是 $n > N$, 都有

$$a_n < (a_{n+1} + a_{n+2}) \varepsilon$$

则可以得到下面的关系

$$\begin{aligned} a_{N+1} &< (a_{N+2} + a_{N+3}) \varepsilon \\ &< ((a_{N+3} + a_{N+4}) + (a_{N+4} + a_{N+5})) \varepsilon^2 \\ &= (a_{N+3} + 2a_{N+4} + a_{N+5}) \varepsilon^2 \\ &\vdots \\ &< M\varepsilon^p \left(\binom{p}{0} + \binom{p}{1} + \cdots + \binom{p}{p} \right) = M(2\varepsilon)^p \end{aligned}$$

其中 p 为任意整数. 因为 ε 为任意正数, 则取 $\varepsilon = 1/2$, 所以有

$$0 \leq a_{N+1} < M \left(\frac{1}{2}\right)^p$$

当 $p \rightarrow \infty$ 时, 有 $a_{N+1} = 0$, 与 $a_{N+1} > 0$ 矛盾. 则 $\{a_n\}$ 无界.

11. 由下题可知左端不等式成立. 只需证右端不等式. 当 $n = 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ 时直接验证右端不等式成立, 由

$$n! = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n < \left(\frac{2 + \dots + n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{2+n}{2}\right)^{n-1}$$

可得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2+n}{2}\right)^{n-1} < \left(\frac{n}{2}\right)^n \\ \Leftrightarrow & (n-1) \ln \left(\frac{2+n}{2}\right) < n \ln \left(\frac{n}{2}\right) \\ \Leftrightarrow & n \ln \left(1 + \frac{2}{n}\right) < \ln \frac{2+n}{2} \\ \Leftrightarrow & \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n < \frac{2+n}{2} \end{aligned}$$

当 $n \geq 13$ 时得

$$\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2} \cdot 2} < e^2 < \frac{2+n}{2}$$

故当 $n \geq 6$ 有

$$n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$$

12. $n = 1$ 时不等式显然成立. 假定 $n = k$ 时有 $(k/e)^k < k!$ 则我们有

$$\begin{aligned} (k+1)! &= (k+1)k! > (k+1)(k/e)^k \\ &= \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \frac{(k+1)(k/e)^k}{[(k+1)/e]^{k+1}} > \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \end{aligned}$$

由此知 (根据归纳法) $n! > (n/e)^n (n \in \mathbf{N})$, 左端不等式成立.

为证右端不等式, 只需看不等式

$$\begin{aligned} n! &< \left(\frac{n+1}{2}\right)^n = e \left(\frac{n}{2}\right)^n [(n+1)/2]^n / e \left(\frac{n}{2}\right)^n \\ &= e \left(\frac{n}{2}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n / e < e \left(\frac{n}{2}\right)^n \end{aligned}$$

13. (1)

$$\begin{aligned} & 3 - \frac{1}{2! \cdot 2} - \dots - \frac{1}{n!(n-1)n} \\ &= 3 - \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \dots - \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{(n-1)!(n-1)} - \frac{1}{n!} \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n!n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!n} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 e &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!n} \right) \\
 &= 3 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2!1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n!(n-1)n} \right) \\
 &= 3 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+2)!(k+1)(k+2)}
 \end{aligned}$$

(3) 不懂题目在说什么

14. 由 $a_{n+1} - a_n = -1/\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2 < 0$, 知 $\{a_n\}$ 递减. 由归纳法得

$$2(\sqrt{n+1} - 1) < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

故知 $a_n > 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 1) > -2$. 这说明 $\{a_n\}$ 是有下界列, 即 $\{a_n\}$ 是收敛列.

15. 由

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}$$

可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} = 0$$

16. 由

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n!)^{\frac{1}{n^2}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2 + \cdots + \ln n}{n^2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{2n-1} = 0
 \end{aligned}$$

可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}} = 1$$

17. 因为有不等式 $x(1-x) \leq 1/4$, 故对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有

$$(1-x_n)x_{n+1} > \frac{1}{4} \geq (1-x_n)x_n$$

因为 $1-x_n > 0$, 所以有 $x_{n+1} > x_n$, 即 $\{x_n\}$ 单调递增, 又有上界 1, 则 $\{x_n\}$ 极限存在, 设为 x , 则对

$$(1-x_n)x_{n+1} > \frac{1}{4}$$

左侧取极限, 有

$$(1-x)x \geq \frac{1}{4}$$

则只能有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1/2$ 18. 由 $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$ 可得

$$\begin{aligned}
 a_n - a_{n-1} &= \frac{a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-1}}{2} = -\frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{2} \\
 &= (-1)^2 \frac{a_{n-2} - a_{n-3}}{2^2} = \cdots \\
 &= (-1)^{n-1} \frac{a_1 - a_0}{2^{n-1}}
 \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} a_n - a_0 &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_1 - a_0) \\ &= (-1)^{n-1} \frac{a_1 - a_0}{2^{n-1}} + (-1)^{n-2} \frac{a_1 - a_0}{2^{n-2}} + \cdots + (-1) \frac{a_1 - a_0}{2} + (a_1 - a_0) \\ &= (a_1 - a_0) \left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] \\ &= (a_1 - a_0) \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}} \rightarrow \frac{2}{3} (a_1 - a_0) \end{aligned}$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a_0 + \frac{2}{3} (a_1 - a_0) = \frac{a_0 + 2a_1}{3}$$

19. 由题设得

$$a_n + b_n + c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = \cdots = a_0 + b_0 + c_0 = a + b + c$$

令 $L = a + b + c$. 再由

$$\begin{aligned} a_n - b_n &= \frac{b_{n-1} + c_{n-1}}{2} - \frac{c_{n-1} + a_{n-1}}{2} = -\frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2} \\ &= (-1)^2 \frac{a_{n-2} - b_{n-2}}{2^2} = \cdots = (-1)^n \frac{a_0 - b_0}{2^n} \end{aligned}$$

得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n (a_0 - b_0)}{2^n} = 0$. 同理 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (c_n - a_n) = 0$. 于是

$$a_n = \frac{1}{3} [(a_n + b_n + c_n) - (c_n - a_n) + (a_n - b_n)] = \frac{1}{3} [L - (c_n - a_n) + (a_n - b_n)]$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{3} [L - 0 + 0] = \frac{L}{3} = \frac{a + b + c}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [a_n + (c_n - a_n)] = \frac{L}{3} + 0 = \frac{L}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [a_n - (a_n - b_n)] = \frac{L}{3} - 0 = \frac{L}{3}$$

这就证得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{1}{3} (a + b + c)$

20. (1) 数学归纳法证明 $b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n$ 当 $n = 1$ 时有

$$b_1 \leq a_2 = \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}} \leq \sqrt{a_1 b_1} \leq a_1$$

$$b_1 \leq b_2 = \sqrt{a_2 b_1} \leq a_2$$

可得 $b_1 \leq b_2 \leq a_2 \leq a_1$

假设为 n 时结论成立即 $b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n$, 下证 $b_{n+1} \leq b_{n+2} \leq a_{n+2} \leq a_{n+1}$

由

$$b_{n+1} \leq a_{n+2} = \frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{b_{n+1}}} \leq \sqrt{a_{n+1} b_{n+1}} \leq a_{n+1}$$

$$b_{n+1} \leq b_{n+2} = \sqrt{a_{n+2} b_{n+1}} \leq a_{n+2}$$

可得 $b_{n+1} \leq b_{n+2} \leq a_{n+2} \leq a_{n+1}$ 得证, 故 $\{a_n\}$ 单调递减有下界, $\{b_n\}$ 单调上升

有上界, 故设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$, 则

$$b = \sqrt{ab} \Rightarrow b = a$$

(2) 首先证明 $a_n = 3 \cdot 2^n \cdot \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}$, $b_n = 3 \cdot 2^n \cdot \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}$ 首先我们有

$$\tan \frac{a}{2} = \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}} = 2 \cdot \frac{\sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{2 \cos^2 \frac{a}{2}} = \frac{\sin a}{2 \cos^2 \frac{a}{2}}$$

又因为

$$\cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} - 1$$

所以

$$\tan \frac{a}{2} = \frac{\sin a}{2 \cos^2 \frac{a}{2}} = \frac{\sin a}{1 + \cos a} = \frac{\sin a \cdot \tan a}{\sin a + \tan a}$$

当 $n = 1$ 时, $a_1 = 3 \cdot 2^1 \cdot \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^1} = 2\sqrt{3}$, $b_1 = 3 \cdot 2^1 \cdot \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^1} = 3$

假设 $n = k$ 时成立. 即

$$a_k = 3 \cdot 2^k \cdot \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}, b_k = 3 \cdot 2^k \cdot \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}$$

$n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{2a_k b_k}{a_k + b_k} \\ &= \frac{2 \cdot 3 \cdot 2^k \cdot 3 \cdot 2^k \cdot \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^k} \cdot \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}}{3 \cdot 2^k (\tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^k} + \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^k})} \\ &= 3 \cdot 2^{k+1} \cdot \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k+1}} \\ b_{k+1} &= \sqrt{3 \cdot 2^{k+1} \cdot \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k+1}} \cdot 3 \cdot 2^k \cdot \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}} \\ &= 3 \cdot 2^{k+1} \sqrt{\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^k} \cdot \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k+1}}} \end{aligned}$$

由于 $2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = \sin a$, 得

$$\sin^2 \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \sin a \cdot \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}} = \frac{1}{2} \sin a \tan \frac{a}{2}$$

即 $\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \sin a \cdot \tan \frac{a}{2}}$, 所以 $b_{k+1} = 3 \cdot 2^{k+1} \cdot \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k+1}}$. 即 $n = k + 1$ 时成立.

所以

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot 2^n \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \\ &= \pi \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot 2^n \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \end{aligned}$$

2.7.2 第二组参考题

1. 因为

$$1 \leq a_n \leq \sqrt[n]{\frac{n(n+1)}{2}} \leq \sqrt[n]{n^2} = (\sqrt[n]{n})^2$$

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^2 = 1$, 由夹逼定理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

2. 由 1.3.1 练习题的 (3) 可知

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \geq 1 - \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{k-1}{n}\right) = 1 - \frac{k(k-1)}{2n}$$

则有

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\geq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k(k-1)}{2n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{k(k-1)}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k!} > \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \frac{e}{2n} \end{aligned}$$

3. 我们先证

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}$$

其中 $\frac{n}{n+1} < \theta_n < 1$
我们有

$$e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{n!n}$$

所以 $\theta_n < 1$. 而由 e 的定义可知

$$\frac{1}{(n+1)!} = \frac{n/(n+1)}{n!n} < e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

所以也有 $\theta_n > \frac{n}{n+1}$, 综上可得 $\frac{n}{n+1} < \theta_n < 1$

$n \sin(2\pi n!e) = n \sin(2\pi \frac{\theta_n}{n})$, 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi n!e) = 2\pi$

4. 因为

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} = \frac{\frac{1}{k_n}}{\frac{1}{k_{n+1}}} = \frac{\frac{1}{k_n} e^{H_{k_n}}}{\frac{1}{k_{n+1}} e^{H_{k_{n+1}}}} \cdot e^{H_{k_{n+1}} - H_{k_n}} \quad (*)$$

易知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n} e^{H_{k_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_{n+1}} e^{H_{k_{n+1}}} = e^\gamma$$

所以只需求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (H_{k_{n+1}} - H_{k_n})$ 即可. 由 H_{k_n} 的定义可以知道

$$H_{k_n-1} < n \leq H_{k_n} \Rightarrow H_{k_n} - \frac{1}{k_n} < n \leq H_{k_n}$$

$$H_{k_{n+1}-1} < n+1 \leq H_{k_{n+1}} \Rightarrow H_{k_{n+1}} - \frac{1}{k_{n+1}} < n+1 \leq H_{k_{n+1}}$$

两个不等式做差可得

$$H_{k_{n+1}} - H_{k_n} - \frac{1}{k_{n+1}} \leq 1 \leq H_{k_{n+1}} - H_{k_n} + \frac{1}{k_n}$$

移项可以得到

$$1 - \frac{1}{k_n} \leq H_{k_{n+1}} - H_{k_n} \leq 1 + \frac{1}{k_{n+1}}$$

由夹逼定理可以知道 $\lim_{n \rightarrow \infty} H_{k_{n+1}} - H_{k_n} = 1$. 代入等式 (*) 可以得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k_n} e^{H_{k_n}}}{\frac{1}{k_{n+1}} e^{H_{k_{n+1}}}} \cdot e^{H_{k_{n+1}} - H_{k_n}} = e$$

5. 记

$$a_n = \sum_{k=0}^n \ln \binom{n}{k}, \quad b_n = n^2$$

因为 $\{b_n\}$ 严格递增趋于 $+\infty$, 故可以使用 Stolz 定理: 而因为

$$\frac{\binom{n}{1} \binom{n}{2} \cdots \binom{n}{n-1}}{\binom{n-1}{1} \binom{n-1}{2} \cdots \binom{n-1}{n-2}} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$$

所以只要求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} \ln \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$$

即可, 再令 $c_n = 2n-1, d_n = \ln \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$, 因为 $\{c_n\}$ 严格递增趋于 $+\infty$, 故可使用 Stolz 定理:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n - d_{n-1}}{c_n - c_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1} = \frac{1}{2}$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n - d_{n-1}}{c_n - c_{n-1}} = \frac{1}{2}$$

6. (1) $A_n = \frac{\sum_{k=0}^n C_n^k}{n} = \frac{2^n}{n}$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n}}$

(2) $G_n = \sqrt[n]{C_n^0 \cdot C_n^1 \cdots C_n^n}$, 所以 $\sqrt[n]{G_n} = \left(\prod_{k=0}^n C_n^k \right)^{\frac{1}{n^2}} = e^{\ln(\prod_{k=0}^n C_n^k)^{\frac{1}{n^2}}}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{G_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \ln C_n^k} = e^{\frac{1}{2}}$$

7. 由

$$\sum_{k=1}^n p_k a_k = \sum_{k=2}^n p_k (a_k - a_{k-1}) + p_1 a_1 = \sum_{k=1}^n a_k (p_k - p_{k+1}) + p_n a_n$$

又

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} a_k (p_k - p_{k+1})}{p_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k (p_k - p_{k+1}) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k (p_k - p_{k+1})}{p_{n+1} - p_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} a_k (p_k - p_{k-1}) + p_n a_n}{p_n}$$

8. 证明首先我们说明如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x_n} = 1$. 当 n 足够大的时候 $x_n > 0$,

这时我们有

$$0 \leq |\sqrt[3]{x_n} - 1| \leq |(\sqrt[3]{x_n} - 1)(\sqrt[3]{x_n^2} + \sqrt[3]{x_n} + 1)| = |x_n - 1|$$

则由夹逼定理可以知道 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x_n} = 1$ 所以要证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3na_n} = 1$ 只需证明

$\lim_{n \rightarrow \infty} 3na_n^3 = 1$ 即可, 记 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i^2$, 继续变形

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3na_n^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} 3n \cdot \frac{(a_n S_n)^3}{S_n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{S_n^3}$$

也就是说只要求出 $\{S_n^3/n\}$ 的极限就行了, 下面求极限.

(Step 1) 先证明 $a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 只需证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$. 如果 $\{|a_n|\}$ 无界, 那么当 n 充分大时, 会有 $|a_n| > 1$, 此时 $a_n S_n > a_n$, 即 $|a_n S_n|$ 无界, 与题目矛盾, 所以 $\{|a_n|\}$ 有界, 则由 Bolzano-Weierstrass 定理可知 $\{|a_n|\}$ 存在一个收敛子列 $\{|a_{k_n}|\}$, 设 $|a_{k_n}| \rightarrow a > 0 (n \rightarrow \infty)$, 对任意的 $0 < m < a$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时有 $|a_{k_n}| > m$, 此时

$$|a_{k_n} S_{k_n}| \geq |a_{k_n} S_{k_n}| - |a_{k_N} S_{k_N}| \geq (n - N) \cdot m^3 \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty$$

这说明 $\{|a_n|\}$ 的任意一个收敛子列都收敛于 0, 也就是说明 $a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$

(Step 2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^3 - S_{n-1}^3$. 因为

$$a_n S_{n-1} = a_n S_n - a_n^2 \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty$$

所以有

$$\begin{aligned} S_n^3 - S_{n-1}^3 &= (a_n^2 + S_{n-1})^3 - S_{n-1}^3 \\ &= 3a_n^4 S_{n-1} + 3a_n^2 S_{n-1}^2 + a_n^6 \rightarrow 3, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

(Step 3) 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{S_n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{S_n^3 - S_{n-1}^3} = 1$$

所以有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3na_n} = 1$

9. 因为 $u_n - u_{n+1} = u_{n+1}^2 \geq 0$, 所以 $\{u_n\}$ 为单调减数列. 令 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

即 $\{S_n\}$ 收敛. 由 Cauchy 收敛原理, $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n \geq N$ 时

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} + \cdots < 1$$

于是, 当 $n \geq N$ 时

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leq u_n = u_{n+1}^2 + u_{n+2}^2 + \cdots + u_{n+k}^2 + \cdots \\ &\leq u_{n+1} (u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+k} + \cdots) \\ &\leq u_{n+1} \end{aligned}$$

这就证明了, $u_N = u_{N+1} = u_{N+2} = \cdots = c$. 又因 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 故 $c = 0$. 由此又根据

$u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}^2$ 依次可推出

$$u_{N-1} = 0, \quad u_{N-2} = 0, \quad \cdots, \quad u_1 = 0$$

即对 $\forall k \in \mathbb{N}, u_k = 0$

10. 先设 $a = 0$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, $|a_n| < \varepsilon/2$ 此时

$$\begin{aligned} |x_n| &\leq \sum_{k=1}^n t_{nk} |a_k| = \sum_{k=1}^N t_{nk} |a_k| + \sum_{k=N+1}^n t_{nk} |a_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^N t_{nk} |a_k| + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^n t_{nk} = \sum_{k=1}^N t_{nk} |a_k| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 上式中的第一项是有限个无穷小的和, 因此存在 $N_1 > N$, 当 $n > N_1$ 时, 有

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

此即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. 当 $a \neq 0$ 时, 有 $b_n = a_n - a \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. 若令 $x'_n = \sum_{k=1}^n t_{nk} b_k$, 则 $x'_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. 于是

$$x_n = \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k = \sum_{k=1}^n t_{nk} b_k + a \sum_{k=1}^n t_{nk} = x'_n + a$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

11. (Toeplitz 定理) 设 $n, k \in \mathbb{N}, t_{nk} \geq 0$, 且 $\sum_{k=1}^n t_{nk} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} t_{nk} = 0$. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 令

$$x_n = \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

(∞ 型 Stolz 定理) 设 $\{b_n\}$ 是严格递增趋向于 $+\infty$ 的数列, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A$

取 $t_{nk} = \frac{b_{k+1} - b_k}{b_{n+1} - b_1} (k = 1, 2, \dots, n)$ 则 $\sum_{k=1}^n t_{nk} = 1$, 且由 $\{b_n\}$ 是严格递增知 $t_{nk} > 0$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ 知对每个固定的 $k, \lim_{n \rightarrow +\infty} t_{nk} = 0$ 再设 $c_k = \frac{a_{k+1} - a_k}{b_{k+1} - b_k} (k =$

$1, 2, \dots, n)$, 则 $\sum_{k=1}^n t_{nk} c_k = \frac{a_{n+1} - a_1}{b_{n+1} - b_1}$ 由 Toeplitz 定理, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$, 所以

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_1}{b_n - b_1} = A$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n - a_1}{b_n - b_1}}{1 - \frac{b_1}{b_n}} = A$ 再由 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, 易证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A$

12. 变形可得

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + \lambda a_{n-1} + \dots + \lambda^n a_0) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda} \cdot \left(\frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^{n+1}} \cdot a_n + \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^{n+1}} \cdot \lambda a_{n-1} + \dots + \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^{n+1}} \cdot \lambda^n a_0 \right) \\ &= \frac{1}{1 - \lambda} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^{n+1}} \cdot a_n + \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^{n+1}} \cdot \lambda a_{n-1} + \dots + \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^{n+1}} \cdot \lambda^n a_0 \right) \end{aligned}$$

又

$$\frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^{n+1}} \cdot 1 + \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^{n+1}} \cdot \lambda + \dots + \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^{n+1}} \lambda^n = 1$$

由 Toeplitz 定理可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda^{n+1}} \cdot a_n + \frac{1-\lambda}{1-\lambda^{n+1}} \cdot \lambda a_{n-1} + \cdots + \frac{1-\lambda}{1-\lambda^{n+1}} \lambda^n a_0 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$$

故

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + \lambda a_{n-1} + \lambda^2 a_{n-2} + \cdots + \lambda^n a_0) = \frac{a}{(1-\lambda)}$$

13. 因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, 所以 $\{x_n\}$ 有界, 即 $\exists M > 0$, s. t. $|x_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}$; 且对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, $|x_n| < \varepsilon$

设 $S_n = \sum_{k=1}^n |y_k|$, 则 $\{S_n\}$ 单调增且有上界 K , 故 $\{S_n\}$ 收敛, 由 Cauchy 准则知, $\exists N_2 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_2$ 时

$$|y_{n+1}| + \cdots + |y_{n+p}| = |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > 2N$ ($n - N > N$) 时

$$\begin{aligned} |z_n| &= |x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1| \\ &\leq |x_1 y_n| + \cdots + |x_N y_{n-N+1}| + |x_{N+1} y_{n-N}| + \cdots + |x_n y_1| \\ &< M(|y_n| + \cdots + |y_{n-N+1}|) + \varepsilon(|y_{n-N}| + \cdots + |y_1|) \\ &< M\varepsilon + K\varepsilon = (M+K)\varepsilon \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$ 得证.

14. 由 $x_{n+1} = \frac{y_n - x_n}{2}$ 可得

$$|x_{n+1}| \leq \frac{|y_n|}{2} + \frac{|x_n|}{2} \leq \cdots \leq \frac{|y_n|}{2} + \cdots + \frac{|y_1|}{2^n} + \frac{|x_1|}{2^n}$$

由于 $\{y_n\}$ 有界, 故 $\{x_n\}$ 有界, 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a$, 令 $w_n = y_n - a$, $z_n = x_n - \frac{a}{3}$, 则 $w_n = z_n + 2z_{n+1}$, 设 $\{z_n\}$ 的收敛子列为 $\{z_{n_k}\}$, 设为 $\lim_{n_k \rightarrow +\infty} z_{n_k} = b$ 则 $\lim_{n_k \rightarrow +\infty} z_{n_k-1} = (-2)b$, 可得

$$\lim_{n_k \rightarrow +\infty} z_{n_k-m} = (-2)^m b \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

由于 $\{z_{n_k}\}$ 有界, 故 $b = 0$, $\{z_n\}$ 任一收敛子列的极限均是 0, 故

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{a}{3}$$

15. 将 $a_n = 2^{n-1} - 3a_{n-1}$ 改写为 $\frac{a_n}{3^n} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{a_{n-1}}{3^{n-1}}$. 令 $b_n = \frac{a_n}{3^n}$, 于是 $b_0 = a_0, b_n =$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - b_{n-1}, n = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n - b_n = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + b_{n-1} = \dots \\ &= \frac{1}{3} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2}{3} + (-1)^n \right] - (-1)^n b_0 \\ &= \frac{1}{3} (-1)^n \left[1 - \frac{2}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] - (-1)^n b_0 \\ &= (-1)^n \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 + \frac{2}{3}} - b_0 \right] = (-1)^n \frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{5} - (-1)^n b_0 \end{aligned}$$

$a_n = 3^n b_n$ 是严格增的, $3^{n+1} b_{n+1} > 3^n b_n$, 即 $3b_{n+1} > b_n$

当 $n = 2m$ 为偶数时, 有

$$\frac{3}{5} \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2m+1} \right) - 3b_0 > -\frac{1}{5} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2m} \right) + b_0$$

令 $m \rightarrow +\infty$, 得 $\frac{3}{5} - 3b_0 \geq -\frac{1}{5} + b_0$, 推得 $a_0 = b_0 \leq \frac{1}{5}$

当 $n = 2m + 1$ 为奇数时有

$$-\frac{3}{5} \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2m+2} \right] + 3b_0 > \frac{1}{5} \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2m+1} \right] - b_0$$

令 $m \rightarrow +\infty$, 得 $-\frac{3}{5} + 3b_0 \geq \frac{1}{5} - b_0$. 推得 $a_0 = b_0 \geq \frac{1}{5}$

综合得 $a_0 = \frac{1}{5}$

16. $x_0 = \sqrt{7}, x_1 = \sqrt{7 - \sqrt{7}}, x_{n+2} = \sqrt{7 - \sqrt{7 + x_n}}, n = 0, 1, 2, \dots$

令 $f(x) = \sqrt{7 - \sqrt{7 + x}}$, 则 $f(x) = x \Leftrightarrow x = 2$

$$f'(x) = \frac{-1}{4\sqrt{7+x}\sqrt{7-\sqrt{7+x}}}$$

则

$$|x_{n+2} - 2| = |f(x_n) - f(2)| = |f'(\xi)| \cdot |x_n - 2| \quad 0 \leq \xi \leq \sqrt{7}$$

由于

$$|f'(\xi)| \leq \frac{1}{4\sqrt{7} \cdot \sqrt{7 - \sqrt{7 + \sqrt{7}}}} < 1$$

故 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n-1}\}$ 均收敛于 2 可得 $\{x_n\}$ 收敛于 2

17. 若 $y_0 = 2$, 则 $y_1 = 2 = y_2 = \dots = y_n, \forall n \in \mathbb{N}$, 于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} \right) = 1 = \frac{y_0 - \sqrt{y_0^2 - 4}}{2}$$

若 $y_0 > 2$. 取 $a = \frac{y_0 - \sqrt{y_0^2 - 4}}{2}$, 则 $0 < a < 1$, 且 $a + \frac{1}{a} = y_0$, 于是

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0^2 - 2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = a^2 + \frac{1}{a^2} \\ y_2 &= y_1^2 - 2 = a^2 + \frac{1}{a^4}, \dots \\ y_n &= a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}}, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

因此就有

$$\begin{aligned} y_0 y_1 \cdots y_n &= \left(a + \frac{1}{a}\right) \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) \cdots \left(a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}}\right) \\ &= \frac{(a^{2^n})^2 - (a^{-2^n})^2}{a - \frac{1}{a}} = \frac{a}{a^2 - 1} \frac{a^{2^{n+2}} - 1}{a^{2^{n+1}}} \\ \frac{1}{y_0 y_1 \cdots y_n} &= \frac{1 - a^2}{a} \frac{a^{2^{n+1}} + 1 - 1}{1 - (a^{2^{n+1}})^2} = \frac{1 - a^2}{a} \left(\frac{1}{1 - a^{2^{n+1}}} - \frac{1}{1 - a^{2^{n+2}}} \right) \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1 - a^2}{a} \left(\frac{1}{1 - a^2} - \frac{1}{1 - a^4} + \frac{1}{1 - a^4} - \frac{1}{1 - a^8} + \cdots + \frac{1}{1 - a^{2^{n+1}}} - \frac{1}{1 - a^{2^{n+2}}} \right) \\ &= \frac{1 - a^2}{a} \left(\frac{1}{1 - a^2} - \frac{1}{1 - a^{2^{n+2}}} \right) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n &= \frac{1 - a^2}{a} \left(\frac{1}{1 - a^2} - 1 \right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} + a = a = \frac{y_0 - \sqrt{y_0^2 - 4}}{2} \end{aligned}$$

18. (1)(i) 此时有 $f(x) > x$, 据 $x_{n+1} = f(x_n)$ 知 $x_{n+1} > x_n$, 所以数列单调递增. 根据单调性, 该数列不是正无穷大量等价于该数列有有限极限 η , 在 $x_{n+1} = f(x_n)$ 中两边取极限就有 $\eta = f(\eta)$, 矛盾.

(ii) 此时有 $f(x) \geq x$, 且函数有唯一不动点 e . 因而数列仍然单调递增, 且: 当 $c > e$ 时, 假设数列收敛, 则有极限 $\eta (\eta > e)$. 类似地有 $\eta = f(\eta)$, 但 f 仅有 e 一个不动点, 矛盾, 所以数列发散. 而数列递增, 所以是无穷大量. 当 $c \leq e$ 时, 据 $f(x)$ 的单调性, $x_n \leq e$ 蕴含 $x_{n+1} \leq e$, 由数学归纳法知数列的每一项都不超过 e , 而数列收敛, 所以一定有极限. 设极限为 η , 则 η 是函数的不动点, 所以 $\eta = e$.

(iii) 设函数的两个不动点是 $u, v (u < v)$, 则

$$\begin{aligned} f(x) &> x (x < u \text{ 或 } x > v) \\ f(x) &< x (u < x < v) \\ f(x) &= x (x = u, v) \end{aligned}$$

当 $c > v$ 时, 和上一问类似, 数列单调递增并发散;

当 $c \leq u$ 时, 和上一问类似, 数列单调递增并收敛于 u ; 当 $c = v$ 时, 该数列是常数列, 显然收敛于 v ;

当 $u < c < v$ 时, 据 $f(x)$ 的单调性, $x_n \geq u$ 蕴含 $x_{n+1} \geq u$. 又因为 $f(x) < x (u < x < v)$, 所以数列单调递减且有下界, 设极限为 η , 则 $\eta \leq c < v$, 且 η 是函数的不动点, 所以 $\eta = u$.

综上, 当 $c \leq v$ 时, 数列 $\{x_n\}$ 收敛; 当 $c > v$ 时, 数列 $\{x_n\}$ 发散.

(2)(i) 此时函数恰有一个不动点 u , 且 u 是二次迭代后的唯一不动点. 由于 $f(x)$ 递

减, 所以有 $f(f(x))$ 递增, 且有

$$f(x) > u(x < u)$$

$$f(x) < u(x > u)$$

$$f(f(x)) > x(x < u)$$

$$f(f(x)) < x(x > u)$$

根据命题 2.6.2, 数列 $\{x_n\}$ 的奇数项和偶数项具有相反的单调性. 再由上面结论, 两个子列均有界, 所以必然都收敛到函数的唯一不动点, 进而得到数列收敛

(ii) 类似地, 数列的奇数项和偶数项具有相反的单调性并且收敛至函数的某个不动点. 设 $f(x)$ 的不动点为 u , 而 $f(f(x))$ 的不动点为 $u, v, w(v < w)$, 则

$$f(u) = u$$

$$f(v) = w$$

$$f(w) = v$$

所以根据函数单调递减, 有 $v < u < w$. 又由于

$$f(f(x)) > x(x < v \text{ 或 } u < x < w)$$

$$f(f(x)) < x(v < x < u \text{ 或 } x > w)$$

故如果奇数项或偶数项子列的第一项小于 u , 则必收敛于 v ; 如果大于 u , 则必收敛于 w . 但我们有

$$f(x) > u(x < u)$$

$$f(x) < u(x > u)$$

所以除非第一项等于 u (此时是常数列), 否则两个子列一定收敛到不同极限, 数列 $\{x_n\}$ 发散.

19. (1) 用数学归纳法证明 $x_n > x_{n+1} > 0$ 当 $n = 1$ 时, 由 $x_2 = \frac{b}{4} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 知结论成立. 假设 $x_k > x_{k+1} > 0$, 则

$$x_{k+2} = bx_{k+1}(1 - x_{k+1}) \geq \frac{bx_{k+1}}{2} > 0$$

$$x_{k+2} = bx_{k+1}(1 - x_{k+1}) < bx_{k+1} \leq x_{k+1}$$

故由归纳法知结论成立. 从而数列 $\{x_n\}$ 单调有下界, 设其极限为 η , 则 $\eta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. 在递推式两边同时取极限就有

$$\eta = b\eta(1 - \eta)$$

由于 $1 - \frac{1}{b} \leq 0$, 故 $\eta = 0$

- (2) 设 $y_n = \frac{b}{2-b} \left(x_n - 1 + \frac{1}{b}\right)$, 则有 $y_1 = \frac{1}{2}$, 且

$$y_{n+1} = (2-b)y_n(1-y_n)$$

故直接运用 (1) 的结论即证.

- (3) 归纳可证 $x_n \in \left[\frac{1}{2}, \frac{b}{4}\right]$. 由于 $f(x) = bx(1-x)$ 在该区间上递减, 故两个子列具

有相反的单调性. 显然它们是有界的, 由于

$$\begin{aligned} f(f(x)) - x &= b \cdot bx(1-x)(1-bx(1-x)) - x \\ &= x(b \cdot b(1-x)(1-bx+bx^2) - 1) \\ &= -b^2x \left(bx^3 - 2bx^2 + (1+b)x + \frac{1}{b^2} - 1 \right) \\ &= -b^2x(bx - b + 1) \left(x^2 - \left(1 + \frac{1}{b}\right)x + \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} \right) \\ &= -b^2x(bx - b + 1) \left(\left(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2b}\right)^2 + \frac{(b+1)(3-b)}{4b^2} \right) \end{aligned}$$

故当 $b < 3$ 时, 函数在区间 $\left[\frac{1}{2}, \frac{b}{4}\right]$ 内存在唯一不动点 $1 - \frac{1}{b}$, 所以数列一定收敛于 $1 - \frac{1}{b}$. 当 $b = 3$ 时, 将 b 代入, 得到

$$f(f(x)) - x = -x(3x - 2)^3$$

故函数在区间内仍然只有唯一的不动点 $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{b}$, 所以此时也有结论成立.

(4) 归纳可证 $x_n \in \left[\frac{1}{2}, \frac{b}{4}\right]$. (注: 这里利用了 $b \leq 1 + \sqrt{5}$) 而函数 $f(x) = bx(1-x)$ 在此区间递减, 故两个子列具有相反的单调性. 根据 (3) 的计算, 有

$$f(f(x)) - x = -b^2x(bx - b + 1) \left(\left(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2b}\right)^2 - \frac{(b+1)(b-3)}{4b^2} \right)$$

又因为 $3 < b \leq 1 + \sqrt{5}$, 故 $(b+1)(b-3) = (b-1)^2 - 4 \in (0, 1]$. 从而得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{2b} - \frac{1}{2b} \sqrt{(b+1)(b-3)} &\geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2b} - \frac{1}{2b} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2b} - \frac{1}{2b} \sqrt{(b+1)(b-3)} &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2b} < \frac{1}{4} \end{aligned}$$

而 $f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2b} - \frac{1}{2b} \sqrt{(b+1)(b-3)}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2b} \sqrt{(b+1)(b-3)}$, $f\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{b}{4}\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}, \frac{b}{4}\right]$. 故

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2b} \sqrt{(b+1)(b-3)} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{b}{4}\right]$$

从而 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, \frac{b}{4}\right]$ 上有一个一阶不动点 $t_0 = 1 - \frac{1}{b}$ 和两个二阶不动点

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2b} - \frac{1}{2b} \sqrt{(b+1)(b-3)} \\ t_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2b} \sqrt{(b+1)(b-3)} \end{aligned}$$

故由 $f(x)$ 单调递减及 $t_1 < t_2$, 必有 $t_1 < t_0 < t_2$, 观察 $f(f(x)) - x$ 的表达式, 我们可以得到

$$\begin{aligned} f(f(x)) &> x, (x < t_1 \text{ 或 } t_0 < x < t_2) \\ f(f(x)) &< x. (t_1 < x < t_0 \text{ 或 } x > t_2) \end{aligned}$$

再由 $f(x)$ 的单调性及 $f(t_1) = t_2$, $f(t_2) = t_1$, 我们有

$$f(x) > t_2 (x < t_1)$$

$$t_0 < f(x) < t_2 \quad (t_1 < x < t_0)$$

$$t_1 < f(x) < t_0 \quad (t_0 < x < t_2)$$

$$f(x) < t_1 \quad (x > t_2)$$

最后利用 $x_1 = \frac{1}{2} < t_1$, 结合上面的结论, 就能得到

$$x_{2k-1} \in \left[\frac{1}{2}, t_1 \right], \quad x_{2k} \in \left[t_2, \frac{b}{4} \right]$$

所以只有一种可能性, 即两个子列的极限分别是 t_1, t_2 , 数列发散.

20. 显然, 有

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{x_1 + x_2}{2}, & x_2^{(1)} &= \frac{x_2 + x_3}{2}, \dots \\ x_1^{(2)} &= \frac{x_1 + 2x_2 + x_3}{2^2}, & x_2^{(2)} &= \frac{x_2 + 2x_3 + x_4}{2^2}, \dots \\ x_1^{(3)} &= \frac{x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4}{2^3}, & x_2^{(3)} &= \frac{x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5}{2^3}, \dots \\ &\dots & & \\ x_1^{(n-1)} &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i x_{i+1}, & x_2^{(n-1)} &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i x_{i+2}, \dots \end{aligned}$$

先设 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$, 并且 $|x_i| \leq M, i = 1, 2, \dots, n$, 此时, 由

$$x_1^{(n-1)} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i x_{i+1} - \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{n-1} (C_{n-1}^i - 1) x_{i+1}$$

可得

$$\left| x_1^{(n-1)} \right| \leq \frac{M}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{n-1} (C_{n-1}^i - 1) = \frac{M}{2^{n-1}} (2^{n-1} - n) = M \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}} \right)$$

因为 x_1, x_2, \dots, x_n 的下标有轮换的性质, 我们有

$$\left| x_i^{(n-1)} \right| \leq M \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

利用已得的结果, 同理有

$$\left| x_i^{(2n-2)} \right| = \left| \left(x_i^{(n-1)} \right)^{(n-1)} \right| \leq M \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}} \right) \cdot \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}} \right) = M \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}} \right)^2$$

一般地, 对 $l = 1, 2, 3, \dots$, 有

$$\left| x_i^{(ln-l)} \right| \leq M \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}} \right)^l$$

由于 $0 \leq 1 - \frac{n}{2^{n-1}} < 1$, 故

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_i^{(ln-l)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

由 $x_i^{(k+1)}$ 的定义可知

$$\left| x_i^{(k+1)} \right| \leq \max \left\{ \left| x_i^{(k)} \right|, \dots, \left| x_n^{(k)} \right| \right\}$$

可见

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_i^{(k)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

对一般情形，我们有

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n x_i - n\bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$$

依上面已证的结果，有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{(k)} - \bar{x}) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} x_i^{(k)} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} [(x_i^{(k)} - \bar{x}) + \bar{x}] = \lim_{k \rightarrow +\infty} (x_i^{(k)} - \bar{x}) + \bar{x} = 0 + \bar{x} \\ &= \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \end{aligned}$$

第3章 实数系的基础定理

3.1 确界的概念和确界的存在定理

3.1.1 练习题

1. 设集合 E 的上确界为 a 和 b , 不妨设 $a < b$, 由于 b 是 E 的最小上界, 故存在 $x \in E$ 使得

$$a < x < b$$

这与 a 是 E 的上界矛盾

2. $\sup A \leq a$ 对, 考虑集合 $A = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots\right\}$ 则有 $\forall x \in A, x < 1$, 但是 $\sup A = 1$

3. $\forall \varepsilon > 0$, 因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \beta$ 故 $\exists N, n > N$ 时有

$$x_n > \beta - \varepsilon$$

故 $\beta - \varepsilon$ 不是 A 的上界, 所以 β 是 A 的最小上界 $\Rightarrow \sup A = \beta$

4. (1) $\sup A = +\infty, \inf A = 0$

(2) $\sup A = 0, \inf A = 1$

(3) $\inf A = 2, \sup A = e$

(4) $\inf A = 0, \sup A = \frac{1}{e}$

(5) $\inf A = 0, \sup A = \frac{\pi}{2}$

(6) $\inf A = -1, \sup A = \frac{\pi}{2}$

(7) $\inf A = -\infty, \sup A = +\infty$

5. (1)

$$x_n \leq \sup \{x_n\}, \quad y_n \leq \sup \{y_n\}$$

$$x_n + y_n \leq \sup \{x_n\} + \sup \{y_n\}$$

$$\sup \{x_n + y_n\} \leq \sup \{x_n\} + \sup \{y_n\}$$

(2) 与 (1) 类似

6. 设 $a = \sup A, b = \inf B, a > b$ 则 $\exists x \in A$ 使得 $\frac{a+b}{2} < x, \exists y \in B, y < \frac{a+b}{2}$, 则

$$y < \frac{a+b}{2} < x$$

矛盾, 故 $a \leq b$

7. 只证明 $\sup B = \sup A + c$, 另一个类似可得

$$\forall x + c \in B, \quad x + c \leq \sup A + c$$

可得 $\sup A + c$ 是 B 的一个上界。

$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$ 使得 $\sup A - \varepsilon < x \Rightarrow \exists x + c \in B$ 使得

$$\sup A + c - \varepsilon < x + c$$

故 $\sup A + c$ 是 B 的最小上界 $\Rightarrow \sup B = \sup A + c$

8. $\forall x + y \in C$, 其中 $x \in A, y \in B$ 则

$$x \leq \sup A, y \leq \sup B \Rightarrow x + y \leq \sup A + \sup B$$

故 $\sup C \leq \sup A + \sup B$

取

$$A = \{0\}, B = \{-1, 1\}, C = \{-1\}$$

则有

$$\sup A = 0, \sup B = 1, \sup C = -1 \Rightarrow \sup C < \sup A + \sup B$$

9. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, y \in B$ 使得

$$\sup A - \varepsilon < x$$

$$\sup B - \varepsilon < y$$

故

$$\sup A + \sup B - 2\varepsilon < x + y$$

由 ε 的任意性可得

$$\sup C \geq \sup A + \sup B$$

3.2 闭区间套定理

3.2.1 练习题

1. 收敛子列为 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n-1}\}$, 则 $\forall x_0 \in (-1, 1)$ 有

$$|x_n - x_0| \geq \min\{|x_0 + 1|, |1 - x_0|\} > 0$$

故 x_0 不是 $\{x_n\}$ 子列的极限

2. 考虑

$$\left\{ \left(0, \frac{1}{n} \right) \mid n = 1, 2, \dots \right\}$$

$$\text{则 } \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(0, \frac{1}{n} \right) = \emptyset$$

3. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$ 则 $\frac{a+b}{2} \in (a_n, b_n) \quad \forall n \in N_+$ 故 $\bigcap_{n=1}^{+\infty} (a_n, b_n) \neq \emptyset$

4. 不妨设集合 S 有上界 b_1 , 并在 S 中取一点 a_1 若 $a_1 = b_1, \forall \varepsilon > 0$, 总有 $b_1 - \varepsilon < a_1 \in S$, 因此 b_1 为上确界. 若 $a_1 < b_1$, 构造闭区间 $I_1 = [a_1, b_1]$ 由于有公共元素 $a_1, I_1 \cap S \neq \emptyset$ $\left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1 \right] \cap S \neq \emptyset$, 则令 $a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, b_2 = b_1$, 即 $I_2 = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1 \right]$ 反之, 则令 $I_2 = \left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2} \right]$ 同样地, 再将 I_2 等分为两个子区间, 按此方法得到

I_3, I_4, \dots 显然地, b_n 为 S 上界并且 $I_n \supset I_{n+1}, n = 1, 2, \dots$ 对于 $I_n = [a_n, b_n]$ $|b_n - a_n| = \frac{|b_1 - a_1|}{2^{n-1}} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 故存在唯一的实数 ξ , 满足 $a_n \leq \xi \leq b_n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$ 若 $\exists x_0 \in S$, 有 $x_0 > \xi$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}_+$, $b_n < x_0$, 这与 b_n 为上界矛盾, 故 ξ 为 S 上界. 又因 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 有 $\xi - \varepsilon < a_n \in S$ 故 ξ 为上确界.

5. 设 $\{x_n\}$ 是单调上升有上界的实数列 b 是它的一个上界, 令 $a_1 = x_1 - 1$ 二等分 $[a_1, b_1]$, 其中必有一区间含 $\{x_n\}$ 的无穷多项, 记其为 $[a_2, b_2]$, 二等分 $[a_2, b_2], \dots$ 如此继续下去, 便得区间套 $[a_n, b_n]$, 满足 $\forall n, [a_n, b_n]$ 含 $\{x_n\}$ 的无穷多项. 由区间套定理可得, 存在唯一的 $r \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = r$, 则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, r - \varepsilon < a_n < b_n < r + \varepsilon$ 取 $n_0 > N, [a_{n_0}, b_{n_0}]$ 含 $\{x_n\}$ 的无穷多项, 则存在 M , 使 $x_M \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$ 当 $m > M$ 时, 有 $x_m \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$. 如果不然, $\exists m_1 > M$, 有 $b_{n_0} < x_{m_1}$, 则在 $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ 中最多只有 $\{x_n\}$ 的前 m_1 项, 与 $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ 的构造矛盾. 从而当 $m > M$ 时, 有 $r - \varepsilon < a_{n_0} \leq x_m < b_{n_0} < r + \varepsilon$, 即 $|x_m - r| < \varepsilon, \lim_{m \rightarrow \infty} x_m = r$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r$

3.3 凝聚定理

3.3.1 练习题

1. \Rightarrow : $\exists x_{n_1}$ 使得 $|x_{n_1} - a| < 1$, $\exists x_{n_2}$ 使得 $n_2 > n_1$ 且 $|x_{n_2} - a| < \frac{1}{2}$, \dots 以此类推可得存在 x_{n_k} 使得 $n_k > n_{k-1}$, 且

$$|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$$

故 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 a

\Leftarrow : $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 a , 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, n_k > N$ 时, 有

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon$$

故 a 的任意邻域内均有 $\{x_n\}$ 中的无穷多项.

2. \Leftarrow : 显然的

\Rightarrow : 因为 $\{a_n\}$ 有界, 由 Bolzano-Weierstrass 定理可以知道 $\{a_n\}$ 有一收敛子列 $\{a_{k_n}\}$ 收敛到 a' , 而因为 $\{a_n\}$ 发散, 则存在 ε_0 , 对任意的 $N \in \mathbb{N}^*$, 总存在 $n > N$ 使得

$$|a_n - a'| \geq \varepsilon_0 \quad (1)$$

则令 $N_1 = 1$, 取满足 (1) 的 n , 记为 m_1 , 再取 $N_2 = \max(m_1, 2)$, 则可以再取出一个 m_2 满足 (1), 如此下去可以取出一列 $\{a_{m_n}\}$, 使得 $|a_{m_n} - a'| \geq \varepsilon_0, \{a_{m_n}\}$ 也是有界数列, 则也可以取出一列收敛子列, 不妨直接记为 $\{a_{m_n}\}$ 本身, 记其极限为 a'' , 显然有 $a'' \neq a'$. 则说明 $\{a_n\}$ 必有两个收敛于不同数的子列.

3. $\{x_n\}$ 无界, 故存在子列 $\{x_{n_{k_1}}\}$ 是无穷大量, 又 $\{x_n\}$ 不是无穷大量, 故存在子列 $\{x_{n_{k_2}}\}$ 是有界数列, 则存在 $\{x_{n_{k_2}}\}$ 的子列收敛, 同时也是 $\{x_n\}$ 的子列.

4. 设 $\{x_n\}$ 是单调上升有上界的实数列. $\{x_n\}$ 有界, 由紧致性定理可得 $\exists \{x_{n_k}\}$ 的子数列 $\{x_{n_k}\}$ 且收敛于 r . 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists K$, 当 $k > K$ 时, 有 $|x_{n_k} - r| < \varepsilon$, 即 $r - \varepsilon < x_{n_k} < r + \varepsilon, \exists N = n_{K+1}, \forall n > N$, 有 $x_n \geq x_{n_{K+1}} > r - \varepsilon$ 所以 $n_k \rightarrow \infty, \forall n > N, \exists n_{k'} < n$, 从而 $x_n < x_{n_{k'}} < r + \varepsilon$, 即 $|x_n - r| < \varepsilon \forall \varepsilon > 0, \exists N = n_{K+1}$, 当 $n > n_{K+1}$ 时, $|x_n - r| < \varepsilon, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r$. 定理证完.

3.4 Cauchy 收敛准则

3.4.1 练习题

1. (1) 是, 因为

$$|x_n - x_{n+p}| \leq |x_n - x_N| + |x_{n+p} - x_N| < 2\varepsilon$$

可得

(2) 不一定, 考虑 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$

(3) 是, 由

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n+p}| &\leq |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + \cdots + |x_{n+p} - x_{n+p-1}| \\ &\leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)^2} \end{aligned}$$

可得

(4) 不一定, 考虑 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$

2. $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N > 0, \exists n, m > N$ 使得 $|x_n - x_m| \geq \varepsilon_0$

3. (1) 由

$$\begin{aligned} |a_n - a_{n+p}| &= \frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{(n+p)!} \leq \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p-1}} \\ &\leq \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

可得

(2) 由

$$|b_n - b_{n+p}| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + (-1)^{p-1} \frac{1}{n+p}$$

可得

$$|b_n - b_{n+p}| \leq \begin{cases} \frac{1}{n+1} & p \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p} \leq \frac{1}{n+1} & p \text{ 为偶数} \end{cases}$$

故

$$|b_n - b_{n+p}| \leq \frac{1}{n+1}$$

(3)

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \left| \frac{\sin(n+1)x}{(n+1)(n+1+\sin(n+1))} + \cdots + \frac{\sin(n+p)x}{(n+p)(n+p+\sin(n+p)x)} \right| \\ &\leq \frac{1}{(n+1)n} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+p)(n+p-1)} < \frac{p}{n^2} \end{aligned}$$

再由第一问的 (3) 可得

4. (1) $\sin n$ 是变号的, 故 $\{a_n\}$ 不单调, 又

$$|a_n| \leq 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < e$$

可得 $\{a_n\}$ 有界

(2)

$$|a_{n+p} - a_n| \leq \frac{1}{(n+1)!} + \dots + \frac{1}{(n+p)!}$$

由上一题的 (1) 可知 $\{a_n\}$ 是基本列

5. $|x_{n+p} - x_n| \leq |y_n - y_{n+p}|$, 而 $\{y_n\}$ 是基本列, 故 $\{x_n\}$ 是基本列
 6. $S_n \geq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, 故 $\{S_n\}$ 发散
 7.

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = q |\sin x_{n+1} - \sin x_n| \leq q |x_{n+1} - x_n|$$

由压缩映像可得 $\{x_n\}$ 收敛

3.5 覆盖定理

3.5.1 练习题

1. $\left\{ \left(\frac{1}{n}, 1 \right) \mid n = 2, 3, \dots \right\}$ 覆盖了 $(0, 1)$, 但是它的任意有限子集都不能覆盖 $(0, 1)$
 2. 用反证法. 设 E 是闭区间 $[a, b]$ 的一个覆盖. 设 $[a, b]$ 没有 E 的有限子覆盖, 记 $[a, b] = [a_1, b_1]$, 二等分 $[a_1, b_1]$, 其中必有一区间没有 E 的有限子覆盖, 记其为 $[a_2, b_2]$, 二等分 $[a_2, b_2]$, \dots 如此继续下去, 便得区间套 $\{[a_n, b_n]\}$, 满足 $\forall n, [a_n, b_n]$ 没有 E 的有限子覆盖. 由区间套定理可存在唯一的 $r \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = r$. 由 E 是 $[a, b]$ 的覆盖, 知存在 $(\alpha, \beta) \in E$, 使 $\alpha < r < \beta$. 根据极限不等式, 存在 N_1 当 $n > N_1$, 有 $\alpha < a_n$. $\exists N_2$, 当 $n > N_2$, 有 $\beta > b_n$. 取 $N = \max(N_1, N_2)$, 当 $n > N$, 有 $\alpha < a_n, \beta > b_n$ 又 $a_n \leq r \leq b_n (\forall n)$ 所以当 $n > N$, 有 $[a_n, b_n] \subset (\alpha, \beta)$, 与 $[a_n, b_n]$ 没有 E 的有限子覆盖矛盾. 故 $[a, b]$ 在 E 中存在有限子覆盖.
 3. 用反证法. 如果不然, 设存在 $\{[a_n, b_n]\}$, 有 $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \emptyset$. 记开区间 $(\alpha_n, \beta_n) = (a_1 - 1, a_n), (\alpha'_n, \beta'_n) = (b_n, b_1 + 1)$, 即 $(\alpha_n, \beta_n) \cup (\alpha'_n, \beta'_n) = (a_1 - 1, b_1 + 1) - [a_n, b_n] \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$. 这时

$$E = \{(\alpha_n, \beta_n), (\alpha'_n, \beta'_n), n = 1, 2, \dots\}$$

构成 $[a_1, b_1]$ 的覆盖. 由有限覆盖定理存在 N 使得 $\bigcup_{n=1}^N (\alpha_n, \beta_n) \cup (\alpha'_n, \beta'_n) \supset [a_1, b_1]$,

这就推出, 当 $n > N$ 时, $[a_n, b_n]$ 是空集, 这是不可能的. 矛盾, 故有 $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$,

即存在 r 使 $r \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$

下证 r 是唯一的. 即存在唯一的 r , 使 $\forall n, a_n \leq r \leq b_n$. 如果不然, 若有 r, r' 满足 $r \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n], r' \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, 则 $|r - r'| \leq b_n - a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 故 $r = r'$. 即这样的 r 是唯一的.

4. 设 $\forall n$, 有 $a \leq x_n \leq b$ 先证 $\exists x_0 \in [a, b], \forall \delta > 0, (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中必含有 $\{x_n\}$ 的无限项. 如果不然. $\forall x \in [a, b], \exists \delta_x > 0$, 使 $(x - \delta_x, x + \delta_x)$ 只含 $\{x_n\}$ 的有限项记 $E = \{(x - \delta_x, x + \delta_x) | \forall x \in [a, b], \text{使 } (x - \delta_x, x + \delta_x) \text{ 只含 } \{x_n\} \text{ 的有限项}\}$, 则 E 是 $[a, b]$ 的一个覆盖. 由有限覆盖定理, 知存在 E 中有限个开区间

$$(x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)(x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2) \cdots (x_n - \delta_n, x_n + \delta_n)$$

所以 $\{x_i - \delta_i, x_i + \delta_i\}$ 均只含 $\{x_n\}$ 的有限项. 与 $\forall n$, 有 $a \leq x_n \leq b$ 矛盾. 所以结论成立.

特别地, 取 $\delta_k = \frac{1}{k}$, 则 $\exists x_{n_k} \in \left(x_0 - \frac{1}{k}, x_0 + \frac{1}{k}\right)$, 而且 $n_k > n_{k-1}$, 则 $\{x_{n_k}\}$ 为 $\{x_n\}$ 的子数列且收敛于 x_0 . 定理证完

5. (1) 取 $[a, b]$ 的开覆盖为 $\{(n-1, n+1) | n \in \mathbb{Z}\}$
 (2) 取开覆盖为 $\{(a-1, b+1)\}$, 则 $\sup A = b+1 > b$, 但是 $b+1 \notin A$

3.6 数列的上极限和下极限

3.6.1 练习题

1. (1) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$
 (2) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$
 (3) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$
 (4) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$
 2. 设 $a = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$, 存在子列 $\{y_{n_k}\}$, $\lim_{n_k \rightarrow +\infty} y_{n_k} = a$, 则 $x_{n_k} \geq y_{n_k}$, 则 $\{x_{n_k}\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_{k_2}}\}$ 收敛于 b , 可得 $b \geq a$, 故

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

类似可得

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

3. $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时有

$$x_n < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \varepsilon$$

则

$$S_n = \frac{x_1 + \cdots + x_N + \cdots + x_n}{n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_N}{n} + \frac{n-N}{n} \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n + \varepsilon \right)$$

可得 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \varepsilon$, 由 ε 的任意性可得 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$

类似可得 $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} S_n$

4. 必要性: 当 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1$ 时, 取定 $l > 1$, 则存在一个 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$0 \leq \sqrt[n]{a_n} < \frac{1+l}{2}$$

即

$$0 \leq a_n < \left(\frac{1+l}{2}\right)^n$$

则有

$$0 \leq \frac{a_n}{l^n} < \left(\frac{(l+1)/2}{l}\right)^n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

所以由夹逼定理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/l^n = 0$

充分性: 用反证法. 如果 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, 不妨设 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, 则有一子列 $\{a_{k_n}\}$ 趋于 a , 取 $l \in (1, a)$, 下面说明矛盾.

令 $\varepsilon < a - l$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得对 $k_n > n > N$ 都有

$$\left| a_{k_n}^{1/k_n} - a \right| < \varepsilon$$

即 $a_{k_n} > (a - \varepsilon)^{k_n} > l^{k_n}$. 所以 $a_{k_n}/l^{k_n} > 1$, 即有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{l^n} > 1$$

这与 $a_n/l^n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 矛盾.

5. 先证左端不等式: 设

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

如果 $q = +\infty$, 有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$ 可得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$. 当 $q = 0$ 时显然成立不妨设 $0 < q < +\infty$. 于是对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 N 当 $n \geq N$ 时, $a_{n+1}/a_n > q - \varepsilon$. 特别有

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} > q - \varepsilon, \quad \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} > q - \varepsilon, \quad \dots, \quad \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} > q - \varepsilon$$

把这些不等式的两边分别乘起来, 得 $a_{N+k} > (q - \varepsilon)^k a_N$, 或者

$$a_n > a_N (q - \varepsilon)^{-N} (q - \varepsilon)^n$$

于是

$$\sqrt[n]{a_n} > \sqrt[n]{a_N (q - \varepsilon)^{-N} (q - \varepsilon)^n}$$

由此即得

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \geq q - \varepsilon$$

再令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 即得所要证的不等式

右端不等式类似可得.

6. 设 $\{a_n\}$ 是一个数列, E 是由 $\{a_n\}$ 的全部极限点构成的集合. 记

$$a^* = \sup E, \quad a_* = \inf E$$

则 $a^* \in E$

证明 若 $a^* = +\infty$, 则此时 E 无上界, 从而 $\{a_n\}$ 也没有上界. 因此, 从 $\{a_n\}$ 中可选出一个子列 $a_{k_n} \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$, 于是得 $a^* \in E$

如果 $a^* = -\infty$, 那么 E 中只含唯一的元素, 即 $E = \{-\infty\}$, 这时, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

如果 a^* 是一个有限数, 为了证明 $a^* \in E$, 必须且只需证明可以从数列 $\{a_n\}$ 中选出一个子列收敛于 a^* . 因为 $a^* = \sup E$, 故必存在一个 $l_1 \in E$, 使得

$$a^* - 1 < l_1 < a^* + 1$$

l_1 作为 $\{a_n\}$ 的某一子列的极限, 一定存在正整数 k_1 , 使得

$$a^* - 1 < a_{k_1} < a^* + 1$$

同理, 存在 $l_2 \in E$, 使得

$$a^* - \frac{1}{2} < l_2 < a^* + \frac{1}{2}$$

l_2 作为 $\{a_n\}$ 的某一子列的极限, 一定有正整数 $k_2 > k_1$, 使得

$$a^* - \frac{1}{2} < a_{k_2} < a^* + \frac{1}{2}$$

归纳可得: 对任何 $n \in \mathbf{N}^*$, 存在 k_n , 满足 $k_n > k_{n-1} > \cdots > k_1$, 使得

$$a^* - \frac{1}{n} < a_{k_n} < a^* + \frac{1}{n}$$

由此可知, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = a^* \in E$

类似可得 $a_* \in E$

7. 设 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N$ 时有

$$x_n < a + \varepsilon \Rightarrow -x_n > -a - \varepsilon$$

可得

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} -x_n \geq -a - \varepsilon$$

由 ε 的任意性可得 $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} -x_n \geq -a$

又存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 a , 可得 $\lim_{n_k \rightarrow +\infty} -x_{n_k} = -a$, 故 $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} -x_n = -a$

8.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = - \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} -x_n = - \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} \{-x_k\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} \{x_k\}$$

9. (1) 有限数 b 是数列 $\{x_n\}$ 的上极限 \Leftrightarrow 对任意的 $\varepsilon > 0, (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ 中均含有 $\{x_n\}$ 中的无穷多项, 同时 $\exists N, n > N$ 时有 $x_n < b + \varepsilon$; (2) $+\infty$ 是数列 $\{x_n\}$ 的上极限等价于 $\{x_n\}$ 无上界; (3) $-\infty$ 是数列 $\{x_n\}$ 的上极限等价于 $\{x_n\}$ 趋于负无穷。

只证 (1), 其余类似. 利用 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = - \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} -x_n$ 可得, b 是数列 $\{x_n\}$ 的上极限 $\Leftrightarrow -b$ 是数列 $\{-x_n\}$ 的下极限 \Leftrightarrow 对任意的 $\varepsilon > 0, (-b - \varepsilon, -b + \varepsilon)$ 中均含有 $\{-x_n\}$ 中的无穷多项, 同时 $\exists N, n > N$ 时有 $-x_n > -b - \varepsilon \Leftrightarrow$ 对任意的 $\varepsilon > 0, (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ 中均含有 $\{x_n\}$ 中的无穷多项, 同时 $\exists N, n > N$ 时有 $x_n < b + \varepsilon$

于是 (1) 得证。

10.

$$\sup_{k \geq n} \{x_k\} + \sup_{k=n} \{y_k\} \geq x_k + y_k \quad (k \geq n)$$

可得

$$\sup_{k \geq n} \{x_k\} + \sup_{k \geq n} \{y_k\} \geq \sup_{k \geq n} \{x_k + y_k\}$$

令 $n \rightarrow +\infty$ 可得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$$

11.

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n &= \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n - y_n) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) + \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (-y_n) \\ &= \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) - \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} y_n \end{aligned}$$

故

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n)$$

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} y_n &= \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (y_n + x_n - x_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (-x_n) \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) - \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \end{aligned}$$

故

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n)$$

3.7 对于教学的建议

3.7.1 第一组参考题

1. \Rightarrow : 有界列的子列仍然是有界列, 所以会有收敛子列。
 \Leftarrow : 如果数列无界, 则存在子列趋于正无穷或者负无穷, 此时这个子列就没有收敛子列矛盾, 故数列有界。
2. 反证法. 若结论不对, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 以及 $\{a_{n_k}\}$, 使得 $|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon_0 (k = 1, 2, \dots)$. 由于 $\{a_{n_k}\}$ 是有界列, 故存在收敛子列 $\{a_{n_{k_i}}\}$, 使得 $\lim_{i \rightarrow \infty} a_{n_{k_i}} = a$. 这与 $|a_{n_{k_i}} - a| \geq \varepsilon_0$ 矛盾. 证毕。
3. 如果每个邻域内有界, 根据有限覆盖定理可知存在有限个邻域覆盖, 取这有限个邻域上函数的界的最大值即可. 在开区间上不一定, 考虑 $\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上无界但是在区间内任意一个点的邻域内均有界。
4. $\forall \varepsilon > 0$, 令

$$E = \{x_0 < b | f(x) \text{ 在 } [a - \varepsilon, x_0] \text{ 上单调增加}\}$$

则 $E \neq \emptyset$, 只需证 $\sup E = b$, 若 $\sup E < b$, 考虑 $\sup E$ 充分小的邻域 ($\sup E -$

$\delta, \sup E + \delta)$ 则存在 $x_0 \in E$ 使得

$$x_0 \in (\sup E - \delta, \sup E)$$

故 $f(x)$ 在 $\left[a - \varepsilon, \sup E + \frac{\delta}{2}\right]$ 上严格单调递增, 这与 $\sup E$ 是 E 的上确界矛盾。

5. (Stolz, $\frac{*}{\infty}$ 型) 设 $\{b_n\}$ 是严格递增且趋于 $+\infty$ 的数列. 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A \quad (1)$$

那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A \quad (2)$$

其中 A 可以是 $+\infty - \infty$.

(a) 先设 A 为有限数. 由式 (1) 知, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 n_0 , 当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$A - \varepsilon < \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} < A + \varepsilon$$

由此得

$$A - \varepsilon < \frac{a_{n_0} - a_{n_0-1}}{b_{n_0} - b_{n_0-1}} < A + \varepsilon$$

$$A - \varepsilon < \frac{a_{n_0+1} - a_{n_0}}{b_{n_0+1} - b_{n_0}} < A + \varepsilon$$

...

$$A - \varepsilon < \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} < A + \varepsilon$$

因而有

$$A - \varepsilon < \frac{a_n - a_{n_0-1}}{b_n - b_{n_0-1}} < A + \varepsilon$$

即

$$A - \varepsilon < \frac{\frac{a_n - a_{n_0-1}}{b_n} + \frac{a_{n_0-1}}{b_n}}{1 - \frac{b_{n_0-1}}{b_n}} < A + \varepsilon$$

于是得

$$(A - \varepsilon) \left(1 - \frac{b_{n_0-1}}{b_n}\right) + \frac{a_{n_0-1}}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} < (A + \varepsilon) \left(1 - \frac{b_{n_0-1}}{b_n}\right) + \frac{a_{n_0-1}}{b_n}$$

从而得

$$A - \varepsilon \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \leq A + \varepsilon$$

再令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 即得

$$A \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \leq A$$

由此即知式 (2) 成立。

(b) 设 $A = +\infty$, 由式 (1) 知, 当 n 充分大时, 有 $a_n - a_{n-1} > b_n - b_{n-1} > 0$, 因而 $\{a_n\}$ 也是严格递增且趋于 $+\infty$ 的数列. 现在把式 (1) 写成

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{a_n - a_{n-1}} = 0$$

由 (a), 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$, 因而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$

(c) 设 $A = -\infty$, 记 $c_n = -a_n$, 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n - c_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = +\infty$$

由 (b), 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{b_n} = +\infty$, 因而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty$

6. 首先当 $\{b_n\}$ 有无穷多项为 0 时, $\{a_n b_n\}$ 也有无穷多项为 0, 因为 $\{a_n b_n\}, \{b_n\}$ 非负, 则有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 0$$

而

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \geq 0$$

可以知道不等式

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

成立, 下面证明 $\{b_n\}$ 只有有限多项为 0 时的情况, 这等价于当 $b_n > 0$ 时的情况。

只需说明

$$\inf_{k \geq n} a_k \cdot \inf_{k \geq n} b_k \leq \inf_{k \geq n} (a_k b_k) \leq \inf_{k \geq n} a_k \cdot \sup_{k \geq n} b_k$$

因为 $\{b_n\}$ 非负, 可以得到

$$\inf_{k \geq n} a_k \cdot \inf_{k \geq n} b_k \leq a_k b_k$$

固定 n , 可以知道 $\inf_{k \geq n} a_k \cdot \inf_{k \geq n} b_k$ 是 $\{a_k b_k : k \geq n\}$ 的一个下界, 由下确界的定义可以知道

$$\inf_{k \geq n} a_k \cdot \inf_{k \geq n} b_k \leq \inf_{k \geq n} (a_k b_k)$$

再令 $n \rightarrow \infty$, 有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n)$$

再令 $n \rightarrow \infty$, 有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n)$$

再证明后一部分, 令 $c_n = a_n b_n$, 则 $a_n = c_n / b_n$. 则有

$$\begin{aligned} \inf_{k \geq n} a_k &= \inf_{k \geq n} \frac{c_k}{b_k} \geq \inf_{k \geq n} c_k \cdot \inf_{k \geq n} \frac{1}{b_k} \\ &= \inf_{k \geq n} (a_k b_k) \cdot \frac{1}{\sup_{k \geq n} b_k} \end{aligned}$$

移项后再令 $n \rightarrow \infty$, 就可以得到

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

7. 下证如下不等式

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

设

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

如果 $q = +\infty$, 有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$ 可得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$. 当 $q = 0$ 时显然成立

不妨设 $0 < q < +\infty$. 于是对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 N 当 $n \geq N$ 时, $a_{n+1}/a_n > q - \varepsilon$. 特别有

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} > q - \varepsilon, \quad \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} > q - \varepsilon, \quad \dots, \quad \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} > q - \varepsilon$$

把这些不等式的两边分别乘起来, 得 $a_{N+k} > (q - \varepsilon)^k a_N$, 或者

$$a_n > a_N (q - \varepsilon)^{-N} (q - \varepsilon)^n$$

于是

$$\sqrt[n]{a_n} > \sqrt[n]{a_N (q - \varepsilon)^{-N} (q - \varepsilon)^n}$$

由此即得

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \geq q - \varepsilon$$

再令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 即得

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

设

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

如果 $q = +\infty$, 不等式当然成立. 故不妨设 $q < +\infty$. 于是对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 当 $n \geq N$ 时, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon$. 特别有

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} < q + \varepsilon, \quad \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < q + \varepsilon, \quad \dots, \quad \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} < q + \varepsilon$$

把这些不等式乘起来得 $a_{N+k} < (q + \varepsilon)^k a_N$, 或者

$$a_n < a_N (q + \varepsilon)^{-N} (q + \varepsilon)^n$$

$$\sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{a_N (q + \varepsilon)^{-N} (q + \varepsilon)^n}$$

由此即得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq q + \varepsilon$$

再让 $\varepsilon \rightarrow 0$, 即得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

综上所述可得

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l$$

8. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq a$, 则存在子列 $\{a_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{n_k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = b \neq a$$

则

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{n_1} + \cdots + a_{n_k}}{k} = b \neq a$$

矛盾

9. 用反证法. 如果

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1 + a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) < 1$$

则存在一个 $N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时

$$n \left(\frac{1 + a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) < 1$$

经过变形后可以得到

$$\frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1} > \frac{1}{n+1}$$

由此可以看出 $\{a_n/n\}$ 是一个严格递减的数列, 因为

$$S_k = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+k} \rightarrow +\infty, \quad k \rightarrow \infty$$

故一定存在一个 k_0 , 使得 $S_{k_0} > a_n/n$, 此时

$$\frac{a_{n+k_0}}{n+k_0} < \frac{a_n}{n} - S_{k_0} < 0$$

这与 $a_n > 0$ 矛盾.

10. 用反证法. 如果

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_1 + x_{n+1}}{x_n} \right)^n < e$$

则存在一个 $N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时

$$\left(\frac{x_1 + x_{n+1}}{x_n} \right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^n$$

即为

$$\frac{x_1 + x_{n+1}}{x_n} < 1 + \frac{1}{n-1}$$

整理之后可以得到

$$\frac{x_n}{n-1} - \frac{x_{n+1}}{n} > \frac{x_1}{n}$$

与上题同理, 可以导出矛盾.

3.7.2 第二组参考题

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} na = +\infty$, 故存在 n 使得 $na > b$
- 若 A 无最大值则 $\sup A \in B$, 则 $\sup A$ 就是 B 中最小值, 若 $\exists b \in B$, 使得 $b < \sup A$
由于 $\forall x \in A, x < b \Rightarrow \sup A \leq b$ 矛盾
若 A 有最大值类似可得 B 无最小值.
- 由于 A, B 是非空的, 可设存在 $a \in A, b \in B$. 不妨设 $a < b$, 于是 $[a, b] \subset E$. 用区间的

中点 $(a+b)/2$ 将此区间平分. 如果此中点属于 A , 那么取 $a_1 = (a+b)/2, b_1 = b$; 否则, 令 $a_1 = a, b_1 = (a+b)/2$. 按照作对分区间套的办法, 可作出闭区间套 $[a_k, b_k]$, 其中 $a_k \in A, b_k \in B (k \in \mathbf{N}^*)$. 设这些区间的公共点为 c , 则有 $a_k \rightarrow c, b_k \rightarrow c (k \rightarrow \infty)$. 很明显, 如果 $c \in A$, 是 $b_n \in B$ 的极限, 若 $c \in B$ 则是 $a_n \in A$ 的极限

$$4. \quad x_0 = \sqrt{7}, x_1 = \sqrt{7 - \sqrt{7}}, x_{n+2} = \sqrt{7 - \sqrt{7 + x_n}}, n = 0, 1, 2, \dots$$

令 $f(x) = \sqrt{7 - \sqrt{7 + x}}$, 则 $f(x) = x \Leftrightarrow x = 2$

$$f'(x) = \frac{-1}{4\sqrt{7+x}\sqrt{7-\sqrt{7+x}}}$$

则

$$|x_{n+2} - 2| = |f(x_n) - f(2)| = |f'(\xi)| \cdot |x_n - 2| \quad 0 \leq \xi \leq \sqrt{7}$$

由于

$$|f'(\xi)| \leq \frac{1}{4\sqrt{7} \cdot \sqrt{7 - \sqrt{7 + \sqrt{7}}}} < 1$$

故 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n-1}\}$ 均收敛于 2 可得 $\{x_n\}$ 收敛于 2

5. 在等式中取 $y_n = -x_n (n \in \mathbf{N})$, 则得

$$0 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n - \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

故 $\{x_n\}$ 收敛

6. (1) 对任意正整数 N , 由 $\{x_n\}$ 是正数列及 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 必存在 n 使得

$$x_n < \min\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$$

现设 n 是满足该条件的最小正整数, 则

$$x_k \geq \min\{x_1, x_2, \dots, x_N\}, k = N+1, N+2, \dots, n-1$$

而显然亦有

$$x_k \geq \min\{x_1, x_2, \dots, x_N\}, k = 1, 2, \dots, N$$

故

$$x_n < x_k, k = 1, 2, \dots, n-1$$

注意这里的正整数 N 是任意的, 因而存在无穷多个满足条件的 n .

(2) 设 $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = c > 0$, 存在 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 c , 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, n_k \geq N$ 时

$$\frac{x_{n_k+1}}{x_{n_k}} > \frac{c - \varepsilon}{c}$$

可得

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{n_k+1}}{x_{n_k}} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{c}$$

由 ε 的任意性可得

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{n_k+1}}{x_{n_k}} \geq 1$$

即得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$$

7. $|x_{n+1}| \leq \frac{1}{|q|} |y_n| + \frac{|p|}{|q|} |x_n| \Rightarrow \{x_n\}$ 有界。
 设 $\{x_n\}$ 的上极限为 A , 下极限为 B 。对

$$y_n - px_n = qx_{n+1}$$

两边分别取上极限和下极限可得

$$qA + pB = qB + pA$$

$$(q-p)(A-B) = 0$$

$$A = B$$

8. 不妨设 $A = 0$, 不然考虑 $\left\{x_n - \frac{A}{3}\right\}$ 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_{2n} - \frac{A}{3} + 2\left(x_n - \frac{A}{3}\right)\right) = 0$$

所以不妨设 $A = 0$, 只需证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 。设 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则存在一个子列 $\{x_{k_n}\}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = a$, 因为 $\{x_n\}$ 有界, 则 a 为有限数。则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{2k_n} + 2x_{k_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2k_n} + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = 0$$

故可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2k_n} = -2a$, 由上极限的定义可知 $-2a \leq a$, 即 $a \geq 0$ 。又因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{4k_n} + 2x_{2k_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{4k_n} + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2k_n} = 0$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{4k_n} = 4a$, 再由上极限的定义可知 $4a \leq a$, 即 $a \leq 0$ 。这迫使 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a = 0$, 同理可以证明 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

9. 对任意的 $a \in [-1, 1]$, 设 $\varphi = \arcsin a$

引理: 我们先证明, 对任意的 $\delta > 0$, 存在无穷多组正整数对 (m, n) 使得

$$|n - 2m\pi| < \delta$$

取一个正整数 N 使得 $N > \frac{1}{\delta}$, 令 $x_k = 2k\pi - [2k\pi]$, $k = 1, 2, \dots, N+1$ 则我们有 $x_k \in [0, 1]$, 从而在这 $N+1$ 个数中, 存在两个数 $x_i, x_j (i < j)$ 使得

$$|x_i - x_j| < \frac{1}{N} < \delta$$

代入 x_i, x_j 的表达式, 就得到

$$|([2j\pi] - [2i\pi]) - 2(j-i)\pi| < \frac{1}{N} < \delta$$

由于

$$\begin{aligned} & [2j\pi] - [2i\pi] \\ & \geq 2(j-i)\pi - |([2j\pi] - [2i\pi]) - 2(j-i)\pi| \\ & > 2\pi - \frac{1}{N} \geq 2\pi - 1 > 0 \end{aligned}$$

故 $[2j\pi] - [2i\pi]$ 是正整数, 显然 $j-i$ 也是正整数, 所以我们证明了, 存在这样的

两个正整数 $n = [2j\pi] - [2i\pi]$, $m = j - i$, 使得

$$|n - 2m\pi| < \delta$$

假设这样的正整数对只有有限个, 那么根据 2π 的无理性, 这有限个正整数对 (m, n) 对应的 $|n - 2m\pi|$ 都是正数, 而其它的正整数对 (m, n) 对应的 $|n - 2m\pi|$ 都不小于正数 δ , 这表明全体 $|n - 2m\pi|$ 具有最小值 (并且这个最小值是正的). 但根据 $\delta > 0$ 的任意性和刚刚证明的 (m, n) 的存在性, 这是不可能的. 综上, 这样的 (m, n) 有无穷多个, 引理证毕.

回到原题, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 不妨设 $\varepsilon < 1$, 然后考虑: 首先在引理中取 $\delta = \varepsilon$, 然后设正整数对 (m_0, n_0) 满足

$$|n_0 - 2m_0\pi| < \varepsilon$$

如果 $n_0 - 2m_0\pi < 0$, 令 $f(k) = 3 + n_0k - 2m_0k\pi - \varphi$, 则

$$f(0) = 3 - \varphi \geq 3 - \frac{\pi}{2} > 1 > \varepsilon, f(k) - f(k-1) \in (-\varepsilon, 0)$$

所以一定存在正整数 k 使得 $f(k) \in (0, \varepsilon)$ 类似地, 如果 $n_0 - 2m_0\pi > 0$, 令 $f(k) = n_0k - 2(1 + m_0k)\pi - \varphi$, 同理可证存在正整数 k 使得 $f(k) \in (0, \varepsilon)$ 总之, 两种情况下, 都能构造出正整数对 (m, n) , 使得

$$0 < n - 2m\pi - \varphi < \varepsilon$$

如果这样的正整数对只有有限组, 取其中使得 $|n - 2m\pi - \varphi|$ 最小的一组 (m_1, n_1) , 则不存在正整数对 (m, n) , 使得

$$0 < n - 2m\pi - \varphi < n_1 - 2m_1\pi - \varphi$$

这和已证的结论矛盾. 从而我们证明了对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在无穷多组正整数对 (m, n) , 使得

$$0 < n - 2m\pi - \varphi < \varepsilon$$

注意到此时我们有

$$|\sin n - \sin \varphi| = |\sin n - \sin(2m\pi + \varphi)| \leq |n - 2m\pi - \varphi| < \varepsilon$$

显然, 如果存在两个正整数对 $(m_1, n_1), (m_2, n_2)$, 使得 $0 < n_i - 2m_i\pi - \varphi < \varepsilon (i = 1, 2)$, 且 $\varepsilon < 1$, 则 $n_1 = n_2$ 蕴含 $m_1 = m_2$ 故对于任意的 $\varepsilon \in (0, 1)$, 存在无穷多个正整数 n , 使得 $|\sin n - \sin \varphi| < \varepsilon$ 又由于 $a = \sin \varphi$, 所以对任意的 $\varepsilon > 0$, 数列 $\{\sin n\}$ 有无穷多项属于 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, 原命题得证.

10. 若记 S 为 $\{x_n\}$ 的全体极限点的集合, 求证 $S = [l, L]$

如果 $l = L$, 命题显然成立. 下面考虑 $l < L$, 因为 L 和 l 分别为 $\{x_n\}$ 的上下极限, 则 $S \subset [l, L]$. 则只需证明 $[l, L] \subset S$

用反证法, 任取 $x \in [l, L]$, 如果 $x \notin S$, 即说明对任意小的 $\varepsilon > 0$, 存在 N_0 , 使得 $n > N_0$ 时, $x_n \in [l, L] - (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, 同时 $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset [l, L]$, 下面说明矛盾.

记 $S_1 = [l, x - \varepsilon], S_2 = [x + \varepsilon, L]$, 如果 S_1, S_2 中只有一个区间包含了 $\{x_n\}$ 中无穷多个点, 不妨设为 S_1 , 那么存在 $N > N_0$, 当 $n > N$ 时, $x_n < x - \varepsilon < L$, 这与 L 是 $\{x_n\}$

的上极限矛盾. 如果两个区间内都含有 $\{x_n\}$ 中无穷多个点, 那么对任意的 $N > N_0$, 必存在 $n_0 > N$, 使得 x_{n_0+1} 与 x_{n_0} 分居在 S_1 与 S_2 , 否则就化为第一种情况, 而此时正是

$$|x_{n_0+1} - x_{n_0}| \geq 2\varepsilon$$

与 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ 矛盾. 故 $[l, L] \subset S$.

微信号: 顺数人

第4章 函数极限

4.1 函数极限的定义

4.1.1 练习题

1. 不妨在 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ 的范围内考虑已知 $\frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ 在 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 上有界, 且恒大于 0, 设存在 $M > 0$, 使得

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right| < M \quad \left(x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \right)$$

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$ 则 $0 < |x| < \delta$ 时有

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1 \right| &= \left| \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{\sqrt{1+x} - 1 + \sqrt{1-x} - 1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right| < M |\sqrt{1+x} - 1 + \sqrt{1-x} - 1| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &< M |\sqrt{1+x} - 1| + M |\sqrt{1-x} - 1| \\ &= M \frac{|x|}{|\sqrt{1+x} + 1|} + M \frac{|-x|}{|\sqrt{1-x} + 1|} \\ &< 2M|x| < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \end{aligned}$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1$$

2. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min \left\{ \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\varepsilon \right\}$, 当 $0 < |x-1| < \delta$ 时有

$$\begin{aligned} &\left| \frac{x^2 + x - 2}{x(x^2 - 3x + 2)} + 3 \right| \\ &= \left| \frac{3x^2 - 5x + 2}{x(x-2)} \right| = \left| \frac{(x-1)(3x-2)}{x(x-2)} \right| \\ &= |x-1| \cdot \frac{|3x-2|}{|x||x-2|} < |x-1| \frac{\frac{8}{5}}{\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5}} \\ &< \frac{5}{2}|x-1| < \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5}\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

故极限为-3

3. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $M = \max \left\{ 5, \frac{1}{\varepsilon} + 2 \right\}$, $x > M$ 时有

$$|x^2 - x| > |x^2 - x - 2|$$

则

$$\left| \frac{x+1}{x^2-x} \right| < \frac{|x+1|}{|x^2-x-2|} = \frac{1}{|x-2|}$$

又 $x - 2 > \frac{1}{\varepsilon} > 0$, 故 $\frac{1}{|x - 2|} < \varepsilon$, 所以

$$\left| \frac{x + 1}{x^2 - x} \right| < \varepsilon$$

则极限为 0

4.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - ax^2 - x + 4}{x^3 + x^2 - (a + 1)x^2 - (a + 1)x + ax + a + 4 - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - ax^2 - x + 4}{x^3 + x^2 - (a + 1)x^2 - (a + 1)x + ax + a + 4 - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - (a + 1)x + a + \frac{4 - a}{x + 1}}{x^2 - (a + 1)x + a + \frac{4 - a}{x + 1}} \end{aligned}$$

可得当 $a = 4$ 时, 极限存在, 极限为 $\lim_{x \rightarrow -1} x^2 - 5x + 4 = 10$

5. 由

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2} = 2$$

知 $x^2 + ax + b = 0$ 在 $x = 2$ 时, 故 $b = -4 - 2a$, 而

$$\left| \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2} - 2 \right| = \left| \frac{(x - 2)(x + 2 + a)}{(x + 1)(x - 2)} - 2 \right| = \left| \frac{a - x}{x + 1} \right|$$

若 $x \rightarrow 2$, 应有 $\left| \frac{a - x}{x + 1} \right| \rightarrow 0$, 故 $a = 2$, 此时 $b = -4 - 2a = -8$

6. (1) $a < -1$ 时有

$$\left| \frac{a + \sin \frac{1}{x}}{x} \right| = \frac{|a + \sin \frac{1}{x}|}{|x|} > \frac{|a + 1|}{|x|}$$

由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|a + 1|}{|x|} = +\infty$$

, 知 $a < -1$ 时可以

(2) $a > 1$ 时

$$\left| \frac{a + \sin \frac{1}{x}}{x} \right| > \frac{|a - 1|}{x}$$

由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|a - 1|}{x} = +\infty$ 知 $a > 1$ 也可以

(3) $a \in [-1, 1]$ 时, $\exists \theta_0 \in (0, 2\pi)$ 使得

$$a + \sin \theta_0 = 0$$

取

$$x_1 = \frac{1}{\theta_0} \quad x_2 = \frac{1}{\theta_0 + 2\pi} \quad \cdots \cdots x_n = \frac{1}{\theta_0 + 2n\pi}$$

则

$$\left| \frac{a + \sin \frac{1}{x_k}}{x_k} \right| = 0 < 1$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a + \sin \frac{1}{x}}{x} \neq \pm\infty$$

7. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min \left\{ \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha\varepsilon}{2} \right\}$, $\forall x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ 有
 (i) $x \in (\alpha, \alpha + \delta)$ 时有

$$\begin{aligned} |\ln x - \ln \alpha| &= \ln \frac{x}{\alpha} = \ln \left(\frac{x}{\alpha} - 1 + 1 \right) < \frac{1}{\alpha}(x - \alpha) \\ &< \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

- (ii) 当 $x \in (\alpha - \delta, \alpha)$ 时, 有

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} < x < \frac{3}{2}\alpha \\ |\ln x - \ln \alpha| &= \ln \frac{\alpha}{x} = \ln \left(\frac{\alpha}{x} - 1 + 1 \right) \\ &< \frac{(\alpha - x)}{x} < \frac{\frac{\alpha\varepsilon}{2}}{\frac{\alpha}{2}} = \varepsilon \end{aligned}$$

故

$$x \in O_\delta(a) - \{a\}$$

时 $|\ln x - \ln \alpha| < \varepsilon$, 故 $\lim_{x \rightarrow \alpha} \ln x = \ln \alpha$

8. 取 $\delta = 1$, 考虑 $x \in (a-1, a)$ 与 $(a, a+1)$ 上的情况, 首先证 $f(x) = e^{a+1}(x-a) + e^a - e^x$ 在 $(a, a+1)$ 恒大于 0

$$\begin{aligned} f(a) &= 0 \\ f'(x) &= e^{a+1} - e^x > 0 \quad (x < a+1) \end{aligned}$$

故 $f(x) > 0$, 即

$$e^x - e^a < e^{a+1}(x-a)$$

同理可证当 $a-1 < x < a$ 时

$$e^a - e^x < e^{a+1}(a-x)$$

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{e^{a+1}} \right\}$, 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时

$$|e^x - e^a| < e^{a+1}|x-a| < e^{a+1} \cdot \frac{\varepsilon}{e^{a+1}} = \varepsilon$$

故 $\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a$

9. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta, \forall 0 < |x| < \delta$, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta' = \sqrt[3]{\delta}$, $\forall 0 < |x| < \delta'$, 有

$$|f(x^3) - A| < \varepsilon$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x^3) = A$

若 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^3) = A$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x| < \delta$ 有

$$|f(x^3) - A| < \varepsilon$$

其中 x^3 可以是 $(0, \delta^3)$ 与 $(-\delta^3, 0)$ 上的任意数

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta' = \delta^3$, $\forall 0 < |x| < \delta'$ 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^3)$ 同时存在或不存在, 而当它们存在时必相等

10. 不一定, 取

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 为正数 } (x \geq 0) \\ -1 & x \text{ 为负数 } (x < 0) \end{cases}$$

则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在, 但是 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2) = 1$

11. 任取一点 x_0 , $\forall \delta > 0$ 则 $(x_0 - \delta, x_0), (x_0, x_0 + \delta)$ 上必有无理数 x_1 和有理数 x_2 , 不妨设极限存在, 为 A , $\lim_{x \rightarrow 0} D(x) = A$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, $x \in O_\delta(x_0) - \{x_0\}$ 时, 有

$$|D(x) - A| < \varepsilon$$

不妨取 $\varepsilon = \frac{1}{3}$, 将代入知

$$|D(x_1) - A| < \frac{1}{3} \quad |D(x_2) - A| < \frac{1}{3}$$

即 $|A| < \frac{1}{3}$ $|1 - A| < \frac{1}{3}$ 有 $|A| + |1 - A| < \frac{2}{3}$, 但是

$$|A| + |1 - A| > |(A) + (1 - A)| = 1$$

矛盾, 故 $D(x)$ 在 x_0 无极限, 由 x_0 的任意性, 则 $D(x)$ 在每一点都是无极限。

12. 考虑

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ 为有理数} \\ 1, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

则 $f(x)$ 只在 $x = 1$ 极限存在。

13. 设 $f(x)$ 的周期为 T , 则任取 x_0 , 有 $f(x_0) = f(x_0 + nT)$, 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 令 $n \rightarrow +\infty$, 有 $f(x_0) = 0$, 由 x_0 的任意性可得 $f(x) \equiv 0$

14. 若 f 为周期函数, 且 $f(x)$ 为有理分式函数, 且 $f(x)$ 非常值函数。

由于 $f(x)$ 为有理分式函数, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, A (A \neq 0), \pm\infty$ 这三种情况。

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 则由上题知 $f(x) \equiv 0$ 矛盾

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则令 $h(x) = f(x) - A$ 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = A - A = 0$, $h(x)$ 也是周期函数, 从而有 $h(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv A$ 矛盾

(3) 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$, 这与 $f(x)$ 是周期函数矛盾。

综上, 可得任何非常值的周期函数不可能是有理分式函数。

4.2 函数极限的基本性质

4.2.1 练习题

1. (1) $\frac{x^k}{a^x} = \left(\frac{x}{(a^k)^x}\right)^k$ 令 $b = a^{\frac{1}{k}}$ 知 $b > 1$, 则考虑 $\frac{x}{b^x}$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时的情况。

令 $f(x) = \frac{x}{b^x}$, 则

$$f'(x) = \frac{b^x - b^x \ln b \cdot x}{b^{2x}} = \frac{1 - x \ln b}{b^x}$$

则在 $\left(\frac{1}{\ln b}, +\infty\right)$ 上, $f(x)$ 单调递减, 由命题 4.2.2 知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{b^x}$ 的极限必然存在, 由 Heine 归结原理知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{b^x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{b^n} = 0 \quad (b > 1)$$

可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{b^x}\right)^k = 0$$

(2) $\frac{\ln x}{x^k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\ln x^k}{x^k}$ 做代换 $t = x^k$ 知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^k} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t}$ 再做代换 $y = \ln t$ 知

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y}$$

由 (1) 知

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 0$$

故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x^k}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{\ln x^k}{x^k} = \frac{1}{k} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 0$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{a} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln a} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln a} = 1$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}} = 1$$

2.

$$\begin{aligned} & \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+y^3}}{\sqrt{y^2+y^3}+\sqrt{y}} \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{y^3}+1}}{\sqrt{\frac{1}{y}+1}+\frac{1}{\sqrt{y}}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{y^3}+1}}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{y}+1}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)} = \frac{\lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{y^3}+1}}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{y}+1} + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{y}}} \\ &= \frac{1}{1+0} = 1 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x-1}{x+2} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+2} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}} \\ &= e^{1 \cdot 0} = 1 \end{aligned}$$

4. 令 $\sqrt[n]{1+x} - 1 = t$, 则 $x = (t+1)^n - 1$ 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{(t+1)^n - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t^2 + nt^{n-1} \dots + nt} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{n-1} + nt^{n-2} \dots + n} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(bx)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(bx)}{bx} \cdot b = \lim_{bx \rightarrow 0} \frac{f(bx)}{bx} \cdot b \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot b = bl \end{aligned}$$

6. 由第四题

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{n}$$

知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - 1}{\sin x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\sin x} - 1}{-\sin x}$$

令 $\sin x = t$ 知

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+t} - 1}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-t} - 1}{-t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

7. f 的值域 $S = \{y | \text{存在 } x \in (a, +\infty), \text{使得 } f(x) = y\}$

不妨设 f 单调增, 设 $\beta = \sup S$, 由上确界的定义知 $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in (a, +\infty)$ 使得 $f(x_0) > \beta - \varepsilon$ 则 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $M = x_0$, $\forall x > M$ 有

$$\beta - \varepsilon < f(x_0) < f(x) < \beta$$

故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \beta$

8. $f(x)$ 为 (a, b) 上的单调增加函数, 则 $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ 存在, 由 Heine 归结原理知

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

则 (2) 得证

令 $S = \{y | y = f(x), x \in (a, b)\}$, 则 $B = \sup S$, 由上确界定义得 $\forall \varepsilon > 0$, 有 x_0 , 使得 $B - \varepsilon + f(x_0) < B$ 取 $\delta = b - x_0$, 则 $\forall x \in (b - \delta, b)$ 有

$$B - \varepsilon < f(x_0) < f(x) < B$$

由 ε 的任意性可知

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = B$$

由极限的唯一性得 $B = A$, 故 A 是区间 (a, b) 上函数 f 得上界。

9. 取 $\varepsilon = A - C > 0$, 由极限得定义知, $\exists M > 0$, 当 $x > M$ 时

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

即

$$f(x) > A - (A - C) = C$$

故命题得证。

10.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A < \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = B$$

取 $\varepsilon = \frac{B-A}{2} > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, $\forall x \in (a - \delta_1, a)$ 有

$$|f(x) - A| < \frac{B-A}{2}$$

由此可知 $f(x) < \frac{A+B}{2}$

取 $\varepsilon = \frac{B-A}{2} > 0$, $\exists \delta_2 > 0$, $\forall y \in (a, a + \delta)$ 有

$$|f(y) - B| < \frac{B-A}{2}$$

由此可知 $f(y) > \frac{A+B}{2}$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则 $\forall x \in (a - \delta, a)$ 时

$$f(x) < \frac{A+B}{2}$$

$\forall y \in (a, a + \delta)$ 有

$$f(y) > \frac{A+B}{2}$$

即 $f(y) > f(x)$

11. $f(x)$ 在 x_0 左侧极限存在 \Leftrightarrow 存在 A , 对 $\forall \{x_n\}$ 单增趋于 x_0 , 均有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$

\Rightarrow : 显然

\Leftarrow : 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 不存在, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$, 使得 $\forall \delta > 0$, $\exists x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 有

$$|f(x) - A| \geq \varepsilon_0$$

取 $\delta_1 = 1$, 则 $\exists x_1$, 使得

$$|f(x_1) - A| \geq \varepsilon_0$$

取 $\delta_2 = \min\left\{\frac{1}{2}, |x_1 - x_0|\right\}$, 则 $\exists x_2 \in (x_0 - \delta_2, x_0)$, 使得

$$|f(x_2) - A| \geq \varepsilon_0$$

依次下去。取 $\delta_n = \min\left\{\frac{1}{n}, |x_{n-1} - x_0|\right\}$, 则 $\exists x_n \in (x_0 - \delta_n, x_0)$ 使得

$$|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$$

则 $\{x_n\}$ 单增趋于 x_0 , 但是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq A$, 矛盾。

类似可得。 $f(x)$ 在 x_0 右侧极限存在 \Leftrightarrow 存在 A , 对 $\forall \{x_n\}$ 单减趋于 x_0 , 均有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A$$

回到本题, 不妨设 $f(x)$ 单增, $\forall x_0$, $\{x_n\}$ 单增趋于 x_0 , 则 $\{f(x_n)\}$ 单增且 $f(x_n) \leq f(x_0)$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 存在。

设 $\{y_n\}$ 是另一单增趋于 x_0 的数列, 则 $\forall y_n$, 存在 x_{n_k} , 使得 $y_n \leq x_{n_k}$, 则 $f(y_n) \leq f(x_{n_k})$, 故

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$$

同理

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n)$, 故 $f(x)$ 在 x_0 的左侧极限存在, 类似可得右侧极限也存在。

4.3 两个重要极限

4.3.1 练习题

1. (1) 取 $t = \frac{1}{x}$ 得

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{t} \right)^{\frac{1}{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan t \right) \right)^{\frac{1}{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan t \right)^{-\frac{\frac{1}{t}}{2 \arctan t \cdot \frac{1}{2}}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan t \right)^{-\frac{2}{2 \arctan t}} \right]^{-\frac{2 \arctan t}{\pi \cdot t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-\frac{2}{\pi} \frac{\arctan t}{t}} = e^{-\frac{2}{\pi}} \end{aligned}$$

(2) 令 $t = \frac{\pi}{2} - x$ $t \rightarrow 0^+$ 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \right]^{\tan \left(\frac{x}{2} - t \right)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} [\cos t]^{\frac{1}{\tan t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{t}{2} \right)^{-\frac{\frac{1}{\tan t}}{2 \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{2}}}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\left(1 - 2 \sin^2 \frac{t}{2} \right)^{-\frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{2}}} \right]^{\frac{-2 \sin^2 \frac{t}{2}}{\tan t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{\frac{-2 \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^2}{t}} = 1 \end{aligned}$$

(3)

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x^2-1}{x^2} \right)^{x^2}}{\left(\frac{x^2+1}{x^2} \right)^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{-x^2 \cdot (-1)}}{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{x^2}} = e^{-2}$$

(4) 令 $t = \frac{\pi}{2} - x$ 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\cos \left(\frac{x}{2} - t \right) \right]^t = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\sin t)^t \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{t \ln(\sin t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{\frac{t}{\sin t} \cdot \sin t \ln \sin t} = 1 \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x - 2 \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (\cos x - 1)}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot 2 \cdot \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} 1 \cdot 2 \cdot \frac{-2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = -1
 \end{aligned}$$

(6) 令 $y = 1 - x$, $y \rightarrow 0$, 则

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{y \rightarrow 0} y \tan \left(\frac{\pi}{2} (1 - y) \right) \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} y \frac{\cos \frac{\pi}{2} y}{\sin \frac{\pi}{2} y} \\
 &= \frac{2}{\pi}
 \end{aligned}$$

2. (1) 由

$$0 < \left| \frac{\sin x}{x} \right| < \frac{1}{|x|}$$

则令 $x \rightarrow +\infty$ 可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

(2)

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} \cdot \frac{1+x}{x}} = 1$$

3. 由下一题立刻得到

4.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x \cdots + a_n^x}{n} - 1 + 1 \right)^{\frac{1}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x \cdots + a_n^x}{n} - 1 + 1 \right)^{\frac{1}{\frac{a_1^x \cdots + a_n^x}{n} - 1} \cdot \frac{\frac{a_1^x \cdots + a_n^x}{n} - 1}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\frac{a_1^x \cdots + a_n^x}{n} - 1}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{a_i^x - 1}{x}} = e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln a_i} \\
 &= e^{\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}
 \end{aligned}$$

5.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \cdot \sin \frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}}$$

由 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ 知上式变形为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^n \cdot \sin \frac{x}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^n \cdot \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}$$

再由 $\cos 2\theta = -1 + 2 \cos^2 \theta$ 可得 $\cos \theta = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta}$, 取 $x = \frac{\pi}{2}$ 知 $\cos \frac{x}{2} =$

$$\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \cos \frac{x}{4} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \text{ 故}$$

$$\frac{\sin x}{x} = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

则

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

4.4 无穷小量、有界量、无穷大量和阶的比较

4.4.1 练习题

1. (1)

$$\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x} = \frac{2 \tan x}{\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 - \tan x}} \sim \tan x \sim 2x (x \rightarrow 0)$$

故为 1 阶

(2)

$$\ln x - \ln a = \ln \frac{x}{a} = \ln \left(\frac{x}{a} - 1 + 1 \right) \sim \frac{1}{a} (x - a) (x \rightarrow a) \quad a > 0$$

故为 1 阶

(3)

$$a^x - 1 \sim \ln a \cdot x (x \rightarrow 0) \quad a > 0$$

故为 1 阶

(4)

$$a^{x^2} - b^{x^2} = b^{x^2} \left[\left(\frac{a}{b} \right)^{x^2} - 1 \right] \sim \left(\frac{a}{b} \right)^{x^2} - 1 \sim x^2 \ln \frac{a}{b} (x \rightarrow 0, \quad a, b > 0)$$

故为 2 阶

(5) 令 $t = x - 1$ 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \ln \left(t + 1 + \cos \frac{\pi}{2}(t + 1) \right) = \ln \left(1 + t - \sin \frac{\pi}{2}t \right) \\ &\sim t - \sin \frac{\pi}{2}t \end{aligned}$$

而

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin \frac{\pi}{2}t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{2}t}{t} = 1 - \frac{\pi}{2}$$

故

$$t - \sin \frac{\pi}{2}t \sim \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) t$$

故为 1 阶

(6) 令 $t = x - 1$ 则 $t \rightarrow 0^+$ 故

$$\text{原式} = \ln(t + 1) \ln t \sim \tan t$$

由 $\ln x = o(x^{-\alpha}) \quad (x \rightarrow 0^+) \quad (\alpha > 0)$ 知阶数为 $1 - \varepsilon$ 任意 $\varepsilon > 0$

2. $f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = o(x)$ 可知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = 0$ 又由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 极限存在可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \cdot 2 = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 所以 $f(x) = o(x)$ ($x \rightarrow 0$)

3. 等价于证

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\varepsilon}{a^x} = 0$$

以及

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^x} = 0$$

其中前两个在第四章第二节第一题中已证。故只需证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^x} = 0$ ($a > 1$) 当 x 充分大时, $\frac{a}{x} < 1$ 且 $x > 1$ 有

$$0 < \left(\frac{a}{x}\right)^x < \frac{a}{x}$$

令 $x \rightarrow +\infty$ 有 $\frac{a}{x} \rightarrow 0$ 由夹逼准则可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{x}\right)^x = 0$$

4. (1)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin^2 x}{e^x} + 1\right)}{\ln\left(\frac{x^2}{e^{2x}} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot e^x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) [\ln(x^2+x) - 2\ln(x+1)] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \ln\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \cdot \left(-\frac{1}{1+x}\right) = -1 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[6]{1+x}}{\sqrt[3]{1+x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[6]{1+x}}{\frac{1}{3}x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\frac{1}{3}x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[6]{1+x} - 1}{\frac{1}{3}x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{3}x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x}{\frac{1}{3}x} = 1 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 1 \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3 + 2 \sin x)^x - 3^x}{\frac{\tan^2 x}{3^x \left[\left(1 + \frac{2}{3} \sin x\right)^x - 1 \right]}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x \left[\left(1 + \frac{2}{3} \sin x\right)^x - 1 \right]}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln \left(1 + \frac{2}{3} \sin x\right)} - 1}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln \left(1 + \frac{2}{3} \sin x\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{2}{3} \sin x}{x^2} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin t}{t} \right)^{\frac{1}{t^2}} \\
&= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \ln \left(\frac{\arcsin t}{t} \right)} \\
&= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{\arcsin t}{t} - 1 + 1 \right)}{t^2}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t - t}{t^2}} \\
&= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t - t}{t^3}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t - t}{\arcsin^3 t}} \quad (\arcsin t \sim t)
\end{aligned}$$

令 $x = \arcsin t$, 故 $t \rightarrow 0 \quad x \rightarrow 0$

$$\text{原式} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{3x^2}} = e^{\frac{1}{6}}$$

4.5 对于教学的建议

4.5.1 参考题

1. 不妨设 $f(x)$ 单调递增, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ 可知 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时有 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ 令 $\delta = x_n - a$, 则 $\forall x \in (a, x_n)$, 存在 c 满足 $a < x < c$, 取 $\varepsilon = c - a$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 知 $\exists K$, 当 $k > K$ 时

$$|x_k - a| < c - a$$

又由于 $x_k > a$ 恒成立, 故 $x_k < c$ 取 x_{n+k} 知 $n+k > N$ 时有

$$|f(x_{n+k}) - A| < \varepsilon$$

又由 $n+k > K$ 知 $x_{n+k} < c < x$, 即无论 x 取 (a, x_n) 中任意数, 有 n, k 使得

$$a < x_{n+k} < x < x_n$$

又由于 $f(x)$ 单调递增则

$$f(x_{n+k}) < f(x) < f(x_n)$$

又 $|f(x_n) - A| < \varepsilon, |f(x_{n+k}) - A| < \varepsilon$, 则

$$A - \varepsilon < f(x_{n+k}) < f(x) < f(x_n) < A + \varepsilon$$

即 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 故 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$

2. (反证法) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq a, \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N, \exists n > N$, 使得

$$|x_n - a| \geq \varepsilon_0$$

又由 $x_n \in [a, b]$ 知 $x_n \geq a + \varepsilon_0$, 取 $\varepsilon = f\left(a + \frac{\varepsilon_0}{2}\right) - f(a)$, $\forall N, \exists n > N$ 有

$$\begin{aligned} x_n &\geq a + \varepsilon_0, \quad |f(x_n) - f(a)| = f(x_n) - a \\ &\geq f(a + \varepsilon_0) - f(a) > f\left(a + \frac{\varepsilon_0}{2}\right) - f(a) = \varepsilon \end{aligned}$$

知

$$|f(x_n) - f(a)| > \varepsilon$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq f(a)$ 矛盾, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

3. (1) 成立, \Rightarrow : 由 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 知 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$\forall \delta > 0, \exists N$ 当 $n > N$ 时, $0 < |x_n - a| < \delta$, 则有

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$

\Leftarrow : (反证法), 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq A$, 则不妨设 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq A$

$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, 0 < x - a < \delta$ 中存在 x , 使得

$$|f(x) - A| \geq \varepsilon_0$$

取 $\delta_1 = 1, \exists x_1 \in \{x \mid 0 < x - a < 1\}$ 使得

$$|f(x_1) - A| \geq \varepsilon_0$$

取 $\delta_2 = \min\left\{\frac{1}{2}, x_1 - a\right\}$, 知 $\exists x_2 \in \{x \mid 0 < x - a < \delta_2\}$ 有

$$|f(x_2) - A| \geq \varepsilon_0$$

..... 依次下去

取 $\delta_n = \min\left\{\frac{1}{n}, x_{n-1} - a\right\}$, 知 $\exists x_n \in \{x \mid 0 < x - a < \delta_n\}$

$$|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$$

故 x_n 单调递减趋于 a , 但是 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq A$ 矛盾, 故 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

(2) 成立, \Rightarrow : 由 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 知 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$\forall \delta > 0, \exists N$ 当 $n > N$ 时, $0 < |x_n - a| < \delta$, 则有

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$

\Leftarrow : (反证法), 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq A$, 则 $\exists \varepsilon_0, \forall \delta > 0, \exists x \in O_\delta(a) - \{a\}$ 使得

$$|f(x_1) - A| \geq \varepsilon_0$$

取 $\delta_1 = 1, \exists x_1 \in O_{\delta_1}(a) - \{a\}$, 使得

$$|f(x_1) - A| \geq \varepsilon_0$$

取 $\delta_2 = \min \left\{ \frac{1}{2}, |x_1 - a| \right\}$, $\exists x_2 \in O_{\delta_2}(a) - \{a\}$, 使得

$$|f(x_2) - A| \geq \varepsilon_0$$

..... 依次下去

取 $\delta_n = \min \left\{ \frac{1}{n}, |x_{n-1} - a| \right\}$, $\exists x_n \in O_{\delta_n}(a) - \{a\}$ 有

$$|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$$

则可知 $\{x_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $x_n \neq a$, $|x_{n+1} - a| < |x_n - a|$, 但是 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq A$ 矛盾, 故 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

4.

$$\begin{aligned} \sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} &= 2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \\ &= 2 \sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \end{aligned}$$

令 $t = \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}$, 则

$$\text{原极限} = \lim_{t \rightarrow 0} 2 \sin t \cos \frac{1}{4t} = 0$$

当 $\alpha \geq 1$ 时, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin t \cos \frac{1}{4t}}{t^\alpha}$ 不存在; 当 $\alpha < 1$ 时, 极限为 0

5. (i) 若 $a > 1$ 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(a^x - 1) - \ln x(a-1)}{x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a^x - 1) - \ln x(a-1)}{x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a^x - 1)}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a-1)x}{(a-1)x} \cdot (a-1)} \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a^x - 1)}{x} = \ln a$$

故原极限 = a

(ii) 若 $0 < a < 1$ 则

$$\begin{aligned} \text{原极限} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(1-a^x) - \ln x(1-a)}{x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1-a^x)}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln(1-a)}{x}} \end{aligned}$$

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1-a^x)}{x} = 0$, 故原极限 = 1

6. (1) $\forall x$ 有

$$|f(x)| \leq |\sin x| \leq |x|$$

当 $x \neq 0$ 时, 有 $\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq 1$, 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = a_1 + 2a_2 \cdots + na_n$$

故

$$\left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \right| = |a_1 + 2a_2 \cdots + na_n| \leq 1$$

(2) $x > 0$ 时, 有

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq 1$$

由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} a_1 \frac{\ln(1+x)}{x} \cdots + a_n \frac{\ln(1+nx)}{x} \\ &= a_1 + 2a_2 \cdots + na_n \end{aligned}$$

故

$$\left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \right| = |a_1 + 2a_2 \cdots + na_n| \leq 1$$

7. 由于

$$\sin nx = n \sin x \left(1 - \frac{n^2-1}{3} \sin^2 x + o(\sin^2 x) \right)$$

则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - n \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{n(n^2-1)}{3} \sin^3 x + o(\sin^3 x)}{x^3} \\ &= -\frac{n(n^2-1)}{3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(\sin^3 x)}{\sin^3 x} \cdot \frac{\sin^3 x}{x^3} \\ &= -\frac{n(n^2-1)}{3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(\sin^3 x)}{\sin^3 x} = -\frac{n(n^2-1)}{3} \end{aligned}$$

8. (1) 若 x 为有理数 $x = \frac{p}{q}$, 取 $m > q$ 知 $m!x$ 为整数, 故 $\cos(\pi m!x)^{2n} = 1$

(2) 若 x 为无理数, 则无论 m 取何值, $\cos(\pi m!x)$ 中 $xm!x \neq kx (k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$

故 $|\cos(\pi m!x)| < 1$ 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\cos(\pi m!x)]^{2n} = 0$$

故 $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} [\cos(\pi m!x)]^{2n} = 0$

9. (1) 在 $(0, +\infty)$ 上任取一个数 x_0 , 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ (A 为有限数) $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $x > N$ 时

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$f(x_0) = f(2x_0) \cdots = f(2^m x_0) \cdots$$

则存在 m 使得 $2^m x_0 > N$, 则

$$|f(2^m x_0) - A| < \varepsilon$$

故 $|f(x_0) - A| < \varepsilon$, 由 ε 的任意性可得 $f(x_0) = A$ 再由 x_0 的任意性可得 $f(x) = A$

(2) 若 $0 < a < 1$ 则

$$f(x) = f(ax) = \cdots = f(a^n x)$$

可得

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a^n x) = f(0^+)$$

若 $a > 1$ 则

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a^n x) = f(+\infty)$$

10. f 在 $x = 0$ 附近有界, 故 $\exists \delta$ 使得 $x \in O_\delta(0) - \{0\}$ 时有 $|f(x)| < M$, 由 $f(ax) = bf(x)$ 知 $x \in O_{\frac{\delta}{a}}(0) - \{0\}$ 时 $|f(x)| < \frac{M}{b}$ 以此类推可得 $x \in O_{\frac{\delta}{a^n}}(0) - \{0\}$ 时有 $|f(x)| < \frac{M}{b^n}$
 $\forall \varepsilon > 0, \exists m$ 使得 $\frac{M}{b^m} < \varepsilon$, 令 $\delta' = \frac{\delta}{a^m}$ 则 $\forall x \in O_{\delta'}(0) - \{0\}$ 有

$$|f(x)| < \frac{M}{b^m} < \varepsilon$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

11. 对于 $1 \leq a \leq 2$, 因为 f 单调递增, 可知

$$\frac{f(x)}{f(x)} \leq \frac{f(ax)}{f(x)} \leq \frac{f(2x)}{f(x)}$$

由夹逼准则可得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(ax)}{f(x)} = 1$;

对于 $0 < a < 1$, 存在 n 使得 $\frac{1}{2^n} \leq a < \frac{1}{2^{n-1}}$, 此时有

$$\frac{f(\frac{x}{2^n})}{f(x)} \leq \frac{f(ax)}{f(x)} \leq \frac{f(\frac{x}{2^{n-1}})}{f(x)}$$

因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f(2x)} = 1$, 所以

$$\frac{f(\frac{x}{2^n})}{f(x)} = \frac{f(\frac{x}{2^n})}{f(\frac{x}{2^{n-1}})} \cdot \frac{f(\frac{x}{2^{n-1}})}{f(\frac{x}{2^{n-2}})} \cdots \frac{f(\frac{x}{2})}{f(x)} = \frac{f(\frac{x}{2^n})}{f(\frac{x}{2^n})} \cdot \frac{f(\frac{x}{2^{n-1}})}{f(\frac{x}{2^{n-1}})} \cdots \frac{f(\frac{x}{2})}{f(\frac{x}{2})} \rightarrow 1, (x \rightarrow +\infty)$$

再次由夹逼准则可得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(ax)}{f(x)} = 1$;

对于 $a > 2$, 经过和 $0 < a < 1$ 类似的讨论后, 可得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(ax)}{f(x)} = 1$, 综上, 对于

$a > 0$, 均有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(ax)}{f(x)} = 1$

12. 利用下面第 14 题, 取 $T = 1$, $g(x) = x$ 即可

13. 利用下面第 14 题, 取 $T = 1$, $g(x) = x^{n+1}$ 可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1)^{n+1} - x^{n+1}}$$

而

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{(n+1)x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1)^{n+1} - x^{n+1}} \cdot \frac{(x+1)^{n+1} - x^{n+1}}{(n+1)x^n}$$

又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^{n+1} - x^{n+1}}{(n+1)x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)x^n + C_{n+1}^2 x^{n-1} \cdots + (n+1)x + 1}{(n+1)x^n} = 1$$

故

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{(n+1)x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1)^{n+1} - x^{n+1}}$$

14. (i) 当 l 为有限数时, 由

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} = l$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 (M \geq a), \forall x > M$, 有

$$\left| \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} - l \right| < \varepsilon$$

由题意, 进而有

$$\begin{aligned} (l - \varepsilon)[g(x+T) - g(x)] &< f(x+T) - f(x) \\ &< (l + \varepsilon)[g(x+T) - g(x)] \quad (1) \end{aligned}$$

对 $\forall x \in (M, M+T], \forall n \in N_+$, 有 $x+nT > M$, 由 (1) 式, 依次有

$$\begin{aligned} (l - \varepsilon)[g(x+2T) - g(x+T)] &< f(x+2T) - f(x+T) \\ &< (l + \varepsilon)[g(x+2T) - g(x+T)] \\ (l - \varepsilon)[g(x+3T) - g(x+2T)] &< f(x+3T) - f(x+2T) \\ &< (l + \varepsilon)[g(x+3T) - g(x+2T)] \\ &\dots\dots \\ (l - \varepsilon)[g(x+nT) - g(x+(n-1)T)] &< f(x+nT) - f(x+(n-1)T) \\ &< (l + \varepsilon)[g(x+nT) - g(x+(n-1)T)] \end{aligned}$$

将上面的式子相加, 得到

$$\begin{aligned} (l - \varepsilon)[g(x+nT) - g(x)] &< f(x+nT) - f(x) \\ &< (l + \varepsilon)[g(x+nT) - g(x)] \end{aligned}$$

注意到 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, 故 $g(x+nT) > 0$, 有

$$\begin{aligned} (l - \varepsilon) \left[1 - \frac{g(x)}{g(x+nT)} \right] + \frac{f(x)}{g(x+nT)} &< \frac{f(x+nT)}{g(x+nT)} \\ &< (l + \varepsilon) \left[1 - \frac{g(x)}{g(x+nT)} \right] + \frac{f(x)}{g(x+nT)} \end{aligned}$$

由于 $f(x), g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 内闭有界, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{g(x)}{g(x+nT)} \right) = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x+nT)} = 0$$

故对上述 $\varepsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n > N, \forall x \in (M, M+T]$, 有

$$\left| \frac{f(x+nT)}{g(x+nT)} - l \right| < (l+1)\varepsilon + \varepsilon^2$$

于是, $\forall y > M+NT, \exists x_0 \in (M, M+T], \exists n > N$ 使得

$$\begin{aligned} y &= x_0 + nT \\ \left| \frac{f(y)}{g(y)} - l \right| &= \left| \frac{f(x_0 + nT)}{g(x_0 + nT)} - l \right| < (l+1)\varepsilon + \varepsilon^2 \end{aligned}$$

故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

(ii) 当 $l = +\infty$, 由

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} = +\infty$$

$\forall G > 0, \exists M > 0, \forall x > M$, 有

$$\frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} > G$$

对 $\forall x \in (M, M+T], \forall n > N_+$, 有 $x+nT > M$, 所以

$$\begin{aligned} f(x+T) - f(x) &> G[g(x+T) - g(x)] > 0 \\ f(x+2T) - f(x+T) &> G[g(x+2T) - g(x+T)] > 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$f(x+nT) - f(x+(n-1)T) > G[g(x+nT) - g(x+(n-1)T)] > 0$$

将上面的式子相加, 得到

$$\frac{f(x+nT) - f(x)}{g(x+nT)} > G \left[1 - \frac{g(x)}{g(x+nT)} \right] + \frac{f(x)}{g(x+nT)}$$

由于 $f(x), g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 内闭有界, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{g(x)}{g(x+nT)} \right) = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x+nT)} = 0$$

故对上述 $G > 0, \exists N \in N_+, \forall n > N, \forall x \in (M, M+T]$, 有

$$\frac{f(x+nT)}{g(x+nT)} > G$$

于是, $\forall y > M+NT, \exists x_0 \in (M, M+T], \exists n > N$, 使

$$\frac{f(y)}{g(y)} = \frac{f(x_0+nT)}{g(x_0+nT)} > G$$

故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

(iii) 当 $l = -\infty$, 只需令 $h(x) = -f(x)$, 利用 (ii) 的结果即可证明。

15. 由

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = 0$$

知 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta, 0 < |x| < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \right| < \varepsilon$$

在 $0 < |x| < \delta$ 任取一点 x_0 则

$$\left| f(x_0) - f\left(\frac{x_0}{2}\right) \right| < \varepsilon |x_0| \dots \dots (1)$$

$$\left| f\left(\frac{x_0}{2}\right) - f\left(\frac{x_0}{2^2}\right) \right| < \varepsilon \left| \frac{x_0}{2} \right| \dots \dots (1)$$

...

$$\left| f\left(\frac{x_0}{2^{m-1}}\right) - f\left(\frac{x_0}{2^m}\right) \right| < \varepsilon \cdot \frac{|x_0|}{2^{m-1}} \dots \dots (m)$$

由于 $\varepsilon, |x_0|$ 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 故对于 $\varepsilon \cdot |x_0|$, $\exists M > 0$, $m > M$ 时, 有

$$\left| f\left(\frac{x_0}{2^m}\right) \right| < \varepsilon |x_0|$$

(1) + (2) \cdots + (m) 可得

$$\begin{aligned} \left| f(x_0) - f\left(\frac{x_0}{2^m}\right) \right| &< \left| f(x_0) - f\left(\frac{x_0}{2}\right) \right| + \cdots + \left| f\left(\frac{x_0}{2^{m-1}}\right) - f\left(\frac{x_0}{2^m}\right) \right| \\ &< \varepsilon x_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} \right) < 2\varepsilon |x_0| \end{aligned}$$

再由

$$\begin{aligned} |f(x_0)| &< \left| f(x_0) - f\left(\frac{x_0}{2^m}\right) \right| + \left| f\left(\frac{x_0}{2^m}\right) \right| \\ &< \varepsilon |x_0| + 2\varepsilon |x_0| = 3\varepsilon |x_0| \end{aligned}$$

知

$$\left| \frac{f(x_0)}{x_0} \right| < 3\varepsilon$$

即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta, \forall x_0 \in \{x | 0 < |x| < \delta\}$ 时, 有

$$\left| \frac{f(x_0)}{x_0} \right| < 3\varepsilon$$

即 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 故 $f(x) = o(x) \quad (x \rightarrow 0)$

第5章 连续函数

5.1 连续性概念

5.1.1 思考题

1. 有定义知 f^2 和 $|f|$ 在 a 处连续, 但是反之不成立, 例如:

$$f = \begin{cases} 1 & x \text{ 为有理数} \\ -1 & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

它在定义域上任意一点 a 都不连续, 但是 f^2 和 $|f|$ 再 a 处连续。

2. 不一定

$f + g$ 连续: $f = \operatorname{sgn} x, g = -\operatorname{sgn} x$, 考虑在 $x = 0$ 处的情形;

$f + g$ 不连续: $f = \operatorname{sgn} x, g = \operatorname{sgn} x$ 考虑在 $x = 0$ 处的情形;

$f \cdot g$ 连续:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

考虑在 $x = 0$ 处的情形;

$f \cdot g$ 不连续: $f = g = \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处。

3. 任取 (a, b) 内一点 x_0 , 则存在 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 包含 x_0

$\therefore f$ 在 a, b 内每个闭区间连续

$\therefore f$ 在 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 上连续

$\therefore f$ 在 x_0 连续

\therefore 由 x_0 任意性, 知 f 在 a, b 上连续

4. (1) f 在 R 上连续

(2) f 在除 $x = 0$ 外连续, $x = 0$ 为第二类间断点

(3) f 在 $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ 连续, $x = 0$ 为第一类间断点

5. (1) $x = 0$ 为第一类间断点 (跳跃间断点)

(2) x 为整数时为第一类间断点 (跳跃间断点)

(3) x 为整数时为可去间断点

(4) $g(f(x))$ 在定义域上无间断点

(5) $x = -1$ 为第二类间断点 (无穷间断点); $x = 0$ 为可去间断点; $x = 1$ 为可去间断点

(6) $y(x)$ 的定义域为 $[-1, 0) \cup (0, 1], x = \frac{1}{p}$ (p 是不为 0 的整数) 为跳跃间断点; $x = 0$ 为可去间断点

5.1.2 练习题

1. 两个叙述:

(a). $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$

(b). 存在 x_n , 虽 x_n 收敛于 a , 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq f(a)$

要证: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow$ 任何以 x_0 为极限的数列 $x_n (x_n \neq x_0)$, 有 $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

必要性:

$\because \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

但 $x_n \rightarrow x_0$, 故对此 $\delta > 0$, 有正整数 N , 当 $n > N$ 时, $|x_n - x_0| < \delta$

又因 $x_n \neq x_0$, 故 $|x_n - x_0| < \delta$ 可改为 $0 < |x_n - x_0| < \delta$

而对适合这个不等式的 n , 显然有 $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$, 当 $n > N$ 时成立, 这就证明了 $\{f(x_n)\}$ 以 $f(x_0)$ 为极限

充分性:

(反证法) 假设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$, 则对某个 $\varepsilon > 0$, 不能找到极限定义中的 δ , 即对任意 $\delta > 0$, 都可以找到 $x', 0 < |x' - x_0| < \delta$, 使 $|f(x') - f(x_0)| \geq \varepsilon$. 若取 δ 为 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$, 得到 x_1, x_2, x_3, \dots , 适合

$$0 < |x_1 - x_0| < 1, \quad |f(x_1) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

$$0 < |x_2 - x_0| < \frac{1}{2}, \quad |f(x_2) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

.....

可看出 $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty), x_n \neq x_0$, 而 $f(x_n)$ 不以 $f(x_0)$ 为极限, 与假设矛盾, 证毕。

2. (1) x 为整数时为第一类间断点 (跳跃间断点)

(2) $f(x)$ 无间断点

(3) x 为整数时为第一类间断点 (可去间断点)

(4) $x = -1$ 时为第二类间断点 (无穷间断点); $x = 0$ 及 $x = 1$: 第一类间断点 (跳跃间断点)

3. (反证法) 假设不存在这么一个 $\varepsilon \in [a, b]$, 使得 $f(\varepsilon) = A$. 记 f 在 x_0 处取到最大值 $f(x_0)$, 在 x_1 处取最小值 $f(x_1)$. 因 f 连续, 故 f 可取遍 $[f(x_1), f(x_0)]$ 中所有值. 故由假设, 知 $A > f(x_0)$ 或 $A < f(x_1)$. 考虑 $A > f(x_0)$ ($A < f(x_1)$ 同理), 记 $m = A - f(x_0)$, 则对 $[a, b]$ 中任一 x_n , 无论 n 多大, 都有 $|f(x_n) - A| \geq |f(x_0) - A| > \frac{m}{2}$, 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ 矛盾! 结论证完。

4. (a). $x = 0$ 时, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

(b). $x < 0$ 时, $f(x) = f(x^2) = f(1)$

(c). $x > 0$ 时, 由题意,

$$f(x) = f\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = f\left(x^{\frac{1}{4}}\right) = \dots + f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right)$$

故

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(1)$$

综上

$$f(x) \equiv f(1)$$

5.

$$\max\{f, g\} = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$$

$$\min\{f, g\} = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$$

可得 $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in C(I)$

6.

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) - \max\{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\} - \min\{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$$

由第五题结论及连续性质, 知 $f(x)$ 连续

7. $f_n(x) = \max\{-n, \min\{f(x), n\}\}$, 则 $f(x)$ 连续 $\Rightarrow f_n(x)$ 连续

$f_n(x)$ 连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $(-n, n]$ 连续, 对 $\forall n$ 成立, 故 $f_n(x)$ 连续。

8. 任取定义域上有理点 x_0 , 则 $D(x_0) = 1$, 任取一收敛于 x_0 的无理点列 x_n , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n) = 0 \neq 1$, 再取一收敛于 x_0 的有理点列 $\{t_n\}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} D(t_n) = 1$, $\therefore D(x)$ 在 x_0 处极限不存在 $\therefore D(x)$ 在 x_0 不连续, 且为第二类间断点。由 x_0 任意性, 知 $D(x)$ 在所有有理点均不连续, 且所有有理点均为第二类间断点。当所考虑的点为无理点, 也可做类似讨论, 并得出同样的结果。综上可知 $D(x)$ 处处不连续。

9. 例:

$$f = \begin{cases} x, & x \text{ 是有理数} \\ -x, & x \text{ 是无理数} \end{cases}$$

$f(x)$ 只在 $x = 0$ 处连续

10. 若 $\exists x_0$ 使得 $f(x_0) = 0$, 则 $\forall x$, 有

$$f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x_0) f(x - x_0) = 0$$

则设 $f(x)$ 不变号, 则

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f^2\left(\frac{x}{2}\right) > 0$$

故 $f(x)$ 恒正, 令 $g(x) = \ln f(x)$, 则

$$g(x+y) = g(x) + g(y)$$

可得 $g(x) = g(1)x \Rightarrow \ln f(x) = x \ln f(1) \Rightarrow f(x) = (f(1))^x$

11.

$$\therefore f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}[f(x) + f(y)]$$

$\therefore f(x)$ 即是凸函数也是凹函数, 又因 $f(x)$ 连续, 故 f 为 R 上的线性函数

$\therefore f$ 在 R 上每一点斜率相同, 任意 f 上两点连线斜率相同

$$\therefore \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$

即

$$f(x) = [f(1) - f(0)]x + f(0)$$

12. \Leftarrow :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} w_f(a, \delta) = 0$$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x \in O_\delta(a)$ 时, 有

$$|f(x) - f(a)| < w_f(a) = \varepsilon$$

$\therefore f$ 在 a 连续

\Rightarrow :

$\therefore f$ 在 a 处连续

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x \in O_\delta(a)$ 时, 有

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\therefore w_f \leq 2|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

即

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} w_f(a, \delta) = 0$$

5.2 零点存在定理与介值定理

5.2.1 练习题

1. 考虑 $[x_1, x_n]$ 上的

$$F(x) = f(x) - \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

显然 F 在 $[x_1, x_n]$ 上连续

若 x_1, x_2, \cdots, x_n 同为 $[x_1, x_n]$ 上的最大值 (最小值同理), 则取 $\varepsilon = x_1$ 即满足题意

以下考虑 x_1, x_2, \cdots, x_n 不全为 $[x_1, x_n]$ 上的最大 (小) 值的情况:

由闭区间连续函数性质, $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 必有最值. 设 f 在 x_0 处取得最大值, 在 x_1 取最小值, 则有

$$\begin{aligned} nf(x_1) &< f(x_1) + \cdots + f(x_n) < nf(x_0) \\ \therefore F(x_0) &= \frac{nf(x_0) - [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]}{n} > 0, F(x_1) < 0 \end{aligned}$$

由零点存在定理, 存在 $\varepsilon \in [x_1, x_n]$, 使得 $F(\varepsilon) = 0$, 即

$$f(s) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

2. 设圆周

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y); (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2\} \\ &= \{(x_0 + R \cos \theta, y_0 + R \sin \theta), \theta \in R\} \end{aligned}$$

定义 $g: R \rightarrow R$ 为

$$g(\theta) = f(x_0 + R \cos \theta, y_0 + R \sin \theta)$$

则 g 为周期为 2π 的函数

再定义

$$h(\theta) = g(\theta) - g(\theta + \pi), \theta \in [0, 2\pi]$$

则

$$h(0) \cdot h(\pi) = [g(0) - g(\pi)] \cdot [g(\pi) - g(2\pi)] < 0$$

\therefore 由介值定理, $\exists 0 \leq \varepsilon \leq \pi$, s.t. $h(\varepsilon) = 0$, 即 $g(\varepsilon) = g(\varepsilon + \pi)$, 即 $f(\varepsilon) = f(\varepsilon + \pi)$, 原结论得证。

3. 设 $x_j = \frac{j\pi}{n}$ ($0 \leq j \leq 2n$), 则 $C_n(x_j) = \sum_{k=0}^n a_k \cos kx_j$, 因 $\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| < a_n$, 故当 k 为奇数时 (偶数同理):

$$C_n(x_{k+1}) = a_0 + a_1 \cos x_{k+1} + \cdots + a_{n-1} \cos(n-1)x_{k+1} + a_n > 0$$

$$C_n(x_k) = a_0 + a_1 \cos x_{k+1} + \cdots + (-a_n) < 0$$

\therefore 由介值定理, $C_n(x)$ 在 (x_k, x_{k+1}) ($0 \leq k \leq 2n-1$) 内均有一零点, 即 $C_n(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 内至少有 $2n$ 个零点。

4. 设 $f(x) = \frac{a_1}{x-b_1} + \frac{a_2}{x-b_2} + \frac{a_3}{x-b_3}$, 则
- $$\lim_{x \rightarrow b_1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow b_2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow b_2^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow b_3^-} f(x) = -\infty$$
- \therefore 存在足够小的 δ , 使得 $f(b_1 + \delta) > 0, f(b_2 - \delta) < 0, f(b_2 + \delta) > 0, f(b_3 - \delta) < 0$, 再由介值定理知结论成立。

5. (1) 由 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 再由连续函数介值定理可证。
 (2) 可以无实根的例子: $x^2 + 1$, 由 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 以及 $f(0) = a_{2n} < 0$ 知 $f(x)$ 至少有 2 实根

6. 设 $f(x) = x^{17} + \frac{215}{1 + \cos^2 3x} - 18$, 则 $x^{17} + \frac{215}{2} - 18 \leq f(x) \leq x^{17} + 215 - 18$
 故 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 由介值定理知结论成立

7. 结论: f 必为常数, 结论如下:

假设 f 不是常数, 设 f 最大值为 M , 最小值为 m , 则由介值定理, 对 $[m, M]$ 的某一无理数 y_0 , 必存在 x_0 , 使得 $f(x_0) = y_0$, 故 f 可取无理数, 这与 f 只取有理数矛盾。

8. (反证法) 假设存在 $a \leq x_1 < x_2 < b$, 使得 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 则有以下情况:

- $f(x_1) = f(x_2)$
- $f(a) \geq f(x_1) > f(x_2)$
- $f(x_1) > f(a) \geq f(x_2)$
- $f(x_1) > f(x_2) \geq f(a)$

无论何种情形与 f 是一一映照矛盾, 结论得证。第二问可类似证明。

9. 由 $f(-\infty) = A < C = B = f(+\infty)$, 故存在 $X > 0$, 使得 $x \leq -X \Rightarrow f(x) < C$,

$x \geq x \Rightarrow f(x) > C$, 故在 $[-X, X]$ 上用介值定理, 即得结论。

10. 假设 $A < B$ ($A > B$ 同理)

$$\because \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A < \eta < B = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$$

$$\therefore \exists N, \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow f(x_n) < \eta < f(y_n)$$

\therefore 由介值定理, 存在

$$\frac{x_n + y_n - |x_n - y_n|}{2} = \min \{x_n, y_n\} \leq z_n$$

由夹逼原理及 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = b$$

5.3 有界性定理与最值定理

5.3.1 练习题

- 由第三章第一组参考题的第三题可得, 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上每一个点的邻域均有界, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, $f(x)$ 在第一类间断点和连续点的邻域内均有界, 故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界。
- 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则 $\exists X > a, \text{ s.t. } x \geq X \Rightarrow |f(x) - A| < 1 \Rightarrow |f(x)| \leq |A| + 1$, 又因 f 在 $[a, X]$ 上连续, 故 f 有界, 不妨设为 B , 则

$$x \in [a, +\infty) \Rightarrow \begin{cases} a \leq x \leq X \Rightarrow |f(x)| \leq B \\ x \geq X \Rightarrow |f(x)| \leq |A| + 1 \end{cases} \Rightarrow |f(x)| \leq |A| + B + 1$$

- (a). 存在。例: $f(x) = \tan \left[\pi \left(x - \frac{1}{2} \right) \right]$
(b). 不存在, 因闭区间上函数必有界
(c). 存在。例: $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$
- 不一定。反例: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$, 在 $[-1, 1]$ 上不连续点为 $x = 1$
例: $f(x) = x^2, x \in [-1, 1]$, 则 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续
- 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则 $\exists X > a, \text{ s.t. } x \geq X \Rightarrow |f(x) - A| < 1 \Rightarrow |f(x)| \leq |A| + 1$, 又由 f 在 $[a, X]$ 上连续, 知 $\exists \varepsilon, \eta \in [a, X], \text{ s.t. } f(\varepsilon) = \max_{[a, X]} f, f(\eta) = \min_{[a, X]} f$
若 $A \geq f(\varepsilon)$, 则 $f(\eta) = \min_{[a, +\infty)} f$
若 $A < f(\varepsilon)$, 则 $f(\varepsilon) = \max_{[a, +\infty)} f$
- 由 $f(a^+) = f(b^-) = +\infty$, 知

$$\exists 0 < \delta < \frac{b-a}{2}, \text{ s.t. } a < x < a + \delta \text{ 或 } b - \delta < x < b \Rightarrow f(x) \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

因 f 在 $[a + \delta, b - \delta]$ 上连续, 故能取最小值, 即

$$\exists \varepsilon \in [a + \delta, b - \delta], \text{ s.t. } f(\varepsilon) = \min_{[a + \delta, b - \delta]} f$$

又由

$$a < x < a + b \text{ 或 } b - \delta < x < b \Rightarrow f(x) \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq f(\varepsilon)$$

故 f 在 $\varepsilon \in (a, b)$ 处取得最小值。

7. 补充定义 $f(a) = f(a^+)$, $f(b) = f(b)$, 则 f 在 $[a, b]$ 上连续

假设 f 在 $[a, b]$ 中的 ε 处取最大值, η 处取最小值, 不妨记为 M, m

(a). 若 $M = m$, 则 $f(x)$ 为常值函数, 结论已证

(b). 若 $m < M$, 则 $M \neq f(a)$ 或 $m \neq f(b)$ 。不妨设 $M > f(a)$, 则由 $M \neq f(a)$ 知存在 $\varepsilon \in (a, b)$, 使得 $f(\varepsilon) = M$ 。这表明 f 可在 (a, b) 取最大值, 最小值同理可证。

综上可知, 原结论成立。

8. 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 知 $\exists x_1 > a$, s.t. $f(x_1) > a$, 再由 $f(a) < a < f(x_1)$ 及介值定理, 知 $\exists \varepsilon_1 \in (a, x_1)$, s.t. $f(\varepsilon_1) = a$, 由 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ 知 $\exists x_2 < a$, s.t. $f(x_2) > a$, 再由 $f(a) < a < f(x_2)$ 及介值定理, 知 $\exists \varepsilon_2 \in (x_2, a)$, s.t. $f(\varepsilon_2) = a$, 又因为 f 在 $x = a$ 取最小值, 故对任意 $x \in R$, 有 $f(f(x)) \geq f(a)$, 综上, 有:

$$\exists \varepsilon_2 < a < \varepsilon_1, \quad \text{s.t. } f(\varepsilon_1) = f(\varepsilon_2) = a \Rightarrow f(f(\varepsilon_1)) = f(f(\varepsilon_2)) = f(a)$$

即 $f(f(x))$ 至少在两个点上取最小值

- 9.

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in R \setminus Q \end{cases} \quad R(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}, & x = \frac{p}{q} \in [0, 1], (q, 9) = 1, (p, q) = 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

显然有理点为 $D(x)$ 极大值点和最大值点; 无理点为 $D(x)$ 极小值点和最小值点

显然无理点为 $R(x)$ 极小值点, 最小值点; 1 为 $R(x)$ 最大值点

又因 $[0, 1]$ 上任一点 x_0 , $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0$, 故对任一有理点 x_0 , 存在 x_0 的邻域 $O_\delta(x_0)$, 使得 $x \in O_\delta(x_0) - \{x_0\}$ 时, $R(x) < R(x_0)$, 故 x_0 为 $R(x)$ 极大值点, 故有理点为 $R(x)$ 极大值点

5.4 一致连续性与 Cantor 定理

5.4.1 练习题

1. $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t. $x_1, x_2 \in I$, $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| < L\delta = \varepsilon$

2. 由 f 在 $[a, b]$ 上一致连续, 故取 $\varepsilon = 1$, 则存在 $\delta > 0$, s.t. $x_1, x_2 \in (a, b)$, $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < 1$, 取 $n \in Z_+$, s.t. $\frac{b-a}{n} < \delta$ 将 (a, b) n 等分, 记分点 $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ ($k = 0, 1, \dots, n$), 则有

$$x \in (a, b) \Rightarrow \exists 0 \leq k \leq n-1, \text{ s.t. } x_k \leq x \leq x_{k+1} \Rightarrow \left| x - \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \right| \leq x_{k+1} - x_k < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq \left| f(x) - f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \right| + \left| f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \right| \leq 1 + \max_{0 \leq k \leq n-1} \left| f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \right|$$

3. (a). 是。由之前的结论, 知 f, g 均有界, 故 $\exists M > 0$, s.t. $x \in I \Rightarrow |f(x)| \leq M, |g(x)| \leq M$, 再由 f, g 在 I 上一致连续, 故 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, s.t. $x_1, x_2 \in I$

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \\ |g(x_1) - g(x_2)| < \epsilon \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |(af + bg)(x_1) - (af + bg)(x_2)| \leq |a||f(x_1) - f(x_2)| + |b||g(x_1) - g(x_2)| < (|a| + |b|)\epsilon \\ |(fg)(x_1) - (fg)(x_2)| \leq |f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| + |f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_2)| \leq 2M\delta \end{cases}$$

- (b). 是。因为 g 在 I_2 上一致连续, 故 $\forall \delta > 0, \exists \delta > 0$, s.t. $y_1, y_2 \in I_2, |y_1 - y_2| < \delta \Rightarrow |f(y_1) - f(y_2)| < \epsilon$; 又因为 f 在 x_1 一致连续, 故

$$\exists \delta > 0, \text{ s.t. } x_1, x_2 \in I_1, |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \delta' \Rightarrow |g \cdot f(x_1) - g \cdot f(x_2)| < \epsilon$$

4. 设 f 周期为 $T > 0$, 则由 f 连续知其 $[-T, 2T]$ 一致连续

对 $x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta$, 可设 $x \in [kT, (k+1)T]$ 而 $y \in [(k-1)T, (k+2)T]$, 故

$$|f(x) - f(y)| = |f(x - kT) - f(y - kT)| < \epsilon$$

5. 先做第三问

(a). $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 一致连续, 故结论成立

(b). $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 不一致连续, 故结论不成立

(c). 结论: 当 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 一致连续时, 1 结论成立, 证明如下:

因 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$, 故对 $\forall \epsilon > 0, \exists \Delta > 0$, 当 $x > \Delta$, 有 $|f(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{3}$, 又因 f 一致连续, 故对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$, 当 $|x' - x''| < \delta_1, |f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{3}$, 故对 $\forall x', x'' > \Delta, |x' - x''| < \delta_1$ 时有

$$|g(x') - g(x'')| \leq |g(x') - f(x')| + |f(x') - f(x'')| + |f(x'') - g(x'')| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

又由 Cantor 定理, 知 $g(x)$ 在 $[0, \Delta + 1]$ 一致连续, 故对此 $\epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$, 当 $x', x'' \in [0, \Delta + 1], |x' - x''| < \delta_2$ 时, $|g(x') - g(x'')| < \epsilon$

取 $\delta = \min\{1, \delta_1, \delta_2\}$, 则 $x', x'' \in [0, +\infty), |x' - x''| < \delta$, 有 $|g(x') - g(x'')| < \epsilon$, 证毕。

6.

$$\left| \left(n + \frac{1}{n}\right)^n - n^n \right| = \sum_{k=1}^n C_n^k n^{n-k} \frac{1}{n^k} \geq C_n^1 n^{n-1} \frac{1}{n} = n^{n-1} \geq 1$$

7. (a). $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上满足利普希兹条件, 这是比一致连续更严格的条件, 故一致连续

(b). $\ln \frac{2}{n} - \ln \frac{1}{n} = \ln 2$, 故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 不一致连续

8. (a). 设 $F(x) = \begin{cases} -\sin 1 & x = -1 \\ f(x) & -1 < x < 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$, 则 $F(x)$ 在 $[-1, 0]$ 连续且一致连续, 故

在 $(-1, 0)$ 上也一致连续。考虑 $G(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ f(x), & 0 < x < 1 \\ \sin 1, & x = 1 \end{cases}$ ，同上过程，知

其在 $(0, 1)$ 一致连续。又因 $\left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(-\frac{1}{n}\right) \right| = 2\frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \rightarrow 2(n \rightarrow \infty)$ ，故 $f(x)$ 在 $(-1, 0) \cup (0, 1)$ 不一致连续

(b). 不一定，这里只考虑反例

$$H(x) = \begin{cases} -\frac{\sin x}{x}, & -1 < x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

它在 $(-1, 1)$ 不连续，所以不一致连续

9. (a). $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ ， $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$ ，故由例 5.4.5 知 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 一致连续

(b). $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ ， $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 及例 5.4.6，知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 一致连续

(c).

$$\left| f\left(2k\pi + \frac{1}{k}\right) - f(2k\pi) \right| = \left| (2k\pi + k) \sin \frac{1}{k} - 0 \right| \geq 2k\pi \sin \frac{1}{k} = 2\pi \frac{\sin k}{\frac{1}{k}} \rightarrow 2\pi \quad (k > 0)$$

故 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 非一致连续

5.5 单调函数

5.5.1 练习题

1. 对 $\forall a < c < d < b$ ，考虑 $x \in [c, d]$ ，由题， $\exists \delta_x > 0$ ，s.t. f 在 $O_{\delta_x}(x)$ 上单增，由 $[c, d] \subset \bigcup_{x \in [c, d]} O_{\delta_x}(x)$ 以及加强形式的覆盖定理，知 $[c, d] \subset \bigcup_{i=1}^n O_{\delta_x}(X_i)$ ，且对

$$\forall x, x' \in [c, d], \exists \delta > 0, |x - x'| < \delta \Rightarrow \exists i, \text{ s.t. } x, x' \in O_{\delta_x}(x_i) \Rightarrow f(x') \leq f(x)$$

取 $n \in \mathbb{Z}_+$ ，使 $\frac{d-c}{n} < \delta$ ，将 $[c, d]$ n 等分，记分点 $x_k = c + \frac{k}{n}(d-c)$ ($k = 1, 2, \dots, n$)，

则 $x_k - x_{k-1} = \frac{d-c}{n} < \delta \Rightarrow f(x_{k-1}) \leq f(x_k)$, $k = 1, \dots, n$ ，故 $f(c) = f(x_0) \leq f(x_1) \leq \dots \leq f(x_n) = f(d)$ ，即 f 在 $[a, b]$ 单增

2. 由有理数的稠密性，知 $\forall a \leq x < y \leq b, \exists Q \cap \left(x, \frac{x+y}{2}\right) \ni r_n \rightarrow x$ ， $Q \cap \left(\frac{x+y}{2}, y\right) \ni s_n \rightarrow y$ 故

$$r_n < s_n \Rightarrow f(r_n) \leq f(s_n) \Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n) \leq f(y)$$

3. 不妨设 f 递增，则 $f(x^+) = \inf_{y>x} f(y)$ ，事实上，由下确界定义，对 $\forall \varepsilon > 0, \exists y_1 > x$ s.t. $f(y_1) < \inf_{y>x} f(y) + \varepsilon$ 。故 $x < x' < y_1 \Rightarrow \inf_{y>x} f(y) \leq f(y) \leq f(y_1) < \inf_{y>x} f(y) + \varepsilon$

下证 $g(x) = f(x^+)$ 右连续, 对 $\forall x \in R, \varepsilon > 0$, 由下确界定义

$$\forall \varepsilon > 0, \exists y_1 > x, \text{ s.t. } f(y_1) < \inf_{y > x} f(y) + \varepsilon = f(x^+) + \varepsilon = g(x) + \varepsilon$$

而

$$\forall x < x' < y_1, g(x) \leq g(x') = \inf_{y \geq x'} f(y) \leq f(y_1) < g(x) + \varepsilon \Rightarrow |g(x') - g(x)| < \varepsilon$$

4. 因 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 故 $x = y = 0$ 时, $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, 故 $f(0) = 0$, 又 $f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x)$, 故 $f(x) = -f(-x), \forall x \in R$, 又因 $f(2) = f(1+1) = 2f(1)$, 由归纳法易证 $f(n) = nf(1)$, 对有理数 $\frac{m}{n}, m, n \in N$, 因 $f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$, 故 $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1)$, 故 $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}f(1)$

此时考虑 f , 不妨设 f 单增, 则对 $\forall x \in R$ 取有理数列 $\{x'_n\}, \{x''_n\}$, 使 $x'_n < x < x''_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x'_n = x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x''_n$ 故由 f 单增, 知 $x'_n f(1) = f(x'_n) \leq f(x) \leq f(x''_n) = x''_n f(1)$, 令 $n \rightarrow +\infty$, 则 $xf(1) \leq f(x) \leq xf(1)$, 即 $f(x) = xf(1)$, f 单减同理可证。

5. \Leftarrow : 显然

\Rightarrow : 若 f 在 $[a, b]$ 上不严格单调, 则存在 $x_1 < x_2 < x_3$, 使得

$$f(x_1) > f(x_2), \quad f(x_3) > f(x_2)$$

或者

$$f(x_1) < f(x_2), \quad f(x_3) < f(x_2)$$

故 f 在 (a, b) 内有极值点, 矛盾。

5.6 周期3 蕴涵混沌

5.7 对于教学的建议

5.7.1 第一组参考题

1. 令 $F(x) = f(x+a) - f(x)$, 则 $F(0) = f(a) \geq 0, F(1-a) = -f(1-a) \leq 0$, 故 $\exists x_0 \in [0, 1-a]$ 使得

$$f(x_0) = f(x_0+a)$$

则 $x_0 + a \in [a, 1] \subset [0, 1]$

不可去掉 f 非负的条件, 例如 $f(x) = \sin 2\pi x, a = \frac{2}{3}$ 则若 $f(x_0) \geq 0$, 则 $f(x_0+a) < 0$ 故两者不可能相等。

2. 令 $F(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$, 则

$$F(0) + F\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + F\left(\frac{n-1}{n}\right) = f(1) - f(0) = 0$$

故 $\exists \xi \in \left[0, \frac{n-1}{n}\right]$, 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $f\left(\xi + \frac{1}{n}\right) = f(\xi)$

3. 令 $F(x) = f(x) - x$ 则

$$F(0) = f(0) \geq 0, F(1) = f(1) - 1 \leq 0$$

故 $\exists \xi$ 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = \xi$

令 $g(x) = 1 - f(x)$, 则 $g([0, 1]) \subset [0, 1]$, 则 $g(x)$ 与 $y = x$ 有交点, 即 $f(x)$ 与 $y = 1 - x$ 有交点。

4. 条件为有界。

必要性显然; 下面证明充分性, 不妨设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不存在, 则 $M = \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x) > m =$

$\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, 则 $f(x) = \frac{M+m}{2}$ 有无穷多解, 矛盾, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 类似可得

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 存在

5. (1) 记 $g(x) = kx - f(x)$, 任取 $x, y \in \mathbb{R}, x > y$, 由 f 的性质可得

$$\begin{aligned} g(x) - g(y) &= k(x - y) - (f(x) - f(y)) \geq k(x - y) - |f(x) - f(y)| \\ &\geq k(x - y) - k|x - y| = 0 \end{aligned}$$

故说明 $g(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递增。

(2) 归纳地构造数列 $\{x_n\}$: 任取 $x_1 \in \mathbb{R}$, 令 $x_{n+1} = f(x_n) (n \in \mathbb{N}^*)$, 往证 $\{x_n\}$ 是 \mathbb{R} 中的基本列。因为

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq k|x_n - x_{n-1}| \\ &= k|f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| \leq k^2|x_{n-1} - x_{n-2}| \\ &\leq k^{n-1}|x_2 - x_1| \end{aligned}$$

于是对任意的 $p \in \mathbb{N}^*$, 有

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} |x_{i+1} - x_i| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} k^{i-1}|x_2 - x_1| \leq \frac{k^{n-1}}{1-k}|x_2 - x_1| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

这说明 $\{x_n\}$ 是 \mathbb{R} 中的基本列, 故存在 $\xi \in \mathbb{R}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$, 于是有

$$f(\xi) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \xi$$

这就说明了 f 存在不动点。

$$|\xi - \zeta| = |f(\xi) - f(\zeta)| \leq k|\xi - \zeta|$$

可知 $|\xi - \zeta| = 0$, 即 $\xi = \zeta$, 故 f 的不动点唯一

6. (1) 令 $g_n(x) = f_n(x) - 1$, 则 $g'_n(x) = nx^{n-1} > 0$, 可得 $g_n(x)$ 严格递增且

$$g_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2} < 0, \quad g_n(1) = 1 > 0$$

故 $g_n(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上只有一个零点。

(2) 可证 $\{c_n\}$ 单增, 若 $c_{n-1} > c_n$, 则

$$1 = c_n^n + c_n < c_n^{n-1} + c_n < c_{n-1}^{n-1} + c_{n-1} = 1$$

矛盾, 故 $c_n > c_{n-1}$

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$, 若 $c < 1$ 则

$$c_n^n = 1 - c_n$$

令 $n \rightarrow +\infty$, 可得 $c = 1$, 矛盾, 故 $c = 1$ 。

7. 令 $a = x_0$, 用处理 Riemann 函数的方式. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 取充分大的 N , 使得 $1/N < \varepsilon$, 容易知道对任意的 δ_0 , 与区间 $(x_0 - \delta_0, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta_0)$ 有交集且满足 $0 < n_0 < N$ 的集合 A_{n_0} 有有限个, 而 A_{n_0} 都是有限集, 那么可以知道满足 $f(x) = 1/n_0 > 1/N$ 的 x 也只有有限个, 那么一定可以取到 $0 < \delta < \delta_0$, 使得任意 $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 都有

$$f(x) = \begin{cases} 1/n & , x \in A_n, n \geq N \\ 0 & , x \in [0, 1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \end{cases}$$

无论哪一种都有

$$|f(x) - 0| = f(x) < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

这就说明了 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

8. 设 f 的定义域为 I , 任取 $x_0 \in I$, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |t - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(t) - g(x_0)| < \varepsilon/2$, 由极限的保号性可知, 对于任意的 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 都有

$$\lim_{t \rightarrow x} |f(t) - g(x_0)| = \left| \lim_{t \rightarrow x} f(t) - g(x_0) \right| = |g(x) - g(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

这就说明了 g 在 x_0 点处连续, 又由 x_0 的任意性可知 g 在 I 上连续.

9. 用反证法. 如果存在对所有趋于 $+\infty$ 的 $\{x_n\}$ 都不成立的 λ , 那说明存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和 $N \in \mathbb{N}^*$, 当 $x \geq N$ 时, 都有 $|f(x + \lambda) - f(x)| \geq \varepsilon_0$ 成立. 且由于零值定理的约束, $f(x + \lambda) - f(x) \geq \varepsilon_0$ 与 $f(x + \lambda) - f(x) \leq -\varepsilon_0$ 只能有一个成立, 不妨令前者成立. 于是可以得到一系列不等式:

$$\begin{aligned} f(N + \lambda) - f(N) &\geq \varepsilon_0 \\ f(N + 2\lambda) - f(N + \lambda) &\geq \varepsilon_0 \\ &\dots \\ f(N + n\lambda) - f(N + (n-1)\lambda) &\geq \varepsilon_0 \end{aligned}$$

累加可以得到 $f(N + n\lambda) - f(N) \geq n\varepsilon_0$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 右侧为趋于 $+\infty$ 的无穷大量, 又因为 $f(N)$ 有限, 那么可知 $f(N + n\lambda) \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$, 这与 f 有界矛盾.

10. $\forall x_0 \in I$, 则

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq M |x - x_0|^{\alpha-1}$$

令 $x \rightarrow x_0$, 则 $f'(x_0) = 0$, 故 $f(x)$ 在 I 上为常数

11. 令

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & x = \frac{1}{2} \\ x & x \text{ 为 } [0, 1] \text{ 中的无理数} \\ 1 - x & \left\{ Q - \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\} \right\} \cap [0, 1] \end{cases}$$

则 $f([0, 1]) = [0, 1]$ 且任意一点均不连续

12. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x_1, x_2 \in [a, b]$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

$\exists m$ 使得 $\frac{b-a}{m} < \delta$, 令 $x_i = a + \frac{i(b-a)}{m} (i = 0, 1, \dots, m)$, 考虑

$$L(x) = f(x_{i-1}) \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

其中 $i = 1, 2, \dots, m$, $L(x_m) = f(b)$, 则 $\forall x \in [a, b], x \in [x_{i-1}, x_i]$ 对某个 i 成立, 则

$$|L(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) < \varepsilon$$

13. 用反证法, 如果 $f(x)$ 不趋向于 ∞ , 那么存在 $A_0 > 0$, 使得对每一个 $n \in \mathbb{N}^*$, 都存在一个 $|x_n| > n$ 满足 $|f(x_n)| \leq A_0$, 于是可以得到一个趋于无穷的数列 $\{x_n\}$, 这个数列满足 $f(x_n) \in [-A_0, A_0] (n \in \mathbb{N}^*)$, 则由有限闭区间上连续函数的性质可知对每个 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有

$$f(f(x_n)) \in f([-A_0, A_0]) = [m, M]$$

其中 m 和 M 分别为 f 在区间 $[-A_0, A_0]$ 上的最小值和最大值, 那么令 $n \rightarrow \infty$, 可以得到

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f(f(x_n))| \leq \max(|m|, |M|)$$

为有限数, 这与 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(f(x)) = \infty$ 矛盾. 故 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

14. 由 $|f(x_1) - f(x_2)| \geq k|x_1 - x_2|$, 可得 f 为单射, 不妨设存在 $x_1 < x_2 < x_3$ 使得

$$f(x_1) > f(x_2), f(x_3) > f(x_2)$$

则 $\exists y_1 \in (x_1, x_2), y_2 \in (x_2, x_3)$ 使得 $f(y_1) = f(y_2)$, 矛盾, 故不妨设 f 严格单增, 固定 x_0 , 有 $|f(x) - f(x_0)| \geq k|x - x_0|$, 令 $x \rightarrow +\infty$ 可得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty$, 令 $x \rightarrow -\infty$, 可得 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 故值域为 $(-\infty, +\infty)$

- 15.

$$D(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ 为无理数} \\ 1 & x \text{ 为有理数} \end{cases}$$

则 $D(x)$ 无最小正周期。

16. 设 $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, 则对任意的 $x, y \geq a$, 都有

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{x} - \frac{f(y)}{y} \right| &= \frac{|yf(x) - xf(y)|}{xy} \leq \frac{|yf(x) - xf(x)|}{xy} + \frac{|xf(x) - xf(y)|}{xy} \\ &\leq |y - x| \frac{|f(x)|}{xy} + \frac{|f(x) - f(y)|}{y} \leq |y - x| \frac{|f(x)|}{ax} + \frac{|f(x) - f(y)|}{a} \quad (1) \end{aligned}$$

因为 f 在 $[a, +\infty)$ 上满足 Lipschitz 条件, 所以有 $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, 再考虑 $|f(x)/x|$, 同样由 Lipschitz 条件可知

$$|f(x) - f(a)| \leq k|x - a|$$

不等式两侧同时除以 $|x|$ 可以得到

$$\left| \frac{f(x)}{x} - \frac{f(a)}{x} \right| \leq \left| \frac{f(x) - f(a)}{x} \right| \leq k \left| 1 - \frac{a}{x} \right|$$

于是

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq k \left| 1 - \frac{a}{x} \right| + \left| \frac{f(a)}{x} \right|$$

这说明 $f(x)/x$ 在 x 充分大的时候有界, 设 $|f(x)/x| \leq M$, 于是不等式 (1) 可以继续化简

$$\left| \frac{f(x)}{x} - \frac{f(y)}{y} \right| \leq \frac{M}{a} |x - y| + \frac{k}{a} |x - y| = \frac{M+k}{a} |x - y|$$

这说明 $f(x)/x$ 满足 Lipschitz 条件, 当然一致连续.

17. 必要性用定义直接验证即可。我们来证明充分性。若 f 不一致连续, 则存在 $\epsilon > 0$, 使得对于每个正整数 n , 可以找到 $x_n, y_n, |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, 而 $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$, $\{x_n\}, \{y_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0$, 但 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$, 矛盾
18. 必要性用定义验证即可, 下证充分性, 若 f 在 I 上不一致连续, 则 $\exists \{x_n\}, \{y_n\}$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0$$

但是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon > 0$

由于 I 是有限区间, 故 $\{x_n\}$ 有收敛子列, 不妨设 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{y_n\}$ 也收敛, 则考虑 $\{z_n\}$ 为 $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$, 则 $\{z_n\}$ 为基本列但是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(z_{2n+1}) - f(z_{2n+2})| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x_{n+1}) - f(y_{n+1})| \geq \epsilon > 0$$

矛盾, 故 f 在 I 上一致连续

19. 由题知对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_1, x_2 \geq 0$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon/2$. 又由对任意的 $x \in [0, 1]$, 都有 $f(x+n) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 可知, 存在 $N_x \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n > N_x$ 时, 有 $|f(x+n)| < \epsilon/2$. 那么对任意的 $x_1, x_2 \in [0, 1]$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$, 当 $n > N_{x_1}$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} |f(x_2+n)| &= |f(x_2+n) - f(x_1+n) + f(x_1+n)| \\ &\leq |f(x_2+n) - f(x_1+n)| + |f(x_1+n)| < \epsilon \end{aligned}$$

也就是说对任意 $x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$, 当 $n > N_{x_1}$ 时, 总有

$$|f(x+n)| < \epsilon$$

于是取正整数 $m > 1/\delta$, 可以将 $[0, 1]$ 这个区间 m 等分, 记第 k 个区间为 I_k , 它的中点为 x_k , 则对任意的 I_k , 存在 N_{x_k} , 使得当 $x \in I_k, n > N_{x_k}$ 时, 都有 $|f(x+n)| < \epsilon$. 那么取 $N = \max_{k=1,2,\dots,m} N_{x_k}$ 就有对任意的 $x \in [0, 1]$, 当 $n \geq N$ 时, 有 $|f(x+n)| < \epsilon$. 于是对任意的 $x > N$, 有 $[x] = x - \{x\} \geq N$ 其中 $\{x\} \in [0, 1)$ 为 x 的小数部分, 那么可以得到

$$|f(x)| = |f(\{x\} + [x])| < \epsilon$$

这说明了 $f(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty)$

20. 只证 $x \geq 0$ 时, 存在 a, b 使得

$$|f(x)| \leq a|x| + b$$

对于 $x < 0$, 考虑 $f(-x)$ 即可

$\exists 0 < \delta < 1$ 使得当 $|x - y| \leq \delta$ 时

$$|f(x) - f(y)| < 1$$

$\forall x \in [0, +\infty)$, 则 $\frac{x}{\delta} = \left[\frac{x}{\delta}\right] + \left\{\frac{x}{\delta}\right\}$, 令 $n = \left[\frac{x}{\delta}\right]$, 则

$$\begin{aligned} f(x) &\leq |f(x) - f(n\delta)| + \sum_{k=1}^n |f(k\delta) - f((k-1)\delta)| + |f(0)| \\ &\leq n + 1 + |f(0)| \end{aligned}$$

又 $n \leq \frac{x}{\delta}$, 故

$$|f(x)| \leq \frac{1}{\delta}|x| + 1 + |f(0)|$$

得证

5.7.2 第二组参考题

1. (1) 作过点 $(0, t)$ 的水平直线, 记直线上方区域的煎饼面积与下方区域煎饼面积之差为 $f(t)$. 由于 $f(+\infty) = -S < 0$, $f(-\infty) = S > 0$, 结合 $f(t)$ 的连续性, 存在 t_0 使得 $f(t_0) = 0$, 因此过 $(0, t_0)$ 的水平直线即为所求.

(2) 据 (1) 的证明过程易知, 对一个确定的煎饼和每个确定的方向, 存在唯一的直线平分煎饼的面积. 设二维向量 $(\cos t, \sin t)$, 考虑两个煎饼各自与该向量垂直的面积等分线 l_1, l_2 . 设 l_1 上的一点需要沿向量 $(\cos t, \sin t)$ 的方向移动 $f(t)$ 个单位长度才可移动到 l_2 上, 则 $f(t) = -f(t + \pi)$. 易证 $|f(t + \Delta t) - f(t)| \leq 2\Delta t \cdot \text{diam}(I_1 \cup I_2)$, 其中 I_1, I_2 分别代表两个煎饼, 从而 $f(t)$ 连续. 由零点存在定理, $f(t)$ 一定有零点 t_0 . 这表明, 存在这样一条与向量 $(\cos t_0, \sin t_0)$ 垂直的直线同时平分两个煎饼的面积.

(3) 不一定能. 如圆心不共线的三个圆, 由于一条直线是圆的面积等分线的充要条件是该直线过圆心, 故如果有一条直线同时平分三个圆的面积, 则必然同时过这三个圆的圆心, 这在圆心不共线的情况下是做不到的.

(4) 能. 首先由 (2) 可知, 当一条直线平分煎饼的面积后, 将平分后的两块视为两块煎饼, 则必然还存在另一条直线同时平分这两块的面积, 此时这两条直线四等分煎饼的面积. 设 l_1 是一条与向量 $(\cos t, \sin t)$ 共线的面积等分线, 根据刚刚的结论, 存在另一条直线 l_2 使得 l_1, l_2 四等分煎饼的面积. 设 l_1 逆时针转 $f(t) \in (0, \pi)$ 弧度后与 l_2 平行, 则 $f(t) + f(t + f(t)) = \pi$ 从而有 $\left(f(t) - \frac{\pi}{2}\right) \left(f(t + f(t)) - \frac{\pi}{2}\right) \leq 0$, 再根据零点存在定理, 必然存在 t_0 使得 $f(t_0) = \frac{\pi}{2}$, 即作与 $(\cos t_0, \sin t_0)$ 共线的面积等分线后, 必然存在另一条与该直线垂直的直线, 使得两直线四等分煎饼的面积.

(5) 设 $f(t)$ ($0 \leq t \leq 9$) 为该运动员从第 t 秒到第 $t+1$ 秒经过的路程. 由于 $f(0) + f(1) + \dots + f(9) = 100$, 所以必然存在 $k \in \{0, 1, \dots, 8\}$ 使得

$$(f(k) - 10)(f(k+1) - 10) \leq 0$$

根据零点存在定理, 存在 $t \in [k, k+1]$ 使得 $f(t) = 10$, 从而从第 t 秒到第 $t+1$ 秒, 该运动员刚好跑了 10 米.

(6) 设该方台为正方形 $ABCD$, 然后任意作一个平面, 并在其中建立直角坐标系 xOy , 保持方台的中心在原点的正上方, 并设 AC 在平面上的投影的倾斜角为 φ . 由于地面是连续的, 因此对任意的 φ , 总存在符合以上条件的方台使得方台至少有两只脚着地. 记 A, B 到地面的距离之和为 $f(\varphi)$, C, D 到地面的距离之和为 $g(\varphi)$. 则 $f(\varphi)g(\varphi) = 0$ 且 $f(\varphi), g(\varphi)$ 至少有一个为 0. 下面证明: $f(\varphi), g(\varphi)$ 有公共的零点不妨设 $f(0) = 0$, 则 $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. 如果 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ 或 $g(0) = 0$ 则结论成立. 否则有 $f(0) < g(0)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > g\left(\frac{\pi}{2}\right)$, 根据零点存在定理, 存在 φ_0 使得 $f(\varphi_0) = g(\varphi_0)$. 由于 $f(\varphi_0)g(\varphi_0) = 0$, 所以一定有 $f(\varphi_0) = g(\varphi_0) = 0$. 这表明倾斜角为 φ_0 时, 方台可以四脚着地, 从而不会摇晃.

(7) 能. 我们设与该曲线有交点的两条倾斜角为 φ 的直线的最大距离为 $f(\varphi)$, 则 $f(\varphi) = f(\varphi + \pi)$. 由于 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = -\left(f(\pi) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, 所以一定存在 φ_0 使得

$$f\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_0\right) = f(\varphi_0)$$

故作出取到最大距离的两条倾斜角为 φ_0 的直线和两条倾斜角为 $\frac{\pi}{2} + \varphi_0$ 的直线, 由于各自的最大距离相等, 且两个方向垂直, 故它们交出的正方形即是所求的正方形.

2. (归纳法) 当 $n = 1$ 时, 因 $f(0) = f(1)$, 故 f 在 $[0, 1]$ 上至少有一个解 $(x, y) = (0, 1)$. 假设命题当 $n - 1$ 时成立. 则当 $n \in \mathbb{N}$ 时, 命题也成立. 事实上, 因 $f(x)$ 在 $[0, n]$ 上连续, 则 $d(x) = f(x+1) - f(x)$, $x \in [0, n-1]$ 也连续. 若存在非负整数 k ($0 \leq k \leq n-1$) s. t. $d(k) = 0$, 则有 $f(k) = f(k+1)$. 若对 $k = 0, 1, \dots, n-1$ 都有 $d(k) \neq 0$, 因为 $f(0) = f(n)$, 故 $\sum_{k=0}^{n-1} d(k) = \sum_{k=0}^{n-1} [f(k+1) - f(k)] = f(n) - f(0) = 0$. 由此可知存在非负整数 j ($0 \leq j \leq n-1$), s. t. $d(j)d(j+1) < 0$. 根据连续函数的介值定理, $\exists \alpha \in (j, j+1)$, s. t. $d(\alpha) = 0$. 综上所述, 总 $\exists \beta, \beta+1 \in [0, n]$, s. t.

$$f(\beta) = f(\beta+1)$$

我们定义

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \beta] \\ f(x+1), & x \in [\beta, n-1] \end{cases}$$

则 $g(x)$ 在 $[0, n-1]$ 上连续, 且 $g(0) = g(n-1)$. 由归纳假设, 存在 $n-1$ 个不同的 (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n-1$, 使得存在 $n-1$ 个不同的 (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n-1$, 满

足: $g(x_i) = g(y_i)$, 其中 $y_i - x_i$ 为非负整数. 又

$$0 = g(y_i) - g(x_i) = \begin{cases} f(y_i) - f(x_i), & y_i < \beta \\ f(y_i + 1) - f(x_i), & x_i \leq \beta \leq y_i \\ f(y_i + 1) - f(x_i + 1), & \beta < x_i \end{cases}$$

由此即得 $f(x) = f(y)$ 的 $n - 1$ 个不同的解, 且 $y - x$ 为非负整数, 再加上 $(\beta, \beta + 1)$ 得到 n 个不同的解.

3. (1) 若这样的 x 无限, 设为 E , 则 E 有一个聚点, 设为 $x_0, \{x_n\} \subset E, x_n \rightarrow x_0$, 有

$$\left| \lim_{t \rightarrow x_n} f(x_n) - f(x_n) \right| > \varepsilon$$

则存在 $\{y_n\}$ 使得 $|y_n - x_n| < \frac{1}{n}$ 且

$$|f(y_n) - f(x_n)| > \varepsilon$$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$, 令 $n \rightarrow +\infty$, 得

$$0 > \varepsilon$$

矛盾

- (2) 令 $E_n = \left\{ x : \left| \lim_{t \rightarrow x} f(t) - f(x) \right| > \frac{1}{n} \right\}$, 间断点集合为 E , 则

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

由 (1) 得 E 为可数集

4. 是上一题的直接推论.

5. (1) 不存在, 用反证法. 如果存在这种函数 f , 那么任取 $a > b$ 满足 $f(a) = f(b)$, 因为 f 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 那么可以在 $x_0 \in [a, b]$ 上取到最大值 M , 由 f 的性质可知还有一点 $x_1 \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x_1) = M$, 如果 $x_1 \in [a, b]$, 那么 $[x_0, x_1]$ 中的任何一点的函数值都小于 M , 如图 5.1 可知这时 f 在 4 个不同的点处取到相同的函数值; 如果 $x_1 \notin [a, b]$, 如图 5.2 这时 f 在 3 个不同的点处取到相同的函数值.

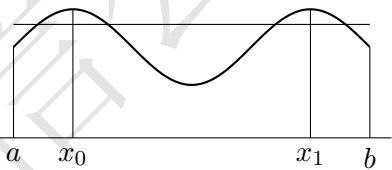


图 5.1: 当 $x_1 \in [a, b]$ 时

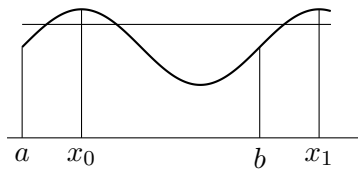


图 5.2: 当 $x_1 \notin [a, b]$ 时

- (2) 存在这样的函数, 如图 5.3

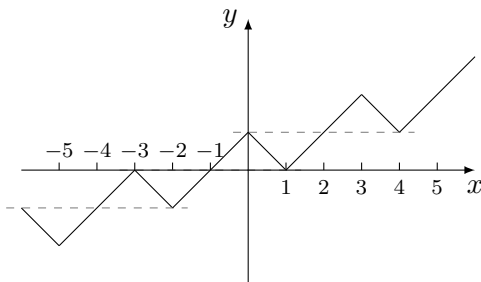


图 5.3: 每个函数值恰好被取到 3 次的函数

6. 显然 $f \equiv 0$ 满足条件, 下面考虑 $f \neq 0$ 时. 首先令 $x = y = 0$, 容易得到 $f(0) = 0$, 令 $x = 0, y \in \mathbb{R}$, 有

$$f(y^n) = (f(y))^n$$

可得

$$f(x + y^n) = f(x) + f(y^n)$$

再令 $z = y^n$, 当 n 为奇数时, 有 $x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$, 则由

$$f(x + z) = f(x) + f(z)$$

可知 $f(x) = f(1)x$. 当 n 为偶数时, 可以得到

$$f(x) = f(1)x \quad x \geq 0$$

又因为 $x < 0$ 时, $f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = 0$, 所以有 $f(x) = -f(-x) = f(1)x$. 故 $f(x) = f(1)x$ 对所有 n 都成立. 同时因为

$$f(y^n) = (f(y))^n \Rightarrow f(1)y^n = f^n(1)y^n \Rightarrow f(1) = f^n(1) \quad n \in \mathbb{N}^*$$

因为 $f \neq 0$, 所以 $f(1) = 1$. 因此满足上述函数方程的函数为 $f_1(x) = 0$ 及 $f_2(x) = x$

7. $f(x)$ 是严格单调的, 不然存在 $x_1 \neq x_2$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$, 则

$$x_1 = f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

矛盾, 又 $f(1) > f(0)$, 故 $f(x)$ 严格单增, 若 $f(x) > x$, 则

$$x = f(f(x)) > f(x) > x$$

矛盾, 类似得不存在 $f(x) < x$, 故 $f(x) \equiv x$

8. 充分必要条件为 $k \geq 0$

充分性: 当 $k \geq 0$ 时, 取 $f(x) = k^{\frac{2}{11}} \cdot x^{\frac{9}{2}}$, 则满足 $f(f(x)) = kx^9$

必要性: 若 $k < 0$, 由 $f(f(x)) = kx^9$ 可得 $f(x)$ 严格单调, 若 $f(x)$ 严格单调递增, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 可得

$$+\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} kx^9 = -\infty$$

矛盾

若 $f(x)$ 严格单减, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ 可得

$$-\infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} kx^9 = +\infty$$

矛盾

9. 由于 f 是连续的双射, 故一定严格单调.

假设 f 严格单调递减, 则 $2x - f(x)$ 严格递增, 从而 $f(2x - f(x))$ 严格单调递减, 不可能恒等于 x , 这导致矛盾.

所以 f 严格单调递增. 假设存在实数 x_0 使得 $f(x_0) > x_0$, 作双向无穷数列 $\{x_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, 使得 $x_{n+1} = f(x_n), x_{n-1} = f^{-1}(x_n)$. 由已知条件有 $f(x) + f^{-1}(x) = 2x$, 故 $x_{n+1} + x_{n-1} = 2x_n$, 即 $\{x_n\}$ 是等差数列.

由于 f 有不动点, 故在大于 x_0 和小于 x_0 的范围内至少有一个有不动点. 不妨设存在一个大于 x_0 的不动点. 设 $A = \{c > x_0 \mid f(c) = c\}$, 并记 $\eta = \inf A$, 则根据连续性有 $\eta > x_0$, $f(\eta) = \eta$. 再根据 η 的定义, 对任意 $t \in [x_0, \eta)$, 都有 $f(t) > t$. 由于 f 严格单调递增, 所以对任意 $t \in [x_0, \eta)$, 都有 $\eta > f(t) > t$, 故由数学归纳法可证明 $\eta > x_{n+1} > x_n$. 但 $\{x_n\}$ 是等差数列, 因而无上界, 矛盾.

同理, 也不可能存在实数 x_0 使得 $f(x_0) < x_0$, 所以一定有 $f(x) \equiv x$, 证毕.

10. 只就 $M(x)$ 进行证明, 根据连续函数在闭区间上必达上、下确界的性质, $M(x)$ 在 $[a, b]$ 上处处有定义. 又因上确界随取值区间扩大而增大, 知 $M(x) \nearrow$, 故每点处的单侧极限存在, $\forall x_0 \in [a, b]$ 我们只要证明下面等式成立即可:

$$M(x_0 - 0) = M(x_0) = M(x_0 + 0) \quad (1)$$

由 $M(x)$ 单调性, 我们有 $M(x_0 - 0) \leq M(x_0)$. 又因 $\forall x \in [a, x_0]$ 有 $f(x) \leq \sup_{a \leq t \leq x} f(t) = M(x) \leq M(x_0 - 0)$, 所以

$$M(x_0) = \sup_{a \leq t \leq x_0} f(t) \leq M(x_0 - 0)$$

故 (1) 式左边等式成立. 下面用反证法证 (1) 中右边之等式. 因 $M(x)$ 单调, $M(x_0) \leq M(x_0 + 0)$. 假若 $M(x_0 + 0) > M(x_0)$, 则可取充分小的 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $M(x_0 + 0) > M(x_0) + \varepsilon_0$. 于是 $\forall x > x_0$ 有

$$\sup_{a \leq t \leq x} f(t) = M(x) \geq M(x_0 + 0) > M(x_0) + \varepsilon_0$$

由确界定义 $\exists t \in [a, x]$, 使得

$$f(t) > M(x_0) + \varepsilon_0 \geq f(x_0) + \varepsilon_0 \quad (2)$$

但在 $[a, x_0]$ 上 $f(x) \leq M(x_0)$, 所以 (2) 式中的 $t \in (x_0, x]$. 这便与 $f(x)$ 的连续性矛盾. 证毕

11. $f(a) > a$, 此时 $\sup\{x \in [a, b] \mid f(x) > x\}$ 非空, 令 $x_0 = \sup\{x \in [a, b] \mid f(x) > x\}$, 下证 $f(x_0) = x_0$. 若 $f(x_0) < x_0$, $\forall a \in (f(x_0), x_0)$, 由 $f(x)$ 单增可知, $f(a) < f(x_0) < a$, 这与 x_0 是 $\{x \in [a, b] \mid f(x) > x\}$ 的上确界矛盾. 若 $f(x_0) > x_0$, $\forall b \in (x_0, f(x_0))$, 还是由 $f(x)$ 的单增可得, $b < f(x_0) < f(b)$, 也是与 x_0 是 $\{x \in [a, b] \mid f(x) > x\}$ 的上确界矛盾.

综上只能是 $f(x_0) = x_0$

12. 设 $A = \{x \in (0, 1) \mid f(x) > 0\}$, $c = \sup A$

假设 $f(c) > 0$, 则 $c < 1$, 由于 $c = \sup A$, 故当 $x > c$ 时有 $f(x) \leq 0$, 且 $f(x) + g(x)$ 递增. 所以对任意 $x > c$, 有 $0 \geq f(x) = f(x) + g(x) - g(x) \geq f(c) + g(c) - g(x)$, 即 $0 \geq f(x) = f(x) + g(x) - g(x) \geq f(c) + g(c) - g(x) \geq 0 \geq f(c) + g(c) - g(x)$. 令 $x \rightarrow c^+$, 得 $0 \geq f(c)$, 矛盾. 所以假设不成立, 即 $f(c) \leq 0$. 假设 $f(c) < 0$, 则 $c > 0, c \notin A$. 由于 c 是 A 的上确界, 故存在严格递增的数列 $\{x_n\} \subset A$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. 由于 $0 < f(x_n) = f(x_n) + g(x_n) - g(x_n) \leq f(c) + g(c) - g(x_n)$, 故 $0 < f(c) + g(c) - g(x_n)$. 令 $n \rightarrow +\infty$, 得 $0 \leq f(c)$, 矛盾. 所以假设不成立, 即 $f(c) \geq 0$. 综合以上两方面可知 $f(c) = 0$, 所以 $f(x)$ 必有零点. 又因为 $f(0) > 0, f(1) < 0$,

所以该不动点一定在 $(0, 1)$ 中, 证毕.

13. 证明如下定理: 假设 $f_1(x), f_2(x)$ 都是定义在实数集上的周期函数且 $f_1(x)$ 连续, 则

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

为周期函数的充要条件是 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的周期之比为有理数.

先证明两个引理:

引理 1 若 $f(x)$ 是定义在实数集上的连续周期函数且 $f(x)$ 不是常数函数, 则 $f(x)$ 必有最小正周期.

证明 反设 $f(x)$ 没有最小正周期, 下证 $f(x)$ 恒等于 $f(0)$

由于 $f(x)$ 连续, 所以任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $|x'| < \delta$, 就有 $|f(x') - f(0)| < \varepsilon$. 由于 $f(x)$ 没有最小正周期, 可以找到 $f(x)$ 的一个周期 $T < \delta$. 对于任意的实数 x , 存在整数 n , 使得 $x = nT + \tau, 0 \leq \tau < T$. 既然 $|\tau| < \delta$, 所以有

$$|f(x) - f(0)| = |f(\tau) - f(0)| < \varepsilon$$

由 ε 和 x 的任意性知, $f(x)$ 恒等于 $f(0)$. 这与 $f(x)$ 不是常数函数矛盾, 故 $f(x)$ 必有最小正周期.

引理 2 若 $f(x)$ 是定义在实数集上的周期函数且有最小正周期 T_0 , 又 T 是 $f(x)$ 的任一周期, 则 T 必是 T_0 的整数倍.

证明 如若不然, 则存在整数 n , 使得 $T = nT_0 + T', 0 < T' < T_0$. 对于任意的实数 x

$$f(x) = f(x + T) = f(x + nT_0 + T') = f(x + T')$$

上式说明 T' 也是 $f(x)$ 的一个周期. 但 $0 < T' < T_0$, 这与 T_0 是 $f(x)$ 的最小正周期矛盾.

再证明上述定理, 充分性是显然的, 只需要证明必要性.

设 $f_1(x), f_2(x)$ 和 $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$ 都是周期函数, 分别取它们的周期为 T_1, T_2, T_3 . 则

$$0 = F(x + T_3) - F(x) = f_1(x + T_3) + f_2(x + T_3) - f_1(x) - f_2(x)$$

于是

$$f_1(x + T_3) - f_1(x) = f_2(x) - f_2(x + T_3)$$

引入新函数 $G(x) = f_1(x + T_3) - f_1(x)$, 则 $G(x)$ 连续. 另一方面, 由

$$G(x + T_1) = f_1(x + T_3 + T_1) - f_1(x + T_1) = f_1(x + T_3) - f_1(x) = G(x)$$

$$G(x + T_2) = f_2(x + T_2) - f_2(x + T_3 + T_2) = f_2(x) - f_2(x + T_3) = G(x)$$

知 T_1, T_2 都是 $G(x)$ 的周期.

情形 1: $G(x)$ 不是常数函数. 由引理 2, $G(x)$ 有最小正周期. 设 $G(x)$ 的最小正周期为 T_0 . 又由引理 2, T_1 和 T_2 都是 T_0 的整数倍. 设 $T_1 = mT_0, T_2 = nT_0$, 于是 $\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n}$ 为有理数, 定理的结论成立

情形 2: $G(x)$ 是常数函数. 设此常数为 c , 即 $f_1(x + T_3) - f_1(x) = c$. 对于任意正整

数 n , 在上式中令 $x = 0, T_3, 2T_3, \dots, (n-1)T_3$, 相加得

$$f_1(nT_3) - f_1(0) = nc$$

另一方面, $f_1(x)$ 为连续周期函数, 从而 $f_1(x)$ 有界. 不妨设 $|f_1(x)|$ 的上界为 M . 于是, $nc \leq 2M$. 由 n 的任意性, $c = 0$. 所以

$$f_1(x + T_3) - f_1(x) = 0, \quad f_2(x + T_3) - f_2(x) = 0$$

即 T_3 是 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的公共周期. 在此情形, 取 $f_1(x)$ 的周期 T_3 和 $f_2(x)$ 的周期 T_3 , 其周期的比等于 1, 也是有理数, 定理的结论依然成立.

14. 设 f 的周期为 T_f, g 的周期为 T_g , 对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x + nT_f) - g(x + nT_f)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - g(x + nT_f))$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x + nT_f) = f(x)$, 同理可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x + nT_g) = g(x)$, 于是有

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (g(x + nT_f) - f(x + nT_g)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (g(x + nT_f + nT_g) - f(x + nT_g + nT_f)) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - f(x)) = 0 \end{aligned}$$

所以有 $f = g$

15. (\Leftarrow) 设对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, s. t. 只要 $x, y \in I, x \neq y$ 且

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| > N$$

便有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

取 $\delta = \frac{\varepsilon}{N}$, 则当 $x, y \in I, |x - y| < \delta$ 时, 必有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

即 f 在 I 上是一致连续的. (反证) 假设当 $|x - y| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$, 则

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} > \frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\frac{\varepsilon}{N}} = N$$

此时, 必有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, 这与上述 $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ 相矛盾.

(\Rightarrow) 设 f 在 I 上一致连续, 即对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 只要 $x, y \in I, |x - y| \leq \delta$, 便有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. 现在取 $N \in \mathbb{N}$, s. t. $N > \frac{2\varepsilon}{\delta}$. 若 $x, y \in I, x \neq y$ (不妨设 $x > y$), 且

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| > N$$

则必有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. (反证) 反设 $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$, 则由上述结论, 必有 $x - y > \delta$.

令 $k = \left[\frac{x - y}{\delta} \right]$ (不超过 $\frac{x - y}{\delta}$ 的最大整数), 这时

$$\begin{aligned} 1 \leq k &= \left[\frac{x - y}{\delta} \right] \leq \frac{x - y}{\delta} \leq \frac{x - y}{\delta} + \left(\frac{x - y}{\delta} - 1 \right) \leq 2 \frac{x - y}{\delta} - 1 \\ k + 1 &\leq 2 \frac{x - y}{\delta} \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(y) - f(y + \delta)| + |f(y + \delta) - f(y + 2\delta)| \\ &\quad + \cdots + |f(y + k\delta) - f(x)| < (k + 1)\varepsilon \\ &\leq 2 \frac{x - y}{\delta} \varepsilon < N(x - y) \\ \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| &< N \end{aligned}$$

16. 此题下一题的推论

17. (反证) 假设 f 不是常值函数, 则 $\exists a_1, b_1 \in I, a_1 < b_1, \text{s.t. } f(a_1) \neq f(b_1)$. 不妨设 $f(a_1) < f(b_1)$. 由 f 连续及介值定理知, $\exists c \in (a_1, b_1)$ 使得

$$f(a_1) < f(c) = \frac{f(a_1) + f(b_1)}{2} < f(b_1)$$

若 $b_1 - c \leq \frac{b_1 - a_1}{2}$, 则令 $a_2 = c$, 取 b_2 满足 $a_2 = c < b_2 < b_1$, 且

$$f(a_1) < f(a_2) = f(c) < f(b_2) < f(b_1)$$

若 $c - a_1 \leq \frac{b_1 - a_1}{2}$. 则令 $b_2 = c$, 取 a_2 满足 $a_1 < a_2 < c = b_2$ 且

$$f(a_1) < f(a_2) < f(c) = f(b_2)$$

无论哪种情形都有 $[a_2, b_2] \subset (a_1, b_1)$, 且 $f(a_2) < f(b_2)$. 在 $[a_2, b_2]$ 上重复上述做法并依次类推下去, 得一闭区间套:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

且 $0 < b_n - a_n \leq \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \rightarrow 0$. 根据闭区间套定理, $\exists x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. 根据区间的

选法知 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$, 再由 f 连续, $f(a_n)$ 严格增, $f(b_n)$ 严格减. 因此 $f(a_n) < f(x_0) < f(b_n)$, 即 x_0 不是 f 的极值点, 这与题设 $\forall x$ 都是极值点相矛盾.

18. 对 $\delta > 0$, 作点集

$$E_\delta = \{t \in \mathbb{R} | f(t) > f(x), x \in [t - \delta, t + \delta] - \{t\}\}$$

下面指出 E_δ 是有限集. 反之, 假定 t_0 是 E_δ 的极限点, 并对 $\eta\delta/2$, 取 $E_\delta \cap [t_0 - \eta, t_0 + \eta]$ 中的点 $t', t'', t' \neq t''$, 则有

$$f(t') > f(t'') \quad (t' - \delta \leq t'' \leq t' + \delta)$$

$$f(t'') > f(t') \quad (t'' - \delta \leq t' \leq t'' + \delta)$$

但这是不成立的, 这说明 E_δ 是有限集. 现在作递减正数列 $\delta_1 > \delta_2 > \cdots > \delta_n > \cdots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\delta_n}$ 是可数集. $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\delta_n}$ 是 f 的严格极大值点. 类似可得 f 的严格极小值点是可数的.

严格极大值点和严格极小值点均是可列的例子为: $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

19. 假设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 及 $x_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$, 使 $|f(x_n)| > \varepsilon_0$ 由 f 的连续性知 $\exists \delta_n$ 使当 $x \in (x_n - \delta_n, x_n + \delta_n)$ 时 $|f(x)| > \varepsilon_0$. 令 $[a_1, b_1] = [x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1]$

(不失一般性可设 $a_1 > 0$). 当 $k \geq k_1 \geq \frac{a_1}{b_1 - a_1}$ 时, $kb_1 \geq (k+1)a_1$, 于是 $[ka_1, kb_1] \cap [(k+1)a_1, (k+1)b_1] \neq \emptyset$. 从而 $\forall x \geq k_1 a_1$, 必 $\exists k \in \mathbb{N}$, 使 $x \in [ka_1, kb_1]$, 即 $\exists c \in [a_1, b_1]$, s. t. $kc = x \in [ka_1, kb_1]$. 由 $x_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$ 知, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时, $x_n > k_1 a_1$. 考虑 x_{N_1} , 由上可知 $\exists l_1$ 使 $x_{N_1} \in [l_1 a_1, l_1 b_1]$, 又可取到 $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ 使得 $[l_1 a_2, l_1 b_2] \subset [x_{N_1} - \delta_{N_1}, x_{N_1} + \delta_{N_1}] \cap [l_1 a_1, l_1 b_1]$. 同样取 $k_2 \geq \frac{a_2}{b_2 - a_2}$, $\exists x_{N_2} \geq k_2 a_2$ 及 l_2 使 $x_{N_2} \in [l_2 a_2, l_2 b_2]$. 再取 $[a_3, b_3] \subset [a_2, b_2]$, 使 $x_{N_2} \in [l_2 a_3, l_2 b_3] \subset [x_{N_2} - \delta_{N_2}, x_{N_2} + \delta_{N_2}] \cap [l_2 a_2, l_2 b_2]$, 且

$$l_2 \geq \frac{x_{N_2}}{b_3} > \frac{x_{N_2}}{b_2} > \frac{x_{N_1}}{a_1} \geq l_1$$

及 $x_{N_2} > \max \left\{ k_2 a_2, \frac{b_2}{a_1} x_{N_1} \right\}$

不断重复上述过程, 得到 $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_i, b_i] \supset \cdots, l_1 < l_2 < \cdots < l_{i-1} < l_i < \cdots$ 满足

$$[l_{i-1} a_i, l_{i-1} b_i] \subset [x_{N_{i-1}} - \delta_{N_{i-1}}, x_{N_{i-1}} + \delta_{N_{i-1}}] \cap [l_{i-1} a_{i-1}, l_{i-1} b_{i-1}]$$

由区间套原理知, 存在 $\alpha \in \bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]$. 因为

$$\begin{aligned} l_{i-1} \alpha &\in [l_{i-1} a_{i-1}, l_{i-1} b_{i-1}] \\ &\subset [x_{N_{i-1}} - \delta_{N_{i-1}}, x_{N_{i-1}} + \delta_{N_{i-1}}] \cap [l_{i-1} a_{i-1}, l_{i-1} b_{i-1}] \end{aligned}$$

所以 $\lim_{i \rightarrow +\infty} l_i = +\infty$ 和 $|f(l_{i-1} \alpha)| > \varepsilon_0, \lim_{i \rightarrow +\infty} f(l_i \alpha) \neq 0$. 这与 $\lim_{i \rightarrow +\infty} f(l_i \alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n\alpha) = 0$ 矛盾. 从而有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

20. 必要性显然, 只证充分性: 由第三章第二组参考题的第 10 题可得 $t \in [L, S]$ 均是 $\{x_n\}$ 的聚点, 其中 $L = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n, S = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, 设 $\lim_{n_k \rightarrow \infty} x_{n_k} = t$, 则 $\lim_{n_k \rightarrow +\infty} x_{n_k+1} = t$, 若 $L < S$, 则 $\forall t \in [L, S]$ 都有 $f(t) = t \Rightarrow \{x_n\}$ 是常值数列矛盾, 故 $\{x_n\}$ 收敛。

第6章 导数与微分

6.1 导数及计算

6.1.1 练习题

1. (1) 若 $f(x)$ 是偶函数 $\Rightarrow f(x) = f(-x)$ 则

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

故

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-x + \Delta x) - f(-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{-\Delta x} = -f'(x) \end{aligned}$$

- (2) 若 $f(x)$ 是奇函数 $f(x) = -f(-x)$ 则

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-x + \Delta x) - f(-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-f(x - \Delta x) + f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{-\Delta x} = f'(x) \end{aligned}$$

- (3) 若 $f(x)$ 是周期函数, 设最小周期为 $T \Rightarrow f(x) = f(x + T)$ 故

$$\begin{aligned} f'(x + T) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + T + \Delta x) - f(x + T)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{f(-\Delta x) - f(0)}{-\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= -f'(0^+) \end{aligned}$$

又 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导 $\Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow f'(0) = 0$

3. 两条曲线的切线函数为: $y = 2ax, y = \frac{1}{x}$

设他们在 (x_0, y_0) 处相切 $\Rightarrow 2ax_0 = \frac{1}{x_0} \Rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{1}{2a}}$

又 (x_0, y_0) 是交点 $\Rightarrow ax_0^2 = \ln x_0 \Rightarrow a \cdot \frac{1}{2a} = \ln \sqrt{\frac{1}{2a}} \Rightarrow a = e^{-(\ln 2 + 1)}$

4. $\Rightarrow f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x = x_0$ 处相切则 $f(x_0) = g(x_0), f'(x_0) = g'(x_0)$ 故

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - g(x) + g(x_0)}{x - x_0} = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0 \\ &\Rightarrow f(x) - g(x) = o(x - x_0) \end{aligned}$$

\Leftarrow : 上述过程逆推导 $f(x_0) = g(x_0)$ 是已知的

5. 求交点: $f(x) = f(x) \sin x \xrightarrow{f(x) \neq 0} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

相切: $f'(x) = f'(x) \sin x + f(x) \cos x$

当 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 时可得

$$f'(x) \sin x + f(x) \cos x = f'(x)$$

满足相切条件

6.

$$p(x) = (x - x_1)^{n_1} + \cdots + (x - x_k)^{n_k}$$

$$p'(x) = n_1(x - x_1)^{n_1-1} \cdots (x - x_k)^{n_k} + \cdots + n_k(x - x_1)^{n_1} \cdots (x - x_k)^{n_k-1}$$

$$= \frac{n_1}{x - x_1} p(x) + \cdots + \frac{n_k}{x - x_k} p(x)$$

$$= p(x) \left(\frac{n_1}{x - x_1} + \frac{n_k}{x - x_k} \right)$$

$$= p(x) \left(\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{x - x_i} \right)$$

7. $x \neq 0$ 时 $\Rightarrow f(x)$ 是初等函数的复合函数 $\Rightarrow f(x)$ 可导

$x = 0$ 时

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

则 $f'(0^+) = 0$, $f'(0^-) = 1 \Rightarrow f'(0^+) \neq f'(0^-)$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $x = 0$ 处导数不存在

8. (1) $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 即 $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \sin \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow n \geq 1$

(2)

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} \sin \frac{1}{x}$$

要求 $f'(0)$ 存在 $\Rightarrow n - 1 \geq 1 \Rightarrow n \geq 2$

(3)

$$f'(x) = \begin{cases} x^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x} \\ 0 \end{cases}$$

$f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$ 可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x} \right) = f'(0) = 0$$

$\Rightarrow n - 2 \geq 1 \Rightarrow n \geq 3$

9. $f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 1$ 或 $f(0) = 0$

$f(0+x) = f(0) \cdot f(x)$ 由于 $f(x) \neq 0 \Rightarrow f(0) = 1$ 可得

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - 1}{\Delta x} = 1$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - 1}{\Delta x} = f(x)$$

10. $x \neq 0$ 时 $f(x), g(x)$ 不连续 $\Rightarrow f(x), g(x)$ 不可导

$x = 0$ 时 $f(0) = 0, g(0) = 0$ 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0) \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = g(0)$$

可得 $f(x), g(x)$ 在 $x = 0$ 处连续

又

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$$

当 x 以无理数列趋向于 0 时, $f'(0) = 0, g'(0) = 0$

当 x 以有理数列趋向于 0 时, $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1, g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导, $g(x)$ 在 $x = 0$ 处可导

11. (1) $x_0 \neq 0$ 时且为有理数时, $f(x_0) = x_0$

x 取无理数趋向于 x_0 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = x_0^2 + x_0 - x_0 = x_0^2 \neq 0$$

$x_0 \neq 0$ 时且为无理数时 $f(x_0) = x_0^2 + x_0$

x 取有理数趋向于 x_0 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = x_0 - x_0^2 - x_0 = -x_0^2 \neq 0$$

$$(2) f(0) = 0, f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

x 以无理数趋向于 0 时 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x} = 1$

x 以有理数趋向于 0 时 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$

故 $f'(0) = 1$

12. $g(0) = 0 \quad |f(0)| \leq |g(0)| \Rightarrow |f(0)| = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{g(x)}{x} \right| = |g'(0)| = 0$$

故 $f'(0) = 0$

6.2 高阶导数及其他求导法则

6.2.1 练习题

1. $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow (1+x^2)f'(x) = 1$ 利用 Leibniz 法则求 $(n-1)$ 次导, 得

$$(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2(n-1)xf^{(n-1)}(x) + (n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x) = 0$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)$$

故

$$\begin{aligned} f'(0) = 1 &\Rightarrow f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cdot (2k)! \\ f^{(2)}(0) = 0 &\Rightarrow f^{(2k)}(0) = 0 \end{aligned}$$

2. $f'(x) = 2 \arctan x \cdot \frac{1}{1+x^2}$ 可得

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (1+x^2) f'(x) = 2 \arctan x \\ &\Rightarrow (1+x^2) f^{(n)}(x) + 2(n-1)x f^{(n-1)}(x) + (n-1)(n-2) f^{(n-2)}(x) = 2(\arctan x)^{(n-1)} \\ &\Rightarrow f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2) f^{(n)}(0) + 2(\arctan x)^{(n-1)}(0) \end{aligned}$$

由上题可知

$$\begin{aligned} f'(0) = 0, \quad n = 2k+1 &\Rightarrow 2(\arctan x)^{(2k)}(0) = 0 \\ &\Rightarrow f^{(2k+1)}(0) = 0 \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} f^{(2)}(0) = 2, \quad n = 2k &\Rightarrow 2(\arctan x)^{2k-1} = 2 \cdot (-1)^k (2k-2)! \\ &\Rightarrow f^{(2k)}(0) = (-1)^2 (2k-1)! + 2 \cdot (-1)^2 (2k-2)! \\ &= (-1)^k [3(2k-2)! + (2k-1)] \end{aligned}$$

3. $f'(x) = 2 \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 可知

$$(1-x^2) (f'(x))^2 = 4(\arcsin x)^2 = 4f(x)$$

再次求导

$$-x f'(x) + (1-x^2) f''(x) = 2$$

由 Leibniz 法则得

$$-x f^{(n-1)}(x) - (n-2) f^{(n-2)}(x) + (1-x^2) f^{(n)}(x) - 2(n-2) x f^{(n-1)}(x) - (n-2)(n-3) f^{(n-2)}(x) = 0$$

故

$$f^{(n)}(0) = (n-2)^2 f^{(n-2)}(0)$$

从而有

$$\begin{aligned} f'(0) = 0 &\Rightarrow f^{(2k+1)}(0) = 0 \\ f^{(2)}(0) = 2 &\Rightarrow f^{(2k)}(0) = 2[(2k-2)!!]^2 \end{aligned}$$

4. 归纳假设法 $n=0$ 显然成立

假设 $n=k$ 也成立, 下证明 $n=k+1$ 也成立

记 $y_k = x^{k-1} e^{\frac{1}{x}}$, 则 $y_{k+1} = x^k e^{\frac{1}{x}} = x y_k$ 故

$$\begin{aligned} y_{k+1}^{(k+1)} &= x y_k^{(k+1)} + (k+1) y_k^{(k)} \\ &= x \left(\frac{(1)^k}{x^{k+1}} e^{\frac{1}{x}} \right)' + (k+1) \cdot \frac{(-1)^k}{x^{k+1}} e^{\frac{1}{x}} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}} e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

所以假设成立, 故 $y^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}}$

5. (1) $y' = 3 \sin^2 x \cos x \Rightarrow y^{(2)} = 6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x = 6 \sin x - 9y y^{(n)} = -9y^{(n-2)} + 6 \sin \left(x + \frac{n-2}{2} \pi \right)$ 故有

$$y^{(n)} = \begin{cases} (-1)^k 9^k \sin^3 x + 6 \sin(x + (k-1)\pi) & n = 2k \\ 3(-1)^k 9^k \sin^2 x \cos x + 6 \sin \left(x + \frac{2k-1}{2} \pi \right) & n = 2k+1 \end{cases}$$

(2) $y = e^x \sin x$

$$\Rightarrow y' = e^x (\sin x + \cos x) = \sqrt{2} e^x \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Rightarrow y'' = \sqrt{2} e^x \left[\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$= 2^{\frac{1}{4}} e^x \sin \left(x + \frac{2}{4} x \right)$$

依次可得

$$\Rightarrow y^{(n)} = 2^{\frac{1}{2n}} e^x \sin \left(x + \frac{n}{4} \pi \right)$$

- (3) 记 $y_n = x^{n-1} \ln x$ 则 $y_n = x y_{n-1} \Rightarrow y_n^{(n)} = x y_{n-1}^{(n)} + n y_{n-1}^{(n-1)} y_1' = \frac{1}{x} \Rightarrow y_2^{(2)} = \frac{1}{x} \Rightarrow y_3^{(3)} = \frac{2}{x}$ 可假设 $y_n^{(n)} = \frac{a_n}{x}$ 则

$$\frac{a_n}{x} = x \cdot \frac{a_n}{x^2} + n \cdot \frac{a_{n-1}}{x}$$

$$a_n = (n-1) a_{n-1} = \cdots = (n-1)! a_1 = (n-1)$$

故 $y_n^{(n)} = \frac{(n-1)!}{x}$

(4)

$$y^{(n)} = x^3 e^x + 3x^2 e^x + 6x e^x + 6e^x = (x^3 + 3x^2 + 6x + 6) e^x$$

- (5) 记 $y_n = \frac{x^n}{1-x} \Rightarrow y_n = x y_{n-1} \Rightarrow y_n^{(n)} = x y_{n-1}^{(n)} + n y_{n-1}^{(n-1)}$ 又 $y_1 = \frac{x}{1-x} \Rightarrow y_1' = \frac{1}{1-x^2} \Rightarrow y_2^{(2)} = -\frac{2}{(1-x)^2} \Rightarrow y_3^{(3)} = -\frac{6}{(1-x)^4}$ 依次类推可得

$$y_n^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} n!}{(1-x)^{n+1}}$$

- (6) 记 $y_n = \frac{x^n}{(x+1)^2}$ 则 $y_n = x y_{n-1} \Rightarrow y_n^{(n)} = x y_{n-1}^{(n)} + n y_{n-1}^{(n-1)}$ 又 $y_1' = \frac{1-x}{(1+x)^3} \Rightarrow y_2^{(2)} = \frac{2(1-2x)}{(1+x)^4} \Rightarrow y_3^{(3)} = \frac{6(1-3x)}{(1+x)^5}$ 依次可得

$$y_n^{(n)} = \frac{n!(1-nx)}{(1+x)^{n+2}}$$

(7) 由

$$y = -\frac{1}{2} [\cos(a+b)x - \cos(a-b)x]$$

可得

$$y' = -\frac{1}{2} \left\{ (a+b)^n \cos \left[(a+b)x + \frac{n}{2} \pi \right] - (a-b)^n \cos \left[(a-b)x + \frac{n}{2} \pi \right] \right\}$$

6. $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ 可得

$$\begin{aligned} y' &= \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 x} \\ y'' &= \lambda_1^2 C_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^2 C_2 e^{\lambda_2 x} \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} & y'' - (\lambda_1 + \lambda_2) y' + \lambda_1 \lambda_2 y \\ &= \lambda_1^2 (C_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^2 C_2 e^{\lambda_2 x} - (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 x})) \\ & \quad + \lambda_1 \lambda_2 (C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}) = 0 \end{aligned}$$

7. $y = C_1 \sin(\omega t + \varphi) + C_2 \cos(\omega t + \varphi)$ 可知

$$\begin{aligned} y' &= \omega C_1 \cos(\omega t + \varphi) - \omega C_2 \sin(\omega t + \varphi) \\ y'' &= -\omega^2 C_1 \sin(\omega t + \varphi) - \omega^2 C_2 \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} & y'' + \omega^2 y \\ &= -\omega^2 [C_1 \sin(\omega t + \varphi) + C_2 \cos(\omega t + \varphi)] + \omega^2 (C_1 \sin(\omega t + \varphi) + C_2 \cos(\omega t + \varphi)) = 0 \end{aligned}$$

8.

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta}{f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta}$$

9. 计算两条曲线的交点: $a\theta = a\theta^{-1} \Rightarrow \theta = \pm 1$ 可得交点为 $(1, a)$ 和 $(-1, -a)$

由上一题可计算出两条曲线在 $(1, a)$ 处得切线斜率分别为: $\frac{\cos 1 + \sin 1}{\cos 1 - \sin 1}$ 和 $\frac{\cos 1 - \sin 1}{\cos 1 + \sin 1}$

则

$$\frac{\cos 1 + \sin 1}{\cos 1 - \sin 1} \cdot \frac{\cos 1 - \sin 1}{\cos 1 + \sin 1} = 1$$

两条曲线在 $(-1, -a)$ 处得切线斜率分别为: $\frac{\sin 1 + \cos 1}{\sin 1 - \cos 1}$ 和 $\frac{\cos 1 - \sin 1}{\cos 1 + \sin 1}$ 则

$$\frac{\sin 1 + \cos 1}{\sin 1 - \cos 1} \cdot \frac{\cos 1 - \sin 1}{\cos 1 + \sin 1} = -1$$

综上, 两条曲线在相交处的切线正交。

10. $y'(x) = \frac{dy}{dx} / \frac{dx}{dt}$, $y''(x) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) / \frac{dx}{dt}$ 直接计算有:

(1)

$$y'(x) = -\frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}}, y''(x) = -\frac{2}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}$$

(2)

$$y'(x) = \frac{t \cos t + \sin t}{\cos t - t \sin t}, y''(x) = \frac{2+t^2}{a(\cos t - t \sin t)^3}$$

(3)

$$y'(x) = -t \tan t, y''(x) = \frac{1}{3a \sin t \cos^4 t}$$

(4)

$$y'(x) = t, y''(x) = \frac{1}{f(t)}$$

11. 求切线: $3x^2 + 3y^2y' - 3y - 3xy' = 0$

设切点为 (x_0, y_0) , 则 $y'(x_0) = 0$ 可得

$$3x_0^2 - 3y_0 = 0 \Rightarrow y_0 = x_0^2$$

代入原式得

$$x_0^3 + x_0^6 - 3x_0^3 = 0 \Rightarrow x_0^3(x_0^3 - 2) = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \text{ or } x_0 = 2^{\frac{1}{3}}$$

故曲线上有水平切线的点为 $(0, 0), (2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{2}{3}})$

12. 可验证 y 为奇函数 $\Rightarrow y'$ 为偶函数 $\Rightarrow y''$ 为奇函数 $\Rightarrow y''(0) = 0$

13.

$$\begin{aligned} y^{(5)}(x) &= (6+5x)(4+3x)^2 [(2+x)^3]^{(5)} + 5[(6+5x)(4+3x)^2] [(2+x)^3]^{(4)} \\ &+ 10[(6+5x)(4+3x)^2]^{(2)} [(2+x)^3]^{(3)} + 10[(6+5x)(4+3x)^2]^{(3)} [(2+x)^3]^{(2)} + \dots \\ &= 10[(6+5x)(4+3x)^2]^{(2)} [(2+x)^3]^{(3)} + 10[(6+5x)(4+3x)^2]^{(2)} [(2+x)^3]^{(2)} \\ &= 10 \times [60(4+3x) + 18(6+5x)] \times 6 + 10 \times 270 \times 6(2+x) \end{aligned}$$

则

$$y^{(5)}(0) = 60 \times (240 + 108) + 10 \times 270 \times 12 = 5 - 3280$$

14.

$$f(x) + 1 = p(x)(x-1)^4 \Rightarrow f'(x) = p'(x)(x-1)^4 + 4p(x)(x-1)^3 \Rightarrow f'(1) = 0$$

$$f(x) - 1 = q(x)(x+1)^4 \Rightarrow f'(x) = q'(x)(x+1)^4 + 4q(x)(x+1)^3 \Rightarrow f'(-1) = 0$$

$f(x)$ 是 7 次多项式 $\Rightarrow f'(x)$ 是 6 次多项式 $\Rightarrow f'(x) = a(x-1)^3(x+1)^3$ 积分可得

$$f(x) = \frac{a}{7}x - \frac{3a}{5}x^5 + ax^3 - ax + b$$

又 $f(1) = -1, f(-1) = 1 \Rightarrow -\frac{16}{35}a + b = -1, \frac{16}{35}a + b = 1 \Rightarrow a = \frac{35}{16}, b = 0$ 可得

$$f(x) = \frac{1}{16}x(5x^6 - 21x^4 + 35x^2 - 35)$$

6.3 一阶微分及其形式不变性

6.3.1 练习题

1. 设 $f'(0) = A \neq 0$ 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dy}{dy} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A\Delta x + o(x)}{A\Delta x} = 1 + \frac{1}{A} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{\Delta x} = 1$

2. (1) $dy = (u'vw + uv'w + uvw') dx$

$$(2) dy = \frac{u'v^2 - 2uvv'}{v^4} dx = \frac{u'v - 2uv'}{v^3} dx$$

(3)

$$\begin{aligned} dy &= \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{vw^2}\right)^2} \frac{u'vw - u(v'w + vw')}{(vw)^2} dx \\ &= \frac{u'vw - uv'w - uvw'}{v^2w^2 + u^2} dx \end{aligned}$$

(4)

$$dy = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2u + 2v + 2w}{(w^2 + v^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} dx = -\frac{u + v + w}{(u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

3. 记 $f(x) = \sqrt[n]{a^n + x}$, $f(0) = a$ 则

$$f'(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{(a^n + x)^{n-1}}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{a^{n-1} \sqrt[n]{(1 + \frac{x}{a^n})^{n-1}}} \approx \frac{1}{na^{n-1}}$$

在 0 处展开:

$$f(x) \approx f(0) + f'(x)x = a + \frac{x}{na^{n-1}}$$

则

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{2^3 + 1} \approx 2 + \frac{1}{3 \times 2^2} = \frac{25}{12}$$

$$\sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{3^4 - 1} \approx 3 + \frac{-1}{4 \times 3^3} = \frac{323}{108}$$

$$\sqrt[7]{100} = \sqrt[7]{2^7 - 28} \approx 2 + \frac{-28}{7 \times 2^6}$$

$$\sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{2^{10} - 24} \approx 2 + \frac{-24}{10 \times 2^9}$$

4. 略

5. 略

6.4 对于教学的建议

6.4.1 第一组参考题

1. 令 $f(t) = (1+t)^{10}$ 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1 + \tan x)^{10} - 1^{10}}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos x} + \frac{(1 - \sin x)^{10} - 1^{10}}{-\sin x} \right] \\ &= f'(0) \cdot 1 + f'(0) = 10 + 10 = 20 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \\ \Rightarrow f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}} \\ \Rightarrow f^{(100)}(0) &= 100! - \frac{100!}{2^{101}} = 100! \left(1 - \frac{1}{2^{101}} \right) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right)}{f(a)} \right]^n \\ &= \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln f\left(a + \frac{1}{n}\right) - \ln f(a)}{\frac{1}{n}} \right\} \\ &= \exp[\ln f(x)]'_{x=a} = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}} \end{aligned}$$

4. 原式 = $\frac{2 \sin(x + \frac{a}{2}) \cos(-\frac{a}{2})}{-2 \sin(x + \frac{a}{2}) \sin(-\frac{a}{2})} = \cot \frac{a}{2}$ 可得 $f(x)$ 是常值函数故 $f'(x) = 0$

5. 有限增量公式:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + o(x) \\ &= f'(0)x + o(x) \end{aligned}$$

又

$$x_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \sum_{k=1}^n f'(0) \cdot \frac{k}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

故

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= f'(0) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{f'(0)}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = \frac{+10}{2} \end{aligned}$$

6. (1) 记 $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$ 则

$$\text{原式} = \frac{f'(0)}{2} = \frac{1}{2}$$

(2) 原式 = $\exp\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)\right\}$, 记 $f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x}$ 故

$$\text{原式} = e^{\frac{f'(0)}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$$

7.

$$\begin{aligned} y &= \frac{-(1-x) + 2}{\sqrt{1-x}} = -\sqrt{1-x} + \frac{2}{\sqrt{1-x}} \\ \Rightarrow y^{(n)} &= \frac{(2n-3)!!}{2^n(1-x)^{\frac{2n-1}{2}}} + \frac{(2n-1)!!}{2^{n-1}(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}} \end{aligned}$$

8. 归纳假设法: 当 $n=1$ 时, 可验证成立

假设 $n=k$ 时结论成立, 下验证 $n=k+1$ 的情况

$$\begin{aligned} \left[x^k f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(k+1)} &= \left\{ \left[x \cdot x^{k-1} f(x) \right]' \right\}^{(k)} \\ &= \left\{ x^{k-1} f\left(\frac{1}{x}\right) + x \left[x^{k-1} f\left(\frac{1}{x}\right) \right]' \right\}^{(k)} \\ &= \left[x^{k-1} f\left(\frac{1}{x}\right) \right]^{(k)} + x \left[x^{k-1} f\left(\frac{1}{x}\right) \right]^{(k+1)} + k \left[x^{k-1} f\left(\frac{1}{x}\right) \right]^{(k)} \\ &= (k+1) \left[x^{k-1} f\left(\frac{1}{x}\right) \right]^{(k)} + x \left\{ \left[x^{k-1} f\left(\frac{1}{x}\right) \right]^{(k)} \right\}' \\ &= (k+1) \frac{(-1)^k}{x^{k+1}} f^{(k)}\left(\frac{1}{x}\right) + x \left\{ \frac{(-1)^k}{x^{k+1}} f^{(k)}\left(\frac{1}{x}\right) \right\}' \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}} f^{(k+1)}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

假设成立, 故对任意自然数 n 成立

$$\frac{1}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n \left[x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right) \right]^{(n)}$$

9. 记 $S_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$

$$(1)t_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = S'_n(x)$$

$$(2) \text{ 记 } T_n(x) = 1^2 + 2^2x + \cdots + n^2x^{n-1} \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} T_n(x) - t_n(x) &= 2x + 3 \times 2x^2 + \cdots + n(n-1)x^{n-1} \\ &= x [2 + 3 \times 2x + \cdots + n(n-1)x^{n-2}] = xS''_n(x) \end{aligned}$$

$$T_n(x) = S'_n(x) + xS''_n(x) = [xS'_n(x)]'$$

$$10. (1)(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k \text{ 两边求导可得}$$

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^n kC_n^k x^{k-1}$$

再令 $x = 1$ 可得

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^n kC_n^k$$

$$(2)(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k \text{ 两边求两次导可得}$$

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=1}^n C_n^k k(k+1)x^{k-2}$$

令 $x = 1$ 得

$$n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=1}^n C_n^k (k^2 - k)$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 C_n^k = n(n-1)2^{n-2} + \sum_{k=1}^n kC_n^k$$

$$\text{由 (1) 知上式} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$$

11. 设抛物线为 $x^2 = 2py$, 焦点为 $(0, \frac{p}{2})$, 任意 (x_0, y_0) ($x_0 \neq 0, x_0 = 0$ 时结论成立), 过 (x_0, y_0) 切线斜率为 $\frac{x_0}{p}$, 法线斜率为 $-\frac{p}{x_0}$, 由两条直线关于一条直线对称的斜率关系 (对称轴斜率为 k , 另外两条斜率为 a, b , 则 $\frac{k-a}{1+ka} = \frac{b-k}{1+kb}$), 则 (x_0, y_0) 连接 $(0, \frac{p}{2})$ 的斜率为

$$\frac{y_0 - \frac{p}{2}}{x_0}$$

设反射线斜率为 b , 则

$$\begin{aligned} \frac{-\frac{p}{x_0} - \frac{y_0 - \frac{p}{2}}{x_0}}{1 + \left(-\frac{p}{x_0}\right) \cdot \frac{y_0 - \frac{p}{2}}{x_0}} &= \frac{b + \frac{p}{x_0}}{1 - \frac{p}{x_0} b} \\ \Rightarrow \frac{b + \frac{p}{x_0}}{1 - \frac{p}{x_0} b} &= -\frac{x_0}{p} \end{aligned}$$

故 $b = \infty$, 故反射后平行于 y 轴。

12. 椭圆上任意一点 P 关于椭圆的切线是 $\angle F_1PF_2$ 的外角平分线, 其中 F_1, F_2 是椭圆的两个焦点. 换言之, 即 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线与 P 点处境圆的切线垂直. (如图 6.1)

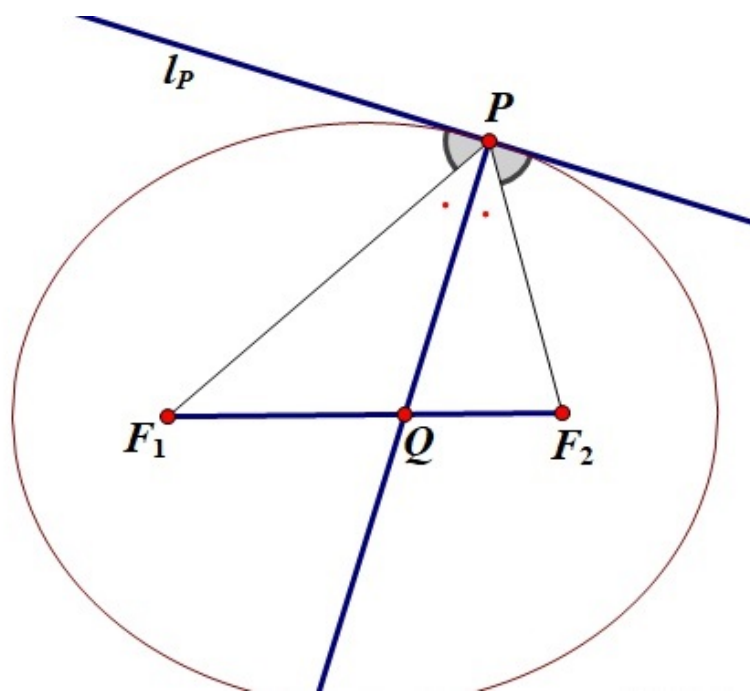


图 6.1

我们先设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 以及 P 点的坐标 (x_0, y_0)

第一步, 求出过 P 点的椭圆的切线 l_P 的斜率.

我们用椭圆的方程对 x 求导, 得到 $\frac{2x}{a^2} + \frac{2y \cdot y'}{b^2} = 0$ 代入 P 点坐标可知 $k_{l_P} = y' = -\frac{x_0}{y_0} \cdot \frac{b^2}{a^2}$ 做 $PQ \perp l_P$ 交 F_1F_2 于 Q , 于是, 我们可以得到直线 PQ 的斜率 $k_{PQ} = \frac{y_0}{x_0} \cdot \frac{a^2}{b^2}$

第二步, 求出 Q 点坐标.

根据 PQ 的斜率及 P 点坐标, 我们可以解出 $PQ: y = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0} \cdot x + \frac{(b^2 - a^2) y_0}{b^2}$, 因此

Q 点坐标为 $(\frac{c^2 x_0}{a^2}, 0)$

第三步, 根据角平分线定理验证 PQ 平分 $\angle F_1 P F_2$

平分线定理, PQ 平分 $\angle F_1 P F_2 \Leftrightarrow \frac{P F_1}{P F_2} = \frac{Q F_1}{Q F_2}$. 由椭圆的第二定义可知: $P F_1 =$

$a + e x_0, P F_2 = a - e x_0$. 因此即证: $\frac{a + e x_0}{a - e x_0} = \frac{c + \frac{c^2 x_0}{a^2}}{c - \frac{c^2 x_0}{a^2}}$, 化简即可.

13. $t = t_0$ 处的切向量为

$$(x'(t_0), y'(t_0)) = a \left(\frac{1}{\sin t_0} - \sin t_0, \cos t_0 \right)$$

切线方程为

$$(x(t_0), y(t_0)) + at \left(\frac{1}{\sin t_0} - \sin t_0, \cos t_0 \right)$$

当 $y = 0$ 时, 可得

$$a \sin t_0 + a + \cos t_0 = 0 \Rightarrow t = -\tan t_0$$

此时与 x 轴交点的 x 坐标为

$$a \left(\ln \tan \frac{t_0}{2} + \cos t_0 - \tan t_0 \left(\frac{1}{\sin t} - \sin t_0 \right) \right) = a \ln \tan \frac{t_0}{2}$$

则切点到 x 轴交点的长度为

$$|a| \cdot \sqrt{\left(\ln \tan \frac{t_0}{2} + \cos t_0 - \ln \tan \frac{t_0}{2} \right)^2 + \sin^2 t_0} = |a|$$

为常数

14. $\Rightarrow: f$ 在 x_0 可微 $\Rightarrow f$ 在 x_0 可导, 取

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & x \neq x_0 \\ f'(x_0) & x = x_0 \end{cases}$$

则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \phi(x_0)$$

故 $\phi(x)$ 在 x_0 连续

\Leftarrow : 由 $\phi(x)$ 在 x_0 连续知

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = \phi(x_0)$$

故 $f(x)$ 在 x_0 可导, 且导数为 $\phi(x_0) \Leftarrow f(x)$ 在 x_0 可微

15. 已知 $\phi(x)$ 是 $n-1$ 阶可微函数, 则

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0)$$

可求是 $n-1$ 阶导数可得

$$f^{(n-1)}(x) = \phi^{(n-1)}(x)(x - x_0) + (n-1)\phi^{(n-2)}(x)$$

$\phi(x)$ 是 $n-1$ 阶可微函数 $\Rightarrow \phi^{(n-2)}(x)$ 可微

由题 14 可知

$$\phi^{(n-2)}(x) = \phi^{(n-2)}(x_0) + \psi(x)(x - x_0)$$

其中 $\psi(x)$ 在 x_0 连续且 $\psi(x_0) = \phi^{(n-1)}(x_0)$

故

$$\begin{aligned} f^{(n-1)}(x) &= \phi^{(n-1)}(x)(x - x_0) + (n-1) \left[\phi^{(n-2)}(x_0) + \psi(x)(x - x_0) \right] \\ &= (n-1)\phi^{(n-2)}(x_0) + \left[\phi^{(n-1)}(x) + (n-1)\psi(x) \right] (x - x_0) \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\phi^{(n-1)}(x) + (n-1)\psi(x) \right] \\ &= \psi^{(n-1)}(x_0) + (n-1)\psi(x_0) \\ &= \psi^{(n-1)}(x_0) + (n-1)\phi^{(n-1)}(x_0) = n\phi^{(n-1)}(x_0) \end{aligned}$$

根据题 14 及其证明可得 $f^{(n)}(x_p)$ 存在且等于 $n\phi^{(n-1)}(x_0)$

16. 数学归纳法

当 $n=1$ 时, $a_0 f(x) + a_1 f'(x) = 0$, 若 $a_1 = 0 \Rightarrow a_0 \neq 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$

若 $a_1 \neq 0$ 则

$$\left[e^{\frac{a_0}{a_1}x} f(x) \right]' = 0 \Rightarrow e^{\frac{a_0}{a_1}x} f(x) = c \Rightarrow f(x) = ce^{-\frac{a_0}{a_1}x}$$

存在任意阶导数, 结论成立

假设当 $n \leq k$ 时, 结论成立, 下证 $n = k + 1$ 的情况

若 $a_{k+1} = 0$, 则化为 $n = k$ 的情况, 结论成立

若 $a_{k+1} \neq 0$ 则

$$f^{(k+1)}(x) = - \sum_{i=0}^k \frac{a_i}{a_n} f^{(i)}(x)$$

由假设可知等式右端可导, 则左侧可导, 不断增大 k , 由右端导数存在总是能推出左端导数存在, 由此下去可知 $f(x)$ 存在任意阶导数

17. 因为多项式 p 只有实零点, 故可以设

$$p(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

于是当 $x = a_i, 1 \leq i \leq n$ 时, 命题中不等式显然成立, 当 $x \neq a_i$ 时, 对 p 求导, 有

$$p'(x) = \sum_{i=1}^n \frac{p(x)}{x - a_i}$$

于是有

$$\frac{p'}{p}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x - a_i}$$

对上式两侧同时求导可知

$$\frac{p''p - (p')^2}{p^2}(x) = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x - a_i)^2} \leq 0$$

于是有 $(p'(x))^2 \geq p(x)p''(x)$

18. 反证法

若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 中有无限个零点, 选择其中可数个, 设为 $\{x_n\}$ 且各不相等, 由致密性定理知 $\exists n_k, x_0 \in [0, 1]$ s.t. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$, 由连续性可知

$$f(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0$$

又 f 可导则

$$f'(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_{n_k}) - f(x_0)}{x_{n_k} - x_0} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0 - 0}{x_{n_k} - x_0} = 0$$

则

$$x_0 \in \{x \in [0, 1]; f(x) = 0 = f'(x)\}$$

这与题目条件矛盾, 故 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 中只有有限个零点

19. (1) 用数学归纳法. 当 $n = 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \cos \arctan x \cdot \sin \left(\arctan x + \frac{\pi}{2} \right) = 0! \cos y \sin \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

假设命题对 n 阶导数成立, 即

$$f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n y \sin n \left(y + \frac{\pi}{2} \right)$$

对上式两侧再求一次导, 可得

$$f^{(n+1)}(x) = (n-1)! \left(n \cos^{n-1} y \cdot (-\sin y) y' \sin n \left(y + \frac{\pi}{2} \right) + \cos^n y \cos n \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \cdot n y' \right)$$

注意到 $y' = (\cos y)^2$, 于是有

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= n! \cos^{n+1} y \left(-\sin y \sin \left(y + \frac{\pi}{2} \right) + \cos y \cos \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= n! \cos^{n+1} y \cos \left(n \left(y + \frac{\pi}{2} \right) + y \right) = n! \cos^{n+1} y \sin(n+1) \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

(2) 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时, $y' = 1/(1+x^2)$, 分子为系数是 $(-1)^0 = 1$ 的 0 次多项式. 假设命题在 $n-1$ 时成立, 那么

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \left(y^{(n-1)} \right)' = \left(\frac{P_{n-2}(x)}{(1+x^2)^{n-1}} \right)' \\ &= \frac{P'_{n-2}(x) (1+x^2)^{n-1} - P_{n-2}(x) 2x(n-1) (1+x^2)^{n-2}}{(1+x^2)^{2n-2}} \\ &= \frac{P'_{n-2}(x) (1+x^2) - P_{n-2}(x) 2x(n-1)}{(1+x^2)^n} \quad (*) \end{aligned}$$

考虑等式 (*) 的分子, 从次数上来看容易看出它是一个 $n-1$ 次的多项式, 那只要考虑它的最高次的系数. 因为 $P'_{n-2}(x)$ 的 $n-3$ 次的系数是 $(-1)^{n-2}(n-1)!(n-2)$. 那么容易计算 (*) 的最高次项的系数为

$$(-1)^{n-2}(n-1)!(n-2) - 2(n-1)(-1)^{n-2}(n-1)! = -(-1)^{n-2}n! = (-1)^{n-1}n!$$

归纳结束, 原命题成立。

20. 数学归纳法

$n=1$ 时, $f_1(x) = x f_0(x) - f'_0(x) = x$ 是一次多项式, 且只有一个实根 $x=0$ 自然关于原点对称。

假设当 $n=k$ 时结论成立, 即 $f_k(x)$ 是 k 次多项式, 有 k 个不同的实根且关于原点对称

(1) 若 $k=2m$ 则可设 $f(x) = (x^2 - a_1^2) \cdots (x^2 - a_m^2)$ 其中 $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$ 此时有

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= x(x^2 - a_1^2) \cdots (x^2 - a_m^2) - 2x(x^2 - a_2^2) \cdots (x^2 - a_m^2) \\ &\quad - 2(x^2 - a_1^2)x(x^2 - a_3^2) \cdots (x^2 - a_m^2) - \cdots - 2(x^2 - a_1^2) \cdots (x^2 - a_{m-1}^2)x \end{aligned}$$

可得 $2m+1 = k+1$ 次多项式, $f_{k+1}(0) = 0$ 且

$$\begin{aligned} f_{k+1}(a_j) &= -2(x^2 - a_1^2) \cdots (x^2 - a_{j-1}^2) x (x^2 - a_{j+1}^2) \cdots (x^2 - a_m^2) \Big|_{x=a_j} \\ &= -2(a_j^2 - a_1^2) \cdots (a_j^2 - a_{j-1}^2) a_j (a_j^2 - a_{j+1}^2) \cdots (a_j^2 - a_m^2) \end{aligned}$$

它的符号为 $-(-1)^{m-j} = (-1)^{m-j+1}$ 故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{k+1}(x) = +\infty, \quad f_{k+1}(a_m) < 0, \quad f_{k+1}(a_{m-1}) > 0$$

根据介值定理可得

$$\exists a_1 < \xi_1 < a_2, a_2 < \xi_2 < a_3, \dots, a_m < \xi_m < +\infty$$

$$s.t. f_{k+1}(\xi_j) = 0 \quad \forall 1 \leq j \leq m$$

注意到 $f_k(x)$ 是偶函数 $\Rightarrow f_{k+1}(x)$ 是奇函数可得

$$f_{k+1}(-\xi_j) = -f_{k+1}(\xi_j) = 0 \quad \forall 1 \leq j \leq m$$

由此可得 $f_{k+1}(x)$ 是 $k+1 = 2m+1$ 次多项式, 有且仅有 $0, \xi_1, \dots, \xi_m, \xi_1, \dots, \xi_m$ 这 $k+1$ 个根且关于原点对称

(2) 若 $k = 2m+1$, 则可设

$$f_k(x) = x(x^2 - a_1^2) \dots (x^2 - a_m^2)$$

则

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= x^2(x^2 - a_1^2) \dots (x^2 - a_m^2) - (x^2 - a_1^2) \dots (x^2 - a_m^2) \\ &\quad - 2x^2(x^2 - a_2^2) \dots (x^2 - a_m^2) - 2x^2(x^2 - a_1^2)(x^2 - a_3^2) \dots (x^2 - a_m^2) \\ &\quad - \dots - 2x^2(x^2 - a_1^2) \dots (x^2 - a_{m-1}^2) \end{aligned}$$

故 $f_{k+1}(x)$ 是 $2m+2 = k+1$ 次多项式

注意到

$$\begin{aligned} f_{k+1}(a_j) &= -2x^2(x^2 - a_1^2) \dots (x^2 - a_{j-1}^2)(x^2 - a_{j+1}^2) \dots (x^2 - a_m^2) \Big|_{x=a_j} \\ &= -2a_j^2(a_j^2 - a_1^2) \dots (a_j^2 - a_{j-1}^2)(a_j^2 - a_{j+1}^2) \dots (a_j^2 - a_m^2) \end{aligned}$$

它的符号是 $-(-1)^{m-j} = (-1)^{m-j+1}$ 可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{k+1}(x) = +\infty, \quad f_{k+1}(a_m) < 0, \quad f_{k+1}(a_{m-1}) > 0$$

再次注意到 $f_{k+1}(a_1)$ 的符号为 $(-1)^m$ 与 $f_{k+1}(0) = -(-1)^m a_1^2 \dots a_m^2$ 的符号相反, 由介值定理可得

$$\exists 0 < \eta_1 < a_1, a_1 < \eta_2 < a_2, \dots, a_{m-1} < \eta_{m-1} < a_m, a_m < \eta_m < +\infty$$

$$s.t. f_{k+1}(\eta_j) = 0 \quad \forall 1 \leq j \leq m+1$$

又 $f_k(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow f_{k+1}(x)$ 为偶函数, 则

$$f_{k+1}(-\eta_j) = f_{k+1}(\eta_j) = 0 \quad \forall 1 \leq j \leq m+1$$

因而 $f_{k+1}(x)$ 是 $k+2 = 2m+2$ 次多项式有且仅有 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+1}, -\eta_1, \dots, -\eta_{m+1}$ 这 $k+2$ 个根且关于原点对称

6.4.2 第二组参考题

1. (1) 由

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n \sin kx \right) \cdot \sin \frac{x}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\cos \frac{2k-1}{2}x - \cos \frac{2k+1}{2}x \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x \right) \end{aligned}$$

$$\text{可得 } \sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

由

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \cos kx \right) \sin \frac{x}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\sin \frac{2k+1}{2}x - \sin \frac{2k-1}{2}x \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin \frac{2n+1}{2}x - \sin \frac{x}{2} \right] \end{aligned}$$

可得

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}x - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

(2)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k \sin kx &= - \left(\sum_{k=1}^n \cos kx \right)' = - \left(\frac{\sin \frac{2n+1}{2}x - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \right)' \\ \sum_{k=1}^n k \cos kx &= \left(\sum_{k=1}^n \sin kx \right)' = \left(\frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right)' \end{aligned}$$

2. $R(x)$ 在有理点不连续 $\Rightarrow R(x)$ 不可导

对于 $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\forall q \in \mathbb{Z}_+$ $\exists P_q \in \mathbb{Z}$ s.t. $\frac{P_q}{q} < x < \frac{P_q+1}{q}$ 令 $r_q = \frac{P_q}{q}$, $s_q = \frac{P_q+1}{q}$ 则满足

$$0 < x - r_q < \frac{1}{q}, \quad 0 < s_q - x < \frac{1}{q}$$

故

$$\begin{aligned} \frac{R(r_q) - R(x_0)}{r_q - x_0} &= \frac{\frac{1}{q}}{r_q - x_0} < \frac{\frac{1}{q}}{r_q - s_q} = -1 \\ \frac{R(s_q) - R(x_0)}{s_q - x_0} &= \frac{\frac{1}{q}}{s_q - x_0} > \frac{\frac{1}{q}}{s_q - r_q} = 1 \end{aligned}$$

由 $\lim_{q \rightarrow +\infty} r_q = x_0 = \lim_{q \rightarrow +\infty} s_q$ 可得

$$\frac{R(s_q) - R(x_0)}{s_q - x_0} = \frac{R(r_q) - R(x_0)}{r_q - x_0} = \frac{\frac{1}{q}}{r_q - x_0} > 1 - (-1) = 2$$

可知 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x) - R(x_0)}{x - x_0}$ 不存在, 故 $R(x)$ 在 x_0 不可导, 综上 $R(x)$ 处处不可导

3. 设切点为 (x, y) , 则

$$\frac{ax^2 + bx + c - y_0}{x - x_0} = 2ax + b$$

可得

$$ax^2 - 2ax_0x - bx_0 + y_0 - c = 0$$

则有两个解等价于

$$4ax_0^2 - 4a(y_0 - bx_0 - c) > 0$$

$$x_0^2 + bx_0 + c > y_0$$

即 x_0 在抛物线外部;

类似可得, 有一解等价于 x_0 在抛物线上; 无解等价于 x_0 在抛物线内部。

4.

$$\begin{aligned}
 P'_{n+1}(x) &= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \left((x^2-1)^{n+1} \right)^{(n+2)} = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \left(\left((x^2-1)^{n+1} \right)^{(2)} \right)^{(n)} \\
 &= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \left(((n+1)(x^2-1)^n 2x)' \right)^{(n)} \\
 &= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \left(2(n+1)(x^2-1)^n + 2(n+1)x \cdot n(x^2-1)^{n+1} 2x \right)^{(n)} \\
 &= \frac{1}{2^n n!} \left((x^2-1)^n \right)^{(n)} + \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \left(x^2(x^2-1)^{n-1} \right)^{(n)} \\
 &= P_n(x) + \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \left((x^2-1)^{n-1} + (x^2-1)^n \right)^{(n)} \\
 &= P_n(x) + P'_{n-1}(x) + 2n \left(\frac{1}{2^n n!} (x^2-1)^n \right)^{(n)} \\
 &= P_n(x) + P'_{n-1}(x) + 2nP_n(x)
 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
 (1-x^2)P_n(x) - 2xP'_n(x) &= \left((1-x^2)P_n(x) \right)' \\
 &= \frac{u(x)=(x^2-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{2^n n!} \left((1-x^2)u^{(n+1)} \right)' = \frac{1}{2^n n!} \left((1-x^2)(u')^{(n)} \right)' \\
 &= \frac{1}{2^n n!} \left(\left((1-x^2)u' \right)^{(n)} - n(-2x)(u')^{(n-1)} - \frac{n(n-1)}{2} \cdot (-2)(u')^{(n-2)} \right)' \\
 &= \frac{(1-x^2)u' = -2nxu}{2^n n!} \frac{1}{2^n n!} \left(-(2nxu)^{(n)} + 2nxu^{(n)} + n(n-1)u^{(n-1)} \right)' \\
 &= \frac{1}{2^n n!} \left(-2nxx^{(n)} - 2n^2u^{(n-1)} + 2nxu^{(n)} + n(n-1)u^{(n-1)} \right)' \\
 &= \frac{1}{2^n n!} (-n^2 - n) \left(u^{(n-1)} \right)' = -n(n+1)P_n(x)
 \end{aligned}$$

6. 由 $(u+v+w)^n = \sum_{\substack{0 \leq i, j, k \leq n \\ i+j+k=n}} \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k$ 猜测

$$(uvw)^{(n)} = \sum_{\substack{0 \leq i, j, k \leq n \\ i+j+k=n}} \frac{n!}{i!j!k!} u^{(i)} v^{(j)} w^{(k)}$$

可得

$$\begin{aligned}
 (uvw)^{(n)} &= \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(i)} (vw)^{(n-i)} \\
 &= \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(i)} \sum_{j=0}^{n-i} C_{n-i}^j v^{(j)} w^{(n-i-j)} \\
 &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} C_n^i C_{n-i}^j u^{(i)} v^{(j)} w^{(n-i-j)} \\
 &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} u^{(i)} v^{(j)} w^{(n-i-j)} \\
 &= \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ i+j=n}} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} u^{(i)} v^{(j)} w^{(n-i-j)} \\
 &= \sum_{\substack{0 \leq i, j, k \leq n \\ i+j+k=n}} \frac{n!}{i!j!k!} u^{(i)} v^{(j)} w^{(k)}
 \end{aligned}$$

7. 由 $|f(-1)| = |a - b + c| \leq 1$, $|f(0)| = |c| \leq 1$, $f(1) = |a + b + c| \leq 1$ 可得

$$\begin{aligned}
 |2a + b| &= |x(a - b + c) + yc + z(a + b + c)| \\
 &= |(x + z)a + (z - x)b + (x + y + z)c| \\
 &\stackrel{x+z=2, z-x=1, x+y+z=0}{\leq} \left| \frac{1}{2}(a - b + c) - 2c + \frac{3}{2}(a + b + c) \right| \\
 &\leq \frac{1}{2}|a - b + c| + 2|c| + \frac{3}{2}|a + b + c| \leq 4
 \end{aligned}$$

同理可得 $|-2a + b| = \left| -\frac{3}{2}(a - b + c) + 2c - \frac{1}{2}(a + b + c) \right| \leq 4$

线性函数在端点处取最值, 故

$$|x| \leq 1 \Rightarrow |f'(x)| = |2ax + b| \leq \max\{|2a + b|, |-2a + b|\} \leq 4$$

8. 设 $g(n, m) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^m \quad 0 \leq m \leq n$

对 n 作数学归纳法, 当 $n = 1$ 时有

$$g(1, 0) = \sum_{k=0}^1 (-1)^k C_1^k k^0 = 1 - 1 = 0, g(1, 1) = \sum_{k=0}^1 (-1)^k C_1^k k^1 = -1$$

假设 $n = N$ 时结论成立, 则当 $n = N + 1$ 时有

$$(1)m = 0, \text{ 则 } g(N + 1, 0) = \sum_{k=0}^{N+1} (-1)^k C_{N+1}^k = (1 - 1)^{N+1} = 0$$

(2) $1 \leq m \leq N + 1$ 则

$$\begin{aligned}
 g(m+1, m) &= \sum_{k=0}^{N+1} (-1)^k C_{N+1}^k k^m \\
 &= \sum_{k=0}^{N+1} (-1)^k \frac{(N+1)!}{k!(N+1-k)!} k^m \\
 &= -(N+1) \sum_{k=1}^{N+1} (-1)^{k+1} \frac{N!}{(k-1)!(N-(k-1))!} k^{m-1} \\
 &\stackrel{k-1=l}{=} -(N+1) \sum_{l=0}^N (-1)^l \frac{N!}{l!(N-l)!} (l+1)^{m-1} \\
 &= -(N+1) \sum_{l=0}^N (-1)^l \frac{N!}{l!(N-l)!} \sum_{j=0}^{m-1} C_{m-1}^j l^j \\
 &= -(N+1) \sum_{j=0}^{m-1} C_{m-1}^j \left[\sum_{l=0}^N (-1)^l C_N^l l^j \right] \\
 &= \begin{cases} 0 & 1 \leq m \leq N \\ -(N+1)(-1)^N N! & m = N+1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}
 f'_n(x) &= nx^{n-1} \ln x + x^{n-1} = nf_{n-1}(x) + x^{n-1} \\
 \Rightarrow f_n^{(n)}(x) &= nf_{n-1}^{(n-1)}(x) + (n-1)! \\
 \Rightarrow \frac{f_n^{(n)}(x)}{n!} &= \frac{f_{n-1}^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + \frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

记 $g_n(x) = \frac{f_n^{(n)}(x)}{n!}$ 则

$$g_n(x) = g_{n-1}(x) + \frac{1}{n} = \cdots = g_0(x) + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \ln x + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = C$$

其中 C 为欧拉常数

10. 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = A$ 知, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $|x| < \delta$ 时有

$$\left| \frac{f(2x) - f(x)}{x} \right| < \varepsilon$$

于是 $|x| < 2\delta$ 可得 $\left| \frac{x}{2^k} \right| < \delta, \forall k \in \mathbb{Z}$ 有

$$\left| \frac{f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)}{\frac{x}{2^{k+1}}} \right| < \varepsilon, \forall k \in \mathbb{N}$$

可得

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} A \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \left[\frac{f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)}{\frac{x}{2^{k+1}}} - A \right] \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow +\infty$, 由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$ 故

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} - A \right| \leq \varepsilon$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0) = A$

11. 考虑 $z = (1 - \sqrt{x})^{2n+2}$, 容易验证在 $z^{(n)}$ 中每一个和式都含有因子 $(1 - \sqrt{x})$, 也就是能知道 $z^{(n)}(1) = 0$, 由二项式定理可知

$$y + z = 2 \sum_{k=0}^{n+1} \binom{2n+2}{2k} x^k$$

等式两侧同时求 n 阶导数, 可得

$$(y+z)^{(n)}(x) = 2 \left(\binom{2n+2}{2n} n! + (n+1)! x \right)$$

令 $x=1$, 再将 $z^{(n)}(1) = 0$ 代入, 就能得到

$$y^{(n)}(1) = 4(n+1)(n+1)!$$

12. (1)

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$f^{(2)} = \frac{-2c(ad-bc)}{(cx+d)^3} \Rightarrow f^{(3)}(x) = \frac{6c^2(ad-bc)}{(cx+d)^4}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(cx+d)^2} S(f, x) &= \frac{6c^2(ad-bc)}{ad-bc} - \frac{3}{2} \left(\frac{-2c(ad-bc)}{ad-bc} \right)^2 \\ &= 6c^2 - \frac{3}{2} \cdot 4c^2 = 0 \end{aligned}$$

(2) 设 $p'(x) = (x-a_1) \dots (x-a_n)$ 其中 a_i 互不相等则

$$\frac{p(x)}{p'(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x-a_i}$$

故

$$S(p, x) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x-a_k} \right)' - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x-a_k} \right)^2 = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x-a_k)^2} - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x-a_k} \right)^2 < 0$$

(3) 由链式法则可得

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x) = (f \circ g)^{(2)}(x) = f^{(2)}(g(x)) (g'(x))^2 + f'(g(x))g^{(2)}(x) \\ \Rightarrow (f \circ g)^{(3)}(x) &= f^{(3)}(g(x)) (g'(x))^3 + 3f^{(2)}(g(x))g'(x)g^{(2)}(x) + f'(g(x))g^{(3)}(x) \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
 S(f \circ g, x) &= \frac{f^{(3)}(g(x))(g'(x))^2}{f'(g(x))} + 3 \frac{f^{(2)}(g(x))g^{(2)}(x)}{f'(g(x))} + \frac{g^{(3)}(x)}{g'(x)} \\
 &\quad - \frac{3}{2} \left[\frac{f^{(2)}(g(x))g'(x)}{f'(g(x))} + \frac{g^{(2)}(x)}{g'(x)} \right]^2 \\
 &= \frac{f^{(3)}(g(x))(g'(x))^2}{f'(g(x))} - \frac{3}{2} \left[\frac{f^{(2)}(g(x))g'(x)}{f'(g(x))} \right]^2 + \frac{g^{(3)}(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2} \left[\frac{g^{(2)}(x)}{g'(x)} \right]^2 \\
 &= S(f \circ g, x) (g'(x))^2 + S(g, x)
 \end{aligned}$$

(4) 由 (3) 得 $S(f \circ g, x) = S(f \circ g, x) (g'(x))^2 + S(g, x) < 0$

(5) 不断利用 (4) 可得 $S(f, x) < 0 \Rightarrow S(f \circ f, x) < 0$ 可得

$$S(f^n, x) < 0$$

第7章 微积分基本定理

7.1 微分学中值定理

7.1.1 练习题

1. (1) (反证法) 令 $f(x) = e^x - ax^2 - bx - c$, 若 $f(x) = 0$ 有 4 个零点, 不妨设为 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则 $f(x)$ 在 $[x_i, x_{i+1}], i = 1, 2, 3$ 上满足 Rolle 定理的条件, 则存在 $y_i \in (x_i, x_{i+1}), i = 1, 2, 3$ 使得 $f'(y_i) = 0$, 依次类推可得 $\exists \xi \in (x_1, x_4)$ 使得 $f^{(3)}(\xi) = e^\xi = 0$ 矛盾。

(2) 令 $F(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)x$, 则 $F(1) = F(0) = 0$, 故存在 $x_0 \in (0, 1)$ 使得 $F(x_0) = 0$.

(3) 与 (1) 类似可得 $f^{(n)}(x) = a_n n!$ 有一个零点, 可得 $a_n = 0$, 再次可得 $a_{n-1} = 0, \dots, a_0 = 0$ 可得 $f(x) \equiv 0$

(4) 若 $f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ 有 5 个零点, 则 $f'''(x) = 60x^2 + 24ax + 6b$ 在 R 上有两个不同的零点, 可得 $\Delta = (24a)^2 - 4 \times 60 \times 6b > 0 \Rightarrow 2a^2 > 5b$ 矛盾

(5) 令 $f(x) = (x^2 - 1)^n$, 只需证 $f^{(n)}(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上有 n 个不同的实数根。 ± 1 为 $f(x)$ 的 n 重根, 则对于 $k = 0, 1, \dots, n-1$ 均有 $f^{(k)}(\pm 1) = 0$, 则 $\exists x_{11} \in (-1, 1)$ 使得 $f'(x_{11}) = 0$, 又因为 $f'(-1) = f'(1) = 0$ 则 $\exists x_{21} \in (-1, x_{11}), x_{22} \in (x_{11}, 1)$, 使得 $f''(x_{21}) = f''(x_{22}) = 0$, 依此类推可得存在 $-1 < x_{n1} < x_{n2} < \dots < x_{nn} < 1$ 使得

$$f^{(n)}(x_{n1}) = 0, f^{(n)}(x_{n2}) = 0, \dots, f^{(n)}(x_{nn}) = 0$$

(6) 令 $f(x) = x^n e^{-x}$, 只需证 $f^{(n)}(x)$ 有 n 个正根, 0 为 $f(x)$ 的 n 重根, 且 $\forall n > 0, f^{(n)}(+\infty) = 0$, 可得 $\exists x_{11} > 0$ 使得 $f'(0) = f'(x_{11}) = f'(+\infty) = 0$, 再次可得 $x_{21} \in (0, x_{11}), x_{22} \in (x_{11}, +\infty)$ 使得

$$f''(0) = f''(x_{21}) = f''(x_{22}) = f''(+\infty) = 0$$

以此类推可得存在 $0 < x_{n1} < x_{n2} < \dots < x_{nn}$ 使得

$$f^{(n)}(x_{n1}) = f^{(n)}(x_{n2}) = \dots = f^{(n)}(x_{nn}) = 0$$

2. 令 $F(x) = f(x) - f(a)$, 则 $F(a) = F(b) = 0$, 又 $F'_+(a)F'_-(b) > 0$, 不妨设 $F'_+(a) > 0, F'_-(b) > 0$, 因为 $F'_+(a) > 0$, 则存在 $a_1 > a$ 使得 $F(a_1) > F(a) = 0$, 同理存在 $b_1 < b$ 使得 $F(b_1) < F(b) = 0$, 由介值定理, 存在 $c \in (a_1, b_1)$ 使得 $F(c) = 0$, 则 $F(a) = F(c) = F(b) = 0$ 分别在 $(a, c), (c, b)$ 上运用 Rolle 定理, 可得 $\exists x_1 \in (a, c), x_2 \in (c, b)$, 使得 $F'(x_1) = F'(x_2) = 0$, 即 $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$

3. 取 $g(x) = \ln x$, 由柯西中值定理可得 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

即

$$f(b) - f(a) = \ln \frac{b}{a} \cdot \xi f'(\xi)$$

4. 令

$$F(x) = (b^2 - a^2)(f(x) - f(a)) + (f(a) - f(b))(x^2 - a^2)$$

则 $F(a) = F(b) = 0$, 由 Rolle 定理可得存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$(b^2 - a^2) f'(\xi) = 2\xi[f(b) - f(a)]$$

5. 令 $F(x) = [f(x) - f(a)][g(b) - g(x)]$, 则 $F(a) = F(b) = 0$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$f'(\xi) \cdot (g(b) - g(\xi)) - g'(\xi)(f(\xi) - f(a)) = 0$$

即

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi) - f(a)}{g(b) - g(\xi)}$$

6. 若存在 $x_0 > a$, 使得 $f(x_0) = f(a)$, 则结论成立, 因此不妨设 $\forall x \in (a, +\infty)$, $f(x) > f(a)$, 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a)$, $\forall x_0 > a$, $\exists x_1 > x_0$ 使得 $f(x_1) < f(x_0)$, 由介值定理可得存在 $x_2 \in (a, x_0)$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$, 故 $\exists \xi \in (x_2, x_1)$ 使得 $f'(\xi) = 0$

7. 令 $F(x) = f(x) - \frac{x}{1+x^2}$, 则 $F(0) = F(+\infty) = 0$, 故 $\exists \xi > 0$ 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$f'(\xi) = \frac{1 - \xi^2}{(1 + \xi^2)^2}$$

8. (1) 由 $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x$ 得 $\theta = \frac{1}{2}$, 故 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$

(2) 由 $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x$ 得 $\theta = -\frac{x \pm \sqrt{x^2 + x\Delta x}}{\Delta x}$ 由 $f(x)$ 定义域 $x > 0$, 可得

$$\theta = -\frac{x + \sqrt{x^2 + x\Delta x}}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$$

9. 由 $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$ 可得

$$\theta(x) = \frac{1 - 2x + 2\sqrt{x^2 + x}}{4}$$

$$\theta'(x) = \frac{-2 + \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}}{4} > 0$$

可得 $\theta(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单增, 又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}, \lim_{x \rightarrow 0^+} \theta(x) = \frac{1}{4}$$

可得 $\frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2}$

10. 由达布定理知, 导函数无第一类间断点, 而单调函数只可能有第一类间断点, 故此导函数无间断点。

11. 由于 $f(a)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值, 所以 $\forall x \in [a, b]$, 均有 $f(x) \leq f(a)$; 故

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

若 $f(b)$ 是 $[a, b]$ 上的最大值, 则 $\forall x \in [a, b]$ 上, 均有 $f(x) \leq f(b)$, 故

$$f'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \geq 0$$

12. 令 $f(x) = 2 \arcsin x - \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$, 则 $f'(x) = 0$, 又 $f(0) = 0$ 故 $f(x) \equiv 0$, 即 $2 \arcsin x \equiv \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$

13. f 为线性函数, $f''(x) \equiv 0 \Rightarrow f'(x) = c$ (c 为常数), 则

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \\ &= c(x - x_0) + f(x_0) \end{aligned}$$

14. 假设 $|f'(x)| \leq M$ 有界, 则

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \\ |f(x)| &\leq |f(x_0)| + M|b - a| \end{aligned}$$

可得 $f(x)$ 有界, 矛盾。

15. 固定 x_0 , $\forall x < x_0, \exists \delta > 0$ 使得 $f(x) > f(x_0), \forall x \in (0, \delta)$ 则

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$$

进一步可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$$

故 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 右侧无下界。

16. 若 $\exists c \in (a, b)$ 使得 $f(c) \neq f(a)$, 若 $f(c) > f(a)$ 则

$$f'(\xi) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} > 0$$

若 $f(c) < f(a)$ 则

$$f'(\eta) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} = \frac{f(a) - f(c)}{b - c} > 0$$

17. 令 $F(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x$ 则 $F(0) = F(1) = F(c) = 0$, 故 $\exists \xi \in (0, 1)$ 使得 $F''(\xi) = 0$, 即 $f''(\xi) = 0$

18. $\exists \eta$ 使得

$$e^\eta = \frac{e^b - e^a}{b - a}$$

则取 $\xi = \eta$ 有

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} e^\eta = \frac{e^b - e^a}{b - a}$$

19. (1) 令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, F(1) = -1$, 故 $\exists \eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 使得 $f(\eta) = \eta$

(2) 令 $G(x) = (f(x) - x)e^{-\lambda x}$, 则 $G(0) = G(\eta) = 0$, 可得 $\exists \xi \in (0, \eta)$ 使得 $G'(\xi) = 0$, 即

$$[(f'(\xi) - 1) - \lambda(f(\xi) - \xi)] e^{-\lambda \xi} = 0$$

即

$$f'(\xi) - \lambda(f(\xi) - \xi) = 1$$

20. \Rightarrow : $f'(x) = c$ 为常数, 则固定 x_0 , 有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \\ &= c(x - x_0) + f(x_0) \end{aligned}$$

为线性函数

\Leftarrow : $f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$ 为常数

7.2 Taylor 定理

7.2.1 练习题

1.

$$\begin{aligned} x \csc x &= \frac{2ix}{e^{ix} - e^{-ix}} = 2ix + \frac{2ix}{e^{2ix} - 1} = \operatorname{Re} \left\{ 2ix \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_k (2ix)^k}{k!} \right\} \\ &= B_0 - \frac{B_2}{2!} (2x)^2 + \cdots + (-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2x)^{2k} + o(x^{2k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln \cos x &= \int_0^x (-\tan t) dt \\ &= - \int_0^x \tan t dt \\ &= - \int_0^x \left(\frac{B_2(2^2-1)2^2}{2!} t - \frac{B_4(2^4-1)}{4!} t^3 + \cdots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n+1} \frac{B_{2n}(2^{2n}-1)2^{2n}}{(2n)!} t^{2n-1} + o(t^{2n}) \right) dt \\ &= - \frac{B_2(2^2-1)2^2}{2! \cdot 2} x^2 + \frac{B_4(2^4-1)2^4}{4! \cdot 4} x^4 + \cdots \\ &\quad + (-1)^n \frac{B_{2n}(2^{2n}-1)2^{2n}}{(2n)! \cdot 2n} x^{2n} + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln \frac{\sin x}{x} &= \int_0^x \left(\cot t - \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \int_0^x \left(-\frac{B_2 2^2}{2!} t + \frac{B_4 2^4}{4!} t^3 + \cdots + (-1)^n \frac{B_{2n} 2^{2n}}{(2n)!} t^{2n-1} + o(t^{2n}) \right) dt \\ &\quad - \frac{B_2 2^2}{2 \cdot 2!} x^2 + \frac{B_4 2^4}{4 \cdot 4!} x^4 + \cdots + (-1)^n \frac{B_{2n} 2^{2n}}{2n \cdot (2n)!} x^{2n} + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$$

2. 可以这样做

3. $f(x) = (x+a)^n$, 则

$$f^{(k)}(x) = n(n-1) \cdots (n-k+1)(x+a)^{n-k}$$

$$f^{(k)}(0) = n(n-1) \cdots (n-k+1)a^{n-k}$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的拉格朗日余项的泰勒公式为

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}x + \cdots + \binom{n}{n-1}ax^{n-1} + x^n \end{aligned}$$

4. 对 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处泰勒展开可得

$$f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + o((x-x_0)^{n-1})$$

又 $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ 可得

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^{n-1}), (x \rightarrow x_0)$$

5.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{\sin x^3} = \left(x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} + o(x^{15})\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= x \left(1 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{12}}{120} + o(x^{12})\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= x \left[1 + \frac{1}{3} \left(-\frac{x^6}{6} + \frac{x^{12}}{120} + o(x^{12})\right) - \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \left(-\frac{x^6}{6} + \frac{x^{12}}{120} + o(x^{12})\right)^2}{2!}\right. \\ &\quad \left.+ o(x^{12})\right] \\ &= x \left[1 - \frac{x^6}{18} + \frac{x^{12}}{360} + o(x^{12}) - \frac{1}{324}x^{12} + o(x^{12})\right] \\ &= x - \frac{x^7}{18} - \frac{1}{3240}x^{13} + o(x^{13}) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} f'(0) &= 1, f^{(k)}(0) = 0, k = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12 \\ f^{(7)}(0) &= -\frac{1}{18}, f^{(13)}(0) = -\frac{1}{3240} \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \arcsin x &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \int_0^x \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!t^{2k}}{(2k)!!}\right) dt \\ &= x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k+1) \cdot (2k)!} x^{2k+1} \end{aligned}$$

所以 $\arcsin x$ 带有 Peano 预想的泰勒展开为

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)!!}{(2k+1) \cdot (2k)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

7. 令 $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\sqrt{1-x^2}y = \arcsin x$, 两边对 x 求导可得

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x^2}y' - \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (1-x^2)y' &= 1+xy\end{aligned}$$

显然 y 为奇函数, 不妨设 $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}x^{2n-1}$ 代入上式可得

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} ((2n+1)a_{2n+1} - (2n-1)a_{2n-1})x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}x^{2n}$$

对比系数可得

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ (2n+1)a_{2n+1} = 2na_{2n} \end{cases}$$

可得

$$a_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, n = 0, 1, 2, \dots$$

从而 $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ 带有 Peano 余项的麦克劳林公式为

$$f(x) = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{4!!}{5!!}x^5 + \dots + \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

8. 由带有拉格朗日余项的麦克劳林公式得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

可得绝对误差为

$$\Delta e = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

$$(1) \Delta e \leq \frac{e}{n+1}$$

$$(2) \Delta e \leq \frac{3840}{1}$$

$$(3) \Delta e \leq \frac{2^6(2^6-1)}{42 \cdot 6!} \cdot 0.1^5 \approx 1.3 \times 10^{-6}$$

$$(4) \Delta e \leq \frac{15\sqrt{2}}{52044}$$

9. 否, 反例为 $f(x) = e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}}$, $f^{(n)}(x_0) = 0$

10. 若 $C < 1$, 则 $\forall x \in [-1, 1]$ 有

$$|f(x)| = \left| \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n \right| \leq C^n \quad (\forall n \in N_+)$$

故 $f(x) = 0$

若 $C \geq 1$, 则 $\forall x \in \left(-\frac{1}{C}, \frac{1}{C}\right)$, 有

$$|f(x)| = \left| \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n \right| \leq (Cx)^n \quad (\forall n \in N_+)$$

则 $f(x) \equiv 0 \quad \left(\forall x \in \left(-\frac{1}{C}, \frac{1}{C}\right)\right)$, 由连续性可得 $f\left(\pm\frac{1}{C}\right) = 0$, 故在 $-\frac{1}{C}, \frac{1}{C}$ 处

和上述类似操作可得 $f(x) \equiv 0, \forall x \in [-1, 1]$

11. 由带 Lagrange 余项的 Taylor 定理可知

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f(a) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2, \quad \xi_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right) \\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f(b) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2, \quad \xi_2 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right) \end{aligned}$$

两式相减可得

$$\begin{aligned} \frac{4}{(b-a)^2}|f(a) - f(b)| &= \left| \frac{f''(\xi_1) - f''(\xi_2)}{2} \right| \\ &\leq \frac{|f''(\xi_1) + f''(\xi_2)|}{2} \leq \max(|f''(\xi_1), f''(\xi_2)|) \end{aligned}$$

故取 ξ 为 ξ_i , 其中 $\xi_i = \xi_{\{1,2\}\{i\}}$ 即可.

12. (1) 不一定, 例如: $f(x) = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3$, $f'(x) = 3\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$, 但 $\forall x_1, x_2 \in$

$$(a, b), \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

(2) 令 $f(x + \xi) = g(x)$ 则 $g''(0) > 0, g'(0) = f'(\xi)$, 只需证 $\exists x_1, x_2$ 使得

$$\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} = g'(0)$$

由 $g''(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$ 使得

$$\begin{aligned} g'(x) &> g'(0) \quad x \in (0, \delta) \\ g'(x) &< g'(0) \quad x \in (-\delta, 0) \end{aligned}$$

固定 $s_0 \in (0, \delta)$ 则

$$\frac{g(s_0) - g(0)}{s_0} > g'(0)$$

则 $\exists t_0 \in (-\delta, 0)$ 使得

$$\frac{g(s_0) - g(t_0)}{s_0 - t_0} > g'(0)$$

又

$$\frac{g(t_0) - g(0)}{t_0} < g'(0)$$

令 $\varphi(x) = \frac{g(t_0) - g(x)}{t_0 - x}$, 则 $\varphi(0) < g'(0), \varphi(s_0) > g'(0)$, 故 $\exists t_1 \in (0, s_0)$ 使得 $\varphi(t_1) = g'(0)$, 即

$$\frac{g(t_0) - g(t_1)}{t_0 - t_1} = g'(0)$$

13. 假设 $\exists x_0$ 使得 $f'(x_0) < 0$, 由 $f''(x) \leq 0$ 则

$$f'(x) \leq f'(x_0) < 0$$

则 $\forall x > x_0$ 有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \\ &\leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

令 $x \rightarrow +\infty$, 得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ 与 $f(x) \geq 0$ 矛盾.

14. 要求 θ_n 的极限, 首先要找出 θ_n , 由导数的定义可知

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta_n h) - f^{(n)}(x_0)}{h} = f^{(n+1)}(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \theta_n$$

这样我们找到了 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta_n$, 下面再来求值. 又

$$\frac{f^{(n)}(x_0 + \theta_n h) - f^{(n)}(x_0)}{h} = \frac{n!}{h^{n+1}} \left(f(x_0 + h) - f(x_0) - \dots - \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \right) \quad (**)$$

由带 Peano 余项的 Taylor 定理可知

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}h^{n+1} + o(h^{n+1})$$

代入(**)可得

$$\begin{aligned} \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta_n h) - f^{(n)}(x_0)}{h} &= \frac{n!}{h^{n+1}} \left(\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}h^{n+1} + o(h^{n+1}) \right) \\ &= \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x_0) + o(1) \end{aligned}$$

两侧同时令 $h \rightarrow 0$ 再由 $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ 可得 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta_n = 1/(n+1)$

15. 由下题可得。

16. 证明由带 Peano 余项的 Taylor 定理可知

$$f'(x_0 + \theta h) = f'(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1} + o(h^{n-1})$$

可得

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}\theta^{n-1}h^n + o(h^n) \quad (*)$$

再用带 Peano 余项的 Taylor 定理展开 $f(x_0 + h)$ 可得

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + o(h^n) \quad (**)$$

对比等式(*)与(**)可知

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}h^n \left(\theta^{n-1} - \frac{1}{n} \right) = o(h^n)$$

这说明

$$\theta^{n-1} - \frac{1}{n} = o(1)$$

令 $h \rightarrow 0$ 可得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n^{1/(n-1)}}$$

7.3 对于教学的建议

7.3.1 第一组参考题

1. 设 $f(x) = a_1 \sin x + \frac{1}{3}a_2 \sin 3x + \dots + \frac{a_n}{2n-1} \sin(2n-1)x$, 则

$$f(0) = 0 = a_1 - \frac{1}{3}a_2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{a_n}{2n-1} = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

因此根据罗尔中值定理, $f'(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 3x + \dots + a_n \cos(2n-1)x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上至少有一个零点.

2. 假设结论不成立, 由虚根的成对定理, 知原方程的所有根都是实根, 因此 a, b, c 都是实数. 设 $f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + c$, 由罗尔中值定理知 $f'(x) = x^2(5x^2 + 4ax + 3b)$ 有四个根, 并且 $f'(x)$ 的重根一定是 $f(x)$ 的重根. 注意到 $x = 0$ 是 $f'(x)$ 的重根, 但由 $c \neq 0$ 知 $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的重根, 矛盾. 从而假设不成立, 原命题成立.

注: 这里使用了一个结论: 如果 n 次多项式 $f(x)$ 有 n 个实数根, 那么 $f'(x)$ 有 $n-1$ 个实数根, 并且 $f'(x)$ 的重根一定是 $f(x)$ 的根.

3. 不妨设 $a = 1$, 当 $x > 0$ 时, 我们有

$$(x+1)^{2n} = x(x+1)^{2n-1} + (x+1)^{2n-1} > x \cdot x^{2n-1} + 1^{2n-1} = x^{2n} + 1$$

而当 $x < 0$ 时, 我们有

$$(x+1)^{2n} = x(x+1)^{2n-1} + (x+1)^{2n-1} < x \cdot x^{2n-1} + 1^{2n-1} = x^{2n} + 1$$

而 $x = 0$ 时原方程两边相等, 因此方程只有一个实根 $x = 0$

4. 设 $g(x) = e^{-kx} f(x)$, 则 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可微, 且有 $g(a)g(b) > 0$, $g(a)g(\frac{a+b}{2}) < 0$ 根据零点存在定理, 存在 $\eta_1 \in (a, \frac{a+b}{2})$, $\eta_2 \in (\frac{a+b}{2}, b)$, 使得 $g(\eta_1) = g(\eta_2) = 0$. 再由罗尔中值定理, 存在 $\xi \in (\eta_1, \eta_2) \subset (a, b)$, 使得 $g'(\xi) = 0$ 又由于 $g'(x) = e^{-kx}(f'(x) - kf(x))$, 故 $e^{-k\xi}(f'(\xi) - kf(\xi)) = 0$, 即 $f'(\xi) - kf(\xi) = 0$
5. 用数学归纳法证明. 当 $n = 1$ 时, 结论显然成立. 假设结论已对 $n-1$ 成立, 考虑 n 的情形, 设

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k x}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 两两不相等, c_1, c_2, \dots, c_n 不同时为零. 再设 $g(x) = e^{-\lambda_n x} f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k e^{(\lambda_k - \lambda_n)x} + c_n$, 则 $g(x)$ 的零点集和 $f(x)$ 的零点集相等. 假设 $f(x)$ 有 n 个不同的零点, 则 $g(x)$ 有 n 个不同的零点, 分别对 $n-1$ 对相邻零点使用罗尔中值定理, 可知 $g'(x)$ 有 $n-1$ 个不同的零点. 但 $g'(x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k (\lambda_k - \lambda_n) e^{(\lambda_k - \lambda_n)x}$,

而且 $\lambda_1 - \lambda_n, \lambda_2 - \lambda_n, \dots, \lambda_{n-1} - \lambda_n$ 是 $n-1$ 个两两不相等的非零实数, 由此又得 $c_1(\lambda_1 - \lambda_n), c_2(\lambda_2 - \lambda_n), \dots, c_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)$ 不同时为零, 故根据归纳假设, $g'(x)$ 的零点个数小于 $n-1$, 这导致矛盾. 所以假设不成立, 从而 $f(x)$ 的零点个数小于 n , 即结论对 n 成立. 由数学归纳法知, 原结论成立.

6. (1) 由 (2) 立得.

(2) 设 $g(x) = (f(x))^{|a|} f(1-x)$, 则 $g(0) = g(1) = 0$, 而

$$g'(x) = |a| f'(x) (f(x))^{|a|-1} f(1-x) - f'(1-x) (f(x))^{|a|} = (f(x))^{|a|} f(1-x) \left(|a| \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{f'(1-x)}{f(1-x)} \right)$$

根据罗尔中值定理, 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $g'(\xi) = 0$, 结合 $f(\xi), f(1-\xi) \neq 0$ 就有

$$|a| \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

7. 不妨设 $f(a) = f(b) = 0$, 由于 $f(x)$ 不是线性函数, 故 $f(x)$ 不恒为零. 设 $c \in (a, b)$ 满足 $f(c) \neq 0$ 不妨设 $f(c) > 0$, 根据拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (a, c)$, $\eta \in (c, b)$, 使得

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= \frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{f(c)}{c - a} > 0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ f'(\eta) &= \frac{f(b) - f(c)}{b - c} = \frac{-f(c)}{b - c} < 0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{aligned}$$

得证.

8. 由上题的证明过程可直接得到存在 $\zeta \in (a, c)$, $\eta \in (c, b)$, 使得

$$f'(\zeta) > 0, \quad f'(\eta) < 0$$

故根据拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (\zeta, \eta) \subset (a, b)$, 使得

$$f''(\xi) = \frac{f'(\eta) - f'(\zeta)}{\eta - \zeta} < 0$$

9. (1) 固定 $x \in (a, b)$, 记 $\lambda = \frac{6f(x)}{(x-a)^2(x-b)}$, 并构造函数

$$g(t) = f(t) - \frac{\lambda}{3!}(t-a)^2(t-b)$$

则 $g(a) = g(x) = g(b) = g'(a) = 0$, 反复使用中值定理可知存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$g'''(\xi) = 0$$

又由于 $g'''(t) = f'''(t) - \lambda$, 故 $f'''(\xi) = \lambda = \frac{6f(x)}{(x-a)^2(x-b)}$, 所以

$$f(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^2(x-b)$$

- (2) 与上一问类似, 固定 $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right]$, 记 $\lambda = \frac{120f(x)}{\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)(x-1)^3}$ 并构造函数

$$g(t) = f(t) - \frac{\lambda}{5!}\left(t - \frac{1}{3}\right)\left(t - \frac{2}{3}\right)(t-1)^3$$

则 $g\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{2}{3}\right) = g(1) = g'(1) = g''(1) = g(x) = 0, g'(a) = 0$, 反复使用中值定理可知存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得

$$g^{(5)}(\xi) = 0$$

又由于 $g^{(5)}(\xi) = f^{(5)}(\xi) - \lambda$, 故 $f^{(5)}(\xi) = \lambda = \frac{120f(x)}{\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)(x-1)^3}$, 所以

$$f(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)(x-1)^3$$

- (3) 记 $\lambda = \frac{f(b) - f(a) - \frac{1}{2}(b-a)(f'(a) + f'(b))}{-\frac{1}{12}(b-a)^3}$, 并构造函数

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{1}{2}(x-a)(f'(a) + f'(x)) + \frac{\lambda}{12}(x-a)^3$$

则

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2}(f'(x) - f'(a)) - \frac{1}{2}f''(x)(x-a) + \frac{\lambda}{4}(x-a)^2 \\ g''(x) &= -\frac{x-a}{2}(f'''(x) - \lambda) \end{aligned}$$

易知 $g(a) = g(b) = g'(a) = 0$, 反复利用中值定理可知存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$g''(\xi) = 0$$

即 $-\frac{\xi-a}{2}(f'''(\xi) - \lambda) = 0$, 又因为 $\xi \neq a$, 所以我们有

$$f'''(\xi) = \lambda = \frac{f(b) - f(a) - \frac{1}{2}(b-a)(f'(a) + f'(b))}{-\frac{1}{12}(b-a)^3}$$

从而 $f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)(f'(a) + f'(b)) - \frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi)$, 命题得证.

(4) 记 $\lambda = \frac{2(f(a)(c-b) + f(b)(a-c) + f(c)(b-a))}{(a-b)(b-c)(c-a)}$, 并构造函数

$$g(x) = f(a)(x-b) + f(b)(a-x) + f(x)(b-a) - \frac{1}{2}\lambda(a-b)(b-x)(x-a)$$

则有 $g(a) = g(b) = g(c) = 0$, 反复利用中值定理可知存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $g''(\xi) = 0$ 又由于

$$\begin{aligned} g'(x) &= f(a) - f(b) + f'(x)(b-a) + \frac{1}{2}\lambda(a-b)(2x-a-b) \\ g''(x) &= (f''(x) - \lambda)(b-a) \end{aligned}$$

故 $f''(\xi) = \lambda = \frac{2(f(a)(c-b) + f(b)(a-c) + f(c)(b-a))}{(a-b)(b-c)(c-a)}$, 即

$$\frac{1}{2}f''(\xi) = \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$$

得证.

10. 由柯西中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\frac{1}{a-b} \begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = \frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{-\frac{1}{\xi^2}} = f(\xi) - \xi f'(\xi)$$

故结论成立.

11. 记 $\lambda = \frac{n!}{\prod_{i>j} (x_i - x_j)}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \\ f(x_0) & f(x_1) & \dots & f(x_{n-1}) & f(x_n) \end{vmatrix}$, 并构造函数

$$g(t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} & t \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & t^{n-1} \\ f(x_0) & f(x_1) & \dots & f(x_{n-1}) & f(t) \end{vmatrix} - \frac{\lambda}{n!} \prod_{n>i>j} (x_i - x_j)(t - x_0)(t - x_1)\dots(t - x_{n-1})$$

则 $g(x_0) = g(x_1) = \dots = g(x_{n-1}) = g(x_n) = 0$, 反复利用中值定理可知存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$g^{(n)}(\xi) = 0$$

又由于

$$g^{(n)}(t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} f^{(n)}(t) - \lambda \prod_{n>i>j} (x_i - x_j) = (f^{(n)}(t) - \lambda) \prod_{n>i>j} (x_i - x_j)$$

$$\text{故 } f^{(n)}(\xi) = \lambda = \frac{n!}{\prod_{i>j} (x_i - x_j)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \\ f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(x_{n-1}) & f(x_n) \end{vmatrix} \quad \text{即}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \\ f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(x_{n-1}) & f(x_n) \end{vmatrix} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

得证

12. 不妨设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 则对任意正数 N , 存在 $X > a$ 使得当 $x > X$ 时有

$$f'(x) > \max\{N, 1\}$$

故 $\frac{f(a+1) - f(a)}{(a+1) - a} = f'(\xi) > N$, 且 $f(a+1) - f(a) = f'(\xi) > 1$, 根据第五章第二组参考题第 15 题的结论, $f(x)$ 不一致连续.

13. 根据条件可设 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} f'(x) = l$, 由柯西中值定理知

$$\lim_{x, y \rightarrow 0^+, x \neq y} \frac{f(x) - f(y)}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \lim_{x, y \rightarrow 0^+, x \neq y} \frac{f'(\xi)}{\frac{1}{2\sqrt{\xi}}} = \lim_{x, y \rightarrow 0^+, x \neq y} 2\sqrt{\xi} f'(\xi) = 2l$$

这表明 $\lim_{x, y \rightarrow 0^+} |f(x) - f(y)| = 0$, 由柯西准则知 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 存在. 根据例题 5.4.5 的结论可知 $f(x)$ 在 $(0, a]$ 上一致连续

14. 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, 故根据洛必达法则有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

15. (1) 条件等价于 $(xf(x))' = 0$, 故 $xf(x) = C$. 由于 $C = f(1) = 1$, 故 $f(2) = \frac{C}{2} = \frac{1}{2}$

(2) 条件等价于 $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0$, 故 $\frac{f(x)}{x} = C$. 由于 $C = f(1) = 1$, 故 $f(2) = 2C = 2$

注: 根据勘误表, (1) 中函数 $f(x)$ 的定义域应改为 $(0, +\infty)$

16. 对 $x \in [0, 2]$, 有

$$\begin{aligned} f(0) &= f(x) - xf'(x) + \frac{x^2}{2} f''(\xi_1) \\ f(2) &= f(x) + (2-x)f'(x) + \frac{(2-x)^2}{2} f''(\xi_2) \end{aligned}$$

故将两式相减, 得

$$|f'(x)| = \left| \frac{f(2) - f(0)}{2} + \frac{x^2}{4} f''(\xi_1) - \frac{(2-x)^2}{4} f''(\xi_2) \right|$$

$$\leq \left| \frac{f(2) - f(0)}{2} \right| + \frac{x^2}{4} + \frac{(2-x)^2}{4} \leq 1 + \frac{2(1-x)^2 + 2}{4} \leq 2$$

17. 设函数 f 在 \mathbb{R} 上二次可导, 令 $M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| < +\infty (k = 0, 1, 2)$, 求证:

$$M_1^2 \leq 2M_0M_2$$

考虑任意 $x \in \mathbb{R}$ 与 $h > 0$, 由带 Peano 余项的 Taylor 定理可知:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{f''(\xi)}{2}h^2, \xi \in (x, x+h) \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{f''(\zeta)}{2}h^2, \zeta \in (x-h, x) \end{aligned}$$

两式相减可得

$$2hf'(x) = f(x+h) - f(x-h) + \frac{f''(\xi)}{2}h^2 - \frac{f''(\zeta)}{2}h^2$$

两侧同取上确界可得

$$2hM_1 \leq 2M_0 + M_2h^2, \forall h > 0 \quad (1)$$

用同样的方法可以得到不等式 (1) 对 $h \leq 0$ 也成立, 也就是以 h 为自变量的二次函数

$$g(h) = M_2h^2 - 2hM_1 + 2M_0$$

恒成立, 即它的判别式 $\Delta = 4h^2M_1 - 8M_2M_0 \leq 0$ 恒成立, 这正说明

$$M_1^2 \leq 2M_0M_2$$

18. 设 $f(x)$ 在 $x = x_0 \in (0, a)$ 处取到最大值, 则 $f'(x_0) = 0$. 根据拉格朗日中值定理, 知存在 $\xi_1 \in (0, x_0)$, $\xi_2 \in (x_0, a)$ 使得

$$f''(\xi_1) = \frac{-f'(0)}{x_0}, \quad f''(\xi_2) = \frac{f'(a)}{a-x_0}$$

故

$$|f'(0)| + |f'(a)| = x_0 |f''(\xi_1)| + (a-x_0) |f''(\xi_2)| \leq x_0M + (a-x_0)M = Ma$$

得证.

7.3.2 第二组参考题

1. 设 $g(x) = f(x) - \frac{(x-a)^2}{2} \cdot \frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}$, 则有 g 在 $[a, b]$ 上可微, 在 (a, b) 上二阶可微, 且

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - (x-a) \cdot \frac{f'(b) - f'(a)}{b-a} \\ g''(x) &= f''(x) - \frac{f'(b) - f'(a)}{b-a} \end{aligned}$$

特别地, 我们有 $g'(a) = g'(b)$. 假设 $g''(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$, 则根据 $g''(x)$ 的介值性, 必有 $g''(x) > 0$ 或 $g''(x) < 0$, 不妨设 $g''(x) > 0$, 从而 $g'(x)$ 在 (a, b) 上严格单调递增. 根据导函数的性质, 有 $\lim_{x \rightarrow a^+} g'(x) = g'(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} g'(x) = g'(b)$, 但 $g'(a) = g'(b)$, 这与 $g'(x)$ 在 (a, b) 上严格单调递增矛盾. 所以存在 $x \in (a, b)$ 使得 $g''(x) = 0$ 再由

$g''(x) = f''(x) - \frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}$, 知存在 $x \in (a, b)$ 使得 $f''(x) = \frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}$, 结论得证.

2. 设 $g(x) = f(x) - \frac{1}{1+x^2}$, 则 g 在 $(-1, +\infty)$ 上无限次可微, 且 $g\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ 假设 $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(k-1)}(0) = 0$, $g^{(k)}(0) = c \neq 0$. 根据泰勒中值定理, 有

$$g(x) = \frac{c}{n!}x^k + o(x^k) \quad (x \rightarrow 0)$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^k} = \frac{c}{k!}$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{c}{k!} \neq 0$, 但 $g\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, 矛盾. 所以

$g^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \dots$ 又因为 $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(k)} \Big|_{x=0} = n! \cos \frac{n\pi}{2}$, 所以 $f^{(k)}(0) = n! \cos \frac{n\pi}{2}$

3. 由于

$$\begin{aligned} & 2x^{2n-1} + 4x^{2n-3} + \dots + 2nx \\ & \leq \sum_{k=1}^n 2(n+1-k)x^{2k-1} \\ & \leq \sum_{k=1}^n (n+1-k)(x^{2k-2} + x^{2k}) \\ & = n + \sum_{k=1}^n ((n+1-k) + (n-k))x^{2k} \\ & = n + \sum_{k=1}^n (2n+1-2k)x^{2k} \\ & < 2n+1 + \sum_{k=1}^n (2n+1-2k)x^{2k} \\ & = 2n+1 + (2n-1)x^2 + \dots + x^{2n} \end{aligned}$$

所以原方程没有实数根。

4. 反证法, 假设结论不成立, 则 $f''(x) > 0$ 或 $f''(x) < 0$, 不妨设 $f''(x) > 0$, 则 $f'(x)$ 严格递增. 若 $f'(0) \geq 0$, 则 $f'(1) > 0$, 从而当 $x > 1$ 时, 有

$$f(x) - f(1) = f'(1 + \theta(x-1))(x-1) > f'(1)(x-1)$$

但 f 有界, 矛盾. 同理 $f'(0) < 0$ 也不成立, 从而假设不成立, 命题得证.

5. 设 $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, & a < x \leq b \\ f'(a), & x = a \end{cases}$, 则 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导. 假

设 $g'(x)$ 在 (a, b) 上没有零点, 则其恒正或恒负, 不妨设其恒正, 则 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格递增. 据假设, 我们有 $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, 其中 $x \in (a, b)$. 此式可化简为

$$f(x) - (x-a)\frac{f(b) - f(x)}{b-x} < f(a)$$

令 $x \rightarrow b^-$, 有 $f(b) - (b-a)f'(b) \leq f(a)$, 所以有

$$g(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq f'(b) = f'(a) = g(a)$$

矛盾. 故 $g'(x)$ 在 (a, b) 上有零点. 设 $g'(\xi) = 0$, 其中 $\xi \in (a, b)$ 由于 $g'(x) =$

$$\frac{(x-a)f'(x) - f(x) + f(a)}{(x-a)^2}, \text{ 故 } f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}$$

6. 设 $g(x) = e^{-\frac{x}{b-a}}(f(x) - f(a))$, 则 g 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导. 且 $g(a) = 0$, $g(c)g'(c) < 0$ 由拉格朗日中值定理, 知存在 $\xi_0 \in (a, c)$, 使得 $g'(\xi_0) = \frac{g(c) - g(a)}{c - a} = \frac{g(c)}{c - a}$, 此时有 $g'(\xi_0)g'(c) < 0$. 根据导函数的介值性, 存在 $\xi \in (\xi_0, c) \subset (a, b)$, 使得 $g'(\xi) = 0$ 由于 $g'(x) = e^{-\frac{x}{b-a}} \left(f'(x) - \frac{f(x) - f(a)}{b-a} \right)$, 故 $f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b-a}$
7. 设 $g(x) = \ln f(x)$, 则 $g(x)$ 在 (a, b) 上连续, 在 (a, b) 上可导, $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = -\infty$ 不妨设 $\alpha > 1$. 任取 $x_2 \in (a, b)$, 使得 $g'(x_2) > 0$. (如果不存在这样的 x_2 , 则 $g(x)$ 在 (a, b) 上递减, 这在 $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = -\infty$ 的条件下是不可能的) 然后取 $c \in (a, x_2)$ 使得 $\frac{g(x_2) - g(c)}{x_2 - a} > \alpha g'(x_2)$, 则存在 $d \in (c, x_2)$ 使得

$$g'(d) = \frac{g(x_2) - g(c)}{x_2 - c} > \frac{g(x_2) - g(c)}{x_2 - a} > \alpha g'(x_2)$$

故存在 $x_1 \in (d, x_2)$ 使得 $g'(x_1) = \alpha g'(x_2)$, 即 $\frac{f'(x_1)}{f(x_1)} = \alpha \frac{f'(x_2)}{f(x_2)}$

8. 由拉格朗日中值定理, 知存在 $\xi_1 \in (-2, 0)$, $\xi_2 \in (0, 2)$, 使得 $f'(\xi_1) = \frac{f(0) - f(-2)}{2}$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(0)}{2}, \text{ 从而 } |f'(\xi_1)|, |f'(\xi_2)| \leq 1$$

设 $g(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2$, 则 $g'(x) = 2f'(x)(f(x) + f''(x))$ 由于 $|f'(\xi_1)|, |f'(\xi_2)| \leq 1$, 故 $g(\xi_1), g(\xi_2) \leq 2$. 而 $g(0) = 4$, 故 $g(x)$ 在 (ξ_1, ξ_2) 上有最大值. 设在 $x = \xi$ 处取到, 则 $g'(\xi) = 0$. 又由于 $g(\xi) \geq 4$, 故 $|g'(\xi)| \geq \sqrt{3} > 0$, 所以 $f(\xi) + f''(\xi) = 0$

9. 原条件作换元, 得 $f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right) = hf'(x)$ 对 h 求二阶导, 得 $f''\left(x + \frac{h}{2}\right) = f''\left(x - \frac{h}{2}\right)$, 即 $f''(x)$ 恒为常数, 所以 $f(x) = ax^2 + bx + c$

10. 设 $f \in C[a, b]$, 定义函数

$$D^2 f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

假设当 $x \in (a, b)$ 时上述极限总存在. 若 $D^2 f = 0 (x \in (a, b))$, 求证 $f(x) = c_1 x + c_2$, 其中 c_1, c_2 为常数.

对任意 $x \in [a, b]$, 定义

$$f_\varepsilon(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) + \varepsilon(x-a)(x-b)$$

那么 $f_\varepsilon(a) = f_\varepsilon(b) = 0$, 则

$$\begin{aligned} D^2 f_\varepsilon(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_\varepsilon(x+h) + f_\varepsilon(x-h) - 2f_\varepsilon(x)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \left(f(x+h) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x+h-a) + \varepsilon(x+h-a)(x+h-b) \right. \\ &\quad \left. + f(x-h) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-h-a) + \varepsilon(x-h-a)(x-h-b) \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + \varepsilon(x-a)(x-b) \right) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) + \varepsilon \cdot 2h^2) \\ &= D^2 f(x) + 2\varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

可以证明当 $\varepsilon > 0$ 时, $f_\varepsilon \leq 0$. 事实上, 若存在 $x_0 \in (a, b)$ 使得 $f_\varepsilon(x_0) > 0$, 因为 $f_\varepsilon(a) = f_\varepsilon(b) = 0$ 且 f_ε 连续. 故 f_ε 在 (a, b) 中必有最大值, 令 $x^* = \min \{x \in (a, b) : f_\varepsilon(x) = \max(f_\varepsilon)\}$. 所以有

$$f(x^*+h) + f(x^*-h) < 2f(x^*)$$

又由 $D^2 f_\varepsilon(x^*) = 2\varepsilon > 0$, 存在 $h > 0$, 使得

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x^*+h) + f_\varepsilon(x^*-h) - 2f_\varepsilon(x^*) &> 0 \\ f_\varepsilon(x^*) &< \frac{1}{2}(f_\varepsilon(x^*+h) + f_\varepsilon(x^*-h)) < f_\varepsilon(x^*) \end{aligned}$$

矛盾, 故当 $\varepsilon > 0$ 时 $f_\varepsilon(x) \leq 0$, 同理当 $\varepsilon < 0$ 时, $f_\varepsilon \geq 0$, 由 f_ε 关于 ε 的连续性知

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = f_0(x) = 0$$

即

$$f(x) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

是线性函数, 令

$$c_1 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad c_2 = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a$$

即得 $f(x) = c_1 x + c_2$

11. 假设存在 $x_0 \in \left[0, \frac{1}{2c}\right]$, 使得 $f(x_0) \neq 0$. 定义数列 $\{x_n\}$ 如下: $f'(x_{n+1}) = \frac{f(x_n)}{x_n}, x_{n+1} \in (0, x_n)$ 则 $\{x_n\}$ 严格递减且恒大于零, 且有

$$\begin{aligned} |f(x_n)| &\geq \frac{1}{c} |f'(x_n)| = \frac{1}{c} \frac{|f(x_{n-1})|}{x_{n-1}} \geq \frac{1}{c^2} \frac{|f(x_{n-2})|}{x_{n-2}x_{n-1}} \geq \dots \\ &\geq \frac{1}{c^n x_0 x_1 \dots x_{n-2} x_{n-1}} > \frac{|f(x_0)|}{(cx_0)^n} > 2^n |f(x_0)| \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2c}\right]$ 上无界, 这不可能, 所以假设不成立, 即 $f(x) = 0, x \in \left[0, \frac{1}{2c}\right]$ 然后考虑 $f\left(x - \frac{1}{2c}\right) = 0$, 采用相同的方法可以证明 $f(x) = 0, x \in \left[0, \frac{2}{2c}\right]$ 依此类推, 对任意正整数 n , 都有 $f(x) = 0, x \in \left[0, \frac{n}{2c}\right]$, 所以 $f(x) \equiv 0$

12. 令 $x = 0$ 有 $f^{(n)}(0) = 0$ 而对 $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ 有 $f(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n (0 < \theta < 1)$, 从

而 $|f(x)| \leq |x|^{n+1}$, 令 $n \rightarrow +\infty$ 就有 $f(x) = 0$

13. 采用与本章第二组参考题第 2 题类似的方法, 可以证明 $f^{(n)}(0) = 0$ 而当 $x \neq 0$ 时, 有 $f(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n$ ($0 < \theta < 1$), 从而 $|f(x)| \leq \frac{C}{n!} |x|^n$. 令 $n \rightarrow +\infty$, 就有 $f(x) = 0$

14.

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k f(x_0 + kh)}{h^n} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \left(\sum_{m=0}^n \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} k^m h^m + o(h^n) \right)}{h^{n-k}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \sum_{m=0}^n \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} k^m h^m}{h^n} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} k^m h^m}{h^n} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} k^m h^m}{h^n} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{m=0}^n \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} h^m \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k k^m}{h^n} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{n!}{h^n} = f^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

最后一步利用了第六章第二组参考题第 8 题的结论.

15. 对 $p \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, 取 t_1, t_2, \dots, t_n 使得

$$\sum_{k=1}^n t_k \cdot k^m = \begin{cases} 0, & m \neq p \\ 1, & m = p \end{cases}$$

其中 $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$ 对 $x \in \mathbb{R}$, 由于 $f(x+k) = f(x) + f'(x)k + \frac{f''(x)}{2!}k^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\xi_k)}{n!}k^n$, 故

$$\sum_{k=1}^n t_k f(x+k) = f(x) \sum_{k=1}^n t_k + f'(x) \sum_{k=1}^n t_k \cdot k + \frac{f''(x)}{2!} \sum_{k=1}^n t_k \cdot k^2 + \dots + \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n f^{(n)}(\xi_k) t_k \cdot k^n$$

所以 $\sum_{k=1}^n t_k f(x+k) = \frac{f^{(p)}(x)}{p!} + \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n f^{(n)}(\xi_k) t_k \cdot k^n$, 得

$$\left| f^{(p)}(x) \right| = p! \left| \sum_{k=1}^n t_k f(x+k) - \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n f^{(n)}(\xi_k) t_k \cdot k^n \right| \leq p! \left(M_0 \sum_{k=1}^n |t_k| + \frac{M_n}{n!} \sum_{k=1}^n |t_k| \cdot k^n \right)$$

故 $M_p \leq p! \left(M_0 \sum_{k=1}^n |t_k| + \frac{M_n}{n!} \sum_{k=1}^n |t_k| \cdot k^n \right) < +\infty$, 即 M_p 是有限数.

16. 应用 Taylor 公式, 有

$$f(x+m) = f(x) + mf'(x) + \frac{m^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{m^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{m^n}{n!} f^{(n)}(\xi_m(x))$$

其中 $\xi_m(x) \in (x, x+m)$, $m = 1, 2, \dots, n$

由于 $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ 均可用 $f(x+m) - f(x)$ 及 $f^{(n)}(\xi_m(x))$ 表达, 而

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+m) - f(x)]$ 与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)}(\xi_m(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x)$ 均存在有限, 故

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(k)}(x)$ 均存在有限, 分别记为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(k)}(x) = A_k, k = 0, 1, \dots, n$

在上面的 Taylor 公式中, 令 $x \rightarrow +\infty$, 则 $\xi_m(x) \rightarrow +\infty$, 于是有

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+m) - f(x)] = m \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) + \frac{m^2}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) + \dots \\ + \frac{m^{n-1}}{(n-1)!} \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n-1)}(x) + \frac{m^n}{n!} \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)}(\xi_m(x))$$

即

$$0 = A_0 - A_0 = mA_1 + \frac{m^2}{2!}A_2 + \dots + \frac{m^{n-1}}{(n-1)!}A_{n-1} + \frac{m^n}{n!}A_n, \quad m = 1, 2, \dots, n$$

列举出来为

$$\begin{cases} A_1 + \frac{1}{2!}A_2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}A_{n-1} + \frac{1}{n!}A_n = 0 \\ 2A_1 + \frac{2^2}{2!}A_2 + \dots + \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}A_{n-1} + \frac{2^n}{n!}A_n = 0 \\ \vdots \\ nA_1 + \frac{n^2}{2!}A_2 + \dots + \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}A_{n-1} + \frac{n^n}{n!}A_n = 0 \end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} A_1 + \frac{1}{2!}A_2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}A_{n-1} + \frac{1}{n!}A_n = 0 \\ A_1 + \frac{2}{2!}A_2 + \dots + \frac{2^{n-2}}{(n-1)!}A_{n-1} + \frac{2^{n-1}}{n!}A_n = 0 \\ \vdots \\ A_1 + \frac{n}{2!}A_2 + \dots + \frac{n^{n-2}}{(n-1)!}A_{n-1} + \frac{n^{n-1}}{n!}A_n = 0 \end{cases}$$

方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{n!} \\ 1 & \frac{2}{2!} & \dots & \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{2^n}{n!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{n}{2!} & \dots & \frac{n^{n-2}}{(n-1)!} & \frac{n^{n-1}}{n!} \end{vmatrix} = \frac{1}{1!2! \dots n!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2^{n-2} & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & \dots & n^{n-2} & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{\text{Vandermonde}}{=} \frac{1}{1!2! \dots n!} (2-1)(3-1) \dots (n-1)(3-2)(4-2)$$

$$\dots (n-2) \dots (n-(n-1))$$

$$= \frac{1}{1!2! \dots n!} (n-1)!(n-2)! \dots 1! = \frac{1}{n!} \neq 0$$

所以, 齐次方程组只有零解, 即

$$A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0$$

也就是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(k)}(x) = 0, k = 1, 2, \dots, n$

17. (1) 设 $|f''(x)| \leq M$. 假设结论不成立, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对任意的 $X > 0$, 都存在 $x_0 > X$, 使得 $|f'(x_0)| > \varepsilon_0$ 从而对任意的 $x \in [x_0, x_0 + \frac{\varepsilon_0}{2M}]$, 都有 $|f'(x)| > \frac{\varepsilon_0}{2}$,

进而 $\left| f\left(x_0 + \frac{\varepsilon_0}{2M}\right) - f(x_0) \right| > \frac{\varepsilon_0^2}{4M}$ 由柯西准则知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不存在, 这导致矛盾, 所以假设不成立, 即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

(2)(i) 当 $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$ 时, 结论不成立.

(ii) 假设结论不成立, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对任意的 $X > a$, 都存在 $x_0 > X$, 使得 $|f'(x_0)| > \varepsilon_0$ 由于 $f'(x)$ 一致连续, 故存在 $\delta > 0$, 使得 $|x_1 - x_2| \leq \delta$ 蕴含 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$. 从而对任意的 $x \in [x_0, x_0 + \delta]$, 都有 $|f'(x)| > \frac{\varepsilon_0}{2}$, 进而 $|f(x_0 + \delta) - f(x_0)| > \frac{\varepsilon_0 \delta}{2}$ 由柯西准则知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不存在, 这导致矛盾, 所以假设不成立, 即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

18. 由泰勒中值定理, 有

$$f(x+r) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} r^k + \frac{f^{(n+1)}(x+\theta r)}{(n+1)!} r^{n+1} \geq f(x) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} r^n$$

$$\text{故 } f^{(n)}(x) \leq \frac{(f(x+r) - f(x))n!}{r^n} \leq \frac{2Mn!}{r^n}$$

19. 取充分小的正实数 r , 使得 $[x_0 - 3r, x_0 + 3r] \subset (a, b)$. 设 $M = \sup_{x \in [x_0 - 2r, x_0 + 2r]} |f(x)|$

根据上题结论, 对任意 $x \in [x_0 - 2r, x_0 + 2r]$, 有 $f^{(n)}(x) \leq \frac{2Mn!}{(2r)^n}$ 故当 $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ 时, 有

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \right| &= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1} \\ &\leq \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!} r^{n+1} \leq \frac{M}{2^n} \end{aligned}$$

$$\text{所以 } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

第8章 微分学的应用

8.1 函数极限的计算

8.1.1 练习题

- (1) 不满足“未定型”，故不可使用 L'Hospital 法则
(2) 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$ 不存在，故不可使用 L'Hospital 法则
(3) 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ 求不出极限，故不可使用 L'Hospital 法则
(4) 求不出极限，故不可使用 L'Hospital 法则

2. (1) 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a/b)^{x^2} - 1}{((a/b)^x - 1)^2} \cdot \frac{b^{x^2}}{b^{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2 \ln \frac{a}{b}} - 1}{(e^{x \ln \frac{a}{b}} - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \ln \frac{a}{b}}{(x \ln \frac{a}{b})^2} = \frac{1}{\ln a - \ln b}$

(2) $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} t^2 + o(t^2)$ ，由

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{x}\right)^3 + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

而

$$\sqrt[3]{1+x^6} = x \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^6}} = x^3 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right) = x^3 + \frac{1}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

可得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x\right) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{x}\right)^3 + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) - x^3 + \frac{1}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + o(1)\right) - x^3 + o(1)\right] \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(3) 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln \ln \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \ln \frac{1}{x}}$

令 $\frac{1}{x} = t \Rightarrow t \rightarrow +\infty$ ，则

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \ln t = 0$$

故原式 = 1

(4) 令 $\frac{1}{x} = t \Rightarrow t \rightarrow 0^+$ 则

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\arctan t)^{-\frac{1}{\ln t}} = e^{-\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\arctan t)}{\ln t}}$$

由 L'Hospital 法则可得

$$\text{原式} = e^{-\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\arctan t} \cdot \frac{1}{1+t^2}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

3. (1)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x - \left[a + b \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right) \right] \left[x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right] \\
 &= x - \left[a + b - \frac{b}{2}x^2 + o(x^2) \right] \left[x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right] \\
 &= x - \left[(a+b)x - \left(\frac{b}{2} - \frac{a+b}{6} \right) x^3 + o(x^3) \right] \\
 &= (1-a-b)x + \frac{2b-a}{6}x^3 + o(x^3)
 \end{aligned}$$

解得

$$\begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$(2) f(x) = e^x - 1 + \frac{(b-a)}{1+bx}x \text{ 而}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \quad \frac{1}{1+bx} = 1 - bx + b^2x^2 + o(x^2)$$

则

$$f(x) = (1+b-a)x + \left(\frac{1}{2} - b(b-a) \right) x^2 + o(x^3)$$

解得

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \cot x - \frac{1+ax^2}{x+bx^3} = \frac{1}{\sin x} \left(\cos x - \frac{\sin x}{x} \frac{1+ax^2}{1+bx^2} \right) \\
 &= \frac{1}{\sin x} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) - \left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 + o(x^4) \right) \right) \\
 &\quad \left(1 + (a-b)x^2 - b(a-b)x^4 + o(x^4) \right) \\
 &= \frac{1}{\sin x} \cdot \left(\left(b-a - \frac{1}{3} \right) x^2 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \left(b + \frac{1}{6} \right) (a-b) \right) x^4 + o(x^4) \right)
 \end{aligned}$$

又

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^2} + o(x) = \frac{1}{6}x + o(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + o(x)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + o(x) \right) \cdot \left(\left(b-a - \frac{1}{3} \right) x^2 + \left(\frac{4}{5!} + \left(b + \frac{1}{6} \right) (a-b) \right) x^4 + o(x^4) \right)$$

$$= \left(b-a - \frac{1}{3} \right) x + \left[\frac{1}{6} \left(b-a - \frac{1}{3} \right) + \frac{4}{5!} + \left(b + \frac{1}{6} \right) (a-b) \right] x^3 + o(x^3)$$

故

$$\begin{cases} b-a - \frac{1}{3} = 0 \\ \frac{4}{5!} + \left(b + \frac{1}{6} \right) (a-b) = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a = -\frac{3}{5} \\ b = -\frac{1}{15} \end{cases}$$

(4)

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) - [1 + (a-b)x^2 - \\ &\quad b(a-b)x^4 + o(x^4)] \\ &= \left(a-b - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{4} - b(a-b)\right)x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

解得

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

4. (1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^2} = 0$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^6 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^6}{(2x)^6} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$$

(3) 令 $\frac{1}{n} = t$ 则 $t \rightarrow 0^+$, 原式 = $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^2} \ln \left(\frac{\sin t}{t} \right)$, 又

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^2} \ln \left(1 + \frac{\sin t - t}{t} \right) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^2} \ln \left(1 - \frac{1}{6}t^2 + o(t^2) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^2} \left(-\frac{1}{6}t^2 + o(t^2) \right) = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

(4) 原式 = $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n \sin(\sqrt{n^2 + 2\pi} - n\pi) \cdot (-1)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \left(\frac{2}{n + \sqrt{n^2 + 2}} \pi \right) =$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n\pi}{n + \sqrt{n^2 + 2}} = \pi$ (5) 令 $\sin x = t \Rightarrow \tan x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \right) - \tan t}{t^7} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{6} \left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \right)^5 - \frac{1}{7!} \left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \right)^7 - \tan t}{t^7} \end{aligned}$$

(6) 由于

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5)$$

则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sin x - \frac{1}{6}\sin^3 x + \frac{1}{5!}\sin^5 x + o(x^5)) - \sin^2 x}{x^6} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^5 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5)) - \sin^2 x}{x^6} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{1}{3}x^4 + (\frac{2}{5!} + \frac{1}{12})x^6 - \sin^2 x}{x^6} \\ &= \frac{12 + 32}{6!} = \frac{48}{6!} = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

5. 由存在 $f''(a) \Rightarrow f(x)$ 在 a 的邻域可求得

$$\begin{aligned} &f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) \\ &= 0 + h(2f'(a) - 2f'(a)) + \frac{1}{2}h^2(4f''(a) - 2f''(a)) + o(h^3) \\ &= h^2 f''(a) + o(h^3) \end{aligned}$$

故原式 $= f''(a)$

6. 由 f 在 $O(x_0)$ 中二阶连续可微, 可得

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

故

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-f(x) + f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}{[f'(x_0)(x - x_0)]^2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-\frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2}{f'(x_0)^2(x - x_0)^2} = -\frac{f''(x_0)}{2f'(x_0)^2}$$

7. 切线为

$$y - f(x) = f'(x)(u - x) \Rightarrow u = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

可得

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xf(x - f(x)/f'(x))}{(x - f(x)/f'(x))f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot \frac{1}{2}(x - f(x)/f'(x))^2 f'(0)}{(x - f(x)/f'(x))f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f''(0)x(xf'(x) - f(x))}{2f(x)f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f''(0)x(x \cdot xf''(0) - \frac{1}{2}x^2 f''(0))}{2 \cdot \frac{1}{2}x^2 f''(0)xf''(0)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

8. 设 $g(t) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$, 则 $g(n+1) - g(n) = g'(\alpha)$, $n < \alpha < n+1$, 则

$$\begin{aligned} g'(t) &= \left(e^{t \ln(1 + \frac{1}{t})}\right)' = \left(\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t+1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \\ &= \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{3t^3} + o\left(\frac{1}{t^4}\right) - \frac{1}{t+1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \left(\frac{1}{t(t+1)} - \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{t(t+1)} - \frac{1}{t^2(t+1)}\right] \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \sim \frac{1}{2t^2} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \sim \frac{e}{2t^2} \end{aligned}$$

则

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^x \frac{e}{2n^2} = \frac{e}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{x-2} \quad (1)$$

故 $x < 2$ 时, $(1) = 0$; $x = 2$ 时, $(1) = \frac{e}{2}$; $x > 2$ 时, $(1) = +\infty$. 故定义域为 $(-\infty, 0]$, 值域为 $\{0, \frac{e}{2}\}$

9. 显然有

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n > \cdots > 0$$

故 $\{x_n\}$ 收敛, 设收敛于 $A \in [0, x_1)$, 则

$$A = \ln(1 + A) \Rightarrow A = 0$$

可得 $\{x_n\}$ 收敛于 0, 由 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n \ln(1 + x_n)}{x_n - \ln(1 + x_n)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \ln(1 + t)}{t - \ln(1 + t)} = 2 \end{aligned}$$

10. 易知 $x_n = x_{n-1} + \ln(a - x_{n-1})$

(i) $0 < a < 1$ 时

$$x_0 = \ln a < a - 1 \Rightarrow x_1 = \ln a + \ln(a - \ln a) < a - 1$$

数学归纳法可得 $x_n < a - 1$, 故

$$x_{n-1} < x_n < a - 1$$

可得 $\{x_n\}$ 收敛

(ii) $a = 1 \Rightarrow x_n = a - 1 = 0, n = 1, 2, \cdots$

(iii) $a > 1$ 同理可证 $\{x_n\}$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a - 1$

8.2 函数的单调性

8.2.1 练习题

1. $f(x) = x + \sin x, f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$, 则 $f(x)$ 单增, 但是 $f'(x)$ 不单调
 $f(x) = x^2$, 则 $f'(x) = 2x$ 单调, 但是 $f(x)$ 不单调。
2. 令 $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ ($x \neq 0$) 则

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x \ln(1+x) - x \ln x} \\ f'(x) &= \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \end{aligned}$$

$x > 0$ 时有

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} > 0$$

可得 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增加

当 $x < -1$ 时有

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x \ln(-1-x) - x \ln(-x)} \\ f'(x) &= \left(\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) + \frac{x}{x+1} - 1\right) \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \end{aligned}$$

$$= \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \right) \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x > 0$$

故 $f'(x) > 0$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调增加

3. 令 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 则

$$g(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{xf'(x) - [f(x) - f(0)]}{x^2} = \frac{xf'(x) - xf'(\theta x)}{x^2}$$

其中 $0 < \theta < 1$, 又 f' 严格单调增加可得 $g'(x) > 0$ 故 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调增加

4. 取 $0 < x_1 < x_2 < a$ 则

$$\frac{f(x_2)}{g(x_2)} - \frac{f(x_1)}{g(x_1)} = \frac{f(x_2)g(x_1) - g(x_2)f(x_1)}{g(x_2)g(x_1)}$$

考虑函数 $\varphi(t) = f(t)g(x_1) - g(t)f(x_1)$ 则

$$\varphi'(t) = f'(t)g(x_1) - g'(t)f(x_1) = g(x_1)g(t) \left(\frac{f'(t)}{g'(t)} - \frac{f(x_1)}{g(x_1)} \right) \quad (1)$$

又由

$$f(0) = g(0) = 0 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(0)}{g(x_1) - g(0)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

其中 $\alpha \in (0, x_1)$ 可得 (1) 式 $= g(x_1)g(t) \left(\frac{f'(t)}{g'(t)} - \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} \right) > 0$ 可得 f/g 严格单调递增

5. 任取 $b > a$ 则有

$$f'(b) = f'(a) + (b-a)f''(\xi)$$

其中 $\xi \in (a, b)$, 又 $f'(a) < 0, f''(\xi) \leq 0 \Rightarrow f'(b) \leq f'(a) < 0$. 由 b 的任意性可得 $f'(x) < 0, \forall x > a$ 可得 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上至多 1 个实根

又

$$f\left(a - \frac{f(a)}{f'(a)}\right) = f(a) + \left(a - \frac{f(a)}{f'(a)} - a\right) f'(\xi_0) \leq f(a) + \left(a - \frac{f(a)}{f'(a)} - a\right) f'(a) = 0$$

$f(a) > 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $\left(a, a - \frac{f(a)}{f'(a)}\right)$ 上有实根, 故 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上有唯一的实根

6. 唯一性显然成立, 只需证存在性

$$f(a - f(a)/k) = f(a) + \left(-\frac{f(a)}{k}\right) f'(\alpha)$$

其中 $\alpha \in \left(a, a - \frac{f(a)}{k}\right)$, 又由

$$f'(\alpha) > k > 0 \Rightarrow f(a) - f(a)/k \cdot f'(\alpha) > 0$$

而 $f(a) < 0$ 可得 $f(x)$ 在 $(a, a - f(a)/k)$ 存在唯一的实根

7. 令 $\varphi(x) = ae^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow \varphi''(x) = ae^x > 0$, 令 $\varphi'(x) = ae^x - 1 > 0 \Rightarrow x > x_0$

可得 $x = x_0$ 为 $\varphi'(x)$ 的极小值点 $\varphi'(x_0) = ae^{x_0} - 1 - x_0 = -x_0$

(i) $a \in (0, 1)$ 时 $x_0 > 0 \Rightarrow \varphi'(x_0) < 0 \Rightarrow$ 有零点 x_1, x_2 ($x_1 < x_0 < x_2$) 可得 x_1, x_2 分别为 $\varphi(x)$ 极大值, 极小值点

$$\varphi(x_1) = ae^{x_1} - 1 - x_1 - \frac{1}{2}x_1^2 = -\frac{1}{2}x_1^2 < 0$$

$$\varphi(x_2) = -\frac{1}{2}x_2^2 < 0$$

可得 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, x_2)$ 上总小于 0, 而 $\varphi(x)$ 在 $(x_2, +\infty)$ 上是单调增的, 且 $\varphi(+\infty) > 0 \Rightarrow$ 有唯一实根

(ii) $a \in [1, +\infty), x_0 \leq 0 \Rightarrow \varphi(x_0) \geq 0$ $\varphi(x)$ 单调增加, 由 $\varphi(-\infty) < 0, \varphi(+\infty) > 0$ 可得有唯一的实根

8.

$$f(x) = \left(\frac{2}{\pi} - 1\right) \frac{1}{x} + \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2-\pi}{\pi x} + \frac{2x}{1+x^2} = \frac{(2-\pi)(1+x^2) + 2\pi x^2}{\pi x(1+x^2)} = \frac{2-\pi + (2+\pi)x^2}{\pi x(1+x^2)}$$

$$\text{令 } f(x) > 0 \Rightarrow x^2 > \frac{\pi-2}{\pi+2} \Rightarrow x \in \left(\sqrt{\frac{\pi-2}{\pi+2}}, 1\right) \text{ 又}$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow f\left(\sqrt{\frac{\pi-2}{\pi+2}}\right) < f(1) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

可得 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有唯一的实根。

8.3 函数的极值与最值

8.3.1 练习题

- 首先有结论: 在区间内部, 若 f 有极值, 则一定也是极值
 设 x_0 不是最值点, \Rightarrow 最值在端点处取得 (只可能是闭区间), 不妨设 x_0 为极小值点, I 为 $[a, b], f(a) \leq f(x) \leq f(b), x \in [a, b]$ 则在 x_0 的左邻域内有一点 ξ 满足 $f(\xi) > f(x_0) > f(a)$, 于是 $f(x)$ 在 $[a, x_0]$ 最大值在内部取得, $\Rightarrow f(x)$ 在 (a, x_0) 内有极值点, 矛盾!
- 令 $f(x) = x^3 + px + q \Rightarrow f(x) = 3x^2 + p$, 若 $p \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ 有唯一的实根, 若 $p < 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $(-\sqrt{-\frac{p}{3}}, \sqrt{-\frac{p}{3}})$ 单调减, 则

$$\begin{cases} f(-\sqrt{-\frac{p}{3}}) > 0 \\ f(\sqrt{-\frac{p}{3}}) < 0 \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} \frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} - p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q > 0 \\ -\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q < 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{1}{3}p} + q > 0 \\ -\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{1}{3}p} - q > 0 \end{cases}$$

- 与上一题类似

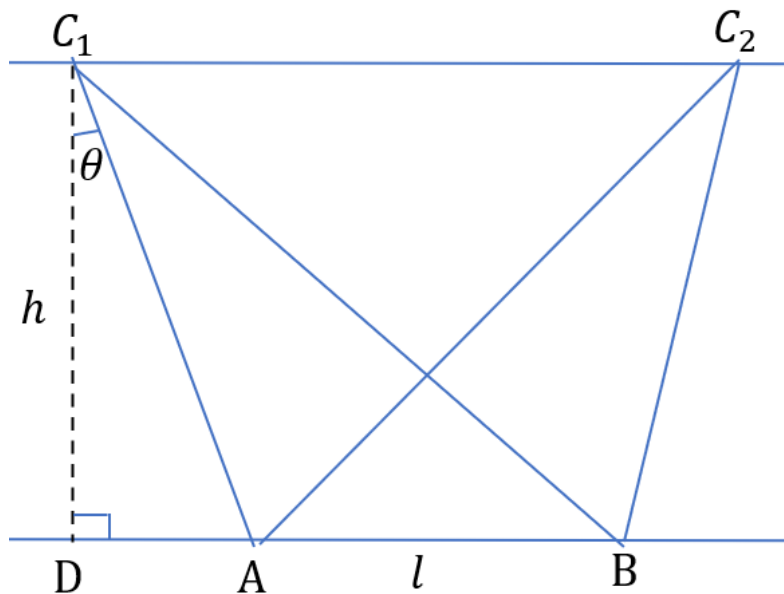


图 8.1

4.

$$f(\tilde{x}) = \lambda a^2 e^{\lambda x} - \lambda b^2 e^{-\lambda x} = \lambda (a^2 e^{\lambda x} - b^2 e^{-\lambda x})$$

$$f''(x) = \lambda^2 (a^2 e^{\lambda x} + b^2 e^{-\lambda x}) > 0$$

令 $f'(x) = 0 \Rightarrow e^{2\lambda x} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 e^{\lambda x} = \frac{b}{a}$ 设对应的 x 为 x_0 , 则 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的极小值点, $f(x_0) = 2ab$

5. 由题意知

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

若 $c = 0$ 则 $a, d \neq 0$, $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$ 无极值。

若 $c \neq 0 \Rightarrow y = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{cx + d} \cdot \frac{1}{c} \Rightarrow y' = \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{(cx + d)^2} \cdot (-c) = (ad - bc) \frac{1}{(cx + d)^2} \neq 0$ 可得在 $(-\infty, -\frac{d}{c})$ 及 $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ 上无极值点

6. 即比较 $\frac{\sqrt{n+1}}{2} \ln n$ 和 $\frac{\sqrt{n}}{2} \ln(n+1)$ 大小, 即 $\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ 和 $\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}}$ 大小。

令 $f(x) = x^{-\frac{1}{2}} \ln x$ ($x > 0$) 则

$$f(x) = x^{-\frac{3}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}} \ln x = \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} (2 - \ln x)$$

令 $f'(x) > 0 \Rightarrow 2 - \ln x > 0 \Rightarrow x < e^2$ 可得 $n \leq 6$ 时, $(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}} > (\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}$; $n \geq 8$ 时, $(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}} > (\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$; 当 $n = 7$ 时, $f(7) = \frac{1}{\sqrt{7}} \ln 7$, $f(8) = \frac{1}{\sqrt{8}} \ln 8$, $f(7) > f(8)$

7. (1) 参考图 8.1 首先证明: 固定底边不变时, 等腰三角形周长最小。

$$|AC_1| = \frac{h}{\cos \theta}, \quad |AD| = h \tan \theta \Rightarrow |BC_1| = \sqrt{h^2 + (1 + h \tan \theta)^2}$$

可得

$$f(\theta) = h \sec \theta + \sqrt{h^2 + (l + h \tan \theta)^2} \quad \left(\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$f'(\theta) = h \sec \theta \tan \theta + h \sec^2 \theta \frac{l + h \tan \theta}{(h^2 + (l + h \tan \theta)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

令 $f'(\theta) > 0$ 可得

$$\tan \theta (h^2 + (l + h \tan \theta)^2)^{\frac{1}{2}} + \sec \theta (l + h \tan \theta) > 0$$

$$\sin \theta (h^2 + (l + h \tan \theta)^2)^{\frac{1}{2}} > -(l + h \tan \theta) \quad (1)$$

当 $\theta \geq 0$ 时, 式 (1) 总是对的

当 $\theta < 0$ 时

$$(1) \Rightarrow \sin^2 \theta (h^2 + (l + h \tan \theta)^2) < (l + h \tan \theta)^2$$

$$\sin^2 \theta h^2 < (l + h \tan \theta)^2 \cos^2 \theta \Rightarrow h |\sin \theta| < \cos \theta |l + h \tan \theta|$$

$$|h \tan \theta| < |l + h \tan \theta| \Rightarrow -h \tan \theta < l + h \tan \theta \Rightarrow \tan \theta < \frac{l}{2h}$$

即为等腰三角形, 任意两边相等, 即为等边三角形。

(2) 等边三角形, 和 (1) 类似

(3)(4) 略

8. 设微分方程有 2 个解 y_1, y_2 , 记 $y = y_1 - y_2$, 于是 y 满足

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

由于 y 在 $[a, b]$ 上连续, 如果 y 不是常值函数, 那么必存在非 0 的最值, 不妨设 y 有最大值, 且最大值点为 x_0 , 那么自然 $y(x_0) > 0$, 又因为 x_0 为极大值点, 那么就有 $y'(x_0) = 0, y''(x_0) \leq 0$, 将 x_0 代入微分方程 (1) 可以得到

$$y''(x_0) + q(x_0)y(x_0) = 0$$

但是 $y''(x_0) \leq 0$ 与 $q(x_0)y(x_0) < 0$ 使得 $y''(x_0) + q(x_0)y(x_0) = 0$ 出现矛盾. 于是 $y \equiv y(a) = 0$ 为零函数, 这说明 $y_1 = y_2$

8.4 函数的凸性

8.4.1 练习题

1. 用数学归纳法. 当 $n = 2$ 时, 这正是凸函数和严格凸函数的定义. 设 $n = k \geq 2$ 时命题成立, 我们来证 $n = k + 1$ 时命题也成立. 设 $x_1, x_2, \dots, x_{k+1} \in I, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1} > 0$, 并且

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k+1} = 1$$

令

$$\mu_i = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

易见 $\mu_i > 0 (i = 1, 2, \dots, k)$ 且 $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k = 1$. 这时还有

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_k x_k \in I$$

于是

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left((1 - \lambda_{k+1}) \sum_{i=1}^k \mu_i x_i + \lambda_{k+1} x_{k+1}\right) \\ &\geq (1 - \lambda_{k+1}) f\left(\sum_{i=1}^k \mu_i x_i\right) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \\ &\geq (1 - \lambda_{k+1}) \sum_{i=1}^k \mu_i f(x_i) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(x_i) \end{aligned}$$

因此, 我们已经证明: 当 f 为 I 上的凸函数时, 对任何 $n \in \mathbf{N}^*$, 不等式 (8.11) 成立. 再设 f 是 I 上的严格凸函数, 并且 x_1, x_2, \dots, x_n 不全相等. 我们重新审查归纳证明. 当 $n = 2$ 时, x_1, x_2 不全相等就是 $x_1 \neq x_2$. 按定义, 严格的不等号成立. 假设 $n = k$ 时, 严格的不等号成立. 再设 x_1, x_2, \dots, x_{k+1} 不全相等. 如果其中的 x_1, x_2, \dots, x_k 不全相等, 那么上述归纳法中最后的那个不等号应当是严格的; 如果 $x_1 = \dots = x_k \neq x_{k+1}$, 则

$$\sum_{i=1}^k \mu_i x_i = x_1 \sum_{i=1}^k \mu_i = x_1 \neq x_{k+1}$$

这时归纳过程的第一个不等号就应当是严格的. 总之, 不等式 (8.11) 对一切 $n \in \mathbf{N}$ 成立.

2. 任取 x_1, x_2, x_3 满足 $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, 由 f 是凸的, 可得

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

而

$$\begin{aligned} &\frac{1/f(x_3) - 1/f(x_2)}{x_3 - x_2} - \frac{1/f(x_2) - 1/f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{1}{f(x_2)f(x_3)} \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_3 - x_2} - \frac{1}{f(x_2)f(x_1)} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_2 - x_1} \\ &\geq \left[\frac{1}{f(x_2)f(x_3)} - \frac{1}{f(x_2)f(x_1)} \right] \frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_3 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_3)}{f(x_1)f(x_2)f(x_3)} \cdot \frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_3 - x_1} \geq 0 \end{aligned}$$

可得 $\frac{1}{f}$ 是下凸的, 类似的有 f 下凸 $\Rightarrow \frac{1}{f}$ 上凸.

3. 任取 3 个点 x_1, x_2, x_3 满足 $x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow$ 至少有两个点的值同取于 f 或 g , 不妨设 $f(x_1) \geq g(x_1), f(x_2) \geq g(x_2)$, 令 $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ 则

$$\frac{h(x_3) - h(x_2)}{x_3 - x_2} \geq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$\Rightarrow h(x)$ 是下凸的

4. 任取 3 个点 x_1, x_2, x_3 满足 $x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} & \frac{f(x_3)g(x_3) - f(x_2)g(x_2)}{x_3 - x_2} - \frac{f(x_2)g(x_2) - f(x_1)g(x_1)}{x_2 - x_1} \\ & \geq g(x_3) \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} + f(x_2) \frac{g(x_3) - g(x_2)}{x_3 - x_2} - \left(f(x_2) \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} + g(x_1) \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \right) \\ & \geq (g(x_3) - g(x_1)) \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} + f(x_2) \left(\frac{g(x_3) - g(x_2)}{x_3 - x_2} - \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f \cdot g$ 为 I 上的下凸函数

5. 由于 e^x 单增可得

$$e^{f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)} \leq e^{\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)} \leq \lambda_1 e^{f(x_1)} + \lambda_2 e^{f(x_2)}$$

其中 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, 故 $F(x) = e^{f(x)}$ 是下凸函数

6. 考虑 $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = x^2$ 均是下凸函数, 但是

$$(f(g(x)))'' = (e^{-x^2})'' = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$$

可得在 $x = 0$ 时 $(f(g(0)))'' < 0$ 故 $f(g(x))$ 不是下凸函数

7. 若不是结论提到的两种情况则存在 $x_1 < x_2 < x_3 \in (-\infty, +\infty)$ 使得

$$f(x_1) < f(x_2), f(x_2) > f(x_3)$$

则

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 > \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

与 $f(x)$ 是下凸函数矛盾。

8. f 为下凸函数, 若 f 有两个不同的值, 设为 $x_1 < x_2, f(x_1) \neq f(x_2)$

(i) 若 $f(x_1) > f(x_2)$ 则 $\forall x < x_1$ 有

$$\begin{aligned} & \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ \Rightarrow & f(x) - f(x_1) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) \end{aligned}$$

令 $x \rightarrow -\infty$ 可得 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ 这与 f 有界矛盾

(ii) 若 $f(x_1) < f(x_2)$ 则 $\forall x > x_2$ 有

$$\begin{aligned} & \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \\ \Rightarrow & f(x) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_2) + f(x_2) \end{aligned}$$

令 $x \rightarrow +\infty$ 可得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 这与 f 有界矛盾

9. (1) $\forall x \neq x_0, f'(x)$ 在 x_0 处泰勒展开可得

$$f'(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1}$$

由于 n 为奇数, 则

$$f'(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} > 0$$

又 $f'(x_0) > 0$, 故 $f(x)$ 严格单调递增

(2) $\forall x_0 \neq x \in (a, b)$, $f''(x)$ 在 x_0 处泰勒展开可得

$$f''(x) = \frac{f''(\xi)}{(n-2)!} (x-x_0)^{n-2} > 0$$

又 $f''(x_0) > 0$, 故 f 在 (a, b) 上严格下凸

10. 任取 $[a, b] \subset (c, d)$, 则 $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ 有

$$m_1 = \frac{f(a) - f\left(\frac{a+c}{2}\right)}{\frac{1}{2}(c-a)} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f\left(\frac{d+b}{2}\right) - f(b)}{\frac{1}{2}(d-b)} = m_2$$

则

$$\left| \frac{f(x) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leq \max\{|m_1|, |m_2|\} := M > 0$$

则

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$$

11. 充分性: 因为对任意 $(x, y) \in I$, 任取 $c \in (x, y)$, 都有

$$\frac{f(y) - f(c)}{y - c} \geq a \geq \frac{f(c) - f(x)}{c - x}$$

这说明 f 在 I 上是下凸函数.

必要性: 任意一点 $x_0 \in I$, 取 $x_1 < x_0 < x_2$, 可得

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

令 $x_1 \rightarrow x_0^-, x_2 \rightarrow x_0^+$ 自然可以得到 $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$

任意一点 $c \in I$, 都有 $f'_-(c) \leq f'_+(c)$, 于是取 $a \in [f'_-(c), f'_+(c)]$, 那么对 $x \in I$ 就有

$$\begin{cases} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq f'_+(c) \geq a, & x > c \\ \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq f'_-(c) \leq a, & x < c \end{cases}$$

故 $f(x) \geq a(x - c) + f(c)$

12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ 有意义 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(x)}{x - a}$ 有意义, 而 $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 关于 x 递增, 所以有意义

13. 设 f 不是常值函数, 不妨设 $\exists a < b, f(a) = A < B = f(b)$, 可得

$$\forall x > b, \frac{f(x) - b}{x - b} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$$

$$f(x) > b + (x - b) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

取 $x > 0$, 则

$$\frac{f(x)}{x} > \frac{b}{x} + \frac{x - b}{x} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

可得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$$

矛盾

14. 对任意的 $d \in (a, b), d \neq c$, 它一定落在区间 (a, c) 或 (c, b) 内, 不妨设 $d \in (a, c)$. 那么

f 在 $[a, c]$ 上自然是下凸函数, 也就是满足

$$\frac{f(d) - f(a)}{d - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} = 0$$

于是可以得到

$$f(d) \leq f(a)$$

又因为 f 在 $[d, b]$ 上也是下凸函数, 那么又会有

$$\frac{f(c) - f(d)}{c - d} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c} = 0$$

那么又有

$$f(d) \geq f(c)$$

因为 $f(a) = f(c)$, 这迫使 $f(d) = f(a)$, 由 d 的任意性可知 $f \equiv f(a)$ 为常函数.

15. 任取区间 $(x_1, x_2) \subset [a, d]$, 如果 $x_1 \geq b$ 或者 $x_2 \leq c$, 那么由 f 在 $[a, c]$ 及 $[b, d]$ 上为下凸函数可知对任意的 $x \in (x_1, x_2)$, 有

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad (1)$$

那么我们只要考虑当 $x_1 < b$ 且 $x_2 > c$ 时, 即 $(b, c) \subset (x_1, x_2)$ 时, 是否有不等式 (1) 成立. 而

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad (2)$$

就已经蕴含了 (1), 所以我们只要说明不等式 (2) 成立即可.

(Case 1) 对任意的 $x \in (b, c)$, 首先由于 f 在 $[x_1, c]$ 上为下凸函数, 就有

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(c) - f(x)}{c - x}$$

又由于 f 在 $[b, d]$ 上为下凸函数, 那么又有

$$\frac{f(c) - f(x)}{c - x} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

可得

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(c) - f(x)}{c - x} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

那么自然有不等式 (2) 成立.

(Case 2) 因为 f 在 $[x, c]$ 上为下凸函数, 那么

$$\frac{f(c) - f(x)}{c - x} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

然后再因为 f 在 $[b, x_2]$ 上为下凸函数, 又有不等式

$$\frac{f(c) - f(b)}{c - b} \leq \frac{f(x_2) - f(c)}{x_2 - c}$$

成立, 于是可以得到

$$\frac{f(c) - f(x)}{c - x} \leq \frac{f(x_2) - f(c)}{x_2 - c}$$

可知

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(c) - f(x)}{c - x} \leq \frac{f(c) - f(x) + f(x_2) - f(x)}{c - x + x_2 - c} = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

(Case 3) 当 $x \in (c, x_2)$ 时, 与 (Case 2) 类似, 先对 $[b, x_2]$ 使用性质, 再对 $[b, x]$ 使用性

质, 最后对 $[x_1, c]$ 使用性质, 将得到的不等式连起来, 也可以得到不等式 (2) 成立.

综上所述, 对任意的 $(x_1, x_2) \subset [a, d]$ 与任意的 $x \in (x_1, x_2)$, 都有不等式 (2) 成立, 也就是说 f 在 $[a, d]$ 上为下凸函数.

16. 因为其二次导数还是奇数次多项式, 在 x 趋于负无穷时, 函数值趋于负无穷, 在 x 趋于正无穷时, 函数值趋于正无穷, 故它的二次导数有正值有负值, 所以不是凸函数.

17. (反证法) 不妨设 $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$, 若有

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi_1)(x_1 - x_2) = f'(\xi_2)(x_1 - x_2), \xi_1 < \xi_2$$

则 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$, 故

$$\frac{f'(\xi_1) - f'(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} = f''(\eta) = 0$$

矛盾

18. 不妨设 $f(x)$ 在 $[a, x_0]$, 在 $[x_0, b]$ 下凸, 则在 $[x_0, b]$ 上考虑, $\forall h > 0$ 有

$$\frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h) - (f(x_0 + h) - f(x_0))}{h^2} \geq 0$$

令 $h \rightarrow 0^+$ 可得 $f'(x_0) \geq 0$, 类似的在 $[a, x_0]$ 可得 $f''(x_0) \leq 0$, 故 $f''(x_0) = 0$

19. 参考下面一题

20. $\forall x \neq x_0$ 考虑 $f''(x)$ 在 x_0 处的展开则

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!} (x-x_0)^{n-2} + o((x-x_0)^{n-2}) \\ &= (x-x_0)^{n-2} \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!} + o(1) \right) \end{aligned}$$

不妨设 $f^{(n)}(x_0) > 0$, 若 n 为奇数, 则在 x_0 的左邻域, $f''(x) < 0$, 在 x_0 的右邻域, $f''(x) > 0$, 故 x_0 是拐点; 若 n 为偶数, 则在 x_0 的邻域内有 $f''(x) > 0$, 故 x_0 不是拐点.

8.5 不等式

8.5.1 练习题

1. 令 $f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1} \quad (x > 1)$ 则

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{2(x+1) - 2(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} \geq 0 \Rightarrow f(x) > f(1) = 0 \end{aligned}$$

2. 令

$$f(t) = a \ln a + t \ln t - (a+t) \ln(a+t) + (a+t) \ln 2$$

则 $f(a) = 0$, 且

$$f(t) = 1 + \ln t + \ln 2 - 1 - \ln(a+t) = \ln t - \ln(a+t) + \ln 2 = \ln \left(\frac{2t}{t+a} \right)$$

可得当 $t > a$ 时, $f'(t)$ 总大于 0, 故 $f(b) > f(a) = 0$

3. 事实上, 若有 $\ln \frac{x_2}{x_1} < \frac{x_2 - x_1}{x_1}$, 则有 $\frac{x_1 - x_2}{x_1} < \ln \frac{x_1}{x_2}$, 令

$$f(t) = \ln t - t + 1, f(1) = 0 \quad f'(t) = \frac{1}{t} - 1$$

则 $t \in (0, 1)$ 时, $f(t)$ 单调递增; 当 $t \in (1, +\infty)$ 时, $f(t)$ 单调递减. 可得 $t = 1$ 为 $f(t)$ 的极大值点, 可得 $t \neq 1$ 时 $f(t) < 0$, 故

$$\ln \frac{x_2}{x_1} < \frac{x_2 - x_1}{x_1}, \ln \frac{x_1}{x_2} < \frac{x_1 - x_2}{x_2}$$

故

$$\frac{x_2 - x_1}{x_2} < \ln \frac{x_2}{x_1} < \frac{x_2 - x_1}{x_1}$$

4. (1) 均值不等式可得

$$a^{x_1} + a^{x_2} + \cdots + a^{x_n} \geq n \sqrt[n]{a^{x_1} \cdots a^{x_n}} = na^{\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}}$$

- (2) 令 $f(t) = t^p, f''(t) = p(p-1)t^{p-2} \geq 0 \Rightarrow f(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是下凸函数故

$$\frac{1}{n} (x_1^p + \cdots + x_n^p) \geq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right)^p$$

- (3) 先根据对数函数的单调性将要证明的不等式进行变形:

$$\ln \left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \right) \leq \frac{1}{\sum_{k=1}^n x_k} \sum_{k=1}^n x_k \ln x_k$$

再进行移项:

$$\sum_{k=1}^n x_k \ln \left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \right) \leq \sum_{k=1}^n x_k \ln x_k$$

由于我们想使用 Jensen 不等式进行证明, 那么就要求一侧展现出完整的函数形式, 于是两侧同时除以 n , 可以得到

$$\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \ln \left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \ln x_k$$

这样观察等式左侧就可以知道我们只要证明出 $f(x) = x \ln x$ 为下凸函数即可. $f''(x) = 1/x > 0$ ($x > 0$), 故 $f(x) = x \ln x$ 为下凸函数

5. 令 $f(t) = t^\alpha - \alpha t + \alpha - 1$, 当 $\alpha \in (0, 1)$ 时, $f(1) = 0, f'(t) = \alpha t^{\alpha-1} - \alpha$, 令 $f'(t) > 0 \Rightarrow t \in (0, 1)$ 即 $f(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 可得 $t = 1$ 是极大值点, 可得 $f(t) \leq f(1) = 0$; 当 $\alpha \in (1, +\infty)$ 时, $f(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 可得 $f(t) \geq f(1) = 0$

6. 取对数可得

$$(n + \alpha) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \leq 1 \leq (n + \beta) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha \leq \frac{1}{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} - n \leq \beta$$

考虑函数 $f(t) = \frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{t}, t \in (0, +\infty)$, 可得

$$f'(t) = \frac{1}{1+t} \left(-\frac{1}{\ln^2(1+t)} \right) + \frac{1}{t^2} = \frac{(1+t)\ln^2(1+t) - t^2}{t^2 \ln^2(1+t)(1+t)}$$

则

$$\begin{aligned} f'(t) > 0 &\Leftrightarrow (1+t)\ln^2(1+t) - t^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \ln^2(1+t) > \frac{t^2}{1+t} \Leftrightarrow \ln(1+t) > \frac{t}{\sqrt{1+t}} \end{aligned}$$

再令 $h(t) = \ln(1+t) - \frac{t}{\sqrt{1+t}}$ 则 $h(0) = 0$ 且 $h'(t) = \frac{1}{(1+t)^{\frac{3}{2}}} \left(\sqrt{1+t} - (1+t) + \frac{t}{2} \right)$,

则 $h'(t) > 0$ 等价于 $\sqrt{1+t} > 1 + \frac{1}{2}t \Leftrightarrow 1+t > 1+t + \frac{1}{4}t^2 \Leftrightarrow t^2 < 0$ 不存在, 故 $h(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 可得 $h(t) < h(0) = 0 \Leftrightarrow f'(t) < 0$, 又

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{t} \right] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{t} \right] = 0$$

故 $\alpha = 0, \beta = \frac{1}{2}$

7. 只证

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}$$

其余不等式用均值不等式或者根据 a 和 b 大小关系即得。

(i) 令 $f(t) = \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} - \ln t$ 则

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{2\sqrt{t^3}} - \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{\frac{1}{4t^2}} - \frac{1}{t} = 0$$

且 $f(0) = 0$, 可得 $\frac{f(x)}{\ln x}$ 在 $(0, 1)$ 和 $(1, +\infty)$, 可得 $\frac{f(x)}{\ln x} > 0 \Rightarrow \sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$

(ii) 令 $f(t) = 2\frac{t-1}{t+1} - \ln t$ 可得

$$f'(t) = \frac{4}{(t+1)^2} - \frac{1}{t} = -\frac{(t-1)^2}{(t+1)^2} \leq 0 \quad (t > 0)$$

且 $f(1) = 0$ 故

$$\frac{f(x)}{\ln x} < 0 \quad (x > 0 \text{ 且 } x \neq 1) \Rightarrow \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}$$

8. 令 $g(t) = \ln M_t(x, \lambda)$ 则

$$g'(t) = \frac{t \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^t \ln x_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^t} - \ln \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^t \right)}{t^2}$$

令 $f(t) = t \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^t \ln x_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^t} - \ln \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^t \right)$, 则

$$f'(t) = t \cdot \frac{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^t \right) \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^t \ln^2 x_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^t \ln x_i \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^t \right)^2}$$

由柯西不等式可得

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^t\right) \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^t \ln^2 x_i\right) - \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^t \ln x_i\right)^2 \geq 0$$

故 $f'(t)$ 的符号由 t 确定, 故

$$f(t) \geq f(0) = 0$$

可得 $g'(t) \geq 0$, 故 $g(t)$ 关于 t 单调递增。

9. 令 $f(u) = \left(1 - u^{\frac{1}{p}}\right)^p$ 则

$$f''(u) = \left(1 - \frac{1}{p}\right) u^{\frac{1}{p}-2} \left(1 - u^{\frac{1}{p}}\right)^{p-2} < 0 \quad (u \in (0, 1))$$

可得 f 在 $(0, 1)$ 上严格上凸

令 $\lambda_k = \frac{(x_k + y_k)^p}{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p}$, $u_k = \left(\frac{x_k}{x_k + y_k}\right)^p$ 则

$$\left(1 - \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k^p}{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \geq \sum_{i=1}^n \frac{(x_k + y_k)^p}{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p} \left(1 - \frac{x_k}{x_k + y_k}\right)^p = \frac{\sum_{k=1}^n y_k^p}{\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p}$$

故

$$\left(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

10. $x = y = 0$ 是结论成立, 若 x, y 不同时为 0, 考虑函数 $f(x) = \ln x$ 则 $f''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$, 可得 $f(x)$ 为上凸函数, 故

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) &\geq \frac{1}{p} \ln x + \frac{1}{q} \ln y = \ln x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \\ \frac{x}{p} + \frac{y}{q} &\geq x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

11. (1) 广义的算术平均值-几何平均值不等式: $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$, $p_i > 0$, $x_1, \cdots, x_n \geq 0$ 则

$$p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n \geq x_1^{\frac{1}{p_1}} \cdots x_n^{\frac{1}{p_n}}$$

归纳法当 $n = 2$ 时恰好是 Young 不等式, 假设为 $n - 1$ 时, 广义的算术平均值-几何平均值不等式成立。当为 n 时

$$\begin{aligned} p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n &= p_1 x_1 + (p_2 + \cdots + p_n) \frac{p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n}{p_2 + \cdots + p_n} \\ &\geq x_1^{\frac{1}{p_1}} \cdot \left(\frac{p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n}{p_2 + \cdots + p_n}\right)^{\frac{1}{p_2 + \cdots + p_n}} \end{aligned}$$

归纳可得

$$\geq x_1^{\frac{1}{p_1}} \cdot \left(\frac{p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n}{p_2 + \cdots + p_n}\right)^{\frac{1}{p_2 + \cdots + p_n}}$$

故

$$p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n \geq x_1^{\frac{1}{p_1}} \cdots x_n^{\frac{1}{p_n}}$$

(2) Hölder 不等式: 设 a_1, a_2, \cdots, a_n 和 b_1, b_2, \cdots, b_n 是两组不全为零的非负实数,

则有不等式:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q} \quad (1)$$

其中 $p, q > 1$, 且 $1/p + 1/q = 1$. 式 (1) 中等号成立的充分必要条件是, 存在常数 λ , 使得

$$a_i^p = \lambda b_i^q \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

令

$$A_i = \frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p}, \quad B_i = \frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

用 Young 不等式得到

$$\frac{a_i b_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p} + \frac{1}{q} \frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

两边对 i 从 1 到 n 求和, 移项后得到

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}$$

式 (1) 得证. 式 (1) 中等号成立的充分必要条件是, 式 (2) 中每一个不等式的等号成立, 即

$$\frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p} = \frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

或者

$$\frac{a_i^p}{b_i^q} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{\sum_{i=1}^n b_i^q} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

上式的右边是一个与 i 无关的常数, 记为 λ , 从而得

$$a_i^p = \lambda b_i^q \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

12. 将题中条件写为 $-\phi'(x) \leq f'(x) \leq \phi'(x)$, 分别考虑 $F = f - \phi$ 与 $G = f + \phi$. 由 Lagrange 中值定理可知存在 $\xi \in (a, x)$, 使得

$$F(x) - F(a) = F'(\xi)(x - a)$$

$$f(x) - f(a) - (\phi(x) - \phi(a)) \leq 0 \implies f(x) - f(a) \leq \phi(x) - \phi(a) \quad (1)$$

再考虑 $G = f + \phi$. 同理由 Lagrange 中值定理可知存在 $\eta \in (a, x)$, 使得

$$G(x) - G(a) = f(x) - f(a) + (\phi(x) - \phi(a)) = G'(\eta)(x - a) = (f'(\eta) + \phi'(\eta))(x - a) \geq 0$$

也就是

$$-(\phi(x) - \phi(a)) \leq f(x) - f(a) \quad (2)$$

综合不等式 (1) 和 (2) 可得 $|f(x) - f(a)| \leq \phi(x) - \phi(a)$

13. 由 $0 < f'(x) < \frac{1}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 单调递增又

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_1^x f'(t) dt + f(1) = 1 + \int_1^x \frac{1}{t^2 + f^2(t)} dt \\ &\leq 1 + \int_1^x \frac{1}{t^2 + 1} dt \\ &= 1 + \arctan x - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

可得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \arctan x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 + \frac{\pi}{4}$$

14. 由矩阵乘法可知对 $i = 1, 2, \dots, n$, 都有

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

由于 $-\ln x$ 在 $x > 0$ 时为下凸函数, 且因为 $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$, 那么由 Jensen 不等式可得

$$\ln y_i = \ln \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \geq \sum_{j=1}^n a_{ij} \ln x_j$$

再令 j 从 1 跑到 n , 求和后有

$$\sum_{i=1}^n \ln y_i \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \ln x_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right) \ln x_j = \sum_{j=1}^n \ln x_j$$

于是

$$\ln (y_1 y_2 \cdots y_n) \geq \ln (x_1 x_2 \cdots x_n) \Rightarrow y_1 y_2 \cdots y_n \geq x_1 x_2 \cdots x_n$$

15. 令 $f(x) = \sin x - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ 则

$$f^{(2x+1)}(x) = (-1)^n \cos x - (-1)^n = (-1)^n (\cos x - 1) \quad (1)$$

(i) 当 n 为奇数时, 式 (1) ≥ 0 , 又 $f^{(i)}(0) = 0 (0 \leq i \leq 2n+1) \Rightarrow f(x) > 0, \forall x > 0$

(ii) 当 n 为偶数时, 式 (1) ≤ 0 , 又 $f^{(i)}(0) = 0 (0 \leq i \leq 2n+1) \Rightarrow f(x) > 0, \forall x > 0$

16. 令 $f(x) = e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{a}\right)^a - \frac{x^2}{a} e^{-x}$, 则 $f(0) = 1 - 1 - 0 = 0, f(a) = (1-a)e^{-a} \leq 0$
且

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x} + \frac{1}{a} \cdot a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{a-1} + \frac{x^2}{a} e^{-x} - \frac{2}{a} x e^{-x} \\ &= -e^{-x} + \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{a-1} + \frac{1}{a} (x^2 - 2x) e^{-x} \end{aligned}$$

设有极值点为 ξ , 则 $f'(\xi) = 0$, 此时有

$$\begin{aligned} f(s) &= \left(1 - \frac{\xi^2}{a}\right) e^{-\xi} + \left(1 - \frac{\xi}{a}\right) \frac{1}{a} (\xi^2 - 2\xi - a) e^{-\xi} \\ &= \frac{1}{a^2} (\xi^3 - 2\xi^2 + a\xi) e^{-\xi} < 0 \Rightarrow f(x) \leq 0 \end{aligned}$$

8.6 函数作图

本节略

8.7 方程求根与近似计算

先来讲一个命题：形如 $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ 的迭代公式，若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x^*$ 且

$$\varphi'(x^*) = 0, \dots, \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0, \varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$$

则 $\{x_n\}$ p 阶收敛

证明

$$x_{n+1} - x^* = \varphi(x_n) - x^* = \varphi(x_n) - \varphi(x^*) = \frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!} (x_n - x^*)^p$$

则

$$\frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^p} = \frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!} \rightarrow \frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!} \neq 0, \quad (n \rightarrow +\infty)$$

故 $\{x_n\}$ p 阶收敛

8.7.1 练习题

1. 略

2. 例如，取 $f(x) = x^3 + 1$ 在 $\left[-2, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$ 上，则不满足条件 (3)，此时 Newton 迭代公式为

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^3 + 1}{3x_n^2} \\ &= \frac{2}{3}x_n - \frac{1}{3x_n^2} \end{aligned}$$

则 $x_1 = 0$ ，不能继续迭代了。

3. 设对应的数列为 $\{x_n\}$ ，则 $|x_{n+1} - x_n| = \frac{|b-a|}{2^{n+1}}$ ，设根为 x^* ，由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n}$$

若 $x_n > x_{n+1}$ ，则 $x_{n+2} > x_{n+1}$ 可得

$$\frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} < 0$$

若 $x_n < x_{n+1}$ ，则 $x_{n+2} < x_{n+1}$ 可得

$$\frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} < 0$$

又

$$\left| \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} \right| = \frac{\frac{|b-a|}{2^{n+2}}}{\frac{|b-a|}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2}$$

故 $\frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} = -\frac{1}{2}$ 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = -\frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|} = \frac{1}{2}$$

故为线性收敛

4.

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \sqrt{A} &= \frac{x_n^3 + 3Ax_n - 3\sqrt{A}x_n^2 - (\sqrt{A})^3}{3x_n^2 + A} \\ &= \frac{(x_n - \sqrt{A})^3}{3x_n^2 + A} \end{aligned}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \sqrt{A}|}{|x_n - \sqrt{A}|^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|3x_n^2 + A|} = \frac{1}{4A}$$

为三阶收敛。

5. $x_{n+1} = f(x_n)$, 其中 $f(x) = \frac{x^4 + 2Ax}{2x^3 + A}$, 若 $x_0 \leq \sqrt[3]{A}$, 由 $f'(x) = \frac{2(A - x^3)^2}{(A + 2x^3)^2}$ 归

纳可得 $x_{n+1} = f(x_n) \leq f(\sqrt[3]{A}) \leq \sqrt[3]{A}$, 又 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n^3 + 2A}{2x_n^3 + A}$, 令 $g(x) = \frac{x^3 + 2A}{2x^3 + A}$

则 $g'(x) = -\frac{9Ax^2}{(A + 2x^3)^2} < 0$, 故

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = g(x_n) \geq g(\sqrt[3]{A}) = 1$$

$\Rightarrow \{x_n\}$ 单增有上界, 故 $\{x_n\}$ 收敛, 对于 $x_0 > \sqrt[3]{A}$, 类似可得。

又

$$f''(x) = \frac{36Ax^2(-A + x^3)}{(A + 2x^3)^3}$$

$$f'''(x) = -\frac{36Ax(2A^2 - 19Ax^3 + 8x^6)}{(A + 2x^3)^4}$$

则 $f'(\sqrt[3]{A}) = f''(\sqrt[3]{A}) = 0$, $f'''(\sqrt[3]{A}) \neq 0$, 故为三阶收敛。

6. $k \neq 1$, 迭代公式为

$$x_{n+1} = \frac{1}{k} \left((k-1)x_n + \frac{A}{x_n^{k-1}} \right)$$

令 $f(x) = (k-1)x + \frac{A}{x^{k-1}}$, 则

$$f'(x) = k-1 + A(1-k)x^{-k}$$

$$f''(x) = -A(1-k)kx^{-1-k}$$

则 $f'(\sqrt[k]{A}) = 0$, $f''(\sqrt[k]{A}) \neq 0$, 故为二阶收敛。

7. 迭代公式为

$$x_{n+1} = x_n(2 - Ax_n), \quad 0 < x_0 < \frac{1}{A}$$

归纳可得 $0 < x_n < \frac{1}{A}$, 故 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 2 - Ax_n > 1 \Rightarrow \{x_n\}$ 单增有上界, 故 $\{x_n\}$

收敛, 令 $f(x) = x(2 - Ax)$, 则 $f'(x) = 2 - 2Ax, f''(x) = -2A$, 则 $f' \left(\frac{1}{A} \right) = 0$, $f'' \left(\frac{1}{A} \right) \neq 0$, 故为二阶收敛。

8.8 对于教学的建议

8.8.1 第一组参考题

1.

$$\begin{aligned} -1 \leq f(x) + f'(x) \leq 1 &\Rightarrow -e^x \leq (f(x)e^x)' \leq e^x \\ &\Rightarrow -\int_{-\infty}^x e^x dx \leq \int_{-\infty}^x (f(x)e^x)' dx \leq \int_{-\infty}^x e^x dx \\ &\Rightarrow -e^x \leq f(x)e^x \leq e^x \Rightarrow -1 \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow |f(x)| \leq 1 \end{aligned}$$

2. 显然 $f(0) = 0$, 又

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\left(x + \frac{f(x)}{x} \right) \cdot \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x^2} \right)}$$

可得 $f'(0) = 0, f''(0) = 4$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{f(x)}{x^2}} = e^2$$

3.

$$x_{n+1} - x_n = x_n^k (A + o(1)) \quad n \rightarrow +\infty$$

而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ 且 $\{x_n\}$ 为正数列, 可得 $A < 0$, 则 $\{x_n\}$ 单调递减趋于 0, 则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n^\alpha &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^\alpha}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{x_n^\alpha}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n^\alpha x_{n+1}^\alpha}{x_n^\alpha - x_{n+1}^\alpha} \end{aligned}$$

由题目可知

$$\begin{aligned} x_{n+1}^\alpha &= \left(x_n + Ax_n^k + o(x_n^k) \right)^\alpha = x_n^\alpha \left(1 + Ax_n^{k-1} + o(x_n^{k-1}) \right)^\alpha \\ &= x_n^\alpha \left(1 + \alpha Ax_n^{k-1} + o(x_n^{k-1}) \right) \end{aligned}$$

可得

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n^{2\alpha} + \alpha Ax_n^{2\alpha+k-1} + o(x_n^{2\alpha+k-1})}{-Ax_n^{\alpha+k-1} + o(x_n^{\alpha+k-1})}$$

故

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{A} x_n^{\alpha+1-k} = \begin{cases} 0 & \alpha > k-1 \\ -\frac{1}{A} & \alpha = k-1 \\ +\infty & \alpha < k-1 \end{cases}$$

4. 充分性显然, 下证必要性, 反证法, 假设 f 在 $[a, b]$ 上不是严格单调的, 不妨设不

是严格减, 则 $\exists [a, b]$ 中的三个点 x_1, x_2, x_3 满足 $x_1 < x_2 < x_3$, 但是 $f(x_1) \geq f(x_2)$ 且 $f(x_3) \geq f(x_2)$, 可得 f 在区间 $[x_1, x_3]$ 内的最小值不在 x_1, x_3 处取得, 故 f 在 $[x_1, x_3]$ 内有极小值点, 矛盾。

5. 由 $|a + b|^p \leq |a| + |b|^p$, 不妨设 $b > a > 0$, 则

$$\begin{aligned}(a + b)^p - b^p &= a \cdot \xi^{p-1} \quad \xi \in (b, a + b) \\ a^p &= a^p - 0^p = a \cdot \eta^{p-1} \quad \eta \in (0, a)\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}(a + b)^p - b^p &\leq a^p \\ (a + b)^p &\leq a^p + b^p\end{aligned}$$

6. 只证左端不等式, 右端类似可得

令

$$f(n) = n \ln(n + 1) - n \ln n - \ln 2n + \ln(2n + 1) - 1$$

则

$$f(+\infty) = 0 \quad f'(n) = \ln(1 + n) - \ln n - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{2}{2n+1}$$

$$f''(n) = \frac{5n^2 + 5n + 1}{n^2(n+1)^2(2n+1)^2} > 0$$

而 $f'(+\infty) = 0$ 故 $f'(n) \leq 0 \Rightarrow f(n) \geq 0$

7. 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x \Leftrightarrow \tan x \sin^2 x > x^3 \Leftrightarrow \tan^{\frac{1}{3}} x \sin^{\frac{2}{3}} x - x > 0 \quad (1)$$

令 $f(t) = \tan^{\frac{1}{3}} t \sin^{\frac{2}{3}} t - t \Rightarrow f(0) = 0$ 则

$$\begin{aligned}f'(t) &= \frac{1}{3} \tan^{-\frac{2}{3}} t \tan^{\frac{2}{3}} t \sec^2 t + \frac{2}{3} \cos t \tan^{\frac{1}{3}} t \sin^{-\frac{1}{3}} t - 1 \\ &= \frac{1}{3} \cos^{-\frac{4}{3}} t + \frac{2}{3} \cos^{\frac{2}{3}} t - 1 \Rightarrow f'(0) = 0\end{aligned}$$

$$f''(t) = \frac{4}{9} \sin t \cos^{-\frac{7}{3}} t - \frac{4}{9} \sin t \cos^{-\frac{1}{3}} t = \frac{4}{9} \sin t \cos^{-\frac{7}{3}} t (1 - \cos^2 t) > 0$$

故 $\forall t \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow f'(t) > 0 \Rightarrow f(t) > 0$, (1) 式成立

8. 利用泰勒展开

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}(\theta x)^5 \quad (0 < \theta < 1) \\ \tan x &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}(\alpha x)^5 \quad (0 < \alpha < 1)\end{aligned}$$

可得

$$2 \sin x + \tan x - 3x = \frac{2}{5!}(\theta x)^5 + \frac{2}{15}(\alpha x)^5 \geq 0$$

故 $2 \sin x + \tan x \geq 3x$

9. 即证 $\pi x(1-x) < \sin \pi x < 4x(1-x)$, 令 $f(x) = \sin \pi x - \pi x(1-x)$, 则

$$f'(x) = \pi(\cos \pi x + 2x - 1)$$

$$f''(x) = \pi(-\pi \sin \pi x + 2)$$

$$f'''(x) = -\pi^3 \cos \pi x$$

则 $f''(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单减, 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 单增, 又

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) < 0, f''(0) = f''(1) = 2 > 0$$

可知 $0 < x_1 < \frac{1}{2} < x_2 < 1$ 使得 $f'(x)$ 在 $(0, x_1)$ 单增, 在 (x_1, x_2) 单减, 在 $(x_2, 1)$ 单增, 而 $f'(0) = f'(1) = 0 = f'\left(\frac{1}{2}\right)$ 故 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 单增, 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 单减, 故

$$f(x) > \min\{f(0), f(1)\} = 0$$

令 $g(x) = \sin \pi x - 4x(1-x)$, 则

$$g'(x) = \pi \cos \pi x + 8x - 4$$

$$g''(x) = -\pi^2 \sin \pi x + 8$$

$$g'''(x) = -\pi^3 \cos \pi x$$

$g''(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 单减, 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 单增, 又

$$g''(0) = g''(1) = 8 > 0, g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

故存在 $0 < x_3 < \frac{1}{2} < x_4 < 1$ 使得 $g'(x)$ 在 $(0, x_3)$ 上单增, 在 (x_3, x_4) 单减, 在 $(x_4, 1)$ 单增。而

$$g'(0) < 0, g'\left(\frac{1}{2}\right) = 0, g'(1) > 0, g'\left(\frac{3}{4}\right) < 0$$

故存在

$$0 < x_5 < \frac{1}{2} < \frac{1}{2} < x_6 < 1$$

使得 $g(x)$ 在 $(0, x_5)$ 单减, 在 $(x_5, \frac{1}{2})$ 单增, 在 $(\frac{1}{2}, x_6)$ 单减, 在 $(x_6, 1)$ 单增。又

$$g(0) = g\left(\frac{1}{2}\right) = g(1) = 0$$

故 $g(x) \leq 0$

10. 令 $f(x) = \sin x - \left(\frac{2}{\pi}x + \frac{1}{12\pi}x(\pi^2 - 4x^2)\right)$ 则

$$f'(x) = \cos x - \left(\frac{2}{11} + \frac{1}{12}\pi - \frac{1}{\pi}x^2\right)$$

$$f''(x) = -\sin x + \frac{2}{\pi}x, f'''(x) = -\cos x + \frac{2}{\pi}$$

令 $f'''(x) < 0$, 得 $x \in (0, x_0)$ 其中 $\cos x_0 = \frac{2}{\pi}$ 且 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, 可得 x_0 是 $f''(x)$ 的极小值点, 又

$$f''(x_0) = -\sin x_0 + x_0 \cos x_0 = (x_0 - \tan x_0) \cos x_0 < 0$$

$f''(0) = f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ 可得 $f''(x) \leq 0$, 故 $f'(x)$ 单调递减, 而 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\left(\frac{2}{\pi} + \frac{1}{12}\pi - \frac{\pi}{4}\right) < 0$ 故 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)$ 或者 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, 而 $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$

11. 令 $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln(1+x) - \ln x$ 则

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{x^2} > 0$$

可得 $f(x)$ 是下凸函数, 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) &\geq f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \ln\left(1 + \frac{n}{x_1 + \cdots + x_n}\right) \\ \left(1 + \frac{1}{x_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{x_n}\right) &\geq \left(1 + \frac{n}{x_1 + \cdots + x_n}\right)^n \end{aligned}$$

即

$$\frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{(x_1 + \cdots + x_n)^n} \leq \frac{(1+x_1) \cdots (1+x_n)}{(n+x_1+\cdots+x_n)^n}$$

等号当且仅当 $x_1 = \cdots = x_n$ 时成立。

12. 设 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 则

$$(\sin x)^{\cos x} < (\cos x)^{\sin x} \Leftrightarrow \frac{\ln \sin x}{\sin x} < \frac{\ln \cos x}{\cos x}$$

考虑函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 可得在 $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 时 $\sin x < \cos x$, 故

$$\frac{\ln \sin x}{\sin x} < \frac{\ln \cos x}{\cos x}$$

在 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\sin x > \cos x$, 故

$$\frac{\ln \sin x}{\sin x} > \frac{\ln \cos x}{\cos x}$$

13. (1) 令 $f(t) = \frac{1}{p} t^{\frac{1}{p}-1} a + \left(1 - \frac{1}{p}\right) t^{\frac{1}{p}} b, t > 0$, 则

$$f(t) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{p} - 1\right) t^{\frac{1}{p}-2} a + \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right) t^{\frac{1}{p}-1} b$$

令 $f'(t) > 0 \Rightarrow -a + bt > 0 \Rightarrow t > \frac{a}{b} \Rightarrow t = \frac{a}{b}$ 为 $f(x)$ 的极小值点, 故

$$f(t) \geq f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{p} a^{\frac{1}{p}} b^{1-\frac{1}{p}} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) a^{\frac{1}{p}} b^{1-\frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{p}} b^{1-\frac{1}{p}}$$

(2) 令 $g(t) = t^{1-p} a^p + (1-t)^{1-p} b^p, t \in (0, 1)$ 则

$$g'(t) = (1-p)t^{-p} a^p + (-1)(1-p)(1-t)^{-p} b^p$$

令 $g'(t) > 0 \Rightarrow a/t + b/(t-1) > 0 \Rightarrow t > \frac{a}{a+b}$ 则

$$g(t) \geq g\left(\frac{a}{a+b}\right) = a(a+b)^{p-1} + b(a+b)^{p-1} = (a+b)^p$$

14. 必要性. 当 $p'(a)p'(b) \leq 0$ 时

$$p'(a)p'(b) = -(a-b)^2(a-c)(b-c) \leq 0$$

这就是 $(a-c)(b-c) \geq 0$, 这说明 $c \in (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$, 即 p 在 $[a, b]$ 中没有零点, 也就是 p 在 $[a, b]$ 上不变号.

充分性: 如果 p 在 $[a, b]$ 上不变号, 那么 $c \in (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$, 这就说明

$$p'(a)p'(b) = -(a-b)^2(a-c)(b-c) \leq 0$$

15. 引理: 给定函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 如果 $x \in \mathbb{R}$ 使 $f(x) = x$, 称 x 为 f 的一个不动点. 若 $f \circ f$ 有唯一的不动点, 求证 f 也有唯一的不动点.

证明: 先说明 f 存在不动点. 设 x_0 为 f^2 的不动点. 因为

$$f(f^2(x_0)) = f(x_0) \implies f^2(f(x_0)) = f(x_0)$$

这说明 $f(x_0)$ 也是 f^2 的不动点, 因为 f^2 的不动点唯一, 则只有 $f(x_0) = x_0$, 也就是说 f 存在不动点 x_0 .

再说明不动点的唯一性. 如果 f 有两个不动点 x_1, x_2 , 即

$$f(x_1) = x_1, \quad f(x_2) = x_2$$

那么再用 f 作用一遍, 则有

$$f^2(x_1) = f(f(x_1)) = f(x_1) = x_1, \quad f^2(x_2) = f(f(x_2)) = f(x_2) = x_2$$

也就是 x_1 与 x_2 都是 f^2 的不动点, 与 f^2 有唯一的不动点矛盾.

回到本题, 用反证法. 如果存在 f 满足条件, 先求 $f \circ f$ 的不动点:

$$f \circ f(x) = -x^3 + x^2 + 1 = x \Rightarrow x = 1$$

即 $x = 1$ 是 $f \circ f$ 的唯一不动点. 再由引理可知 $x = 1$ 也是 f 的不动点, 对 $f \circ f$ 求导可得

$$(f \circ f)'(x) = f'(f(x))f'(x) = -3x^2 + 2x$$

将 $x = 1$ 代入就有 $(f'(1))^2 = -1$, 这是不可能的, 故这样的 f 不存在.

16. 设 $x_0 \in (0, 1)$, 有 $f(x_0) = -1$ 且 $f'(x_0) = 0$, 可得

$$\begin{cases} f(1) = f(x_0) + \frac{1}{2}(1-x_0)^2 f''(\alpha_1) \\ f(0) = f(x_0) + \frac{1}{2}x_0^2 f''(\alpha_2) \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} f''(\alpha_1) = \frac{2}{(1-x_0)^2} \\ f''(\alpha_2) = \frac{2}{x_0^2} \end{cases}$$

故

$$\max \{f''(\alpha_1), f''(\alpha_2)\} \geq \frac{2}{(\frac{1}{2})^2} = 8$$

故 $\exists \xi \in (0, 1)$, 使得 $f''(\xi) \geq 8$

- 17.

$$1 = f(1) = \frac{1}{2}f''(0) + \frac{1}{6}f'''(\alpha) \quad (0 < \alpha < 1) \quad (1)$$

$$0 = f(-1) = \frac{1}{2}f''(0) - \frac{1}{6}f'''(\beta) \quad (-1 < \beta < 0) \quad (2)$$

(1) - (2) 可得

$$1 = \frac{1}{6} [f'''(\alpha) + f'''(\beta)] \Rightarrow 6 = f'''(\alpha) + f'''(\beta)$$

故 $\exists \xi \in (-1, 1), f'''(\xi) \geq 3$

18. 若 $g(x)$ 在 (a, b) 中无零点, 则由

$$f(x)g'(x) - g(x)f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$$

可得 $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' \neq 0$, 又 $g(a) \neq 0, g(b) \neq 0$, 而 $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)} = 0$ 故 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' \Big|_{x=\xi} = 0$ 矛盾

8.8.2 第二组参考题

1. $0 < f(x) < |f'(x)|$, 又 $f(x)$ 单调递减, 可知

$$f(x) + f'(x) < 0, \Rightarrow [e^x f(x)]' < 0$$

得 $e^x f(x)$ 单调递减, 故

$$\begin{aligned} & x^2 f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= x^2 e^{-x} \cdot e^x f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \\ &> x^2 e^{-x} \cdot e^{1/x} f\left(\frac{1}{x}\right) - f\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= (x^2 e^{1/x-x} - 1) f\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

设 $g(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}-x} - 1, x \in (0, 1)$ 则

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left[2x + x^2 \left(-\frac{1}{x^2} - 1\right)\right] e^{1/x-x} \\ &= -(x-1)^2 e^{\frac{1}{x}-x} < 0 \end{aligned}$$

故 $g(x)$ 单调递减, $g(x) > g(1) = 0$ 即 $x^2 f(x) - f(1/x) > 0$, 即

$$x f(x) > \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right), x \in (0, 1)$$

2. 数学归纳法

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} \\ \frac{1}{2} f'(0) \end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续, 且 $g^{(1)}(0) = \frac{1}{2} f^{(2)}(0)$

设 $g^{(n-1)}(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $g^{(n-1)}(0) = \frac{1}{n} f^{(n)}(0)$, 又有 $xg(x) = f(x)$, 且 $f(x)$ 在 0 的某个邻域内 n 次可微 $\Rightarrow xg^{(n)}(x) + ng^{(n-1)}(x) = f^{(n)}(x) \Rightarrow g^{(n)}(x) = \frac{f^{(n)}(x) - ng^{(n-1)}(x)}{x}$ 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} g^{(n)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - ng^{(n-1)}(x)}{x} = f^{(n+1)}(0) - ng^{(n)}(0)$$

$$g^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(0)$$

3. (数学归纳法) 当 $n=1$ 时, 显然有 $F^{(k)}(a) = 0, k=0, 1, \dots, n-1$, 假设 $n=N$ 时, 对于 $k=0, 1, \dots, N-1$ 成立 $[(f(a))^N]^{(k)} = 0$; 当 $n=N+1$ 时, $[(f(x))^{N+1}]' = (N+1)(f(x))^N f'(x)$, 故对于 $1 \leq k \leq N$, $[(f(x))^{N+1}]^{(k)} = (N+1) [(f(x))^N f'(x)]^{(k-1)} = (N+1) \sum_{i=0}^{k-1} [(f(x))^N]^{(i)} f^{(k-i)}(x)$, 由归纳假设可得 $[(f(a))^{N+1}]^{(k)} = 0$, 当 $k=0$ 时, $[(f(a))^{N+1}]^{(k)} = 0$, 故对于 $k=0, 1, \dots, n-1, F^{(k)}(a) = 0$

$$\text{反例为: } f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为有理数} \\ 1, & x \text{ 为无理数} \end{cases} \quad n=2, a=0 \text{ 此时 } F(x) = (f(x))^2 = f(x),$$

但是 $F'(x)$ 处处不存在。

4. (1) 数学归纳法, 设 $n=2k$, 当 $k=1$ 时

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

假设为 $k-1$ 时 $P_{2k-2}(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow P_{2k-1}(x)$ 单调递增, 显然 $P_{2k-1}(x)$ 有唯一根, 设为 x_0 , 即

$$1 + x_0 + \dots + \frac{1}{(2k-1)!} x_0^{2k-1} = 0$$

可得

$$P_{2k}(x_0) = \frac{1}{(2k)!} x_0^{2k} > 0 \Rightarrow P_{2k}(x) > 0$$

(2) 从 (1) 可得

(3) 我们已经说明了 $x_n < 0$, 如果说 $\{x_n\}$ 严格递减, 也就是要说明

$$P_{2n+3}(x_n) > 0 \quad n=0, 1, 2, \dots$$

而因为 $P_{2n+1}(x_n) = 0$, 于是只要说明

$$\frac{x_n^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{x_n^{2n+3}}{(2n+3)!} > 0 \implies 1 + \frac{x_n}{2n+3} > 0$$

下面来说明实际上 $x_n > -(2n+2)$, 即比我们需求的更强一些. 要说明 $x_n > -(2n+2)$, 也就是说明 $P_n(-2n-2) < 0$ 即可, 即

$$P_n(-2n-2) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{(-2n-2)^{2k}}{(2k)!} + \frac{(-2n-2)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)$$

因为对每个 $0 \leq k \leq n$ 都有

$$\frac{(-2n-2)^{2k}}{(2k)!} + \frac{(-2n-2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{(-2n-2)^{2k}}{(2k+1)!} (2k+1 - (2n+2)) < 0$$

这就说明了 $\{x_n\}$ 严格递减.

再设 $\{x_n\}$ 有下界 $m < 0$, 于是对任意的 x_n , 都有

$$e^m < e^{x_n} = P_{2n+1}(x_n) + \frac{e^{\xi_n}}{(2n+2)!} x_n^{2n+2}$$

$$\frac{e^{\xi_n}}{(2n+2)!} x_n^{2n+2}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

其中 $\xi_n \in (x_n, 0)$, 所以 $e^{\xi_n} < 1$, 于是

$$0 < e^m < \frac{m^{2n+2}}{(2n+2)!} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

这与 $e^m > 0$ 矛盾, 故 $\{x_n\}$ 没有有限的下界, 则只能 $x_n \rightarrow -\infty (n \rightarrow \infty)$.

(4) 用数学归纳法. 这里我们从 $n=0$ 开始归纳, 当 $n=0$ 时, 当 $x < 0$ 时 $e^x < 1$, 即 $e^x < P_0(x)$, 考虑

$$f(x) = e^x - P_1(x) = e^x - 1 - x$$

对 f 求导可得 $f'(x) = e^x - 1$, 由 $n=0$ 时可知

$$f'(x) = e^x - 1 < 0$$

这说明 $f(x)$ 在 $x < 0$ 时严格递减, 也就是 $f(x) > f(0) = 0$, 即 $e^x > P_1(x)$. 归纳假设当 $n=k$ 时不等式成立, 那么当 $n=k+1$ 时, 先记

$$f(x) = e^x - P_{2k}(x) = e^x - \sum_{i=0}^{2k} \frac{x^i}{i!}$$

对 f 求导可得

$$f'(x) = e^x - \sum_{i=0}^{2k-1} \frac{x^i}{i!} = e^x - P_{2k-1}(x)$$

由归纳假设可知

$$e^x \geq P_{2k-1}(x)$$

那么就有 $f'(x) > 0$, 这说明 $f(x)$ 在 $x < 0$ 时单调递增, 也就是 $f(x) < f(0) = 0$, 即 $e^x < P_{2k}(x)$. 再记

$$g(x) = e^x - P_{2k+1}(x) = e^x - \sum_{i=1}^{2k+1} \frac{x^i}{i!}$$

对 g 求导再由 $e^x < P_{2k}(x)$ 可知 $g'(x) < 0$, 那么 $g(x) > g(0)$ 即 $e^x > P_{2k+1}(x)$. 归纳结束. 上述不等式对一切 $n \in \mathbb{N}^*$ 成立.

(5) 先用数学归纳法证明左侧不等式. 当 $n=0$ 时, $e^x > 1 (x > 0)$, 归纳假设当 $n=k$ 时 $e^x > P_k(x)$, 那么当 $n=k+1$ 时, 记

$$f(x) = e^x - P_{k+1}(x)$$

对 f 求导可得 $f'(x) = e^x - P_k(x) > 0$, 即有 $f(x) > f(0) = 0$, 也就是 $e^x > P_{k+1}(x)$. 归纳结束. 再证明右侧不等式, 仍然使用数学归纳法. 当 $n=1$ 时有 $1+x = 1+x$. 归纳假设当 $n=k$ 时不等式成立. 那么当 $n=k+1$ 时, 记

$$f(x) = P_{k+1}(x) - \left(1 + \frac{x}{k+1}\right)^{k+1}$$

对 f 求导可得

$$f'(x) = P_k(x) - \left(1 + \frac{x}{k+1}\right)^n > P_k(x) - \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k > 0$$

即 $f(x) > f(0) = 0$, 这说明

$$P_{k+1} \geq \left(1 + \frac{x}{k+1}\right)^{k+1}$$

归纳结束, 上述不等式对一切 $n \in \mathbb{N}^*$ 成立.

(6) (Case 1) 当 $x = 0$ 时这是 e 的定义, 显然成立.

(Case 2) 当 $x > 0$ 时. 首先我们知道

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n/x \cdot x} = e^x$$

根据 (5) 与夹逼定理可知

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = P_n(x) = e^x$$

(Case 3) 当 $x < 0$ 时, 由 (4) 知对每一个 $x < 0$, 都有

$$\begin{aligned} |e^x - P_{2n}(x)| &\leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \\ |e^x - P_{2n+1}(x)| &\leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

这说明了当 $x < 0$ 时

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

5. 由 $x_{n+1} - x_n = -\frac{1}{2n}(x_n - x_{n-1})$ 得

$$x_{n+1} - x_n = \left(-\frac{1}{2n}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2n-2}\right) \cdots \left(-\frac{1}{2}\right) (x_1 - x_0) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n!} (b-a)$$

可得

$$\sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^i \frac{1}{i!} (b-a) = (b-a) \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \left(-\frac{1}{2}\right)^i = x_{n+1} - a$$

故

$$x_{n+1} = a + (b-a) \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \left(-\frac{1}{2}\right)^i \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = a + (b-a)e^{-\frac{1}{2}}$$

6. 由 $x_0 < y_0$ 归纳可得 $0 < x_n < y_n \leq \frac{\pi}{2}$, 由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$ 故存在 s 使得 $y_s < x_0$, 归纳可得 $y_{s+n} < x_n$, 则

$$1 > \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdots \frac{x_{n-s}}{y_n} > \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdots \frac{x_{n-s+1}}{x_{n-s}}$$

而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$, 由夹逼准则可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$$

7. $ax^2 + bx + c$ 对 $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ 做带余除法, 可化为如下形式

$$k \frac{dx + e}{x^2 + ux + v} + a_1x + a_2$$

根据拐点的意义只需研究

$$\frac{dx + e}{x^2 + ux + v} = d \frac{x + \frac{e}{d}}{x^2 + ux + v}$$

再做一步平移化为如下形式:

$$k \frac{x}{x^2 + ux + v}$$

那我们只需证明对 $y = \frac{x}{x^2 + ux + v}$ 成立即可

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x^2 + ux + v - x(2x + u)}{(x^2 + ux + v)^2} \\ &= \frac{-x^2 + v}{(x^2 + ux + v)^2} \\ y'' &= \frac{-2x(x^2 + ux + v)^2 - 2(x^2 + ux + v)(2x + u)(-x^2 + v)}{(x^2 + ux + v)^4} \\ &= \frac{-2x^3 - 2ux^2 - 2vx - 2(-2x^3 + 2vx - ux^2 + uv)}{(x^2 + ux + v)^3} \\ &= 2 \frac{x^3 - 3vx - uv}{(x^2 + ux + v)^3} \end{aligned}$$

设三个拐点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, 其中 $x^3 - 3vx - uv = 0$ 有三个解 $x = x_1, x_2, x_3$, 由 Vieta 定理可知

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -3v \\ x_1x_2x_3 = uv \end{cases}$$

过 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 的直线为 $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$, 只需证

$$y_3 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1) + y_1$$

即证

$$\frac{\frac{x_3}{x_3^2 + ux_3 + v} - \frac{x_1}{x_1^2 + ux_1 + v}}{\frac{x_2}{x_2^2 + ux_2 + v} - \frac{x_1}{x_1^2 + ux_1 + v}} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}$$

即证

$$\frac{(x_2^2 + ux_2 + v)(x_1^2 + ux_1 + v)}{(x_3^2 + ux_3 + v)(x_1^2 + ux_1 + v)} \cdot \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x_1x_3 - v}{x_1x_2 - v} = \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_2}$$

即证

$$\frac{(x_2^2 + ux_2 + v)}{x_3^2 + ux_3 + v} = \frac{x_1x_2 - v}{x_1x_3 - v}$$

即证

$$(x_1x_2 - v)(x_3^2 + ux_3 + v) = (x_1x_3 - v)(x_2^2 + ux_2 + v)$$

$$\begin{aligned} &x_1x_2x_3^2 + ux_1x_2x_3 + vx_1x_2 - vx_3^2 - uvx_3 - v^2 \\ &= x_1x_2^2x_3 + ux_1x_2x_3 + vx_1x_3 - vx_2^2 - uvx_2 - v^2 \end{aligned}$$

化简得

$$\begin{aligned} &uvx_3 + vx_1x_2 - vx_3^2 - uvx_3 \\ &= uvx_2 + vx_1x_3 - vx_2^2 - uvx_2 \end{aligned}$$

即证

$$v(x_1 + x_2 + x_3)(x_2 - x_3) = 0$$

由 Vieta 定理可知上式成立。

8. \Leftarrow : 令 $\lambda = \frac{1}{2}$ 可得

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) &= f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \\ &= \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad (\forall x_1, x_2 \in I) \end{aligned}$$

\Rightarrow : 先证 $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in I$, 有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \quad (1)$$

$\forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in I$, 有

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) &= f\left(\frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2}}{2}\right) \\ &\leq \frac{f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)}{2} \\ &\leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)}{4} \end{aligned}$$

依次可得对任意 k 都有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^k}}{2^k}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{2^k})}{2^k}$$

若 (1) 式对 $n = k + 1$ 成立时, 必对 $n = k$ 也成立, 记 $A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}$, 则 $x_1 + x_2 + \dots + x_k = kA$, 所以

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k + A}{k + 1}$$

若 (1) 式对 $n = k + 1$ 成立, 故

$$\begin{aligned} f(A) &= f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k + A}{k + 1}\right) \\ &\leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k) + f(A)}{k + 1} \end{aligned}$$

不等式两边同乘以 $k + 1$, 减去 $f(A)$, 最后除以 k . 注意

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}$$

我们得到

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k)}{k}$$

此式表示 (1) 式对 $n = k$ 成立. 又 2^k 趋于无穷, 故可得 (1) 式成立

下面再证明: $\forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in (0, 1)$, 有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (2)$$

设 $x_1, x_2 \in I$ 为任意两点, 为了证明 (2) 式对于任意实数 $\lambda \in (0, 1)$ 成立. 我们先来证

明: (2) 式当 λ 为有理数 $\lambda = \frac{m}{n} \in (0, 1)$ ($m < n$ 为自然数) 时成立. 事实上:

$$\begin{aligned} f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] &= f\left[\frac{m}{n}x_1 + \left(1 - \frac{m}{n}\right)x_2\right] \\ &= f\left[\frac{mx_1 + (n - m)x_2}{n}\right] \\ &= f\left[\frac{\overbrace{x_1 + \cdots + x_1}^{m\uparrow} + \overbrace{x_2 + \cdots + x_2}^{n-m\uparrow}}{n}\right] \\ &= \frac{\overbrace{f(x_1) + \cdots + f(x_1)}^{m\uparrow} + \overbrace{f(x_2) + \cdots + f(x_2)}^{n-m\uparrow}}{n} \\ &= \frac{mf(x_1) + (n - m)f(x_2)}{n} \\ &= \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \end{aligned}$$

λ 为有理数的情况获证. 若 $\lambda \in (0, 1)$ 为无理数, 则存在有理数 $\lambda_n \in (0, 1)$ ($n = 1, 2, \dots$) 使得 $\lambda_n \rightarrow \lambda$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时) 从而由 $f(x)$ 的连续性,

$$\begin{aligned} f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] &= f\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} [\lambda_n x_1 + (1 - \lambda_n)x_2]\right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f[\lambda_n x_1 + (1 - \lambda_n)x_2] \end{aligned}$$

对于有理数 $\lambda_n \in (0, 1)$, 上面已证明有

$$f[\lambda_n x_1 + (1 - \lambda_n)x_2] \leq \lambda_n f(x_1) + (1 - \lambda_n)f(x_2)$$

此式中令 $n \rightarrow \infty$ 取极限, 联系上式, 有

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

即 (2) 式对任意无理数 $\lambda \in (0, 1)$ 也成立. 证毕

9. 由 f 至多只有第一类间断点, 可得每一点都存在有限得左右极限, 则 $\forall x \in (a, b)$, 有

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} < \frac{f\left(x + \frac{1}{2}(b - x)\right) - f(x)}{\frac{1}{2}(b - x)}, \quad \forall y \in (a, x)$$

且 $\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ 关于 y 在 (a, x) 单调递增, 可得 $\lim_{y \rightarrow x^-} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ 存在且有限可得 $\lim_{y \rightarrow x^-} (f(y) - f(x)) = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow x^-} f(y) = f(x)$ 类似可得 $\lim_{y \rightarrow x^+} f(y) = f(x) \Rightarrow f$ 在 (a, b) 上连续。

10. $\forall x \in (a, b)$, 有

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} < \frac{f\left(x + \frac{1}{2}(b - x)\right) - f(x)}{\frac{1}{2}(b - x)}, \quad \forall y \in (a, x)$$

且 $\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ 关于 y 在 (a, x) 单调递增, 可得 $\lim_{y \rightarrow x^-} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ 存在且有限可得 $\lim_{y \rightarrow x^-} (f(y) - f(x)) = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow x^-} f(y) = f(x)$ 类似可得 $\lim_{y \rightarrow x^+} f(y) = f(x) \Rightarrow f$ 在 (a, b) 上连续。

11. 考虑区间 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, 在该区间上有

$$|f''(x)| \leq |f(x)| + |f'(x)| \quad \forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

则

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \left| \int_0^x f''(t) dt \right| \leq \int_0^x |f''(t)| dt \\ &\leq \int_0^x (|f(t)| + |f'(t)|) dt = \int_0^x |f(t)| dt + \int_0^x |f'(t)| dt \quad (1) \end{aligned}$$

又 $|f(x)| = \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \int_0^x |f'(t)| dt$ 可得

$$(1) \text{式} \leq (x+1) \int_0^x |f'(t)| dt$$

设 $[0, x]$ 内使得 $f'(x)$ 在 $[0, x]$ 上最大, 可得

$$|f'(\xi)| \leq (\xi+1) \int_0^\xi |f'(t)| dt \leq (\xi+1)\xi |f'(\xi)| \leq \frac{3}{4} |f'(\xi)|$$

故 $|f'(\xi)| = 0 \Rightarrow |f'(x)| = 0$, 可得 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上 $f'(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$, 类似可得 $(-1, 1)$ 上, $f(x) \equiv 0$

12. 若 $f'(x)$ 不变号, 则 $f(x)$ 单调, 假设 $f'(x)$ 变号, 则 $\exists \xi \in I$, 使得 $f'(\xi) = 0$, 且不妨设在 ξ 的左右邻域内, $f'(x)$ 是异号的, 记左邻域为 (a, ξ) , 右邻域为 (ξ, b) , 则存在 $\alpha \in (a, \xi), \beta \in (\xi, b)$, 使得 $f(\alpha) = f(\beta)$, 可得

$$f'(\alpha) = g(f(\alpha)) = g(f(\beta)) = f'(\beta)$$

但是 $f'(\alpha), f'(\beta)$ 异号, 矛盾。

13. 由 $f'(x) > 0, f''(x) < 0$ 可得 $f'(x) > f'(0), \forall x < 0$, 故

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt < f(0) + xf'(0)$$

可得 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, 矛盾

14. 若存在一点 $x \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x)$ 中有一个为 0, 则不等式成立。若不存在这样的 x , 则 $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x)$ 均不变号, 不妨设 $f'''(x) > 0$, 不然考虑 $-f(x)$, 即可。

$f'''(x) > 0 \Rightarrow f'(x)$ 是下凸函数, 则固定 $x_0 \in \mathbb{R}$, 有

$$f'(x) \geq f''(x_0)(x - x_0) + f'(x_0)$$

则 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 有一个为 $+\infty$, 故 $f'(x) > 0$

类似可得, 若 $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x) > 0$, 若 $f''(x) < 0 \Rightarrow -f''(x) > 0 \Rightarrow -f(x) > 0 \Rightarrow f(x) < 0$

故 $f'''(x)$ 与 $f'(x)$ 同号, $f''(x)$ 与 $f(x)$ 同号。故此时任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x)f'(x)f''(x)f'''(x) \geq 0$

15. (Step 1) 先证明一个引理: 如果多项式 p 使得 $p \pm p' \geq 0$, 那么必有 $p \geq 0$. 因为 $p \pm p'$ 仍是一个多项式, 如果 $p \pm p' \geq 0$ 恒成立, 那么说明 $p \pm p'$ 一定为一个首项系数为正

的偶次多项式, 而这个最高次只能由 p 提供, 也就是说

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = +\infty$$

那么可知 $p(x)$ 在 \mathbb{R} 上必有最小值, 设最小值点为 x_0 , 那么就有 $p'(x_0) = 0$, 于是

$$p(x) \geq p(x_0) \pm p'(x_0) \geq 0$$

(Step 2) 再考虑

$$p''' - p'' - p' + p = (p - p'') - (p' - p''') \geq 0$$

由引理可知 $p - p'' \geq 0$ 恒成立, 也就是

$$(p - p') + (p' - p'') \geq 0$$

又可以得到 $p - p' \geq 0$, 再次使用引理可知 $p \geq 0$.

16. 令 $p(x) = P(x), q(x) = Q(x)$, 对 $q(x)$ 进行因式分解可以得到

$$\begin{aligned} q(x) &= p(x)p'(x) + x^2p(x)p'(x) + xp(x)^2 + xp'(x)^2 \\ &= p'(x)(p(x) + xp'(x)) + xp(x)(p(x) + xp'(x)) \\ &= (p'(x) + xp(x))(p(x) + xp'(x)) \end{aligned}$$

于是 $q(x) = 0$ 的根的集合为两个因式的根的集合的并. 故记 $f(x) = e^{x^2/2}p(x), g(x) = xp(x)$, 于是

$$f'(x) = e^{x^2/2}(p'(x) + xp(x)), \quad g'(x) = p(x) + xp'(x)$$

故分别分析 f' 和 g' 的根的情况. 设 $p(x) = 0$ 大于 1 的根为 $1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, 那么 $f(x) = 0$ 大于 1 的根也为 x_1, x_2, \dots, x_n , 那么对

$$[x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

这 $n-1$ 个区间使用 Rolle 定理可知存在 $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$, 其中 $i = 1, 2, \dots, n-1$, 使得 $f'(\xi_i) = 0$, 即 $f'(x) = 0$ 至少有 $n-1$ 个根. 再考虑 $g(x)$, 可知 $g(x) = 0$ 的根至少为 $0, x_1, x_2, \dots, x_n$, 那么对

$$[0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

这 n 个闭区间使用 Rolle 定理可知存在 $\eta_i \in (x_i, x_{i+1})$, 其中 $0 = 0, i = 0, 1, \dots, n$, 使得 $g'(\eta_i) = 0$ 可知 $g'(x) = 0$ 至少有 n 个根. 我们再来说明对任意的 $i = 1, 2, \dots, n, \xi_i \neq \eta_i$. 如果存在 $1 \leq i \leq n$ 可以使 $\xi_i = \eta_i = r$, 那么由

$$rp(r) + p'(r) = 0$$

可知 $p'(r) = -rp(r)$, 把它代入 $rp'(r) + p(r) = 0$, 可以知道

$$p(r)(1 - r^2) = 0$$

由于 $1 - r^2 \neq 0$, 所以有 $p(r) = 0$, 这与 x_i 和 x_{i+1} 为 $p(x) = 0$ 的相邻零点相矛盾. 故对任意的 $1 \leq i \leq n$ 都有 $\xi_i \neq \eta_i$. 这样就说明 $q(x) = 0$ 至少有 $2n-1$ 个零点.

17. 考虑方程 $a^x - x = 0 \Leftrightarrow x \ln a - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln a = \frac{\ln x}{x}$, 令 $f(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 当 $f(x) > 0 \Rightarrow x < e$, $f(e) = \frac{1}{e}$ 又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 可

得若 $\ln a \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$, 即 $a \in \left(1, e^{\frac{1}{e}}\right)$ 时, 方程有两个解; 若 $\ln a = \frac{1}{e}$, 即 $a = e^{\frac{1}{e}}$, 方程有一个解; 若 $\ln a \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$, 即 $a > e^{\frac{1}{e}}$, 方程无解。

18. (1) 设 $G(x) = g(x) - x$, $G'(x) = (\ln a)^2 a^{a^x+x} - 1$, 令 $h(x) = a^x + x$, $h'(x) = a^x \ln a + 1$ 单调递增, 存在唯一的 x_0 使得 $h'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{-\ln(-\ln a)}{\ln a} = \log_a \left(-\frac{1}{\ln a}\right)$, 则 $h(x) \geq h(x_0)$, $G'(x) \leq G'(x_0)$, 可得 $G'(x_0) \leq 0 \Leftrightarrow 1 > a \geq e^{-e}$, 故 $G(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单减, 又 $G(-\infty) = +\infty$, $G(+\infty) = -\infty$, 故 $G(x)$ 存在唯一的零点, 即 $g(x)$ 存在唯一的不动点

(2) 由于 $g(0) = a^1 > 0$, $g(1) = a^a = e^{a \ln a} < e^0 = 1$, 故 $0, 1$ 均不是 $g(x)$ 的不动点
若 x_0 是 $g(x)$ 的不动点 $\Leftrightarrow a^{a^{x_0}} = x_0 \Leftrightarrow a^{x_0 \ln a} = \ln x_0 \Leftrightarrow \frac{a^{x_0 \ln a}}{\ln x_0} = 1$
令 $G(x) = \frac{a^x \ln a}{\ln x}$, $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, 故

$$G'(x) = \frac{a^x (\ln a)^2 \left(x \ln x - \frac{1}{\ln a}\right)}{x \ln^2 x}, \quad x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

当 $x > 1$ 时, $x \ln x - \frac{1}{\ln a} > -\frac{1}{\ln a} > 0$, 故 $G'(x) > 0$, 从而 $G(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上严格递增, 并且注意到, 当 $x > 1$ 时, $G(x) < 0 < 1$, 故 $G(x) = 1$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 上无解。

当 $0 < x < 1$ 时, 令 $\varphi(x) = x \ln x$, 于是 $\varphi'(x) = 1 + \ln x$, 令 $\varphi'(x) = 0$ 得 $x = e^{-1}$, 于是 $\varphi(x)$ 在 $(0, e^{-1})$ 上递减, 在 $(e^{-1}, +\infty)$ 上递增, 且取最小值 $\varphi(e^{-1}) = -e^{-1}$ 由于 $\ln a < -e$ 即 $\frac{1}{\ln a} > -e^{-1}$ 从而 $\varphi(x) = \frac{1}{\ln a}$ 有两个零点 x_1, x_2 , 满足 $x_1 < e^{-1} < x_2$, 从而可知 $G(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上单增, 在 (x_1, x_2) 单减, 在 $(x_2, 1)$ 单增, 又

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} G(x) = +\infty$$

故只需证明 $G(x_1) > 1 > G(x_2)$ 即可。

注意到 x_1, x_2 均满足 $x_1 \ln x_1 = \frac{1}{\ln a} = x_2 \ln x_2$, 故

$$G(x_1) = \frac{a^{x_1} \ln a}{\ln x_1} = \frac{a^{x_1}}{x_1 \ln^2 x_1}, \quad G(x_2) = \frac{a^{x_2}}{x_2 \ln^2 x_2}$$

只需证明 $a^{x_1} > x_1 \ln^2 x_1$ 与 $a^{x_2} < x_2 \ln^2 x_2$

即证明

$$x_1 \ln a > \ln x_1 + 2 \ln |\ln x_1| \text{ 与 } x_2 \ln a < \ln x_2 + 2 \ln |\ln x_2|$$

又 $x_1 < e^{-1}$, 故 $|\ln x_1| = -\ln x_1 > 1$, $|\ln x_2| = -\ln x_2 \in (0, 1)$ 为此只要证明 $-\frac{1}{t} > -t + 2 \ln t$ 对 $t \in (1, +\infty)$ 成立, 及 $-\frac{1}{t} < -t + 2 \ln t$ 对 $t \in (0, 1)$ 成立即可。

令 $\eta(t) = t - \frac{1}{t} - 2 \ln t$, $t \in (0, +\infty)$, 则 $\eta'(t) = \frac{(t-1)^2}{t^2} \geq 0$, 故 $\eta(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 严格递增, 又 $\eta(1) = 0$, 故当 $t > 1$ 时, 有 $\eta(t) > 0$, 当 $0 < t < 1$ 时, 有 $\eta(t) < 0$, 因此结论成立。综上, $g(x)$ 有三个不动点。

19. 若 $\theta = 0$ 或 π 为方程的根, 则 $b = 0$; 若 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$ 为方程的根, 则 $a = 0$, 下设 $a \neq 0$, $b \neq 0$, 于是 $0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ 均不是方程的根, 且对应的 $\cos \theta$ 与 $\sin \theta$ 均不

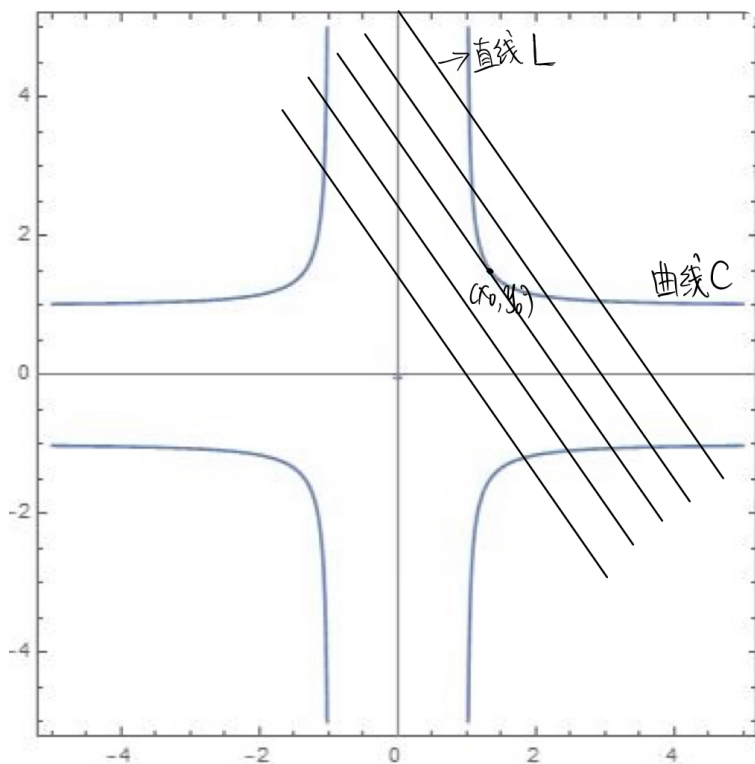


图 8.2

为 0, 令 $x = \frac{1}{\cos \theta}, y = \frac{1}{\sin \theta}$, 于是原方程等价于方程组

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1 \end{cases}$$

设 $L: ax + by = 1, C: \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$, 即求两者的交点的个数, 如图 8.2. 于是 L 在两轴的截距分别为 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$, 根据对称性, 不妨设 $a > 0, b > 0$, 此时 L 与 C 在第二和第四象限中恒有交点. 考虑在第一象限, 当 L 与 C 相切时, 恰好有三个交点, 若 L 与 C 不相交, 则有两个交点; 若 L 与 C 相交但不相切, 即在第一象限有两个交点, 则总共有四个交点. 因此, 相切便是临界情况, 设 L 与 C 在 (x_0, y_0) 处相切, 对 C 求导可得 $-\frac{2}{x^3} - \frac{2}{y^3}y'$, 可得 $y' = -\frac{y^3}{x^3}$, 又 C 在 (x_0, y_0) 处切线的斜率等于 L 的斜率 $-\frac{a}{b}$, 故 $ax_0^3 = by_0^3 \Rightarrow a^{\frac{2}{3}}x_0^2 = b^{\frac{2}{3}}y_0^2 \Rightarrow y_0^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}}x_0^2$, 故 $y_0^2 = \frac{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow x_0 = a^{-\frac{1}{3}}\sqrt{A}, y_0 = b^{-\frac{1}{3}}\sqrt{A}$, 其中 $A = a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$, 又

$$ax_0 + by_0 = a^{\frac{2}{3}}\sqrt{A} + b^{\frac{2}{3}}\sqrt{A} = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})\sqrt{A} = (\sqrt{A})^3$$

故当 $A = 1$, 即 $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} = 1$ 时, 在第一象限 L 与 C 相切, 此时有三个交点; 当 $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} > 1$ 时, 在第一象限 L 与 C 无交点, 故总共只有两个交点; 当 $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} < 1$ 时, 在第一象限 L 与 C 有两个交点, 故总共有四个交点.

20. 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 参数方程为 $r(\theta) = (a \cos \theta, b \sin \theta), \theta \in [0, 2\pi)$, 切向量方程为 $r'(\theta) = (-a \sin \theta, b \cos \theta)$, 定点设为 (x_0, y_0) , 此点连接椭圆上一点为椭圆

法向量等价于此连线与切向量所在直线垂直，即

$$\frac{y_0 - b \sin \theta}{x_0 - a \cos \theta} \cdot \frac{b \cos \theta}{-a \sin \theta} = -1$$

化简得

$$\frac{x_0 a}{a^2 - b^2} \sin \theta + \frac{-y_0 b}{a^2 - b^2} \cos \theta - \sin \theta \cos \theta = 0$$

由上题可得，解的个数与

$$A = \left(\frac{x_0 a}{a^2 - b^2} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y_0 b}{a^2 - b^2} \right)^{\frac{2}{3}} - 1$$

的符号有关。

第9章 不定积分

9.1 不定积分的计算方法

9.1.1 练习题

1. (1) 原式 = $\int \frac{dx^2}{1+x^4} = \arctan x^2 + c$

(2) 令 $x = \sin^2 \theta$ $dx = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$ 则原式 = $\int 2d\theta = 2\theta + c = 2 \arcsin \sqrt{x} + c$

(3) 原式 = $x \ln(1+x^2) - \int \frac{x \cdot 2x}{1+x^2} dx = x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x + c$

(4) 原式 = $\int \frac{2 \arctan \sqrt{x}}{1+x} d\sqrt{x} = 2 \int \arctan \sqrt{x} d \arctan \sqrt{x} = \arctan^2 \sqrt{x} + c$

(5) 原式 $\int \frac{1-e^x+e^x}{e^x-1} dx = -x + \int \frac{de^x}{e^x-1} = -x + \ln|e^x-1| + c$

(6) 原式 = $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1+x^2)^2} dx^2 = -\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1+x^2)} + \int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$, 令 $x = \tan \theta$ 则

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \cos \theta d\theta = \sin \theta + c$$

故原式 = $-\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1+x^2)} + \sin(\arctan x) + C$

(7) 原式 = $\int \frac{xe^x+e^x-e^x}{(1+x)^2} dx = \int \frac{-e^x}{(1+x)^2} dx + \int \frac{e^x}{1+x} dx = \int \frac{-e^x}{(1+x)^2} dx + \frac{e^x}{1+x} + \int \frac{e^x}{(1+x)^2} dx = \frac{e^x}{1+x} + C$

(8) 原式 = $\int \frac{e^x+xe^x}{xe^x(1+xe^x)} dx = \int \frac{dxe^x}{xe^x(1+xe^x)} = \ln xe^x - \ln(1+xe^x) + c$

(9) 原式 = $x \ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{2x \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx = x \ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2} \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + \int \frac{2\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} dx = x \ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2} \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2x + c$

(10) 令 $x = \tan \theta$, 则

$$\text{原式} = \int e^\theta \cos \theta d\theta = \frac{e^\theta(\sin \theta + \cos \theta)}{2} + c = \frac{e^{\arctan x}(\sin \arctan x + \cos \arctan x)}{2} + c$$

2. (1) 令 $M(x) = \int \frac{dx}{1+x^2+x^4}$ $N(x) = \int \frac{x^2}{1+x^2+x^4} dx$ 则

$$M(x) - N(x) = \int \frac{1-x^2}{1+x^2+x^4} dx = -\int \frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-1} = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} + c$$

$$M(x) + N(x) = \int \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4} dx = \int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})+3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{3}x} + c$$

故

$$M(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{3}x} - \frac{1}{4} \ln \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} + c$$

$$(2) \text{ 令 } M(x) = \int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx, N(x) = \int \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx \text{ 则}$$

$$M(x) + N(x) = x + c$$

$$M(x) - N(x) = \ln(e^x + e^{-x}) + c$$

故

$$M(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \ln(e^x + e^{-x}) + c$$

$$(3) \text{ 令 } M(x) = \int \frac{\sin x}{a \sin x + b \cos x} dx \quad N(x) = \int \frac{\cos x}{a \sin x + b \cos x} dx \text{ 则}$$

$$aM(x) + bN(x) = x + c$$

$$aN(x) - bM(x) = \ln|a \sin x + b \cos x| + c$$

$$\text{故原式} = \frac{b}{a^2 + b^2}(ax - b \ln|a \sin x + b \cos x|) + \frac{a}{a^2 + b^2}(bx + a \ln|a \sin x + b \cos x|) + c =$$

$$\frac{2ab}{a^2 + b^2}x - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \ln|a \sin x + b \cos x| + c$$

$$(4) \text{ 原式} = \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+x} - \frac{x-2}{1-x+x^2} dx = \frac{1}{3} \ln(1+x) - \frac{1}{3} \int \frac{x-2}{1-x+x^2} dx, \text{ 令 } M(x) =$$

$$\int \frac{1}{1-x+x^2} dx, \quad N(x) = \int \frac{x}{1-x+x^2} dx \text{ 则}$$

$$M(x) - 2N(x) = \int \frac{1-2x}{1-x+x^2} dx = \int \frac{d(x-x^2)}{1-x+x^2} = -\ln(1-x+x^2) + c$$

$$M(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c$$

$$\text{故原式} = \frac{1}{3} \ln(1+x) - \frac{\sqrt{3}}{4} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6} \ln(1-x+x^2) + c$$

3.

$$\int \cos^4 x - \sin^4 x dx = \int \cos^2 x - \sin^2 x dx = \sin 2x + c$$

$$\int \cos^4 x + \sin^4 x dx = \int 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x dx = \int -\frac{1}{2} \sin^2 2x dx$$

$$= \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \sin 4x + C$$

4. (1) 由于

$$I_n = \int \sin^n x dx = - \int \sin^{n-1} x d \cos x = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

故

$$I_n = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

(2) 由于

$$I_n = \int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x \sin^2 x d \tan x = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x \sin^2 x - \frac{2}{n-1} \int \tan^{n-2} x \sin^2 x dx$$

$$\triangleq \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x \sin^2 x - \frac{2}{n-1} J_{n-2}$$

$$\text{故 } J_{n-2} = I_{n-2} - J_{n-4}$$

(3) 由于

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sec^n x dx = \tan x \sec^{n-2} x - (n-2) \int \sec^{n-2} x \tan^2 x dx \\ &= \tan x \sec^{n-2} x - (n-2)(I_n - I_{n-2}) \end{aligned}$$

故

$$I_n = \frac{1}{n-1} \tan x \sec^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$$

(4) 由于

$$I_n = \int \frac{1}{x^n \sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{d\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}} + (n+1) \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+2}} dx$$

又记

$$J_n = \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^n} dx$$

则 $J_n = I_n + I_{n+2}$ 故

$$I_n = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}} + (n+1)(I_{n+2} + I_n) \Rightarrow I_n = \frac{-\sqrt{1+x^2}}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$$

5. (1) 原式 $= x f'(x) - f(x) + c$

(2) 原式 $= \frac{1}{2} f(2x) + c$

6. (1) 由于

$$\begin{aligned} I(m, n) &= - \int \cos^m x \sin^{n-1} x d \cos x \\ &= - \frac{1}{m+1} \cos^{m+1} x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{m+1} \int \cos^{m+2} x \sin^{n-2} x dx \\ &= - \frac{1}{m+1} \cos^{m+1} x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{m+1} (I(m, n-2) - I(m, n)) \end{aligned}$$

故

$$I(m, n) = - \frac{1}{m+n} \cos^{m+1} x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{m+n} I(m, n-2)$$

(2) 由于

$$\begin{aligned} I(n, n) &= \frac{1}{2^n} \int \sin^n 2x dx = \frac{-1}{2^{n+1}} \int \sin^{n-1} 2x d \cos 2x \\ &= - \frac{1}{2^{n+1}} \sin^{n+1} 2x \cos 2x + \frac{n-1}{2^n} \int \sin^{n-2} 2x \cos^2 2x dx \\ &= - \frac{1}{2^{n+1}} \sin^{n-1} 2x \cos 2x + \frac{n-1}{2^n} (2^{n-2} I(n-2, n-2) - 2^n I(n, n)) \end{aligned}$$

故

$$I(n, n) = - \frac{1}{n2^{n+1}} \sin^{n-1} 2x \cos 2x + \frac{n-1}{4n} I(n-2, n-2)$$

9.2 几类可积函数

9.2.1 练习题

1. (1) 原式 $= \int \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1} dx = 2 \ln|x+2| - \ln|x+1| + c$

$$(2) \text{ 原式} = \int \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2} dx = \ln|x| + \arctan x + c$$

$$(3) \text{ 原式} = \int \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} dx = \arctan x + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + C$$

$$(4) \text{ 原式} = \int \frac{5}{x^2+2} - \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{5}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} - \arctan x + c$$

2. (1) 令 $t = x^2$ 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= -\frac{1}{2} \int \frac{t^2-1}{t^4+1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} - \frac{\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} dt \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t^2 - \sqrt{2}t + 1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \right| + C \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 原式} = \frac{1}{a} \int \frac{1}{x} - \frac{x^{n-1}}{x^n+a} dx = \frac{1}{a} \ln|x| - \frac{1}{an} \ln|x^n+a| + C$$

$$(3) \text{ 原式} = -\frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} - \frac{x+3}{x^2+3} dx = -\frac{1}{4} \ln|x+1| + \frac{1}{8} \ln|x^2+3| + \frac{\sqrt{3}}{4} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

$$(4) \text{ 原式} = \int \frac{x+1-2}{(x^2+2x+3)^2} dx = -\frac{1}{2(x^2+2x+3)} - 2 \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} \quad \text{令 } I_1 = \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{x}{x^2+2x+3} + 2 \int \frac{x^2+x}{(x^2+2x+3)^2} dx \\ &= \frac{x}{x^2+2x+3} + 2I_1 - 2 \int \frac{x+3}{(x^2+2x+3)^2} dx \end{aligned}$$

又

$$\int \frac{1}{(x^2+2x+3)^2} dx = \frac{1}{4(x^2+2x+3)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + c$$

代入原式可得结果

$$(5) \text{ 原式} = \int \frac{(x-2)^2 + 5(x-2) + 7}{(x-2)^{10}} dx = -\frac{1}{7(x-2)^7} - \frac{5}{8(x-2)^8} - \frac{7}{9(x-2)^9} + C$$

$$(6) \text{ 原式} = x + \int \frac{5x^2-6x+1}{x(x^2-5x+6)} dx = x + \int \frac{1}{6x} - \frac{9}{2(x-2)} + \frac{28}{3(x-3)} dx = x + \frac{1}{6} \ln|x| - \frac{9}{2} \ln|x-2| + \frac{28}{3} \ln|x-3| + c$$

$$\begin{aligned} (7) \text{ 原式} &= \int \frac{1}{3(x^2+1)} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{1}{3}}{x^2 + \sqrt{3}x + 1} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{1}{3}}{x^2 - \sqrt{3}x + 1} dx \\ &= \frac{1}{3} \arctan x + \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x^2 + \sqrt{3}x + 1}{x^2 - \sqrt{3}x - 1} \right| + \frac{1}{6} \arctan(2x + \sqrt{3}) + \frac{1}{6} \arctan(2x - \sqrt{3}) + C \end{aligned}$$

$$(8) \text{ 原式} = \int \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{3(x-1)} + \frac{2x+4}{3(x^2+x+1)} dx = -\frac{1}{x-1} - \frac{2}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{3} \ln|x^2+x+1| + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

$$3. (1) \text{ 原式} = \int \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \tan \frac{x}{2} + c$$

(2) 令 $t = \cos x$ 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{dt}{(1-t^2)t^4} = \int \frac{1}{t^2-1} - \frac{t^2+1}{t^4} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + \frac{1}{3 \cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} + C \end{aligned}$$

(3) 令 $t = \tan x$ 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{dt}{(1+t^2)(2+t^2)} = \arctan t + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + C \\ &= x + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C \end{aligned}$$

(4) 令 $t = \cos x$ 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int -\frac{(t^2-1)^2}{t^8} dt = \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{5t^5} + \frac{1}{7t^7} + C \\ &= \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{5 \cos^5 x} + \frac{1}{7 \cos^7 x} + C \end{aligned}$$

(5) 令 $t = \tan \frac{x}{2}$ 则

$$\text{原式} = \int \frac{\cos x}{(1+\cos x)^2} dx = \int \frac{1-t^2}{2} dt = \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \tan^3 \frac{x}{2} + c$$

(6)

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{\sin^2 x \cos^2 x - \sin^3 x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{4} \sin^2 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \cos 2x}{\cos 2x} dx \\ &= -\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \ln \left| \frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x} \right| + \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| - \frac{1}{4} \cos 2x + c \end{aligned}$$

(7)

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \int \frac{d \sin^2 x}{1+\sin^4 x} = \frac{1}{2} \arctan (\sin^2 x) + c$$

(8) 令 $t = \tan x$ 则

$$\text{原式} = \int \frac{dt}{\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)^2} = \int \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{t^4} dt = \tan x - \frac{2}{\tan x} - \frac{1}{3 \tan^3 x} + C$$

4. 令 $t = \tan \frac{x}{2}$ 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (1-r^2) \int \frac{2}{(1+r^2)(1+t^2) - 2r(1-t^2)} dt \\ &= \frac{1+r}{1-r} \int \frac{2dt}{1 + \left(\frac{1+r}{1-r}t\right)^2} \\ &= 2 \arctan \left(\frac{1+r}{1-r} \tan \frac{x}{2} \right) + c \end{aligned}$$

5. (1) 用计算机算不出来, 可能没有初等原函数。

(2) 令 $t = \sqrt{2x^2+3}$ 则

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\frac{t^2-3}{2}} = \int \frac{dt}{t^2-3} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right| + c$$

$$(3) \text{ 原式} = \int \sqrt{\frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x}} dx, \text{ 令 } y = \arcsin \frac{\sin x}{\sqrt{2}} \text{ 则原式} = \int \frac{2 \cos^2 y}{1 - 2 \sin^2 y} dy, \text{ 令}$$

$$t = \tan y \text{ 则原式} = \int \frac{2dt}{(1-t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + \arctan t + c$$

$$(4) \text{ 原式} = 2x\sqrt{1+e^x} - 2 \int \sqrt{1+e^x} dx, \text{ 令 } t = \sqrt{1+e^x} \text{ 则 } \int \sqrt{1+e^x} dx =$$

$$\int \frac{2t^2}{t^2-1} dt \text{ 故}$$

$$\text{原式} = 2x\sqrt{1+e^x} - 4\sqrt{1+e^x} - 2 \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} \right| + 1$$

$$(5) \text{ 令 } t = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} \text{ 即 } x = \frac{1-2t^2}{1-t^2} \text{ 故}$$

$$\text{原式} = \int \frac{1}{(x-1)^2} \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} dx = \int \frac{t \cdot (-2t)}{\left(\frac{t^2}{1-t^2}\right)^2 (1-t^2)^2} dt$$

$$= \int \frac{-2}{t^2} dt = \frac{2}{t} + C = 2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + C$$

$$(6) \text{ 令 } t = x^{\frac{1}{6}}, \text{ 原式} = \int \frac{t^3-1}{t^2+1} \cdot 6t^5 dt = \frac{6}{7}t^7 - \frac{6}{5}t^5 + 2t^3 - 6t + 6 \arctan t - \frac{3}{2}t^4 +$$

$$3t^2 - 3 \ln |t^2+1| \text{ 故}$$

$$\text{原式} = \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{6}} + 6 \arctan x^{\frac{1}{6}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 3 \ln |x^{\frac{1}{3}}+1| + c$$

9.3 对于教学的建议

9.3.1 参考题

1. 令 $t = \sin^2 x$ 则

$$f'(t) = 1 - 2 \sin^2 2x + \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = 1 - 8t(1-t) + \frac{t}{1-t}$$

故

$$f(x) = -\ln |1-t| - 4t^2 + \frac{8}{3}t^3 + c = -2 \ln \cos x - 4 \sin^4 x + \frac{8}{3} \sin^6 x + c$$

2. (1)

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \left((1+x^2) \ln(1+x^2) - x^2 \right) \arctan x - \frac{1}{2} \int \ln(1+x^2) - \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left((1+x^2) \ln(1+x^2) - x^2 \right) \arctan x - \frac{1}{2} x \ln(1+x^2) + 3x - 3 \arctan x + c$$

(2) 令 $x = e^t$ 则

$$\text{原式} = \int \frac{1-t}{(e^t-t)^2} e^t dt = \int \frac{1-t}{(e^t-t)^2} d(e^t-t) + \int \frac{1-t}{(e^t-t)^2} dt$$

$$= -\frac{1-t}{e^t-t} + \int \frac{1}{e^t-t} + \frac{1-t}{(e^t-t)^2} dt = -\frac{1-t}{e^t-t} + \frac{1}{e^t-t} + c$$

故

$$\text{原式} = \frac{\ln x}{x - \ln x} + C$$

(3) 考虑函数

$$\begin{aligned} F(t) &= F(0) + \int_0^t [x] |\sin \pi x| dx \\ &= F(x) + \sum_{i=0}^{[t-1]} i \cdot \frac{2}{\pi} + \int_{[t]}^t [x] |\sin \pi x| dx \\ &= F(0) + \frac{[t-1] \cdot [t]}{\pi} + \frac{[t]}{\pi} |\cos \pi t - \cos \pi [t]| \end{aligned}$$

则 $F(x)$ 即为所求

(4)

$$\text{原式} = -\cos x \ln \sin x + \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx = -\cos x \ln \sin x + \cos x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right| + c$$

(5)

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin(x+a) \cos(x+b) - \sin(x+b) \cos(x+a)}{\sin(x+a) \sin(x+b)} dx \\ &= \frac{1}{\sin(a-b)} \ln \left| \frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)} \right| + C \end{aligned}$$

$$(6) \text{ 原式} = \int \frac{1}{x} - \frac{2x^{n-1}}{1+x^n} dx = \ln |x| - \frac{2}{n} \ln |1+x^n| + c$$

3. 由于

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2}{c} (ax+b)^n \sqrt{cx+b} - \frac{2na}{c} \int \frac{(ax+b)^{n-1} (cx+b)}{\sqrt{cx+b}} dx \\ &= \frac{2}{c} (ax+b)^n \sqrt{cx+b} - 2n \left(I_{n-1} + \frac{ab-bc}{c} I_n \right) \end{aligned}$$

故

$$I_n = \frac{2}{2n(ab-bc)+c} (ax+b)^n \sqrt{cx+b} - \frac{2nc}{2n(ab-b)+c} I_{n-1}$$

4. 由于

$$t = \frac{\sin\left(\frac{x+a}{2} - a\right)}{\sin \frac{x+a}{2}} = \frac{\sin \frac{x+a}{2} \cos a - \sin a \cos \frac{x+a}{2}}{\sin \frac{x+a}{2}} = \cos a - \frac{\sin a}{\tan \frac{x+a}{2}}$$

故

$$x = 2 \arctan \frac{\sin a}{\cos a - t} - a$$

可得

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{2t^n \sin a}{1-2t \cos a + t^2} dt = \int 2t^{n-2} \sin a + \frac{2 \sin a (2t^{n-1} \cos a - t^{n-2})}{1-2t \cos a + t^2} dt \\ &= \frac{2 \sin a}{n-1} t^{n-1} - I_{n-2} + 2I_{n-1} \cos a \end{aligned}$$

5. 设

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x-x_n}$$

等式两边同乘 $(x-x_i)$, $i=1, \dots, n$ 并令 $x \rightarrow x_i$ 可得 $A_i = \frac{P(x_i)}{Q(x_i)}$ 故

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \sum_{i=1}^n \frac{P(x_i)}{Q(x_i)} \ln |x-x_i| + c$$

6. 考虑函数

$$\begin{aligned} F(x) &= F(0) + \int_0^x f(t)dt = F(v) + \sum_{i=1}^{f(x)-1} i + \int_{f(x)-\frac{1}{2}}^x f(t)dt \\ &= F(0) + \frac{f(x)(f(x)-1)}{2} + f(x) \left(x - f(x) + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

7. 由定理不妨设 $\int e^{-x^2} dx = h_1(x)e^{-x^2} + C$, 其中 $h_1(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ 为有理函数, P, Q 互素。对等式两边求导可得

$$1 = -\frac{2xP_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_1'(x)}{Q_1(x)} - \frac{P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1^2(x)}$$

即

$$Q_1(x)(Q_1(x) - P_1'(x) + 2xP_1(x)) = P_1(x)Q_1'(x)$$

若 $Q_1(x)$ 次数大于等于 1, 取其一根 x_0 , 重数设为 r , 则 x_0 为左端 r 重根, 右端 $r-1$ 重根;

若 $Q_1(x)$ 为常数 a , 则有 $a - P_1'(x) + 2xP_1(x) = 0$, 考虑两端多项式次数得出矛盾。可得 $\int e^{-x^2} dx$ 为非初等函数。

假设 $\int \frac{1}{x} e^x dx$ 为初等函数, 则设

$$\int \frac{1}{x} e^x dx = h_2(x)e^x + c, h_2(x) = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

对两边求导可得

$$\frac{1}{x} = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + \frac{P_2'(x)}{Q_2(x)} - \frac{P_2(x)Q_2'(x)}{Q_2^2(x)}$$

即

$$Q_2(x)(Q_2(x) - xP_2'(x) - xP_2(x)) = xP_2(x)Q_2'(x)$$

若 $Q_2(x)$ 为常数或者有非零根, 则与上述同理可导出矛盾;

不妨设 $Q_2(x) = bx^r, r \geq 1, b \neq 0$, 则有

$$rP_2(x) = bx^r - xP_2'(x) - xP_2(x)$$

考虑 $P_2(x)$ 的次数 m , 若 $m \geq r$, 则左端次数为 m , 右端次数为 $m+1$, 若 $m < r-1$, 则左端次数为 m , 右端次数为 r

所以不妨设 $P_2(x) = ba_{r-1}x^{r-1} + \dots + ba_sx^s, s \leq r-1$ 且 $a_s \neq 0, a_{s+1} = \dots = a_0 = 0$ 可得

$$\begin{aligned} h_2(x) &= a_{r-1}x^{-1} + \dots + a_sx^{s-r} \\ h_2(x) + h_2'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

左端最低次数为 $s-r-1$, 最高次数为 -1 , 可得 $s-r-1 = -1 \Rightarrow s = r$ 矛盾, 可得 $\int \frac{1}{x} e^x dx$ 为非初等函数, $\int \frac{1}{\ln x} dx$ 中令 $t = \ln x$ 可得 $\int \frac{1}{\ln x} dx = \int \frac{e^t}{t} dt$ 。

第 10 章 定积分

10.1 定积分概念与可积条件

1. 由于 f 的间断点都为有理数, 而有理数集是可列集, 故由 Lebesgue 定理即证。
2. 解 $g \circ f$ 在 $[a, b]$ 上不一定可积, $g \circ f$ 不可积的例子: $g(x) = \operatorname{sgn} x, f(x) = R(x)$ (Riemann 函数), $[a, b] = [0, 1]$, 则 $g \circ f = D$ (Dirichlet 函数) 在 $[0, 1]$ 上不可积; 而若 f, g 都是连续函数, 显然 $g \circ f \in R[a, b]$; $g \circ f$ 在 $[a, b]$ 上不一定不可积. $g \circ f$ 可积的例子: $f = D$ (Dirichlet 函数), $[a, b] = [0, 1]$, 而

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为无理数} \\ 0, & x \text{ 为有理数} \end{cases}$$

$g \circ f \equiv 0$, 显然在 $[a, b]$ 上可积.

3. 若 $f \in R[a, b]$, 则 $|f|, f^2 \in R[a, b]$ 由于若 f 在 $x_0 \in [a, b]$ 处连续, 则 $|f|, f^2$ 也在 x_0 处连续, 故 $|f|, f^2$ 的不连续点集含于 f 的不连续点集中, 也为零测集, 故由 Lebesgue 定理可知可积.

若 $|f| \in R[a, b]$, 则 f 在 $[a, b]$ 上不一定可积, 而 $f^2 \in R[a, b]$. f 不可积的例子:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为无理数} \\ -1, & x \text{ 为有理数} \end{cases}$$

而 $[a, b] = [0, 1]$, 则 $|f| \equiv 1 \in R[a, b]$, 但类似 Dirichlet 函数, f 在 $[0, 1]$ 上不可积; 由 f^2 的不连续点集等于 $|f|$ 的不连续点集及 Lebesgue 定理可证。

若 $f^2 \in R[a, b]$, 则 f 在 $[a, b]$ 上不一定可积, 而 $|f|$ 在 $[a, b]$ 上可积. f 不可积的例子: 同上.

4. 由于 $f \in R[a, b]$, 故 f 的不连续点集为零测集. 由于 g 与 f 在 $[a, b]$ 上仅在有限个点上取不同值, 而零测集并上有限点集仍为零测集, 故由 Lebesgue 定理知 $g \in R[a, b]$
5. $\int_a^b f = 0$. 若 $\int_a^b f > 0$, 可知 $\exists [c, d] \subset [a, b], \mu > 0, s.t. |f(x)| \geq \mu, \forall x \in [c, d]$, 只要取 $(\alpha, \beta) \subseteq [c, d] \subseteq [a, b]$ 即得矛盾. 类似可得若 $\int_a^b f < 0$ 时的矛盾 (或令 $g = -f$).
6. 由于若 g 在 $x_0 \in [a, b]$ 处连续, 则 $f \circ g$ 也在 x_0 处连续, 故 $f \circ g$ 的不连续点集含于 g 的不连续点集中, 也为零测集, 故由 Lebesgue 定理知 $f \circ g \in R[a, b]$
7. 由于若 f 在 $x_0 \in [a, b]$ 处连续, 则 $\frac{1}{f}$ 也在 x_0 处连续, 故 $\frac{1}{f}$ 的不连续点集含于 f 的不连续点集中, 也为零测集, 故由 Lebesgue 定理知 $\frac{1}{f} \in R[a, b]$
8. 由于 f 所有的间断点构成一个收敛数列, 即 f 的间断点可列, 其构成的点集为零测集, 故由 Lebesgue 定理知 $f \in R[a, b]$
9. 依题意知, 对 $\forall \varepsilon, \eta > 0, x_0 \in [a, b], \exists \delta_{x_0} > 0, \forall x \in O(x_0, \delta_{x_0}) \cap [a, b]$, 成立 $|f(x)| < \frac{\eta}{2}$. 每个这样的开区间构成 $[a, b]$ 的一个开覆盖, 由有限覆盖定理知存在有限个开区间覆盖住 $[a, b]$, 取 a, b 及这些开区间中落在区间 $[a, b]$ 内的端点作为分划 P 的分点.

由于

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x')| + |f(x'')| < \eta, \forall x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$$

则所有小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的振幅都小于 η , 显然振幅不小于 η 的所有小区间长度之和小于 ε , 故 $f \in R[a, b]$. 下证 $\int_a^b f dx = 0$

由于 f 在区间 $[a, b]$ 的每一点的极限都存在且为零, 故对 $\forall x \in [a, b]$, 则 $f(x) = 0$ 等价于 f 在 x 处连续, $f(x) \neq 0$ 等价于 f 不在 x 处连续. 由 Lebesgue 定理知 f 的不连续点为零测集, 故 f 在 $[a, b]$ 上几乎处处为 0. 故由本节练习题中第 4 题可知 $\int_a^b f dx = 0$

10. Riemann 函数在区间 $[a, b]$ 的每一点的极限都存在且为 0, 故由上题可知其可积性.
11. 可以, 但没必要. 对于每个连续函数, 其都是 Riemann 可积的, 所以题目中的极限和 I 必然存在, 和 Riemann 积分值相同. 而对于非连续函数, 按照定义, 将是不可积的. 这样的定义没有实际意义.
12. 设

$$S = \sum_{k=1}^n f(x_k) \sin(g(x_k) \Delta x_k), T = \sum_{k=1}^n f(x_k) g(x_k) \Delta x_k$$

显然只需证, 对于任意划分 P , 成立

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} T$$

设 $M > 0, |f(x)| < M, |g(x)| < M, \forall x \in [a, b]$. 因此

$$\begin{aligned} 0 \leq |S - T| &= \left| \sum_{k=1}^n f(x_k) [\sin(g(x_k) \Delta x_k) - g(x_k) \Delta x_k] \right| \\ &< M \sum_{k=1}^n |\sin(g(x_k) \Delta x_k) - g(x_k) \Delta x_k| \\ &= \frac{M}{6} \sum_{k=1}^n |g^3(x_k) (\Delta x)^3 + o((\Delta x)^3)| \\ &< \frac{(M^3 + 1) M}{6} \sum_{i=1}^n (\Delta x)^3 \\ &\leq \frac{(M^3 + 1) M \|P\|^2}{6} \sum_{i=1}^n \Delta x \\ &= \frac{(b-a)(M^3 + 1) M \|P\|^2}{6} \rightarrow 0, \|P\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

即证。

10.2 定积分的性质

1. 若 $f(a) = f(b) = 0$, 令 $g(x) = f(x)$, 则 $\int_a^b f^2(x) dx = 0$, 故 f 几乎处处为 0, 又 f 连续, 故 $f \equiv 0$
2. 若 $f(a) \neq 0$ 或 $f(b) \neq 0$, 不妨 $f(a) \neq 0, f(b) = 0$ (其他情况同理), 则由 f 连续性知

存在充分小的 $\varepsilon > 0$ 使得 $f(x) \neq 0, \forall x \in [a, a + \varepsilon]$. 令

$$g(x) = \begin{cases} \text{点}(a, 0) \text{ 与点}(a + \varepsilon, f(a + \varepsilon)) \text{ 线性连接}, & x \in [a, a + \varepsilon] \\ f(x), & x \in (a + \varepsilon, b] \end{cases}$$

$g(x)$ 满足题意, 且 $f(x)g(x) \geq 0, \forall x \in [a, b], \int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. 由 fg 连续性知 $fg \equiv 0$ 且 $f(a + \varepsilon)g(a + \varepsilon) = f^2(a + \varepsilon) = 0$, 矛盾.

综上所述, $f \equiv 0$

3. 由于 $\int_a^b P^2(x)f(x)dx = 0$ 且 $P^2(x)f(x)$ 非负, 故 $P^2(x)f(x)$ 在 $[a, b]$ 上几乎处处为 0. 若 $P \neq 0$, 则 $P^2(x)$ 的零点至多为有限个, 故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上几乎处处为 0 且 $\int_a^b f dx = 0$, 矛盾. 故 $P \equiv 0$
4. 令 $g(x) = f(x) + f(-x)$, 则 $\int_{-1}^1 f(x)[f(x) + f(-x)]dx = 0$, 换元, $\int_{-1}^1 f(-x)[f(x) + f(-x)]dx = 0$, 两式相加, $\int_{-1}^1 [f(x) + f(-x)]^2 dx = 0$, 由连续性知 $f(x) + f(-x) \equiv 0, \forall x \in [-1, 1]$, 即 f 是 $[-1, 1]$ 上的奇函数.
5. 令 $x = \cos t$, 由原书中例题 10.2.4 即知极限为 0.
6. 推广: 若 $f \in C[a, b], |f(x)| \leq 1, \forall x \in [a, b]$, 且只存在有限个 $x \in [a, b]$ 使得 $|f(x)| = 1$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f^n(x)dx = 0$

Proof: 对每个使得 $|f(x_k)| \geq 1$ 的 $x_k \in [a, b] (k \in \mathbb{N}_+)$, 不妨 $x_k \in (a, b), x_k = a$ 或 $x_k = b$ 时同理, 对任意充分小的 $\varepsilon > 0, 0 < \left| \int_{x_k - \varepsilon}^{x_k + \varepsilon} f^n(x)dx \right| \leq \int_{x_k - \varepsilon}^{x_k + \varepsilon} 1 dx = 2\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0^+$ 对于任意一个不含 x_k 的区间 $[c, d]$, 由 f 连续性知 $\exists 0 < M < 1, s.t. |f(x)| \leq M < 1$, 故

$$0 < \left| \int_c^d f^n(x)dx \right| \leq \int_c^d M^n dx = M^n(d - c) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

由于 x_k 只有有限多个, 故区间 $[x_k - \varepsilon, x_k + \varepsilon]$ 和 $[c, d]$ 只有有限多个, 由积分和极限的可加性即知结论成立.

7. 依题意得

$$\sin x_n = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx\right)^{\frac{1}{n}}$$

而由原书中例题 10.2.5 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

又 $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], n = 1, 2, \dots$, 故由函数 $\sin x$ 连续性知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{2}$

8. 将积分拆成两部分分析

$$\int_{-1}^1 \frac{h}{h^2+x^2} f(x) dx = \int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2} f(x) dx + \int_{-1}^0 \frac{h}{h^2+x^2} f(x) dx$$

$$\text{对于第一个部分及 } h > 0, \int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{h}} \frac{h}{h^2+x^2} f(x) dx + \int_{\frac{1}{h}}^1 \frac{h}{h^2+x^2} f(x) dx$$

由积分第一中值定理及 f 连续性知

$$\int_0^{\frac{1}{h}} \frac{h}{h^2+x^2} f(x) dx = f(\xi_h) \int_0^{\frac{1}{h}} \frac{h}{h^2+x^2} dx = \arctan \frac{1}{h^2} f(\xi_h) \rightarrow \frac{\pi}{2} f(0), h \rightarrow 0^+, 0 < \xi_h < \frac{1}{h}$$

由 f 连续性知 $\exists M > 0, s.t. |f(x)| \leq M, \forall x \in [-1, 1]$, 又 $h > 0$, 则

$$\int_{\frac{1}{h}}^1 \frac{h}{h^2+x^2} f(x) dx \leq M \int_{\frac{1}{h}}^1 \frac{h}{h^2+x^2} dx = M \left(\arctan \frac{1}{h} - \arctan \frac{1}{h^2} \right) \rightarrow 0, h \rightarrow 0^+$$

同理对第二部分分析, 即得结论。

9. 由 f 连续性知 $\exists M > 0, s.t. |f(x)| \leq M, \forall x \in [0, 1]$

$$(1) 0 < \left| \int_0^1 x^n f(x) dx \right| \leq M \int_0^1 x^n dx = \frac{M}{n+1} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

$$(2) \text{对于任意给定的 } \varepsilon \in (0, 1), \int_0^1 nx^n f(x) dx = \int_0^{1-\varepsilon} nx^n f(x) dx + \int_{1-\varepsilon}^1 nx^n f(x) dx$$

对于第一个部分

$$0 < \left| \int_0^{1-\varepsilon} nx^n f(x) dx \right| \leq M \int_0^{1-\varepsilon} nx^n dx \leq \frac{Mn}{n+1} (1-\varepsilon)^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

对于第二个部分

$$\int_{1-\varepsilon}^1 nx^n f(x) dx = f(\xi_\varepsilon) \int_{1-\varepsilon}^1 nx^n dx = \frac{n}{n+1} [1 - (1-\varepsilon)^{n+1}] f(\xi_\varepsilon) \rightarrow f(\xi_\varepsilon), 1-\varepsilon < \xi_\varepsilon < 1$$

由 ε 的任意性, 令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, 由 f 连续性即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nx^n f(x) dx = f(1)$$

10. 依题意得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{a_n} x^n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{n+1}}{n+1} = 2$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n^{n+1}}{n+1} \right)^{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{a_n}{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{\frac{1}{n+1}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}} = 1$$

11. 由于

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2n+2)t}{2 \sin t} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2nt}{2 \sin t} dt \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+2)t - \cos 2nt}{2 \sin t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t \sin t}{\sin t} dt \\ &= \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

故由 Stolz 定理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n+1} - I_n}{\ln(1 + \frac{1}{n})} = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

10.3 变限积分与微积分基本定理

1. (1) 补充定义函数 $t \sin \frac{1}{t}$ 在 $t = 0$ 处的函数值为 0, 则该函数在 $x = 0$ 处附近连续

$$\left(\int_0^x t \sin \frac{1}{t} dt \right)' \Big|_{x=0} = x \sin \frac{1}{x} \Big|_{x=0} = 0$$

$$(2) \frac{d}{dx} \left(\int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t} dt \right) = 3x^2 \frac{\sin x^3}{x^3} - 2x \frac{\sin x^2}{x^2}$$

- (3) 由 L'Hospital 法则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arctan x)^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{1+x^2} = 0$$

- (4) 由 L'Hospital 法则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = 0$$

2. 依题意知, 对每个 $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$, 恒有

$$\left| \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| \leq M(\beta - \alpha)^n$$

两边令 $\beta \rightarrow \alpha$, 则 $|f(\alpha)| \leq 0$, 即 $f(\alpha) = 0$, 由 α 任意性知 $f \equiv 0$

3. 设 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, 由连续性知 $F'(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$. 由于 $f(x) \leq \int_a^x f(t) dt$ 即 $[F(x)e^{-x}]' \leq 0$, 即函数 $F(x)e^{-x}$ 在 $[a, b]$ 上单调递减, 则 $F(x)e^{-x} \leq F(a)e^{-a} = 0, \forall x \in [a, b]$ 即 $f(x) \leq F(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$

4. 设 $F(t) = \int_0^t f(x) \sin x dx, x \in [0, \pi]$, 则 $F(0) = F(\pi) = 0$. 又 $0 = \int_0^{\pi} f(t) \cos t dt = \int_0^{\pi} f(t) \sin t \cot t dt = \int_0^{\pi} \cot t d(F(t)) = \frac{F(t)}{\tan t} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} F(t) d(\cot t) = \int_0^{\pi} F(t) \csc^2 t dt = 0$, 由积分第一中值定理 (或另设函数, 由 Rolle 中值定理) 知, 存在 $\xi \in (0, \pi)$, s.t. $F(\xi) \csc^2 \xi = 0$, 即 $F(\xi) = 0$ 由 Rolle 中值定理即得结论.

5. 设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt = g(x) + k(x - x_0) + y_0$, 其中 $g(x), k, x_0, y_0$ 待定, g 为周期函数. 假设 $f(x) = \sin x, \cos x, \sin^2 x$, 求出 $F(x)$ 后, 对照表达式, 可猜想 $x_0 = 0$. 设 f 周期为 T 猜想 g 的周期也为 T , 则令 $x = 0, T$ 得 $0 = g(0) + y_0, \int_0^T f(t) dt = g(0) + kT + y_0$, 可解得 $k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$. 由于 f 的未知性且 g 依赖于 f , 故剩下的待定数和函数无法也无需明确求出, 直接把 $F(x)$ 写成 $F(x) = \left(\int_0^x f(t) dt - \frac{x}{T} \int_0^T f(t) dt \right) + \frac{x}{T} \int_0^T f(t) dt$ 只需验证 $\int_0^x f(t) dt - \frac{x}{T} \int_0^T f(t) dt$ 是周期函数. 事实上, $\int_0^{x+T} f(t) dt - \frac{x+T}{T} \int_0^T f(t) dt =$

$$\int_T^{x+T} f(t) dt - \frac{x}{T} \int_0^T f(t) dt = \int_0^x f(t+T) dt - \frac{x}{T} \int_0^T f(t) dt = \int_0^x f(t) dt - \frac{x}{T} \int_0^T f(t) dt$$

6. 将积分 $\int_a^{a+T} f(x)dx$ 视为关于 a 的函数, 由于其值与 a 无关, 故 $\left(\int_a^{a+T} f(x)dx\right)' \equiv 0, \forall a \in (-\infty, +\infty)$, 即 $f(a+T) \equiv f(a), \forall a \in (-\infty, +\infty)$, 即证.
7. 固定 b , 则 $\int_a^{ab} f(x)dx = k$ (常数) $\forall a > 0$, 对 $\int_a^{ab} f(x)dx = k$ 求导 (关于 a) 可得
- $$bf(ab) = f(a)$$

取 $a = 1$ 得

$$f(b) = \frac{f(1)}{b}$$

8. 设 $g(t) = \int_t^b f(x)dx - \int_a^t f(x)dx$, 则 $g(a) = \int_a^b f(x)dx, g(b) = -\int_a^b f(x)dx, g(a)g(b) \leq 0$ 由 g 连续性及介值定理即证.

注意到若 $\int_a^b f(x)dx = 0$, 则 ξ 即有可能只能为 a 或 b . 故可尝试 $f(x) = x, [a, b] = [-1, 1]$, 由于

$$\int_{\xi}^b f(x)dx = \int_a^{\xi} f(x)dx,$$

故可解得 $\xi = \pm 1$

9. 由均值不等式

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t)dt - \int_x^b \frac{dt}{f(t)} \right) = f(x) + \frac{1}{f(x)} \geq 2$$

10. 设

$$f(x) = \int_1^x a(t)c(t)dt \int_1^x b(t)d(t)dt - \int_1^x a(t)d(t) \int_1^x b(t)c(t)dt$$

易知 $f(1) = f'(1) = f^{(2)}(1) = f^{(3)}(1) = 0$, 故 $f(x)$ 可被 $(x-1)^4$ 整除.

11. 由于 $g(x)$ 单调减少且 $g(0) = 0$, 故 $g(x) \leq 0, \forall x \in [0, +\infty)$, $\int_0^s g(x)dx \leq 0, \forall s \in$

$[0, +\infty)$ 在 $g(x) = f(x) \int_0^x f(t)dt$ 两边分别积分

$$\begin{aligned} \int_0^s g(x)dx &= \int_0^s \left(f(t) \int_0^x f(t)dt \right) dx = \int_0^s \left(\int_0^x f(t)dt \right) d \left(\int_0^x f(t)dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^s f(t)dt \right)^2 \geq 0, \forall s \in [0, +\infty) \end{aligned}$$

故 $\int_0^s g(x)dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^s f(t)dt \right)^2 = 0, \int_0^s f(t)dt = 0, f(s) = 0, \forall s \in [0, +\infty)$. 同理易证 $f(s) = 0, \forall s \in (-\infty, 0]$, 故 $f \equiv 0$

12. 由于

$$\int_0^x tf(t)dt = \frac{x}{3} \int_0^x f(t)dt, x \in [0, +\infty)$$

两边对 x 求导

$$\begin{aligned} 2xf(x) &= \int_0^x f(t)dt, x \in [0, +\infty) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)dt \right)' &= 0, \forall x \in (0, +\infty) \\ \int_0^x f(t)dt &= C\sqrt{x}, \forall x \in [0, +\infty), C \text{ 为常数} \end{aligned}$$

两边对 x 求导

$$f(x) = \frac{C}{2\sqrt{x}}, \forall x \in [0, +\infty), C \text{ 为常数}$$

又 f 在 $[0, +\infty)$ 上可微, 故 $f \equiv 0$

10.4 定积分的计算

1. 令

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(\sec x), & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{\pi}{2}, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}, g(x) = \begin{cases} \arctan(\sec x), & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right] \\ -\frac{\pi}{2}, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

故 $\frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的原函数为 $f(x)$, 在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$ 上的原函数为 $g(x)$

由 Newton-Leibniz 公式

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx \\ &= f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + g(x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \\ &= \frac{3\pi}{4} - \arctan \sqrt{2} \end{aligned}$$

2. (1) 由定积分的几何意义知 $\int_0^2 |1-x| dx = 1$

(2)

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \min \left\{ \frac{1}{|x|}, x^2 \right\} dx &= 2 \int_0^2 \min \left\{ \frac{1}{|x|}, x^2 \right\} dx \\ &= 2 \int_0^1 x^2 dx + 2 \int_1^2 \frac{dx}{x} \\ &= \frac{2}{3} + 2 \ln 2 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \int_x^{x+1} \frac{dt}{\sqrt{t + \cos t}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\xi + \cos \xi}} (x < \xi < x+1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{\xi}{x} + \frac{\cos \xi}{x}}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(-x)}{1+e^x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x} \cos^2 x}{1+e^{-x}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx \\
&= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

(5) 交换积分次序 $\int_0^\pi \left(\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t} dt \right) dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2$

(6)

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \quad (\text{命题10.4.6 结论}) \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(b^2 - a^2) \cos^2 x + a^2} \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x dx}{(b^2 - a^2) + a^2 (\tan^2 x + 1)} \\
&= \frac{2}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\tan x)}{\tan^2 x + \frac{b^2}{a^2}} \\
&= \frac{2}{ab} \arctan \frac{a \tan x}{b} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{|ab|}
\end{aligned}$$

3. (1)

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{x dx}{1+\cos^2 x} &= \int_0^\pi \frac{(\pi-x) dx}{1+\cos^2 x} \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{dx}{1+\cos^2 x} \\
&= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\tan x)}{\tan^2 x + 2} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{e^x + e^{1-x}} dx &= \int_0^1 \frac{1-x}{e^x + e^{1-x}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(e^x)}{e^{2x} + e} \\ &= \frac{1}{\sqrt{e}} \arctan \frac{e^x}{\sqrt{e}} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{e}} \arctan \frac{e-1}{2\sqrt{e}} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 x \ln(1+e^x) dx &= \int_{-2}^2 [-x \ln(1+e^{-x})] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 [x \ln(1+e^x) - x \ln(1+e^{-x})] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 x^2 dx \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left[1 + \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \ln(1+\tan x) + \ln \left[1 + \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right] \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 dx \\ &= \frac{\pi}{8} \ln 2 \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) a=0, b \neq 0 \text{ 时, } \int_0^{\pi} \frac{a^n \sin^2 x + b^n \cos^2 x}{a^{2n} \sin^2 x + b^{2n} \cos^2 x} dx &= \frac{\pi}{b^n} \\ a \neq 0, b=0 \text{ 时, } \int_0^{\pi} \frac{a^n \sin^2 x + b^n \cos^2 x}{a^{2n} \sin^2 x + b^{2n} \cos^2 x} dx &= \frac{\pi}{a^n} \end{aligned}$$

$b \neq 0$ 且 $a \neq 0$ 时, 设 $k = \frac{b}{a}$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{a^n \sin^2 x + b^n \cos^2 x}{a^{2n} \sin^2 x + b^{2n} \cos^2 x} dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^n \sin^2 x + b^n \cos^2 x}{a^{2n} \sin^2 x + b^{2n} \cos^2 x} dx \\ &= \frac{2}{a^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + k^n \cos^2 x}{\sin^2 x + k^{2n} \cos^2 x} dx \\ &= \frac{\pi}{a^n} + \frac{2k^n(1-k^n)}{a^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + k^{2n} \cos^2 x} dx \\ &= \frac{\pi}{a^n} + \frac{k^n(1-k^n)}{a^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{\sin^2 x + k^{2n} \cos^2 x} dx \end{aligned}$$

由对称性易知 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\sin^2 x + k^{2n} \cos^2 x} dx = 0$, 故由上题的 (6) 知

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{a^n \sin^2 x + b^n \cos^2 x}{a^{2n} \sin^2 x + b^{2n} \cos^2 x} dx &= \frac{\pi}{a^n} + \frac{k^n(1-k^n)}{a^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x + k^{2n} \cos^2 x} dx \\ &= \frac{\pi}{a^n} \left[1 + \frac{(a^n - b^n) |a^n| |b^n|}{2a^n |b^n|} \right] \end{aligned}$$

$$4. (1) I = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x) + f(a-x)} dx = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{f(x) + f(a-x)}{f(x) + f(a-x)} dx = \frac{a}{2}$$

$$(2) I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(a-x)} = \frac{1}{2} \int_0^a \left[\frac{1}{1+f(x)} + \frac{1}{1+f(a-x)} \right] dx = \frac{a}{2}$$

$$5. (1) \int_0^\pi x f(\sin x) dx = \int_0^\pi (\pi-x) f(\sin(\pi-x)) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi [x f(\sin x) + (\pi-x) f(\sin(\pi-x))] dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$$

(2) 令 $t = x^2$, 则

$$\int_1^a f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) \frac{dx}{x} = \int_1^{a^2} f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{dt}{t} = \int_1^a f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{dt}{2t} + \int_a^{a^2} f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{dt}{2t}$$

令 $s = \frac{a^2}{t}$, 则

$$\int_a^{a^2} f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{dt}{2t} = \int_1^a f\left(s + \frac{a^2}{s}\right) \frac{ds}{2s}$$

故

$$\int_1^a f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) \frac{dx}{x} = \int_1^a f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{dt}{2t} + \int_1^a f\left(s + \frac{a^2}{s}\right) \frac{ds}{2s} = \int_1^a f\left(x + \frac{a^2}{x}\right) \frac{dx}{x}$$

(3) 设 $\varphi = \arctan \frac{b}{a}$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(a \cos x + b \sin x) dx &= \int_0^{2\pi} f(\sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi)) dx \\ &= \int_{-\varphi}^{2\pi - \varphi} f(\sqrt{a^2 + b^2} \cos x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} f(\sqrt{a^2 + b^2} \cos x) dx \\ &= \int_0^\pi [f(\sqrt{a^2 + b^2} \cos x) + f(\sqrt{a^2 + b^2} \cos(2\pi - x))] dx \\ &= 2 \int_0^\pi f(\sqrt{a^2 + b^2} \cos x) dx \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \sin^{2n-1} x \cos(2n+1)x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin^{2n-1} x \cos(2n+1)x + \sin^{2n-1}(\pi-x) \cos(2n+1)(\pi-x)] dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \cos^{2n-1} x \sin(2n+1)x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos^{2n-1} x \sin(2n+1)x + \cos^{2n-1}(\pi-x) \sin(2n+1)(\pi-x)] dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} I(m, n) &= \int_0^1 x^m \ln^n x dx = \frac{1}{m+1} \int_0^1 \ln^n x d(x^{m+1}) \\ &= -\frac{1}{m+1} \int_0^1 x^{m+1} d(\ln^n x) = -\frac{n}{m+1} I(m, n-1) \\ &= \dots \\ &= \left(-\frac{n}{m+1}\right) \left(-\frac{n-1}{m+1}\right) \dots \left(-\frac{1}{m+1}\right) I(m, 0) \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}} \end{aligned}$$

8.

$$J(m, n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n}{2} + 1\right)}$$

9. 由于

$$F(x) = \int_0^x \cos \frac{1}{t} dt = -\int_0^x t^2 d\left(\sin \frac{1}{t}\right) = -x^2 \sin \frac{1}{x} + 2 \int_0^x t \sin \frac{1}{t} dt$$

故由 L'Hospital 法则

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-x^2 \sin \frac{1}{x}\right) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x t \sin \frac{1}{t} dt}{x} = 0$$

10. 设 $I(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx$, 则

$$\begin{aligned} I(n+1) - I(n) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(n+1)x - \sin^2 nx}{\sin^2 x} dx \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \cos \frac{x}{2} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \sin \frac{x}{2}}{\sin^2 x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2} (\text{Dirichlet 积分}) \end{aligned}$$

$$\text{故 } I(n) = \frac{n\pi}{2}$$

11. (1) $f(x+\pi) = \int_{x+\pi}^{x+\frac{3\pi}{2}} |\sin t| dt \stackrel{s=t+\pi}{=} f(x), \forall x \in (-\infty, +\infty)$, 故 f 是周期为 π 的周期函数(2) 由于 f 是周期为 π 的周期函数, 故对于 f 的最值, 只需讨论 f 在区间 $[0, \pi]$ 上的

最值. 由于 $f'(x) = \left| \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right| - |\sin x| = -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, 故 f 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增, 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ 上单调递减, 又 $f(0) = f(\pi) = 1, f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, 故 f 的最大值为 $\sqrt{2}$, 最小值为 1

12. 由积分第一中值定理知 $\exists \eta \in \left(\frac{7}{8}, 1\right)$, s.t. $\frac{1}{8}f(\eta) = \int_{\frac{7}{8}}^1 f(x)dx = \frac{1}{8}f(0)$, 由 Rolle 中值定理即证

10.5 对于教学的建议

10.5.1 第一组参考题

1. 取如下划分和介点集

$$\begin{aligned} \int_a^b x^m dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\eta_i) \Delta x_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_{i-1}^m + x_{i-1}^{m-1} x_i + \cdots + x_i^m}{m+1} (x_i - x_{i-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{m+1} - x_{i-1}^{m+1}}{m+1} \\ &= \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} \end{aligned}$$

2. (1)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \\ -1, & x \in [a, b] - \mathbb{Q} \end{cases}$$

(2) 反设 f 不可积, 则存在 $\varepsilon_0, \eta_0 > 0$, 对于 $[a, b]$ 的任意划分 P , 振幅不小于 η_0 的子区间长度之和不小于 ε_0 (原书上提到的可积的第三充分必要条件). 由 f 的介值性 (Darboux 定理) 知, f 在该子区间内至少存在符号相同的两点 x_1, x_2 , 其函数值之差的绝对值大于 $\frac{\eta_0}{2}$. 则对于 $|f|$, 令 $\eta_1 = \frac{\eta_0}{2}, \varepsilon_1 = |x_1 - x_2|$, 则对于任意划分 T , 振幅不小于 η_1 的子区间长度之和不小于 ε_1 . 这与 $|f|$ 可积矛盾.

3. 因为 $f, g \in R[a, b]$, 所以 $fg \in R[a, b]$. 故对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$, 对于任意分划

$$P: a = x_0 < \cdots < x_n = b$$

和任意点 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, 只要 $\|P\| < \delta_1$, 即有

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) g(\xi_k) \Delta x_k - \int_a^b f(x)g(x)dx \right| < \varepsilon$$

设 $f(x) < M, \forall x \in [a, b]$. 由 $g \in R[a, b]$ 知, $\exists \delta_2 > 0$, 当 $\|P\| < \delta_2$ 时, 有

$$\sum_{i=1}^n \omega_k(g) \Delta x_k < \varepsilon$$

故

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) g(\xi'_k) \Delta x_k - \sum_{k=1}^n f(\xi_k) g(\xi_k) \Delta x_k \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) [g(\xi'_i) - g(\xi_i)] \Delta x_i \right| \\ &< M \sum_{i=1}^n \omega_i(g) \Delta x_i \\ &< M\varepsilon \end{aligned}$$

故 $\|P\| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) g(\xi'_k) \Delta x_k - \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) g(\xi'_k) \Delta x_k - \sum_{k=1}^n f(\xi_k) g(\xi_k) \Delta x_k \right| + \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) g(\xi_k) \Delta x_k - \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \\ &< (M+1)\varepsilon \end{aligned}$$

即

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) g(\xi'_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

4. 由原书中命题 8.4.3 知 $f'_-(x)$ 和 $f'_+(x)$ 在 (a, b) 上处处存在, 且均为单调递增函数. 由原书中命题 5.5.2 知单调函数的间断点至多为可列个, 故 $f'_-(x), f'_+(x) \in R[c, d]$ 对任意划分 $P: x_0 = c < x_1 < \cdots < x_n = d$, 由于

$$f(d) - f(c) = \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})]$$

只证 $f'_+(x)$ 的 Leibniz 公式, 另一个类似. 只需证明

$$\sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})] \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$$

其中 $m = \min_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f'_+(x) = f'_+(x_{k-1}), M_k = \max_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f'_+(x) = f'_+(x_k), k = 1, 2, \cdots, n$

然后两边取极限, 由定积分定义及夹逼定理即得结论. 只证左边不等号成立, 右边类似. 只需证

$$f'_+(x_{k-1}) \Delta x_k \leq f(x_k) - f(x_{k-1}), x_{k-1} \leq x \leq x_k$$

即

$$f(x_k) - f'_+(x_{k-1}) x_k \geq f(x_{k-1}) - f'_+(x_{k-1}) x_{k-1}$$

只需证 $g(x) = f(x) - f'_+(x_{k-1})x$ 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 单调递增. 对 $\forall x_0 \in [x_{k-1}, x_k]$

$$\begin{aligned} g'_+(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'_+(x_{k-1}) \\ &= f'_+(x_0) - f'_+(x_{k-1}) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

5. (1) 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a, b]$ 的一个划分 $P: a = x_0 < \cdots < x_n = b$, 使得 $\sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i < \varepsilon$. 现作阶梯函数如下:

$$g(x) = \begin{cases} f(x_{i-1}), & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ f(x_{n-1}), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

其中, $i = 1, 2, \cdots, n$

则

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - g(x)| \leq \sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i < \varepsilon$$

(2)(3) 构造折线函数 (连续函数) 如下:

$$g(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1}), x \in [x_{i-1}, x_i]$$

其中, $i = 1, 2, \cdots, n$. 其余同 (1)

(4) 由 (3) 知, 存在连续函数 h , 使得

$$\int_a^b |f(x) - h(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

由 Weierstrass 第一逼近定理知, 存在多项式 g , 使得

$$|h(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

则

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \leq \int_a^b |f(x) - h(x)| dx + \int_a^b |h(x) - g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dx = \varepsilon$$

6. 由 $f \in R[a - \delta, b + \delta]$ 知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $[a - \delta, b + \delta]$ 上的连续函数 g , 使得

$$\int_{a-\delta}^{b+\delta} |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon$$

对 $|h| < \delta$, 我们将 $\int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx$ 分成三段进行研究

$$\int_a^b |f(x+h) - g(x+h)| dx, \int_a^b |g(x+h) - g(x)| dx, \int_a^b |g(x) - f(x)| dx$$

第一段:

$$\int_a^b |f(x+h) - g(x+h)| dx = \int_{a+h}^{b+h} |f(x) - g(x)| dx \leq \int_{a-\delta}^{b+\delta} |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon$$

第二段: 由 $g \in C[a - \delta, b + \delta]$ 知, g 在 $[a - \delta, b + \delta]$ 上一致连续. 故对上述 $\varepsilon >$

$0, \exists \delta_1 > 0, |h| < \delta_1$ 时, 有

$$|g(x+h) - g(x)| < \varepsilon$$

故

$$\int_a^b |g(x+h) - g(x)| dx < (b-a)\varepsilon$$

第三段:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \leq \int_{a-\delta}^{b+\delta} |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon$$

综上, $|h| < \min\{\delta, \delta_1\}$ 时, 由绝对值不等式

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx < (2+b-a)\varepsilon$$

即证。

7. 反设 $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall [c, d] \subseteq [a, b]$, 使 $\omega_{f|_{[c,d]}} \geq \varepsilon_0$. 则对 f 的任意划分 $P: x_0 = a < \dots < x_n = b$ 有

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i \geq \varepsilon_0(b-a)$$

这与 $f \in R[a, b]$ 矛盾.

8. 假设 $\exists (c, d) \subseteq [a, b]$, 使得 f 在该区间内没有连续点, 则 f 的不连续点不为零测集, 这与 $f \in R[a, b]$ 矛盾.
9. 必要性: 假设 f 在连续点 x_0 (不妨 $x_0 \in (a, b)$) 处不为 0, 则 $f(x_0) > 0$. 于是 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq [a, b]$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2} f(x_0)$$

即

$$f(x) > \frac{1}{2} f(x_0) > 0$$

故

$$0 = \int_a^b f(x) dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx > \frac{1}{2} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x_0) dx > 0$$

矛盾。

充分性因为 $f \in R[a, b]$, 所以 f 几乎处处连续, 又 f 在所有的连续点处的值都等于 0, 故 f 几乎处处为 0, 即 $\forall (c, d) \subseteq [a, b]$ 中, f 必有零点. 设 $P: x_0 < \dots < x_n = b$ 为 $[a, b]$ 的一个划分, 取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 使 $f(\xi_i) = 0$ 则

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = 0$$

10. 令 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则 $h(x)$ 在 $[a, b]$ 上几乎处处为 0. 由上题知

$$\int_a^b h(x) dx = 0$$

则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$$

11. 由 $f \in R[a, b]$ 知, f 有界, 设其下确界为 m , 上确界为 M . 因为 g 在 $[a, b]$ 上不变号, 不妨 g 非负, 所以

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

当 $\int_a^b g(x)dx = 0$ 时, $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, 结论显然成立.

当 $\int_a^b g(x)dx \neq 0$ 时

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$$

若存在 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 使得 $f(x_1) = m, f(x_2) = M$, 或不存在这样的 x_1 或 x_2 . 由于 f 在 $[a, b]$ 上有原函数, 故由 Darboux 定理及确界定义知, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

若 f 至多只在端点处取得上或下确界, 不妨只考虑 $f(a) = m, f(b) = M$ 时, 其余情况类似.

当 $m < \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} < M$ 时. 由 Darboux 定理即证.

当 $\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = m = f(a)$ 时, $\int_a^b [f(x) - f(a)]g(x)dx = 0$, 因为 $[f(x) - f(a)]g(x)$ 非负, 故由上题可知 $[f(x) - f(a)]g(x)$ 几乎处处为 0, 又 $f(x) - f(a)$ 只在 $x = a$ 处为 0, 故 g 几乎处处为 0 则 $\int_a^b g(x)dx = 0$, 这与假设矛盾. 综上, 总能找到 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

12.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx &= \int_0^1 \frac{d(x^n)}{n(1+x)} \\ &= \frac{x^n}{n(1+x)} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^n}{n(1+x)^2} dx \\ &= \frac{1}{2n} + \int_0^1 \frac{d(x^{n+1})}{n(n+1)(1+x)^2} \\ &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n(n+1)} + \frac{2}{n(n+1)} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^3} dx \end{aligned}$$

至此, 我们可以断定 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}$. 下面证明确实是这样只需证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx - \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 0$$

即证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4n(n+1)} - \frac{1}{4n^2} - \frac{2}{n(n+1)} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^3} dx}{\frac{1}{n^2}} = 0$$

即证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{4(n+1)} - \frac{2n^2}{n^2+n} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^3} dx \right] = 0$$

即证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^3} dx = 0$$

对任意给定的 $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^3} dx &= \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x^{n+1}}{(x+1)^3} dx + \int_{1-\varepsilon}^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^3} dx \\ &\leq (1-\varepsilon)^{n+1} + [1 - (1-\varepsilon)] \\ &= (1-\varepsilon)^{n+1} + \varepsilon \end{aligned}$$

故

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^3} dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^3} dx \leq \varepsilon$$

由 ε 任意性知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^3} dx = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^3} dx = 0$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^3} dx = 0$$

即证。

13. 对任给的 $\varepsilon > 0$

$$\int_a^b f^p(t) dt > \int_{b-\varepsilon}^b f^p(t) dt > f^p(b-\varepsilon)\varepsilon \quad (1)$$

由于 $f(b-\varepsilon) > f(b-2\varepsilon)$, 故存在 $A > 0$, 当 $p > A$ 时

$$\left(\frac{f(b-\varepsilon)}{f(b-2\varepsilon)} \right)^p > \frac{b-a}{\varepsilon}$$

即 $f^p(b-\varepsilon)\varepsilon > (b-a)f^p(b-2\varepsilon)$, 代入式 (1), 得

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f^p(t) dt > f^p(b-2\varepsilon)$$

即 $f^p(x_p) > f^p(b-2\varepsilon)$. 由此得 $x_p > b-2\varepsilon$, 因而

$$b-2\varepsilon < x_p < b$$

所以 $\lim_{p \rightarrow +\infty} x_p = b$

14. 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) + a \int_0^x f(t) dt \right) = A$. 由 f 连续知, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 可导. 观察

$f(x) + a \int_0^x f(t) dt = F'(x) + aF(x)$, 我们发现这很像微分学中一种常见中值定理证明题中的式子, 故我们作此处理

$$f(x) + a \int_0^x f(t) dt = F'(x) + aF(x) = \frac{(e^{ax} F(x))'}{e^{ax}} = \frac{a(e^{ax} F(x))'}{(e^{ax})'}$$

由 L'Hospital 法则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax} F(x)}{e^{ax}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{ax} F(x))'}{(e^{ax})'} = \frac{A}{a}$$

则

$$f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + aF(x)) - \lim_{x \rightarrow +\infty} aF(x) = A - A = 0$$

15. 利用含参变量积分求导。

$$F(x) = \int_{a+x}^{b+x} f(s) \cos(s-x) ds$$

则

$$F'(x) = f(b+x) \cos b - f(a+x) \cos a + \int_{a+x}^{b+x} f(s) \sin(s-x) ds$$

16. 设 $I(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x} dx$

$$\begin{aligned} I(n) - I(n-2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx - \sin(n-2)x}{\sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos(n-1)x \sin x}{\sin x} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(n-1)x dx \\ &= \frac{2}{n-1} \sin \frac{(n-1)\pi}{2} \end{aligned}$$

$n = 2k - 1 (k \in \mathbb{N}_+)$ 时

$$I(2k-1) - I(2k-3) = \frac{1}{k-1} \sin(k-1)\pi = 0$$

$$I(2k-3) - I(2k-5) = 0$$

$$I(3) - I(1) = 0$$

$$I(n) = I(2k-1) = I(1) = \frac{\pi}{2}$$

$n = 2k (k \in \mathbb{N}_+)$ 时

$$I(2k) - I(2k-2) = \frac{2}{2k-1} \sin \frac{(2k-1)\pi}{2} = \frac{2}{2k-1} (-1)^{k+1}$$

$$\begin{aligned} &\dots \\ I(4) - I(2) &= \frac{2}{3} \sin \frac{3\pi}{2} = \frac{2}{3} (-1)^3 \end{aligned}$$

$$I(n) = I(2k) = I(2) + \sum_{i=2}^k \frac{2}{2i-1} (-1)^{i+1} = 2 + \sum_{i=2}^k \frac{2}{2i-1} (-1)^{i+1}$$

17. (1)

$$\begin{aligned}
 B(m, n) &= \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(-1)^k}{m+k+1} \\
 &= \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \int_0^1 x^{m+k} dx \\
 &= \int_0^1 x^m \sum_{k=0}^n (C_n^k (-x)^k) dx \\
 &= \int_0^1 x^m (1-x)^n dx \\
 &\stackrel{t=1-x}{=} \int_0^1 t^n (1-t)^m dt \\
 &= B(n, m)
 \end{aligned}$$

(2) 由原书上例题 10.4.10 直接就能知道 $B(m, n) = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$

18.

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^m} \int_0^x \sin \frac{1}{t} dt \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{t^2 \cos \frac{1}{t} \Big|_0^x - \int_0^x \cos \frac{1}{t} dt^2}{x^m} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x} - 2 \int_0^x t \cos \frac{1}{t} dt}{x^m} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2-m} \cos \frac{1}{x} - 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x t \cos \frac{1}{t} dt}{x^m} \\
 &= -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cos \frac{1}{x}}{mx^{m-1}} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

19. 令 $t = \sin \theta$, 则

$$0 < R^\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta < R^\lambda \int_0^1 \frac{e^{-Rt}}{\sqrt{1-t^2}} dt < R^\lambda \int_0^1 e^{-Rt} dt = -\frac{1}{R^{1-\lambda}} (e^{-R} - 1)$$

令 $R \rightarrow +\infty$, 夹逼即得.

20. 角

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\pi f''(x) \sin x dx \\
 &= \int_0^\pi \sin x d(f'(x)) \\
 &= - \int_0^\pi f'(x) \cos x dx \\
 &= - \int_0^\pi \cos x d(f(x)) \\
 &= f(\pi) + f(0) - \int_0^\pi f(x) \sin x dx
 \end{aligned}$$

又

$$f(\pi) = 2, \int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \sin x dx = 5$$

故

$$f(0) = 3$$

21. 由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\left[\int_0^1 x f(x) dx \right]^2 \leq \left[\int_0^1 x^2 f(x) dx \right] \left[\int_0^1 f(x) dx \right]$$

而由题目条件我们知道

$$\left[\int_0^1 x f(x) dx \right]^2 = \left[\int_0^1 x^2 f(x) dx \right] \left[\int_0^1 f(x) dx \right]$$

此时 Cauchy-Schwarz 不等式不等号取等, 又 f 为连续函数, 则

$$x\sqrt{f(x)} = C_1\sqrt{f(x)} \text{ 或 } \sqrt{f(x)} = C_2x\sqrt{f(x)}, \forall x \in [0, 1], C_1, C_2 \text{ 为固定常数.}$$

因此只能 $\sqrt{f(x)} = 0, \forall x \in [0, 1]$, 故 $f \equiv 0, \forall x \in [0, 1]$, 这与 $\int_0^1 f(x) dx = 1$ 矛盾. 故不存在满足题意的函数 f

22. 设 $F(x) = e^{x-1}f(x)$. 由积分第一中值定理

$$F(1) = f(1) = 3 \int_0^{\frac{1}{3}} e^{x-1}f(x) dx = 3 \int_0^{\frac{1}{3}} F(x) dx = F(\eta), \eta \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$$

则由 Rolle 中值定理, 存在 $\xi \in (\eta, 1) \subset (0, 1)$, 使得

$$F(\xi) = 0$$

即

$$f(\xi) + f'(\xi) = 0$$

23. 由于 f 于 $[0, 1]$ 上非负连续, 且

$$f^2(t) \leq 1 + 2 \int_0^t f(s) ds$$

故

$$\begin{aligned} f(t) &\leq \sqrt{1 + 2 \int_0^t f(s) ds} \\ \frac{f(t)}{\sqrt{1 + 2 \int_0^t f(s) ds}} &\leq 1 \\ \sqrt{\frac{x}{2}} \frac{f(t)}{\sqrt{1 + 2 \int_0^t f(s) ds}} dx &\leq \int_0^x 1 dt \\ \frac{d\left(1 + 2 \int_0^t f(s) ds\right)}{\sqrt{1 + 2 \int_0^t f(s) ds}} &\leq x \\ \left. \sqrt{1 + 2 \int_0^t f(s) ds} \right|_0^t &\leq x \\ \sqrt{1 + 2 \int_0^x f(s) ds} &\leq x + 1 \end{aligned}$$

则

$$f(t) \leq \sqrt{1 + 2 \int_0^t f(s) ds} \leq t + 1$$

24. 由

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}$$

知

$$f'(x) \geq 0$$

故 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, $f(x) \geq f(1) = 1$. 则

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2 + f^2(x)} \leq \frac{1}{x^2 + 1} \\ \int_1^x f(t) dt &\leq \int_1^x \frac{1}{t^2 + 1} dt \\ f(x) - f(1) &\leq \arctan x - \frac{\pi}{4} \\ f(x) &\leq \arctan x + 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

由于 f 单调递增且有上界, 故存在有限极限 $f(+\infty)$ 令上式 $x \rightarrow +\infty$, 则

$$f(+\infty) \leq \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\pi}{4}$$

25.

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_x^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \right) dx = x \int_x^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} x \frac{\sin x}{x} dx = 0$$

10.5.2 第二组参考题

1. (1) 不妨设 f 在 $[0, +\infty)$ 单调递增. 令 $t = sx$, 则

$$F(x) = \int_0^1 f(sx) ds$$

对 $\forall 0 \leq x \leq y$

$$F(x) = \int_0^1 f(sx) ds \leq \int_0^1 f(sy) ds = F(y)$$

故 F 单调递增, 即和 f 有相同的单调性.

因为 f 单调, 所以 f 可积, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 又 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 故 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续. 只需再证 F 在 $x = 0$ 处右连续. 由

$$f(0^+) \leq f(sx) \leq f(x), \forall x > 0, 0 < s \leq 1$$

知

$$F(0) = f(0^+) = \int_0^1 f(0^+) ds \leq \int_0^1 f(sx) ds = F(x) \leq \int_0^1 f(x) ds = f(x)$$

令 $x \rightarrow 0^+$, 则

$$F(0^+) = F(0)$$

综上所述, F 在 $[0, +\infty)$ 上为单调连续函数, 且与 f 具有相同的单调性.

(2) 当 f 有上界时, $f(+\infty)$ 存在且为有限数, 设为 A . 则对 $\forall x \in [0, +\infty)$, 有 $f(x) \leq A$.

对 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \forall x > X$, 成立

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

则对于充分大的 x , 成立

$$\begin{aligned} |F(x) - A| &= \left| \int_0^1 (f(sx) - A) ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^\varepsilon (f(sx) - A) ds \right| + \left| \int_\varepsilon^1 (f(sx) - A) ds \right| \\ &\leq \int_0^\varepsilon |f(sx) - A| ds + \int_\varepsilon^1 |f(sx) - A| ds \\ &< |A|\varepsilon + \varepsilon(1 - \varepsilon) \\ &< (|A| + 1)\varepsilon \end{aligned}$$

即

$$F(+\infty) = A$$

当 f 无上界时, $f(+\infty) = +\infty$. 则

$$F(x) = \int_0^1 f(sx) ds \geq \int_{\frac{1}{2}}^1 f(sx) ds = \frac{1}{2} f(\xi x), \frac{1}{2} < \xi < 1$$

令 $x \rightarrow +\infty$, 则

$$F(+\infty) = +\infty$$

2. 由于对 $\forall \xi_{k,i} \in [x_{k,i-1}, x_{k,i}]$, 成立

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_{k,i}) \Delta x_{k,i} = I$$

故

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_k} \sup_{\xi_{k,i}} f(\xi_{k,i}) \Delta x_{k,i} &= I \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_k} \inf_{\xi_{k,i}} f(\xi_{k,i}) \Delta x_{k,i} &= I \end{aligned}$$

又

$$\text{Darboux 上和 } S(f) \leq \sum_{i=1}^{n_k} \sup_{\xi_{k,i}} f(\xi_{k,i}) \Delta x_{k,i}, \text{ Darboux 下和 } s(f) \geq \sum_{i=1}^{n_k} \inf_{\xi_{k,i}} f(\xi_{k,i}) \Delta x_{k,i}$$

令 $k \rightarrow \infty$, 则

$$S(f) \leq I \leq s(f)$$

又 $s(f) \leq S(f)$, 故 $S(f) = s(f) = I$, 即证.

3. 引理: 设函数 f 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上有界, 且 m 和 M 分别为其上确界与下确界, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $[\alpha, \beta]$ 的一个划分 $\tilde{P} = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k\}$, 使得

$$f(\xi_i)(\xi_i - \xi_{i-1}) \begin{cases} \geq \left(M_i - \frac{\varepsilon}{6}\right)(\xi_i - \xi_{i-1}), & i \text{ 为奇数,} \\ > M_i(\xi_i - \xi_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{6N}, & i \text{ 为偶数} \end{cases}$$

其中

$$M_i = \sup \{f(x) | \xi_{i-1} \leq x \leq \xi_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

$$k \leq 2N, N = \left\lceil \frac{12(M-m)}{\varepsilon} \right\rceil + 1$$

这里 $[x]$ 为 x 的最大整数部分.

引理的证明: 记 $\xi_0 = \alpha, g(x) = \sup\{f(t) | x \leq t \leq \beta\}$ ($\alpha \leq \beta$), 则 g 在 $[\alpha, \beta]$ 上不增, 而且 $g(\alpha) = M$ 我们按以下办法, 考虑对 $[\alpha, \beta]$ 的划分.

第一步: 若 $g(\beta) \geq M - \frac{\varepsilon}{12}$, 由于 $g(\beta) = f(\beta)$, 此时取 $\xi_1 = \beta$, 便有

$$f(\xi_1) \geq M - \frac{\varepsilon}{12} > M_1 - \frac{\varepsilon}{6}$$

令 $\tilde{P} = \{\xi_0, \xi_1\}$, 就是所要求的划分. 若 $g(\beta) < M - \frac{\varepsilon}{12}$, 由于 $g(\alpha) = M$, 必存在 $\bar{\xi}_1 \in [\alpha, \beta]$, 使得

$$g(x) \geq M - \frac{\varepsilon}{12}, \quad \text{当 } \alpha \leq x \leq \bar{\xi}_1$$

$$g(x) < M - \frac{\varepsilon}{12}, \quad \text{当 } \bar{\xi}_1 \leq x \leq \beta$$

在上面的式子中, 只有当 $\bar{\xi}_1 = \alpha$ (或 $\bar{\xi}_1 = \beta$) 时, 我们才考虑 “ $x \leq \bar{\xi}_1$ ” (或 “ $\bar{\xi}_1 \leq x$ ”) 中的等号. 由 g 的定义可知, 当 $\bar{\xi}_1 \leq x \leq \beta$ 时 $f(x) < M - \frac{\varepsilon}{12}$, 而且考虑到

$$g(\bar{\xi}_1 - h) \geq M - \frac{\varepsilon}{12}$$

(当 $\bar{\xi}_1 - h \leq \alpha$ 时, 用 α 代替 $\bar{\xi}_1 - h$), 其中 $h = \frac{\varepsilon}{12N(M-m+1)}$, 所以存在 $\bar{\xi}_1 \in [\bar{\xi}_1 - h, \bar{\xi}_1]$, 使得

$$f(\bar{\xi}_1) \geq g(\bar{\xi}_1 - h) - \frac{\varepsilon}{12} \geq g(\bar{\xi}_1) - \frac{\varepsilon}{12} \geq M - \frac{\varepsilon}{6}$$

取

$$\xi_2 = \begin{cases} \bar{\xi}_1 + h, & \text{当 } \bar{\xi}_1 + h < \beta \\ \beta, & \text{当 } \bar{\xi}_1 + h \geq \beta \end{cases}$$

则有

$$f(\xi_1)(\xi_1 - \xi_0) \geq \left(M_1 - \frac{\varepsilon}{6}\right)(\xi_1 - \xi_0)$$

$$f(\xi_2)(\xi_2 - \xi_1) = M_2(\xi_2 - \xi_1) + [f(\xi_2) - M_2](\xi_2 - \xi_1)$$

$$\geq M_2(\xi_2 - \xi_1) - 2h(M-m) > M_2(\xi_2 - \xi_1) - \frac{\varepsilon}{6N}$$

如果 $\xi_2 = \beta$, 把 $[\alpha, \beta]$ 划分成两个子区间即可. 如果 $\xi_2 < \beta$, 再进行下一步.

第二步: 对区间 $[\xi_2, \beta]$, 重复第一步的做法, 即若 $g(\beta) \geq g(\xi_2) - \frac{\varepsilon}{12}$, 取 $\xi_3 = \beta$, 则对 $[\xi_2, \beta]$ 不需再细分; 若 $g(\beta) < g(\xi_2) - \frac{\varepsilon}{12}$, 可得 ξ_3, ξ_4 , 使

$$f(\xi_3)(\xi_3 - \xi_2) \geq \left(M_3 - \frac{\varepsilon}{6}\right)(\xi_3 - \xi_2)$$

$$f(\xi_4)(\xi_4 - \xi_3) > M_4(\xi_4 - \xi_3) - \frac{\varepsilon}{6N}$$

如果 $\xi_4 < \beta$, 再按上述方法继续下去. 由于每次细分后, 有

$$M_3 < M_1 - \frac{\varepsilon}{12}$$

$$M_{2j+1} < M_{2j-1} - \frac{\varepsilon}{12} < \dots < M_1 - \frac{j\varepsilon}{12}$$

而且 $M_1 \leq M, M_{2j+1} \geq m$, 所以

$$m < M - \frac{j\varepsilon}{12}$$

即

$$j < \frac{12(M-m)}{\varepsilon} < N$$

这就是说, 经过有限步, 总存在 k , 使 $\xi_k = \beta$, 而且不管 k 是奇数还是偶数, 都有 $k \leq 2N$. 因此 $\tilde{P} = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k\}$ 就是所要求的一个划分. 由此, 引理获证. 下面讨论原题目的证明. 设

$$m = \inf\{f(x)|a \leq x \leq b\}$$

$$M = \sup\{f(x)|a \leq x \leq b\}$$

依题意知对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对 $[a, b]$ 的任意分划 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, 只要 $\|P\| < \delta$, 就有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i - I \right| < \varepsilon$$

由此取定一个划分 P (即 $\|P\| < \delta$), 记

$$m_i = \inf\{f(x)|x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

$$M_i = \sup\{f(x)|x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

则 $m \leq m_i \leq M_i \leq M (i = 1, 2, \dots, n)$. 根据引理可知, 对每个区间 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \dots, n)$, 都有一个划分 $P_i = \{\xi_{i,0}, \xi_{i,1}, \dots, \xi_{i,k_i}\}$, 使得

$$f(\xi_{i,j})(\xi_{i,j} - \xi_{i,j-1}) \geq \left(M_{i,j} - \frac{\varepsilon}{6(b-a)} \right) (\xi_{i,j} - \xi_{i,j-1}), \quad j \text{ 为奇数}$$

$$f(\xi_{i,j})(\xi_{i,j} - \xi_{i,j-1}) > M_{i,j}(\xi_{i,j} - \xi_{i,j-1}) - \frac{\varepsilon}{6Nn}, \quad j \text{ 为偶数,}$$

其中

$$M_{i,j} = \sup\{f(x)|\xi_{i,j-1} \leq x \leq \xi_{i,j}\} (j = 1, 2, \dots, k_i)$$

$$k_i \leq 2N, \quad N = \left\lceil \frac{12(b-a)(M-m)}{\varepsilon} \right\rceil + 1$$

然后, 再取划分 $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的并, 记作

$$P^* = \bigcup_{i=1}^n P_i = \{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_r\}$$

显然 P^* 是 $[a, b]$ 的一个划分, 而且 $r \leq 2Nn$, 于是

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r f(\eta_i)(\eta_i - \eta_{i-1}) &\geq \sum_{i=1}^r \sup\{f(x)|\eta_{i-1} \leq x \leq \eta_i\}(\eta_i - \eta_{i-1}) \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{6(b-a)} \sum_{i \text{ 为奇数}} (\eta_i - \eta_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{6Nn} \sum_{i \text{ 为偶数}} 1 \\ &\quad - \sum_{i=1}^r \sup\{f(x)|\eta_{i-1} \leq x \leq \eta_i\}(\eta_i - \eta_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{3} \\ &> S(f) - \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

又因为 $\|P^*\| \leq \|P\| < \delta$, 所以

$$\left| \sum_{i=1}^r f(\eta_i)(\eta_i - \eta_{i-1}) - I \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

从而有

$$S(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i=1}^r f(\eta_i)(\eta_i - \eta_{i-1}) < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

又因 $I \leq S(f)$, 故 $0 \leq S(f) - I < \varepsilon$. 由 ε 的任意性知 $S(f) = I$ 对于确定的划分 P , 同理还可作出 $[a, b]$ 的另一个新的划分, 使其相应的和数

$$\sum_{i=1}^s f(\zeta_i - \zeta_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^s \inf \{f(x) | \zeta_{i-1} \leq x \leq \zeta_i\} (\zeta_i - \zeta_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{3} < s(f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

因此又有 $0 \leq I - s(f) < \varepsilon$, 故 $s(f) = I$. 综上所述, $S(f) = s(f) = I$, 即证.

4. 不妨设 $\int_0^T g(x)dx = 0$, 否则令 $G(x) = g(x) - \frac{1}{T} \int_0^T g(x)dx$. 由 $f \in R[a, b]$ 知 $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 阶梯函数 $f_\varepsilon(x)$, s.t. $\int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)| dx < \varepsilon$. 由于 g 以 T 为周期且在 $[0, T]$ 上可积, 所以 $\exists M > 0, |g(x)| < M, \forall x \in \mathbb{R}$, 故

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)g(px)dx \right| &\leq \left| \int_a^b [f(x) - f_\varepsilon(x)]g(px)dx \right| + \left| \int_a^b f_\varepsilon(x)g(px)dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)| |g(px)| dx + \left| \int_a^b f_\varepsilon(x)g(px)dx \right| \\ &\leq M\varepsilon + \left| \int_a^b f_\varepsilon(x)g(px)dx \right| \end{aligned}$$

只需证 $\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^b f_\varepsilon(x)g(px)dx = 0$, 进一步地, 只需证 $\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^b g(px)dx = 0$ 即可

对 $\forall p > 0$, 设 $pb = pa + n(p)T + l(p), n(p) \in \mathbb{N}, 0 \leq l(p) < T$, 则 $\int_a^b g(px)dx = \frac{1}{p} \int_{pa}^{pb} g(x)dx = \frac{1}{p} \int_{pa}^{pa+n(p)T+l(p)} g(x)dx = \frac{1}{p} \int_0^{n(p)T+l(p)} g(x)dx = \frac{1}{p} \int_0^{l(p)} g(x)dx < \frac{MT}{p} \rightarrow 0, p \rightarrow +\infty$, 即证.

5. 设 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, 要证 $a_0 = (n+1)^2 \int_0^1 f(x)dx$. 由假设 $\frac{a_0}{k+1} + \frac{a_1}{k+2} + \cdots + \frac{a_n}{k+n+1} = 0 (k = 1, 2, \cdots, n)$, 对上式的左边通分, 得

$$\frac{Q(k)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n+1)} = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

其中 Q 是 k 的 n 次多项式, 且以 $k = 1, 2, \cdots, n$ 为零点, 因此可把 $Q(k)$ 写作 $Q(k) = c(k-1)\cdots(k-n)$ 在等式

$$\frac{c(k-1)\cdots(k-n)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n+1)} = \frac{a_0}{k+1} + \frac{a_1}{k+2} + \cdots + \frac{a_n}{k+n+1}$$

的两边乘 $k+1$ 后. 再令 $k = -1$, 即得 $a_0 = c(-1)^n(n+1)$. 再在等式

$$\int_0^1 f(x)x^k dx = \frac{Q(k)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n+1)}$$

中令 $k = 0$, 得

$$\int_0^1 f(x) dx = c \frac{(-1)^n}{n+1} = \frac{a_0}{(n+1)^2}$$

于是 $a_0 = (n+1)^2 \int_0^1 f(x) dx$

$$6. \quad n = 0 \text{ 时, } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx = \frac{\pi}{2}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx = 0$$

$n \geq 1$ 时, 先求

$$\begin{aligned} \int \cos^n x e^{inx} dx &= \int (e^{ix} - i \sin x)^n e^{inx} dx \\ &= \int \left[\left(e^{ix} - \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \right) e^{ix} \right]^n dx \\ &= \frac{1}{2^n} \int (e^{ix} + 1)^n dx \\ &= \frac{1}{2^n} \int \left[1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} e^{2ikx} \right] dx \\ &= \frac{1}{2^n} \left[x + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{e^{2ikx}}{2ik} \right] \\ &= \frac{1}{2^n} \left[x + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{\sin 2kx - i \cos 2kx}{2k} \right] \end{aligned}$$

故 $n \geq 1$ 时

$$\begin{aligned} \int \cos^n x \cos nx dx &= \operatorname{Re} \left(\int \cos^n x e^{inx} dx \right) = \frac{1}{2^n} \left[x + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{\sin 2kx}{2k} \right] \\ \int \cos^n x \sin nx dx &= \operatorname{Im} \left(\int \cos^n x e^{inx} dx \right) = \frac{1}{2^n} \left[x - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{\cos 2kx}{2k} \right] \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx &= \frac{\pi}{2^{n+1}} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx &= \frac{1}{2^n} \left[\frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \frac{1}{2k+1} \right] \end{aligned}$$

7. 令 $t = \frac{1}{x}$, 则

$$\int_0^1 \cos^n \frac{1}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos^n t}{t^2} dt = \int_1^A \frac{\cos^n t}{t^2} dt + \int_A^{+\infty} \frac{\cos^n t}{t^2} dt, \forall A > 1$$

对于第一个部分, 由积分第二中值定理 $\int_1^A \frac{\cos^n t}{t^2} dt = \int_1^{\xi_A} \cos^n t dt, 1 \leq \xi_A \leq A$, 故

对任意给定的 $A > 1$, 由 10.2.2 练习题 5 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{\cos^n t}{t^2} dt = 0$, 故对 $\forall \varepsilon > 0, n$

充分大时, 成立 $\left| \int_1^A \frac{\cos^n t}{t^2} dt \right| < \varepsilon$

对于第二个部分, 由于 $\left| \frac{\cos^n t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$, 且 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ 收敛, 故 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^n t}{t^2} dt$ 收敛, 则

对上述 $\varepsilon > 0, \exists A_0 > 1, \forall A > A_0, \left| \int_A^{+\infty} \frac{\cos^n t}{t^2} dt \right| < \varepsilon$

综上所述, 取定一个 $A > A_0$, 则 n 充分大时, $\left| \int_0^1 \cos^n \frac{1}{x} dx \right| \leq \left| \int_1^A \frac{\cos^n t}{t^2} dt \right| + \left| \int_A^{+\infty} \frac{\cos^n t}{t^2} dt \right| < 2\varepsilon$ 即证。

8.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1 - x^8} dx &= 4\sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{2}x^3 + x^2 - 1}{(x^4 + 1)(x^2 - 1)} dx \\
 &\stackrel{y=\sqrt{2}x}{=} 16 \int_0^1 \frac{y^3 + y^2 - 2}{(y^4 + 4)(y^2 - 2)} dy \\
 &= 16 \int_0^1 \frac{(y-1)(y^2 + 2y + 2)}{(y^2 + 2y + 2)(y^2 - 2y + 2)(y^2 - 2)} dy \\
 &= 16 \int_0^1 \frac{y-1}{(y^2 - 2)(y^2 - 2y + 2)} dy \\
 &= \int_0^1 \frac{4y}{y^2 - 2} dy - \int_0^1 \frac{4y - 8}{y^2 - 2y + 2} dy \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

第 11 章 积分学的应用

11.1 积分学在几何计算中的应用

11.1.1 练习题

1.

$$\begin{aligned} A \left(x^2 + \frac{2B}{A}xy \right) + Cy^2 &= 1 \\ A \left(x + \frac{B}{A}y \right)^2 + \left(c - \frac{B^2}{A} \right) y^2 &= 1 \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta} \left(x + \frac{B}{A}y \right) &= \cos t \\ \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{A}} \cdot y &= \sin t \end{aligned}$$

则

$$\begin{cases} x = \frac{\cos t}{\sqrt{A}} - \frac{B}{\sqrt{A}} \frac{\sin t}{\sqrt{\Delta}} \\ y = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\Delta}} \sin t \end{cases}$$

故

$$s = \int_0^{2\pi} x dy = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t}{\sqrt{\Delta}} dt = \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}$$

2. 设夹角为 θ_1, θ_2 的两条线段为 l_1, l_2 , 则面积为

$$S = \frac{1}{2} \left(\int_{l_1} (x dy - y dx) + \int_{l_2} (x dy - y dx) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} (x dy - y dx) \right)$$

直接计算可得

$$\int_{l_1} (x dy - y dx) = \int_{l_2} (x dy - y dx) = 0$$

则

$$S = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (x dy - y dx)$$

又 $x = \rho(\theta) \cos \theta, y = \rho(\theta) \sin \theta$ 代入上式可得

$$S = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta) d\theta$$

3. 将公共区域分成一个等边三角形和三个等大的小弓形, 则

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} r \frac{\sqrt{3}}{2} r = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2$$

$$S_{\text{弓}} = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2$$

$$S = S_{\Delta} + 3S_{\text{弓}} = \frac{\pi r^2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} r^2$$

4. 设腰长为 a , 底边为 b , 则 $2a + b = l$ 为常数, 则旋转体高 x_c 和底面积为 S , 分别为

$$x_c = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \cdot b$$

则由命题 11.1.3 可得体积为

$$\begin{aligned} V &= 2\pi x_c S \\ &= 2\pi \frac{1}{4} \left(a^2 - \frac{b^2}{4} \right) \cdot b \\ &= \frac{\pi}{8} (4a^2 - b^2) \cdot b \\ &= \frac{\pi}{8} l(l - 2b) \cdot b \\ &= \frac{\pi}{16} l \cdot (l - 2b)2b \\ &\leq \frac{\pi}{16} l \cdot \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{\pi l^3}{64} \end{aligned}$$

当 $b = \frac{l}{4}$ 时等号成立

5. 设椭圆为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 则椭圆周长为

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \sqrt{(d(a \cos \theta))^2 + (d(b \sin \theta))^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \sin \theta d\theta)^2 + (b \cos \theta d\theta)^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

一周曲线 $y = c \sin(x/a)$ 的长度为

$$\begin{aligned} &\int_0^{2a\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{c}{a} \cos \frac{x}{a} \right)^2} dx \\ &= \int_0^{2a\pi} \sqrt{a^2 + c^2 \cos^2 \frac{x}{a}} d\left(\frac{x}{a}\right) \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + c^2 \cos^2 \frac{x}{a}} d\frac{x}{a} \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + c^2 \cos^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

故当 $c^2 = b^2 - a^2$ 时上述两者长度相等, 即椭圆滚了一圈, 恰好也在曲线上滚过了一个周期。

6. 弧长为 s , 即角度为 s 设弧的起点对应的角度为 θ_1 , 则

$$\begin{aligned} A + B &= \int_{\theta_1}^{\theta_1+s} y \cdot (-dx) + \int_{\theta_1}^{\theta_1+s} x dy \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_1+s} (x dy - y dx) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_1+s} (x dy - y dx) \\ 2 \cdot S_{\text{扇形}} &= 2 \cdot \frac{1}{2} s = s \end{aligned}$$

其中 $S_{\text{扇形}}$ 是弧长 s 对映的扇形面积。

7. 焦点为 $(\frac{1}{2}, 0)$, 设过焦点的直线为 $x - \frac{1}{2} = ky$, 设此直线与原抛物线的交点为 y_1, y_2 , 则围成的面积为

$$S = \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(ky + \frac{1}{2} \right) - \frac{y^2}{2} \right] dy = \frac{k}{2} (y_2 - y_1) \cdot (y_2 + y_1) + \frac{1}{2} (y_2 - y_1) - \frac{1}{6} (y_2 - y_1) (y_2^2 + y_1 y_2 + y_1^2)$$

由 $y^2 = 2x$ 可得

$$y^2 = 2 \left(ky + \frac{1}{2} \right) = 2ky + 1$$

则韦达定理可得

$$y_1 + y_2 = 2k$$

$$y_1 \cdot y_2 = -1$$

则

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6} (y_2 - y_1) \cdot [3k(y_2 + y_1) + 3 - (y_2^2 + y_1 y_2 + y_1^2)] \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \sqrt{k^2 + 1} \cdot [3k \cdot 2k + 3 - (4k^2 + 1)] \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{k^2 + 1} \cdot (2k^2 + 2) \\ &= \frac{2}{3} \cdot (k^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

故 $S_{\min} = \frac{2}{3}$

8. 公共区域在第一象限, 可将此区域分为一个扇形 ($x^2 + y^2 \leq 4$ 对应的扇形), 还余下两个小弓形, 则

$$S_{\text{扇}} = \frac{1}{2} \pi \cdot 2 \cdot 2 = \frac{\pi}{3}$$

$$S_{\text{弓}} = \frac{1}{2} \pi \cdot 2 \cdot 2 - \sqrt{3} = \frac{2}{3} \pi - \sqrt{3}$$

故总面积为

$$S = S_{\text{扇}} + 2S_{\text{弓}} = \frac{5}{3} \pi - 2\sqrt{3}$$

9. $y = \sqrt{100 - \frac{25}{4}x^2}$, $S_{\Delta} = \frac{1}{2}y \cdot \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}y^2 = 25 - \frac{25}{16}x^2$, 故体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_{-4}^4 \left(25 - \frac{25}{16}x^2\right) dx \\ &= 2 \int_0^4 \left(25 - \frac{25}{16}x^2\right) dx \\ &= 2 \cdot \left(100 - \frac{25}{16} \frac{x^3}{3} \Big|_0^4\right) \\ &= 2 \left(100 - \frac{100}{3}\right) \\ &= \frac{400}{3} \end{aligned}$$

10. $x^2 + y^2 = a^2$, $S = 4 \cdot y^2 = 4(a^2 - x^2)$ 则体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^a 4(a^2 - x^2) dx \\ &= 8 \int_0^a (a^2 - x^2) dx \\ &= 8 \cdot \left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{16}{3}a^3 \end{aligned}$$

11.2 不等式

11.2.1 练习题

1. $\forall 0 \leq x_1 < x_2 < x_3 \in [0, +\infty)$ 有

$$\begin{aligned} \frac{F(x_3) - F(x_2)}{x_3 - x_2} &= \frac{1}{x_3 - x_2} \int_{x_2}^{x_3} f(t) dt \geq f(x_2) \\ \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \leq f(x_2) \\ \Rightarrow \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1} &\leq \frac{F(x_3) - F(x_2)}{x_3 - x_2} \end{aligned}$$

2. 由下凸函数的积分不等式可得

$$\begin{aligned} &\lambda F(x_1) + (1 - \lambda)F(x_2) \\ &= \lambda \int_0^{x_1} f(t) \frac{dt}{x_1} + (1 - \lambda) \cdot \int_0^{x_2} f(t) \frac{dt}{x_2} \\ &\geq f \left(\int_0^{x_1} \frac{\lambda}{x_1} t dt + \int_0^{x_2} \frac{1 - \lambda}{x_2} t dt \right) \\ &= f \left(\frac{\lambda x_1}{2} + \frac{(1 - \lambda)x_2}{2} \right) \end{aligned}$$

由

$$\begin{aligned} f \left(\frac{\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2}{2} \right) &\geq \frac{1}{\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2} \int_0^{\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2} f(t) dt \\ &= F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \end{aligned}$$

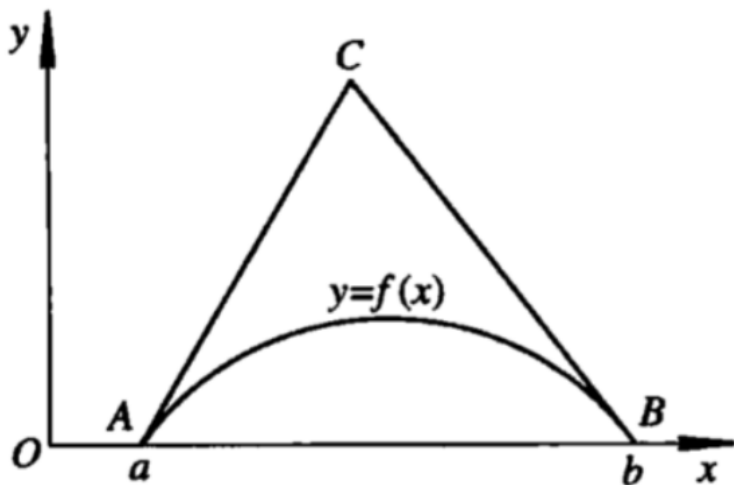


图 11.1

可得

$$\lambda F(x_1) + (1 - \lambda)F(x_2) \geq F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$$

故 F 是下凸函数

3. 实际上我们有设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的非负上凸函数, 则

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \geq \frac{1}{2} \max_{[a,b]} \{f(x)\}$$

证明 不妨设 $x_0 \in (a, b)$ 且 $f(x_0) = \max_{[a,b]} \{f(x)\}$, 则由题设知

$$f(x) \geq \frac{f(x_0) - f(b)}{x_0 - b}(x - b) + f(b) \quad (x_0 \leq x \leq b)$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^b f(x) dx &\geq \frac{f(x_0) - f(b)}{x_0 - b} \left(-\frac{(x_0 - b)^2}{2} \right) + f(b)(b - x_0) \\ &= \frac{f(x_0) + f(b)}{2} (b - x_0) \geq \frac{f(x_0)}{2} (b - x_0) \end{aligned}$$

类似地可得 $\int_a^{x_0} f(x) dx \geq f(x_0)(x_0 - a)/2$. 两式相加即得所证.

4. 按题意, $y = f(x)$ 的图像如图 11.1 所示, 因此 $0 \leq \int_a^b f(x) dx \leq \triangle ABC$ 的面积. 写出切线 AC, BC 的方程, 即可写出 C 点的坐标, 从而可算出 $\triangle ABC$ 的面积, 即得所要的不等式.

5. 当 $0 \leq x \leq 1$ 时有

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x f'(t) dt + 1 \\ &\geq \int_0^x (-1) dt + 1 \\ &= 1 - x \end{aligned}$$

当 $1 \leq x \leq 2$ 时, 有

$$f(x) = f(2) - \int_x^2 f'(t) dt \geq f(2) - \int_x^2 1 dt = x - 1$$

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx \\ &\geq \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\end{aligned}$$

可得 $\left| \int_0^2 f(x)dx \right| \geq 1$

6. 由柯西不等式可得

$$\text{左边} \geq \left(\int_a^b \sqrt{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx \right)^2 = (b-a)^2 = \text{右边}$$

7.

$$\begin{aligned}&\left(\int_a^b f(x) \cos kx dx \right)^2 + \left(\int_a^b f(x) \sin kx dx \right)^2 \\ &\leq \left(\int_a^b \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{f(x)} |\cos kx| dx \right)^2 + \left(\int_a^b \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{f(x)} |\sin kx| dx \right)^2 \\ &\leq \left(\int_a^b f(x) dx \right) \cdot \int_a^b f(x) \cos^2 kx dx + \left(\int_a^b f(x) dx \right) \int_a^b f(x) \sin^2 kx dx \\ &= \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2 = 1\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_a^x f'(t) dt \\ f^2(x) &= \left(\int_a^x f'(t) dt \right)^2 \leq \int_a^x (f'(t))^2 dt \cdot \int_a^x 1^2 dt \\ &= \int_a^x (f'(t))^2 dt \cdot (x-a)\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\text{左边} &\leq \int_a^b \int_a^x (f'(t))^2 dt \cdot (x-a) dx \\ &= \int_a^b \int_a^x (f'(t))^2 dt d \frac{(x-a)^2}{2} \\ &= \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b (f'(x))^2 dx - \frac{1}{2} \int_a^b (f'(x))^2 \cdot (x-a)^2 dx \\ &= \text{右边}\end{aligned}$$

9. 令 $F(x) = \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2 - \int_0^x f^3(t) dt$ 则

$$F'(x) = 2f(x) \int_0^x f(t) dt - f^3(x) = f(x) \left(2 \int_0^x f(t) dt - f^2(x) \right)$$

令 $g(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - f^2(x)$ 则

$$g'(x) = 2f(x) (1 - f'(x)) > 0$$

故 $F'(t) > F'(0) = 0$ 则 $F(1) > F(0) = 0$, 即

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 > \int_0^1 f^3(x)dx$$

10. (1) 令 $f(x) = e^x, g(x) = \ln x$, 则 g 和 f 互为反函数, 则由图像可得

$$(a-b) \cdot b \leq \int_0^{a-1} f dx + \int_1^b g(x) dx$$

化简得

$$e^{a-1} + b \ln b \geq ab$$

(2)(法一)(反证) 假设 $\int_0^\pi (f(x) - \sin x)^2 dx \leq \frac{3}{4}$ 与 $\int_0^\pi (f(x) - \cos x)^2 dx \leq \frac{3}{4}$ 同时成立, 则

$$\begin{aligned} 3 < \pi &= \left(x + \frac{\cos 2x}{2}\right) \Big|_0^\pi = \int_0^\pi (1 - \sin 2x) dx \\ &= \int_0^\pi (\sin^2 x + \cos^2 x - \sin 2x) dx = \int_0^\pi (\sin x - \cos x)^2 dx \\ &\leq \int_0^\pi (|f(x) - \sin x| + |f(x) - \cos x|)^2 dx \\ &= \int_0^\pi (f(x) - \sin x)^2 dx + \int_0^\pi (f(x) - \cos x)^2 dx + \int_0^\pi 2|f(x) - \sin x||f(x) - \cos x| dx \\ &\leq 2 \left[\int_0^\pi (f(x) - \sin x)^2 + \int_0^\pi (f(x) - \cos x)^2 dx \right] \\ &\leq 2 \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \right) = 3 \end{aligned}$$

矛盾. 故式中两个不等式不能同时成立。

(法二)

$$\begin{aligned} \sqrt{3} &\geq \sqrt{\int_0^\pi |f(x) - \sin x|^2 dx} + \sqrt{\int_0^\pi |f(x) - \cos x|^2 dx} \\ &\geq \sqrt{\int_0^\pi |\cos x - \sin x|^2 dx} = \sqrt{\int_0^\pi (1 - \sin 2x) dx} \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

得 $\sqrt{3} \geq \sqrt{\pi}$, 矛盾, 故式中两个不等式不能同时成立。

11.3 积分估计与近似计算

11.3.1 练习题

1. (1)

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx &= \int_0^{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin x^2}{2x} dx^2 \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt = \int_0^\pi \frac{\sin t}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t+\pi}} \right) dt > 0 \end{aligned}$$

(2)

$$\text{中间} > \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{2}} dx = \frac{1}{20\sqrt[3]{2}} = \text{左边}$$

$$\text{中间} < \int_0^1 x^{19} dx = \frac{1}{20} = \text{右边}$$

(3) 根据第二版勘误应该证 $\int_0^{\pi/2} x \left(\frac{\sin nx}{\sin x} \right)^4 dx < \frac{n^2\pi^2}{4}$ 。下证: $\frac{\sin nx}{\sin x} \leq n, x \in \left[0, \frac{\pi}{2n}\right]$, 即证 $f(x) = n \sin x - \sin nx \geq 0, x \in \left[0, \frac{\pi}{2n}\right]$

$$\begin{aligned} f'(x) &= n \cos x - n \cos nx \\ &= n \cdot (-2) \sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{(1-n)x}{2} \\ &= 2n \sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{(n-1)x}{2} \\ \frac{(n+1)x}{2} &\in \left[0, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4n}\right] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{(n-1)x}{2} &\in \left[0, \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4n}\right] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

故 $f'(x) \geq 0, x \in \left[0, \frac{\pi}{2n}\right], f(x) \geq 0$, 故

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{\sin nx}{\sin x} \right)^4 dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2n}} x \left(\frac{\sin nx}{\sin x} \right)^4 dx + \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{\sin nx}{\sin x} \right)^4 dx \\ &< \int_0^{\frac{\pi}{2n}} xn^4 dx + \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{2}{\pi x} \right)^4 dx \\ &= \frac{n\pi^2}{4} \end{aligned}$$

(4) 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上有

$$x > \sin x > \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!}$$

故

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1$$

故

$$0 < \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) dx = \frac{\pi^3}{144}$$

(5)

$$\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx < \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{100} dx = 0.01 \cdot (1 - e^{-100}) < 0.01$$

$$\begin{aligned} \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx &> \int_0^{99} \frac{e^{-x}}{x+100} dx \int_0^{99} \frac{e^{-x}}{199} dx \\ &= \frac{1}{199} \cdot (1 - e^{-99}) \\ &> 0.005 \end{aligned}$$

(6)

$$\text{中间} > \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2x dx = \frac{2}{9}\pi^2 = \text{左边}$$

由 $\sin x > \frac{2}{\pi}x$, $\frac{1}{\sin x} < \frac{\pi}{2x}$ 可得

$$\text{中间} < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \pi dx = \frac{\pi^2}{3} = \text{右边}$$

2. 设 $f(\xi) = \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx$ 则

$$f(0) = f(\xi) - \int_0^\xi f'(t) dt$$

故

$$\begin{aligned} |f(0)| &\leq |f(\xi)| + \int_0^\xi |f'(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{a} \int_0^a |f(x)| dx + \int_0^a |f'(x)| dx \end{aligned}$$

3. (i) 若 f 不变号, 则 $\left| \int_0^1 f(x) dx \right| = \int_0^1 |f(x)| dx$, 故

$$\max \left\{ \int_0^1 |f'(x)| dx, \left| \int_0^1 f(x) dx \right| \right\} \geq \int_0^1 |f(x)| dx$$

(ii) 若 f 在 $[0, 1]$ 上变号, 则 $\exists x_0 \in [0, 1], f(x_0) = 0$ 故

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f'(x)| dx &\geq \left| \int_{x_0}^x f'(t) dt \right| = |f(x)| \\ \int_0^1 |f(x)| dx &\leq \int_0^1 \int_0^1 |f'(y)| dy dx \\ &= \int_0^1 |f'(y)| dy \\ &\leq \max \left\{ \int_0^1 |f'(x)| dx, \left| \int_0^1 f(x) dx \right| \right\} \end{aligned}$$

4. (1)

$$\begin{cases} F(a) = F(x) + F'(x)(a-x) + \frac{F''(\xi)}{2}(a-x)^2 & (i) \\ F(b) = F(x) + F'(x)(b-x) + \frac{F''(\eta)}{2}(b-x)^2 & (ii) \end{cases}$$

$(b-x) \cdot (i) - (a-x) \cdot (ii)$ 可得

$$(a-b)F(x) = \frac{F''(\xi)}{2}(a-x)^2(b-x) + \frac{F''(\eta)}{2}(b-x)^2(a-x)$$

则

$$|b-a||F(x)| \leq \frac{M}{2} [(x-a)^2(b-x) + (b-x)^2(x-a)]$$

即

$$|F(x)| \leq \frac{M}{2}(x-a)(b-x) \leq \frac{M(b-a)^2}{8}$$

(2) 已知 $F(a) = F'(a) = F(b) = F'(b) = 0$, $|F''(x)| \leq M$, 证 $|F(x)| \leq \frac{M(b-a)^2}{16}$,

设 $F(x)$ 在 $c \in [a, b]$ 取得最大值, 若 $c = a$ 或 b , 则 $F'(c) = 0$, 若 $c \in (a, b)$, 则 $F'(c) = 0$ 。

若 $c \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right]$, 则

$$\begin{aligned} |F(c)| &= \left| \int_a^c F'(x) dx \right| \\ &= \left| \int_a^c F'(x) d \left(x - \frac{a+c}{2} \right) \right| \\ &= \left| \int_a^c F''(x) \left(x - \frac{a+c}{2} \right) dx \right| \\ &\leq \int_a^c \left| F''(x) \left(x - \frac{a+c}{2} \right) \right| dx \\ &= M \int_a^c \left| x - \frac{a+c}{2} \right| dx \\ &= \frac{(c-a)^2 M}{4} \\ &\leq \frac{\left(\frac{a+b}{2} - a \right)^2 M}{4} \\ &= \frac{(b-a)^2 M}{16} \end{aligned}$$

若 $c \in \left(\frac{a+b}{2}, b \right]$, 同理可得。设 $F(d) = \min_{x \in [a, b]} F(x)$, 同理可证

$$|F(d)| \leq \frac{(b-a)^2 M}{16}$$

故

$$\begin{aligned} |F(x)| &\leq \max\{|F(c)|, |F(d)|\} \\ &\leq \frac{(b-a)^2 M}{16} \end{aligned}$$

5.

$$\text{中间} \geq \int_0^n \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} n \cdot \sqrt{n} = \text{左边}$$

又

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n \sqrt{k} - \int_0^n \sqrt{x} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{k} - \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \sqrt{x} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k (\sqrt{k} - \sqrt{x}) dx = \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \frac{k-x}{\sqrt{k} + \sqrt{x}} dx \\ &< \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \frac{k-x}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k (k-x) \cdot (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) dx \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = \frac{\sqrt{n}}{2} \end{aligned}$$

故

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} < \frac{2n}{3}\sqrt{n} + \frac{\sqrt{n}}{2} = \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$$

6. 由

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(x) dx \right| \\ &= \left| \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx \right| \\ &\leq \left| \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx \right| + \left| \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx \right| \\ & \left| \int_a^{a+b} f(x) dx \right| = \left| \int_a^{\frac{a+b}{2}} f'(\theta x)(x-a) dx \right| \\ & \leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} M \cdot (x-a) dx = \frac{M}{8}(b-a)^2 \end{aligned}$$

类似可得

$$\left| \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx \right| \leq \frac{M}{8}(b-a)^2$$

故

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{M}{4}(b-a)^2$$

7. 由例题 11.3.4 可得

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{(b-a)}{2} \cdot [f(a) + f(b)] - \frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3 \\ &= -\frac{1}{12} f''(\xi) \cdot (b-a)^3 \end{aligned}$$

故

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{M}{12}(b-a)^3$$

8. 由

$$\begin{aligned} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) d(x-a) \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{b-a}{2} - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f'(x) d\frac{(x-a)^2}{2} \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{b-a}{2} - f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{(b-a)^2}{8} + \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{(x-a)^2}{2} f''(x) dx \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{b-a}{2} - f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{(b-a)^2}{8} + f''(\xi_1) \cdot \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{(x-a)^2}{2} dx \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx &= \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) \cdot d(x-b) \\
&= -f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{a-b}{2} - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f'(x) \cdot (x-b)dx \\
&= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{b-a}{2} - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f'(x) \cdot d\frac{(x-b)^2}{2} \\
&= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{b-a}{2} + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{(b-a)^2}{8} + f''(\xi_2) \cdot \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{(x-b)^2}{2} dx \quad (2)
\end{aligned}$$

(1)+(2) 得

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a) + f'(\xi_1) \cdot \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{(x-a)^2}{2} dx \\
&\quad + f''(\xi_2) \cdot \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{(x-b)^2}{2} dx \\
&= f\left(\frac{a+b}{2}\right) (b-a) + (f''(\xi_1) + f''(\xi_2)) \cdot \frac{(b-a)^3}{48} \\
&= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a) + f''(\xi) \frac{(b-a)^3}{24}
\end{aligned}$$

则

$$\int_a^b f(x)dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = -\frac{f''(\xi)(b-a)^3}{24}$$

9. 由 $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ 故 $\exists x_0 \in [-a, a]$ 使得 $f(x_0) = 0$ 做如下分解

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_a^1 f(x)dx + \int_{-1}^{-a} f(x)dx$$

则

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^1 f(x)dx \right| &= \left| \int_a^1 f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0) dx \right| \leq M \int_a^1 (x-x_0) dx = M \cdot \frac{(1-x_0)^2 - (a-x_0)^2}{2} \\
\left| \int_{-1}^{-a} f(x)dx \right| &\leq \left| \int_{-1}^{-a} f(x_0) + f'(\eta)(x-x_0) dx \right| \leq M \int_{-1}^{-a} (x_0-x) dx = m \cdot \frac{(1+x_0)^2 - (x_0+a)^2}{2} \\
\left| \int_{-1}^1 f(x)dx \right| &\leq \left| \int_a^1 f(x)dx \right| + \left| \int_{-1}^{-a} f(x)dx \right| \leq M \cdot \frac{(1-x_0)^2 - (a-x_0)^2 + (1+x_0)^2 - (x_0+a)^2}{2} \\
&= M(1-a^2)
\end{aligned}$$

10. $\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx$ 则

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) dx \\
\left| \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) dx \right| &\leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| dx \\
&\leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} M \cdot \left(\frac{k}{n} - x \right) dx \\
&= \frac{M}{2n^2}
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| &\leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) dx \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{M}{2n^2} = \frac{M}{2n} \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f\left(\frac{k-1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)}{2} + \frac{1}{2n} (f(0) - f(1)) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx - \frac{f\left(\frac{k-1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)}{2n} \right) + \frac{1}{2n} (f(0) - f(1)) \end{aligned}$$

设 $|f'(x)| \leq M$ 则

$$\begin{aligned} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx &= - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f d\left(\frac{2k-1}{2n} - x\right) \\ &= f\left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) \Big|_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) f'(x) dx \\ &= \frac{f\left(\frac{k-1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)}{2n} - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) f'(x) dx \\ \left| \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) f'(x) dx \right| &\leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} M \cdot \left|x - \frac{2k-1}{2n}\right| dx \\ &= \frac{M}{4n^2} \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) f'(x) dx &= \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{2n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) \cdot f' dx + \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) f' dx \\ &= f'(\xi_k) \cdot \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{2n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) dx + f'(\xi'_k) \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) dx \\ &= -\frac{f'(\xi_k)}{8n^2} + \frac{f'(\xi'_k)}{8n^2} \end{aligned}$$

故

$$nA_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{f'(\xi_k)}{8n} - \frac{f'(\xi'_k)}{8n} \right) + \frac{f(0) - f(1)}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nA_n = \frac{1}{8} \left(\int_0^1 f'(x) dx - \int_0^1 f'(x) dx \right) + \frac{f(0) - f(1)}{2} = \frac{f(0) - f(1)}{2}$$

12.

$$B_n = \sum_{k=1}^n \left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx - \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \right)$$

又

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx &= \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) d\left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) \\
 &= \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{2n}} f(x) d\left(x - \frac{k-1}{n}\right) + \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}} f(x) d\left(x - \frac{k}{n}\right) \\
 &= - \left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{2n}} f'(x) \cdot \left(x - \frac{k-1}{n}\right) dx + \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}} f'(x) \cdot \left(x - \frac{k}{n}\right) dx \right] + f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \cdot \frac{1}{n} \\
 &= \frac{1}{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{2n}} f''(x) \cdot \frac{\left(x - \frac{k-1}{n}\right)^2}{2} dx + \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}} f''(x) \cdot \frac{\left(x - \frac{k}{n}\right)^2}{2} dx \\
 &= \frac{1}{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + f''(\xi_k) \frac{1}{48n^3} + f''(\xi'_k) \cdot \frac{1}{48n^3}
 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
 n^2 B_n &= \sum_{k=1}^n \left(f''(\xi_k) \frac{1}{48n} + f''(\xi'_k) \frac{1}{48n} \right) \\
 \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 B_n &= \frac{1}{48} (f'(1) - f'(0)) + \frac{1}{48} \cdot (f'(1) - f'(0)) \\
 &= \frac{1}{24} (f'(1) - f'(0))
 \end{aligned}$$

11.4 积分学在分析中的其他应用

11.4.1 练习题

1. (1)

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\
 &= \arctan x \Big|_0^1 = \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+(i-1)}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{i-1}{n}}} \cdot \frac{1}{n} \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = 2\sqrt{2} - 2
 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[\sum_{k=0}^n (2k+1)^a]^{b+1}}{[\sum_{k=1}^n (2k)^b]^{a+1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (\frac{2k+1}{n})^a \cdot \frac{2}{n}]^{b+1}}{[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\frac{2k}{n})^b \cdot \frac{2}{n}]^{a+1}} \\
 &= \frac{[\frac{1}{2} \cdot \int_0^2 x^a dx]^{b+1}}{[\frac{1}{2} \int_0^2 x^b dx]^{a+1}} \\
 &= \frac{[\frac{1}{a+1} 2^a]^{b+1}}{[\frac{1}{b+1} \cdot 2^b]^{a+1}} \\
 &= 2^{a-b} \cdot \frac{(b+1)^{a+1}}{(a+1)^{b+1}}
 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\sum_{k=0}^{n-1} \ln(2 + \cos \frac{k\pi}{n}) \cdot \frac{\pi}{n}} \\
 &= e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(2 + \cos \frac{k\pi}{n}) \cdot \frac{\pi}{n}} \\
 &= e^{\int_0^\pi \ln(2+x) dx} \\
 &= e^{\ln(2+\pi) \cdot \pi - \int_0^\pi x \frac{1}{x+2} dx} \\
 &= e^{(\pi+2) \cdot \ln(\pi+2) - (\pi+2) \ln 2}
 \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (n + (k-1))} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k-1}{n}\right)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{k-1}{n}) \cdot \frac{1}{n}} \\
 &= e^{\int_0^1 \ln(1+x) dx} \\
 &= e^{\int_1^2 \ln x dx} \\
 &= e^{2 \ln 2 - \int_1^2 1 dx} \\
 &= e^{2 \ln 2 - 1}
 \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(x + \frac{k}{n}\right) \cdot \left(x + \frac{k-1}{n}\right)} \cdot \frac{1}{n} \\
 &= \int_0^1 (x+t) dt = \left. \frac{(x+t)^2}{2} \right|_0^1 \\
 &= \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{x^2}{2} \\
 &= \frac{2x+1}{2}
 \end{aligned}$$

2. 根据 \sqrt{x} 的图像得

$$\begin{aligned}
 \text{左边} &< \int_1^{n+1} \sqrt{x} dx < \frac{2}{3} \cdot (n+1) \cdot \sqrt{n+1} \\
 &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} n \cdot \sqrt{n}
 \end{aligned}$$

令 $A_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3}$, $\forall A \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$ 则存在 N , $n > N$ 时有 $A_n < A$, 故

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} < An^{\frac{3}{2}}$$

3.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left[\sum_{k=1}^n \ln f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} \right] \\
 &= \exp \left[\int_0^1 \ln f(x) dx \right]
 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 \ln 2 - A_n &= \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{n+k}{n+(k-1)} \right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \\
 &= \sum_{k=1}^n \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{n+k} \right) - \frac{1}{n+k} \right] \\
 &= \sum_{k=1}^n \left\{ - \left[-\frac{1}{n+k} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+k} \right)^2 + \frac{1}{3!} \frac{6}{(1-\theta_k)^3} \left(-\frac{1}{n+k} \right)^3 \right] - \frac{1}{n+k} \right\} \\
 &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+k} \right)^2 + \frac{1}{3!} \frac{6}{(1-\theta_k)^3} \left(\frac{1}{n+k} \right)^3 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n+k} \right)^2 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1-\theta_k)^3} \left(\frac{1}{n+k} \right)^3 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n+k} \right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot (\ln 2 - A_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{n+k} \right)^2 + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \right)^2 \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{1+x} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\ln 2 - B_n &= \sum_{k=1}^n \left[\ln \left(\frac{n+k}{n+k-1} \right) - \frac{2}{2n+(2k-1)} \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \left[\frac{1}{n+(k-1)} - \frac{1}{2(n+(k-1))^2} + \frac{1}{3(n+(k-1))^3} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{2n+(2k-1)} \right\} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{[n+(k-1)]^2 [n+(k-\frac{1}{2})]} + \frac{1}{3(n+(k-1))^3} \right] + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

则

$$n^2 (\ln 2 - B_n) = \sum_{k=1}^n \left[-\frac{1}{4} \frac{1}{[1+\frac{k-1}{n}]^2 \cdot [1+\frac{k-\frac{1}{2}}{n}]} \frac{1}{n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1+\frac{k-1}{n})^3} \frac{1}{n} \right] + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (\ln 2 - B_n) &= -\frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^3} dx + \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^3} dx \\ &= \frac{1}{12} \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^3} dx \\ &= \frac{1}{12} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)^2} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{32}\end{aligned}$$

6. $\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = 2 \int_0^1 (1-x^2)^n dx$ 则

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^1 (1-x^2)^n dx = x(1-x^2)^n \Big|_0^1 + 2n \int_0^1 x^2 (1-x^2)^{n-1} dx \\ &= -2n \int_0^1 (1-x^2)^n dx + 2n \int_0^1 (1-x^2)^{n-1} dx\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}I_n &= -2nI_n + 2nI_{n-1} \Rightarrow I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} \\ I_n &= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\end{aligned}$$

由 Wallis 公式得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

故

$$\sqrt{n} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = 2\sqrt{n} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = 2 \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \rightarrow \sqrt{2\pi} (n \rightarrow +\infty)$$

$$7. a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}, \text{ 则 } \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{en^{n+\frac{1}{2}}}, \ln \frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{en^{n+\frac{1}{2}}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$$

由

$$\frac{1}{n + \frac{1}{2}} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$0 \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

可得

$$1 \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq e^{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}$$

$$a_n \cdot e^{-\frac{1}{4n}} \leq a_{n+1} \cdot e^{-\frac{1}{4(n+1)}}$$

又 $a_n > 0$, 且单调递减, 故设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \alpha$, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n^2}{a_{2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n!)^2}{n^{2n+1}} \cdot \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n)!}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+\frac{1}{2}} (n!)^2}{(2n)! \cdot \sqrt{n}}$$

$$= \sqrt{2\pi} = \alpha$$

则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n e^{-\frac{1}{4n}} = \alpha$

$$\sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{4n}} < a_n e^{-\frac{1}{4n}} < \sqrt{2\pi}$$

$$\sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2n\pi} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{1}{4n}}$$

故

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{4n}}$$

其中 $0 < \theta_n < 1$

8.

$$(2n)!! = 2^n \cdot n! \sim 2^n \cdot \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!} \sim \sqrt{n\pi}$$

$$(2n-1)! \sim \frac{(2n)!}{\sqrt{n\pi}} \sim 2^n \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{(2n)!}{(2n)!!(2n)!!} \cdot 2^{2n}$$

$$\sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$$

9. (1)

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{n!}{n^n \sqrt{n}} \sim \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{e^n}$$

$$\begin{aligned}\ln \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}} \cdot \frac{1}{e^n} &= n^2 \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - n \\ &= n^2 \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - n \\ &= -\frac{1}{2} + o(1)\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}} \cdot \frac{1}{e^n} = e^{-\frac{1}{2}}$$

可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{n!}{n^n \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^{n^2} \sqrt{2\pi}}{n^{n^2} e^n} = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \sqrt{2\pi}$$

(2) 由

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}-1\right) \cdots \left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{n! \cdot 2^n} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

得

$$(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \sqrt{n} = \sqrt{n} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{\sqrt{2n+1}(2n-1)!!}{(2n)!!} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} (n \rightarrow +\infty)$$

10.

$$\begin{aligned}\sqrt{n} \prod_{k=1}^n \frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} &= \sqrt{n} \cdot \frac{n!}{(n+1)^n} e^{n-1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n}} \sim \frac{\sqrt{2\pi n} e^{-1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n e^{1+\frac{1}{2}+\cdots-\frac{1}{n}-\ln n}} \rightarrow \frac{\sqrt{2\pi}}{e^{1+\gamma}}\end{aligned}$$

11.5 对于教学的建议

11.5.1 第一组参考题

1. 令 $g(x) = f(x)e^{-x}$, 则有 $\int_0^1 g'(x) dx = \frac{1}{e} \Rightarrow \int_0^1 |f(x) - f'(x)| dx \geq \int_0^1 |f(x) - f'(x)| e^{-x} dx =$

$$\int_0^1 |g'(x)| dx \geq \int_0^1 g'(x) dx = \frac{1}{e}$$

2. 由 $\int_0^\pi x a^{\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi a^{\sin x} dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\sin x} dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\sin x} dx$. 再由柯西不等式可得

$$\int_0^\pi x a^{\sin x} dx \int_0^{\pi/2} a^{-\cos x} dx = \pi \int_0^{\pi/2} a^{\sin x} dx \int_0^{\pi/2} a^{-\sin x} dx \geq \frac{\pi^3}{4}$$

3. (1) $F(x)F(y)(F(x)-F(y))(x-y) \leq 0 \Rightarrow xF^2(x) \int_a^b F(y) dy + F(x) \int_a^b yF^2(y) dy \leq F^2(x) \int_a^b yF(y) dy + xF(x) \int_a^b F^2(y) dy \Rightarrow \int_a^b F(y) dy \int_a^b xF^2(x) dx + \int_a^b yF^2(y) dy \int_a^b F(x) dx \leq \int_a^b yF(y) dy \int_a^b F^2(x) dx + \int_a^b F^2(y) dy \int_a^b xF(x) dx \Rightarrow \int_a^b F(x) dx \int_a^b xF^2(x) dx \leq$

$$\int_a^b F^2(x)dx \int_a^b xF(x)dx$$

(2) 由 $p(x)p(y)(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$ 类似于 (1), 先对 x 积分, 再对 y 积分, 即可得到不等式。

4. $\frac{x}{1-x}$ 在 $[0, 1)$ 上是凸函数, 由 Jensen 不等式可得, $\int_0^1 \frac{f(x)}{1-f(x)} dx \geq \frac{\int_0^1 f(x) dx}{1 - \int_0^1 f(x) dx}$

5. $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \sin x dx, \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \cos x dx$ 由于 $\cos \sin x \geq \cos x \geq \sin \cos x$, 故 $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx \geq \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

6. 令 $g(x) = (x-a)^n(b-x)^n$, 则 $\int_a^b f(x) dx = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_a^b f g^{(2n)} dx = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left[f(x) g^{(2n-1)}(x) \Big|_a^b - \int_a^b f' g^{(2n-1)} dx \right] = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left[-f'(x) g^{(2n-2)}(x) \Big|_a^b + \int_a^b f^{(2)} g^{(2n-2)} dx \right] = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_a^b f^{(2)} g^{(2n-2)} dx = \dots = (-1)^n \int_a^b f^{(2n)} g dx \leq \frac{(-1)^n}{(2n)!} \max_{a \leq x \leq b} \{ |f^{(2n)}(x)| \}$ 用归纳法可得 $\int_a^b g(x) dx = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}$. 从而得到

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(n!)^2 (b-a)^{2n+1}}{(2n)! (2n+1)!} \max \{ |f^{(2n)}(x)| \mid x \in [a, b] \}$$

7. 由柯西不等式得 $\frac{d_{n+1}}{d_n}$ 单调递增. 易知 $\frac{d_{n+1}}{d_n}$ 有界故设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = l$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{d_n} =$

$l. g > 0 \Rightarrow 0 < m = \min g(x) < \max g(x) = M$, 因此 $m \int_a^b |f(x)|^n dx \leq d_n \leq$

$M \int_a^b |f(x)|^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{d_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\int_a^b |f(x)|^n} = \max |f(x)|$

8. 由

$$\frac{\sin(\pi/n)}{n+1} + \frac{\sin(2\pi/n)}{n+1/2} + \dots + \frac{\sin \pi}{n+1/n} - \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \sin(k\pi/n) \right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \pi/n}{n+1} + \frac{\sin 2\pi/n}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{\sin \pi}{n+\frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \sin(k\pi/n) \right)$$

可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin(k\pi/n) = \int_0^1 \sin(\pi x) dx = \frac{2}{\pi}$$

9. 由

$$\ln \left(\cos \frac{\sqrt{2k-1}}{n} a^2 \right) = \ln \left(1 - 2 \sin \frac{\sqrt{2k-1}}{2n} a^2 \right) = -\frac{2k-1}{2n^2} a^4 + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)$$

可得

$$\sum_{k=1}^{n+1} \ln \cos \frac{\sqrt{2k-1}}{n} a^2 = -a^4 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2n^2} + o(1) = -\frac{a^4}{2} + o(1)$$

10. 由

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x) dx \right) + f(n) \geq 0$$

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx \leq 0$$

可知 $\{a_n\}$ 单调递减且有下界, 故极限存在。

11. 由

$$x \in [0, 1], x - \frac{1}{3!}x^3 \leq \sin x \leq x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$$

可得

$$\int_0^1 x^2 - \frac{1}{3!}x^6 dx \leq \int_0^1 \sin x^2 dx \leq \int_0^1 x^2 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{5!}x^{10} dx$$

12. 令 $a_n = \left| \int_{\frac{1}{n\pi}}^{\frac{1}{(n-1)\pi}} \sin \frac{1}{t} dt \right|$ 则 $\{a_n\}$ 单调递减趋于 0. 而

$$\int_0^{\frac{1}{n\pi}} \sin \frac{1}{t} dt = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^{k-1} a_k$$

由 Leibniz 判别法可知上述级数收敛, 有知道 $\operatorname{sgn} \left(\int_0^{\frac{1}{n\pi}} \sin \frac{1}{t} dt \right) = (-1)^n$ 可得 $F(x)$ 有无穷多个零点

13. 由积分第二中值定理可得

$$\text{原式} = \left| \int_a^b \frac{f'(x) \cos f(x)}{f'(x)} dx \right| = \frac{\left| \int_a^\xi f'(x) \cos f(x) dx \right|}{f'(a)} = \frac{|\sin f(\xi) - \sin f(a)|}{f'(a)} \leq \frac{2}{m}$$

14. $f'(x) > 0$, 可得 $f(x)$ 至多有一个零点, 设为 c , 则 $f(x) < 0, x \in (a, c), f(x) > 0, x \in (c, b)$ 则

$$\int_a^b \sin f(x) dx = \int_a^c \sin f(x) dx + \int_c^b \sin f(x) dx$$

若 $\left| \int_c^b \sin f(x) dx \right| > \left| \int_a^c \sin f(x) dx \right|$ 则

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \sin f(x) dx \right| &\leq \int_c^b \sin f(x) dx = \int_c^b \frac{f'(x) \sin f(x)}{f'(x)} dx \\ &\leq \frac{\int_c^b f'(x) \sin f(x) dx}{m} = \frac{1 - \cos f(b)}{m} \\ &\leq \frac{2}{m} \end{aligned}$$

类似可得当 $\left| \int_c^b \sin f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^c \sin f(x) dx \right|$ 时也有

$$\left| \int_a^b \sin f(x) dx \right| \leq \frac{2}{m}$$

当 $f(x)$ 无零点, 不妨设 $f(x) > 0$, 则

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \sin f(x) dx \right| &= \int_a^b \sin f(x) dx = \int_a^b \frac{f'(x) \sin f(x)}{f'(x)} dx \\ &\leq \frac{\int_a^b f'(x) \sin f(x) dx}{m} \\ &= \frac{\cos f(a) - \cos f(b)}{m} \leq \frac{2}{m} \end{aligned}$$

综上可得

$$\left| \int_a^b \sin f(x) dx \right| \leq \frac{2}{m}$$

15. S_n 可写为

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1) \cdots (n-k)}{(n+2) \cdots (n+k+1)} \\ &= 1 + \frac{1}{\binom{2n}{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{n+k+1} \\ &= 1 + \frac{1}{\binom{2n}{n-1}} \left(\binom{2n}{n+2} + \binom{2n}{n+3} + \cdots + \binom{2n}{2n} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{\binom{2n}{n-1}} \left(\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} - 2 \binom{2n}{n-1} - \binom{2n}{n} \right) \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\binom{2n}{n-1}} 2^{2n} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n} \binom{2n}{n-1}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!(n+1)!2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}$$

最后用 Stirling 公式, 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

11.5.2 第二组参考题

1. 由 $\rho^2(\theta) + \rho^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \leq 1$ 可得

$$S = \frac{1}{2} \int_0^\pi \rho^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\rho^2(\theta) + \rho^2\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \right) d\theta \leq \frac{\pi}{4}$$

2. 等式等价于

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_1^n \ln f(a + kh_n) = \int_a^b \ln f(x) dx$$

成立, 而由积分的定义可得上式成立

取 $f(x) = r^2 - 2r \cos x + 1, x \in [0, 2\pi]$ 则

$$\left(\prod_{k=1}^n \left(r^2 - 2r \cos \frac{2k\pi}{n} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{k=1}^{2n} \left(r - e^{\frac{2k\pi}{n}} \right) \right)^{\frac{1}{n}} = (r^{2n} - 2r^n + 1)^{\frac{1}{n}}$$

由于 $r > 1$, 令 $n \rightarrow +\infty$ 可得。

3. 设 $M = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|, g(x) = x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x, x \in [0, 1]$

$$(1) 1 = \int_0^1 x^2 f(x) dx \leq \int_0^1 Mx^2 = \frac{M}{3} \Rightarrow M \geq 3$$

$$(2) \text{ 由于 } \int_0^1 |g(x)| = \frac{2 - \sqrt{2}}{6} < \frac{1}{10.2} \text{ 又}$$

$$1 = \int_0^1 fg dx \leq \int_0^1 |fg| dx \leq M \int_0^1 |g| dx < \frac{M}{10.2}$$

可得 $M > 10.2$

4. (反证) 假设对 $\forall x \in (0, 1), |f(x)| < 2^n(n+1)$. 则

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 x^n f(x) dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^n f(x) dx \\ &\leq \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^n |f(x)| dx < 2^n(n+1) \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^n dx \\ &= 2^n(n+1) \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x\right)^n dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^n dx \right] \\ &= 2^n(n+1) \cdot 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^n dx \\ &= 2^{n+1} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n+1} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = 1 \end{aligned}$$

矛盾. 故必 $\exists \xi \in (0, 1), \text{ s. t. } |f(\xi)| \geq 2^n(n+1)$

5. (1) 设 $(n-1)\pi \leq a < n\pi, \quad m\pi \leq b < (m+1)\pi, m \geq n$

(i) 若 $n = m$, 当 n 为偶数则

$$\begin{aligned} & - \int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi + t} dt \leq \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin t}{t} dt \leq \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx \\ & = \int_a^{n\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{n\pi}^b \frac{\sin x}{x} dx \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\pi \frac{\sin t}{n\pi + t} dt \leq \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt \end{aligned}$$

若 n 为奇数, 类似可得

$$- \int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi + t} dt \leq \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx \leq \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$$

(ii) 若 $m > n$, 则

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx = \int_a^{n\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{k=n}^{m-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{m\pi}^b \frac{\sin x}{x} dx$$

若 n 为偶数, m 为偶数, 则

$$\int_a^{n\pi} \frac{\sin x}{x} dx \leq 0$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=n}^{m-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{m\pi}^b \frac{\sin x}{x} dx \\
&= \int_0^\pi \frac{\sin x}{n\pi+x} dx - \left(\int_0^\pi \frac{\sin x}{(n+1)\pi+x} dx - \int_0^\pi \frac{\sin x}{(n+2)\pi+x} dx \right. \\
&+ \cdots + \left. \int_0^\pi \frac{\sin x}{(m-1)\pi+x} dx - \int_{m\pi}^b \frac{\sin x}{x} dx \right) \\
&\leq \int_0^\pi \frac{\sin x}{n\pi+x} dx \leq \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \\
&\quad - \int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi+t} dt \leq \int_a^{n\pi} \frac{\sin x}{x} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=n}^{m-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{m\pi}^b \frac{\sin x}{x} dx \\
&= \left(\int_0^\pi \frac{\sin x}{n\pi+x} dx - \int_0^\pi \frac{\sin x}{(n+1)\pi+x} dx \right) + \cdots \\
&+ \left(\int_0^\pi \frac{\sin x}{(m-2)\pi+x} dx - \int_0^\pi \frac{\sin x}{(m-1)\pi+x} dx \right) + \int_{m\pi}^b \frac{\sin x}{x} dx \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

故

$$- \int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi+x} dx \leq \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx \leq \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$$

其它情况类似, 故取 $c_1 = - \int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi+x} dx, c_2 = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$

(2) 若 a, b 同号, $0 \leq a < b$ 则利用 (1) 可得, 若 $a < b \leq 0$, 令 $x = -t$, 则

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx = \int_{-b}^{-a} \frac{\sin t}{t} dt$$

由 (1) 可得, 若异号 $a < 0 < b$, 考虑

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx = \int_a^0 \frac{\sin x}{x} dx + \int_0^b \frac{\sin x}{x} dx$$

再次利用 (1) 可得。即得

6. 如图 11.2, 可得

$$S_1 = \int_0^b g(y) dy, \quad S_2 = \int_0^a f(x) dx$$

根据几何意义可得

$$bf(b) + af(a) - f(a)g(b) \geq S_1 + S_2 \geq ab$$

即

$$ab \leq \int_0^a f(x) dx + \int_0^b g(y) dy \leq bg(b) + af(a) - f(a)g(b)$$

根据图像可知等号成立当且仅当 $b = f(a)$

7. **证明** (1) 下证满足题目条件的 f 在 (a, b) 内任何闭区间必于端点取到最大值。否则存在闭区间 $[c, d] \subset (a, b)$, 使得 $\max_{x \in [c, d]} f(x) = f(x_0), x_0 \in (c, d)$, 不妨设 $x_0 \in$

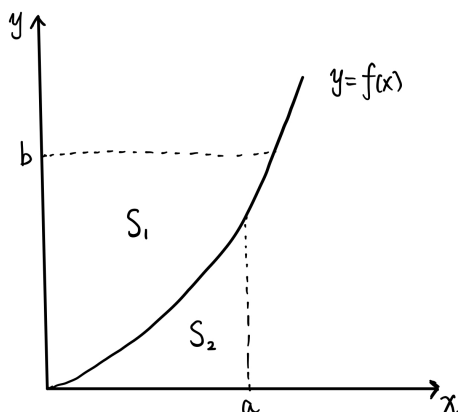


图 11.2

$\left(c, \frac{c+d}{2}\right]$. 依题意可知

$$f\left(\frac{c+2x_0-c}{2}\right) \leq \frac{1}{2x_0-c-c} \int_c^{2x_0-c} f(x) dx,$$

即

$$\int_c^{2x_0-c} [f(x) - f(x_0)] dx \geq 0,$$

而由 $f(x_0)$ 定义知

$$\int_c^{2x_0-c} [f(x) - f(x_0)] dx \leq 0,$$

所以

$$\int_c^{2x_0-c} [f(x) - f(x_0)] dx = 0, f(x) = f(x_0), \forall x \in [c, 2x_0 - c],$$

则 f 在 $[c, d]$ 端点取到最大值, 矛盾.

对 $\forall [x_1, x_2] \subset (a, b)$, 令 $h(x) = f(x) - f(x_1) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, $x \in [x_1, x_2]$,

显然

h 满足题目条件, 因此 $h(x) \leq \max\{h(x_1), h(x_2)\} = 0$, 此即 $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, $\forall x \in [x_1, x_2]$, 即证 f 为下凸函数.

(2) 反设 f 不为下凸函数, 则存在 $\lambda_0 \in (0, 1)$, $x_0, y_0 \in (a, b)$, $x_0 \neq y_0$, 使得


$$f(\lambda_0 x_0 + (1 - \lambda_0)y_0) > \lambda_0 f(x_0) + (1 - \lambda_0)f(y_0).$$

不妨设 $x_0 < y_0$. 令 $g(\lambda) = f(\lambda x_0 + (1 - \lambda)y_0) - \lambda f(x_0) - (1 - \lambda)f(y_0)$, $\lambda \in [0, 1]$, 则 $g(\lambda_0) > 0$, $g(0) = g(1) = 0$, 故由 g 连续性可知, 存在 $\{\lambda_0\} \subset [c, d] \subset [0, 1]$, 使得 $g(\lambda) > 0$,

$\forall \lambda \in (c, d)$, 且 $g(c) = g(d) = 0$. 因此在区间 (c, d) 内函数 $y = f(\lambda x_0 + (1 - \lambda)y_0)$ 的图象恒在直线 $y = \lambda f(x_0) + (1 - \lambda)f(y_0)$ 的上方, 且在 $\lambda = c, d$ 时二者相交, 由几何意义易知对 $\forall t \in (0, 1)$, 成立 $f(tc + (1 - t)d) > tf(c) + (1 - t)f(d)$, 类似 Hadamard 不等式的证明方法, 两边积分即得矛盾.

(3) 分别将 (1) 和 (2) 中的 \leq 和 \geq 改为 \geq 和 \leq , 易知都能得到 f 为下凸函数的

结论. 因此若 (1) 或 (2) 中不等式的任何一个始终成立等号, 则 f 既是上凸函数, 又是下凸函数, 显然 f 只能是线性函数.

 **笔记** (1) 的不等式条件可以等价

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[f(x) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \right] dx \geq 0,$$

这就是 (1) 的证明思路来源. 另外, 其证明过程中用到了如下常见性质:

f 在区间 I 中为下凸函数 $\iff \forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$, 下列不等式

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

中任何两个组成的不等式成立. 同理对于上凸函数.

(2) 的证明关键在于理解 g 的几何意义, 然后构造可计算的非下凸区间, 可辅以作图来理解.

(3) 从 f 既是上凸函数又是下凸函数得到 f 是线性函数, 可利用上述常见性质, 辅以一个取极限得到导数的过程即容易得到结论.

8. (1) 令 $g(x) = \int_0^x |f'(t)| dt$, $f(x) = \int_0^x f'(t) dt$ 则

$$\begin{aligned} \int_0^a |f(x)f'(x)| dx &\leq \int_0^a g(x)g'(x) dx = \frac{1}{2}g^2(a) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^a |f'(t)| dt \right)^2 \leq \frac{a}{2} \int_0^a |f'(t)|^2 dt \end{aligned}$$

(2)

$$\int_0^a |f(x)f'(x)| dx = \int_0^{\frac{a}{2}} |f(x)f'(x)| dx + \int_{\frac{a}{2}}^a |f(x)f'(x)| dx$$

其中

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{a}{2}} |f(x)f'(x)| dx &\leq \frac{a}{4} \int_0^{\frac{a}{2}} |f'(x)|^2 dx \\ \int_{\frac{a}{2}}^a |f(x)f'(x)| dx &= \int_0^{\frac{a}{2}} |f'(a-t)f(a-t)| dt \leq \frac{a}{4} \int_0^{\frac{a}{2}} |f'(a-t)|^2 dt \\ &= \frac{a}{4} \int_{\frac{a}{2}}^a |f'(x)|^2 dx \end{aligned}$$

故

$$\int_0^a |f(x)f'(x)| dx \leq \frac{a}{4} \int_0^a |f'(x)|^2 dx$$

9.

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x)}{A + \int_0^x f(t)g(t)dt} &\leq g(x) \\ \Rightarrow \int_0^y \frac{f(x)g(x)}{A + \int_0^x f(t)g(t)dt} dx &\leq \int_0^y g(x) dx \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{f(x)g(x)}{A + \int_0^x f(t)g(t)dt} dx &= \ln \left(A + \int_0^x f(t)g(t)dt \right) \Big|_0^y \\ &= \ln \frac{A + \int_0^x f(t)g(t)dt}{A} \end{aligned}$$

可得

$$A + \int_0^x f(t)g(t)dt \leq A \exp\left(\int_0^x g(t)dt\right)$$

若 $\exists x_1$ 使得 $f(x_1) > A \exp\left(\int_0^{x_1} g(t)dt\right)$, 则存在 (a, b) 使得 $x_1 \in (a, b)$ 且

$$f(x) > A \exp\left(\int_0^x g(t)dt\right), \forall x \in (a, b)$$

则

$$\begin{aligned} \int_0^b g(x)dx &= \int_a^b \frac{A \exp\left(\int_0^x g(t)dt\right) g(x)}{A \exp\left(\int_0^x g(t)dt\right)} dx \\ &\leq \int_a^b \frac{A \exp\left(\int_0^x g(t)dt\right) g(x)}{A + \int_0^x f(t)g(t)dt} dx \\ &< \int_a^b \frac{f(x)g(x)}{A + \int_0^x f(t)g(t)dt} dx \leq \int_a^b g(x)dx \end{aligned}$$

矛盾。

10. 由于 $f(x) \neq 0$, 不妨设 $f(x) > 0$. 记

$$M = \max_{0 \leq x \leq 1} f(x) = f(c) \quad (0 < c < 1)$$

因 $f(0) = f(1) = 0$, 由微分中值定理, 得

$$f(c) - f(0) = f'(\xi)c \quad (0 < \xi < c)$$

$$f(1) - f(c) = f'(\eta)(1 - c) \quad (c < \eta < 1)$$

由此得

$$f'(\xi) = \frac{f(c)}{c}, \quad f'(\eta) = \frac{f(c)}{c-1}$$

因此

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx &> \frac{1}{f(c)} \int_0^1 |f''(x)| dx \geq \frac{1}{f(c)} \int_{\xi}^{\eta} |f''(x)| dx \\ &\geq \frac{1}{f(c)} \left| \int_{\xi}^{\eta} f''(x) dx \right| = \frac{1}{f(c)} |f'(\eta) - f'(\xi)| \\ &= \frac{1}{f(c)} \left| \frac{f(c)}{c-1} - \frac{f(c)}{c} \right| = \frac{1}{|c(c-1)|} \\ &= \frac{1}{c(1-c)} \geq 4 \end{aligned}$$

11. 由题意即得

$$\frac{(f(x) - m)(f(x) - M)}{f(x)} \leq 0, \quad x \in [0, 1]$$

变形为

$$f(x) - (m + M) + \frac{mM}{f(x)} \leq 0$$

积分就有

$$\int_0^1 f(x) dx + mM \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \leq m + M$$

令 $u = mM \int_0^1 \frac{dx}{f(x)}$, 则 $\int_0^1 f(x)dx + u \leq m + M$, 或

$$u \int_0^1 f(x)dx \leq (m + M)u - u^2 = \left(\frac{m + M}{2}\right)^2 - \left(u + \frac{m + M}{2}\right)^2 \leq \frac{(m + M)^2}{4}$$

所以

$$mM \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \int_0^1 f(x)dx = u \int_0^1 f(x)dx \leq \frac{(m + M)^2}{4}$$

即证得

$$1 \leq \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \leq \frac{(m + M)^2}{4mM}$$

12. 令 $M = \sup_{x \in [a, b]} \{|f'(x)|\}$, 若 $M = +\infty$ 则必存在 $\xi \in [a, b]$, s. t. $f'(\xi) > \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)|dx$, 若 $M + \infty$ 为有限数, 由 Lagrange 中值定理及 $f(a) = f(b) = 0$, 得

$$\begin{cases} |f(x)| = |f'(\xi_1)|(x-a) \leq M(x-a), & a < \xi_1 < x \leq \frac{a+b}{2} \\ |f(x)| = |f'(\xi_2)|(b-x) \leq M(b-x), & \frac{a+b}{2} \leq x < \xi_2 < b \end{cases}$$

令

$$g(x) = \begin{cases} M(x-a), & a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ M(b-x), & \frac{a+b}{2} < x \leq b \end{cases}$$

则 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续非负, 但在 $\frac{a+b}{2}$ 处不可导而 $f(x)$ 可导, 故 $|f(x)| \leq g(x)$, 且 $|f(x)| \not\equiv g(x)$. 必 $\exists x_0 \in (a, b)$, s. t. $|f(x_0)| < g(x_0)$, 可得

$$\int_a^b |f(x)|dx < \int_a^b g(x)dx$$

注意, 这里是不等号成立! 计算 $\int_a^b g(x)dx$ 得

$$\int_a^b |f(x)|dx < \int_a^b g(x)dx = M \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)dx \right] = \frac{(b-a)^2}{4} M$$

即有

$$M > \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)|dx \geq \frac{4}{(b-a)^2} \left| \int_a^b f(x)dx \right|$$

由 M 为上确界, $\exists x_1 \in [a, b]$, s. t. $|f'(x_1)| > \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)|dx$. 再由 Darboux 定理 $\exists \xi \in (a, b)$, s. t.

$$|f'(\xi)| > \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)|dx \geq \frac{4}{(b-a)^2} \left| \int_a^b f(x)dx \right|$$

13. 令 $p(x) = x^3 - x^2$, 则 $p(0) = p(1) = p'(0) = 0, p'(1) = 1, p''(x) = 6x - 2, p^{(4)}(x) = 0$ 则

$$\int_0^1 [p''(x)]^2 dx = \int_0^1 (36x^2 - 24x + 4) dx = 12 - 12 + 4 = 4$$

当 $f(x) = p(x) = x^3 - x^2$ 时, 等号成立. 考虑积分 $\int_0^1 ([f''(x)]^2 - [p''(x)]^2) dx$, 有

$$\begin{aligned} & \int_0^1 ([f''(x)]^2 - [p''(x)]^2) dx \\ &= \int_0^1 (f''(x) - p''(x))^2 dx + \int_0^1 2f''(x)p''(x) dx - 2 \int_0^1 [p''(x)]^2 dx \\ &= \int_0^1 [f''(x) - p''(x)]^2 dx + 2f'(x)p''(x)|_0^1 - 2 \int_0^1 f'(x)p'''(x) dx - 8 \\ &= \int_0^1 [f''(x) - p''(x)]^2 dx + 2f'(1)p''(1) - 2f'(0)p''(0) - 2f(x)p'''(x)|_0^1 \\ & \quad + 2 \int_0^1 f(x)p^{(4)}(x) dx - 8 \\ &= \int_0^1 [f''(x) - p''(x)]^2 dx + 2 \times 1 \times 4 - 0 - 0 + 0 - 8 \geq 0 \end{aligned}$$

所以, $\int_0^1 [f''(x)]^2 dx \geq \int_0^1 [p''(x)]^2 dx = 4$, 且等号仅当 $f''(x) = p''(x)$ 时成立. 再由 f 与 p 满足的条件知, 仅当 $f(x) = p(x) = x^3 - x^2$ 时, 等号成立.

14. 由 Lipschitz 条件知 f 在 $[a, b]$ 上连续, 故可设 $\min_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_0) = m > 0$, 则

$$\begin{aligned} 0 < m \leq f(x) \leq m + L|x - x_0|, x \in [a, b] \\ 0 < \frac{1}{m + L|x - x_0|} \leq \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{m}, x \in [a, b] \end{aligned}$$

两边积分, 则

$$\begin{aligned} m(b-a) &\leq \int_a^b f(x) dx \leq m(b-a) + \frac{L}{2} [(x_0 - a)^2 + (x_0 - b)^2] \\ \frac{1}{L} \ln \frac{(x_0 + \frac{m}{L} - a)(-x_0 + \frac{m}{L} + b)}{(\frac{m}{L})^2} &\leq \beta \leq \frac{b-a}{m} \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\leq \sup_{x_0 \in [a, b]} \left\{ m(b-a) + \frac{L}{2} [(x_0 - a)^2 + (x_0 - b)^2] \right\} \\ &\quad \inf_{x_0 \in [a, b]} \left\{ \frac{1}{L} \ln \frac{(x_0 + \frac{m}{L} - a)(-x_0 + \frac{m}{L} + b)}{(\frac{m}{L})^2} \right\} \leq \beta \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\leq m(b-a) + \frac{L}{2}(b-a)^2 \\ b-a &\leq \frac{(e^{L\beta} - 1)m}{L} \end{aligned}$$

则

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{(e^{L\beta} - 1)m^2}{L} + \frac{L}{2} \left[\frac{(e^{L\beta} - 1)m}{L} \right]^2 = \frac{(e^{2L\beta} - 1)m^2}{2L}$$

欲证

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{e^{2L\beta} - 1}{2L\alpha} \int_c^d f(x) dx$$

只需证


$$\frac{(e^{2L\beta} - 1)m^2}{2L} \leq \frac{e^{2L\beta} - 1}{2L\alpha} \int_c^d f(x)dx$$

即证

$$m^2 \leq \frac{\int_c^d f(x)dx}{\int_c^d \frac{1}{f(x)}dx}$$

而

$$f(x) \geq m, \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{m}$$

 **笔记** 本题关键在于 Lipschitz 条件的使用, 然后敢于不断计算下去. 为什么取 $\int_a^b f(x)dx$ 和 $\int_a^b \frac{dx}{f(x)}$ 计算积分值而不取 $\int_c^d f(x)dx$ 和 $\int_c^d \frac{dx}{f(x)}$ 计算积分值呢? 因为我们只能确定 $x_0 \in [a, b]$, 而不能确定 $x_0 \in [c, d]$, 这样一来, 只能计算 $\int_a^b f(x)dx$ 和 $\int_a^b \frac{dx}{f(x)}$, 而不能计算 $\int_c^d f(x)dx$ 和 $\int_c^d \frac{dx}{f(x)}$. 然后因为欲证之式中没有 x_0, a 和 b , 故将 x_0 和 $b-a$ 放缩掉, 接着的一切则是水到渠成的事。

15. 用微分法可证

$$0 < \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - x < \frac{x^3}{3(1-x^2)}$$

将 $x = \frac{1}{2n+1}$ 代入上式可得

$$0 < \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n+1/2} < \frac{1}{3(2n+1)(2n+2)n}$$

令 $a_n = \frac{e^n n!}{n^{n+1/2}}$ 则 $\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = -1 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ 可得

$$0 < \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{\left(n + \frac{1}{2} \right)}{3(2n+1)(2n+2)n} = \frac{1}{12(n+1)n}$$

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12(n+1)n}}$$

可知 $\left\{ a_n e^{-\frac{1}{12n}} \right\}$ 单增, 又 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sqrt{2\pi}$, 故 $n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}$, 其中 $0 < \theta_n < 1$.

第 12 章 广义积分的定义

12.1 广义积分的定义

12.1.1 练习题

1. $\forall A > 0$, 有

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^A f(x)dx \leq \int_0^{+\infty} f(x)dx = 0 \\ &\Rightarrow \int_0^A f(x)dx = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $[0, A]$ 上恒为 0, 由 A 的任意性可知 $f(x) = 0, \forall x \in [0, +\infty)$

2. 无穷限积分: 取 $f(x) = \frac{1}{x}$ 有 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 发散, 但是 $\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛
取

$$f(x) = \begin{cases} n & x \in \left[n, n + \frac{1}{n^3} \right], n = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$$

则 $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 但是 $\int_1^{+\infty} f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 发散

无界积分: 若 $\int_a^b f^2(x)dx$ 则

$$\left(\int_a^b |f(x)|dx \right)^2 \leq \int_a^b 1^2 dx \cdot \int_a^b f^2(x)dx < +\infty$$

可得 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛

取 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, 则 $\int_0^1 f(x)dx$ 收敛, 但是 $\int_0^1 f^2(x)dx$ 发散

3. \Rightarrow : 只要注意到 $f_N(x)$ 对 N 递增, 且 $f_N(x) \leq f(x)$, 立刻可用单调有界原理, 证得

$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_N(x)dx$ 存在.

\Leftarrow : 因 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, 故 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in (0, \delta)$ 时 $f(x) > 0$. 故对 $\int_0^1 f(x)dx$ 的敛

散性, 可用非负函数的判别法进行判定. 下面我们来证明当 $0 < \alpha < \delta$ 时 $\int_\alpha^1 f(x)dx$ 保持有上界. 事实上, 因为 $f(x)$ 在 $[\alpha, 1]$ 上连续, 所以 $\exists M > 0$, 使得 $f(x) \leq M$, 当 $x \in [\alpha, 1]$ 时. 因而 $N > M$ 时, $[\alpha, 1]$ 上恒有

$$f_N(x) = \min\{f(x), N\} = f(x)$$

从而

$$\begin{aligned} \int_\alpha^1 f(x)dx &= \int_\alpha^1 f_N(x)dx \\ &\leq \int_0^1 f_N(x)dx \end{aligned}$$

令 $N \rightarrow +\infty$ 取极限, 得

$$\int_{\alpha}^1 f(x)dx \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_N(x)dx < +\infty$$

故 $\int_0^1 f(x)dx$ 收敛.

4. 由

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)f(x+a)|dx \right)^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+a)|^2 dx < +\infty$$

可知 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)f(x+a)|dx$ 收敛

5. 由

$$\int_M^N (f(x+a) - f(x))dx = \int_N^{N+a} f(x)dx - \int_M^{M+a} f(x)dx$$

可知

$$\lim_{\substack{M \rightarrow -\infty \\ N \rightarrow +\infty}} \int_M^N (f(x+a) - f(x))dx = (A-B)a$$

6. 因为广义积分不收敛

主值为:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{-\delta} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} + \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} \right) = 0$$

12.2 广义积分的敛散性判别法

12.2.1 练习题

1. (1)

$$\int_{n\pi + \frac{\pi}{6}}^{n\pi + \frac{5\pi}{6}} x \sin^4 x dx \geq \frac{1}{16} \int_{\pi\pi + \frac{\pi}{6}}^{n\pi + \frac{5\pi}{6}} x dx \geq \frac{1}{16} \cdot \frac{2\pi^2}{18} = \frac{\pi^2}{144}$$

可知 $\int_0^{+\infty} x \sin^4 x dx$ 发散。

(2) 设 $F(x) = \frac{\ln \ln x}{\ln x}$, $F'(x) = \frac{1 - \ln \ln x}{x(\ln x)^2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, 当 $x > e^e$ 时有 $F(x)$ 单

调递减, 又 $\int_0^A \sin x dx$ 为有界量, 从而 $\int_3^{+\infty} \frac{\ln \ln x}{\ln x} \sin x dx$ 收敛

又

$$\left| \frac{\ln \ln x}{\ln x} \sin x \right| \geq \left| \frac{\ln \ln x}{\ln x} \right| \sin^2 x = \left| \frac{\ln \ln x}{\ln x} \right| \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)$$

已知 $\int_3^{+\infty} \left| \frac{\ln \ln x}{\ln x} \right| dx$ 发散, $\int_3^{+\infty} \left| \frac{\ln \ln x}{\ln x} \right| \cos 2x dx$ 收敛, 从而 $\int_3^{+\infty} \left| \frac{\ln \ln x}{\ln x} \sin x \right| dx$ 发散。

综上, $\int_3^{+\infty} \frac{\ln \ln x}{\ln x} \sin x dx$ 条件收敛。

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} e^{\cos x} \sin(\sin x) = e$ 可知 $x = 0$ 不是瑕点, 令 $F(x) = e^{\cos x} \sin(\sin x)$ 则有 $F(x) = F(x + 2\pi)$ 即 $F(x)$ 为周期函数, 且 $|F(x)| \leq e$, 由于 $F(x)$ 是奇函数, 故在

一个周期上的积分为 0, 从而 $\forall A > 0$, 有 $\int_0^A F(x)dx$ 有界, 又 $\frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时单调趋于 0, 由 Dirichlet 判别法可得 $\int_0^{+\infty} e^{\cos x} \sin(\sin x)dx$ 收敛。

又考虑

$$\left| \frac{1}{x} e^{\cos x} \sin(\sin x) \right| \geq \frac{1}{x} e^{\cos x} \sin^2(\sin x) = \frac{1}{x} e^{\cos x} \left[\frac{1 - \cos(2 \sin x)}{2} \right]$$

又 $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} e^{\cos x} dx$ 发散, $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} e^{\cos x} \cos(2 \sin x) dx$ 收敛, 从而知 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} e^{\cos x} \sin(\sin x) dx$ 条件收敛

(4) $\ln \frac{x^2}{x^2-1} = \ln \frac{x^2}{(x-1)(x+1)}$ 又 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln \frac{x^2}{(x+1)(x-1)}}{\ln(x-1)} = -1$ 且 $\int_1^a |\ln(x-1)| dx$ 收敛, 又

$$\ln \frac{x^2}{x^2-1} = \ln \left(1 + \frac{1}{x^2-1} \right)$$

从而, 当 $x \rightarrow +\infty$, $\ln \left(1 + \frac{1}{x^2-1} \right) \sim \frac{1}{x^2-1}$, 由 $\int_a^{+\infty} \left| \frac{1}{x^2-1} \right| dx$ 收敛, 可知

$\int_a^{+\infty} \left| \ln \left(\frac{x^2}{x^2-1} \right) \right| dx$ 收敛 ($a > 1$),

综上, $\int_1^{+\infty} \ln \frac{x^2}{x^2-1} dx$ 绝对收敛

(5) 做代换 $t = \frac{1}{x}$, 有

$$\int_1^{+\infty} \ln \left(\cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right) dx = \int_0^1 \frac{\ln(\cos t + \sin t)}{t^2} dt$$

而

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos t + \sin t)}{t} = 1$$

即 $\frac{\ln(\cos t + \sin t)}{t^2} \sim \frac{1}{t}$, 又 $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ 发散, 可知 $\int_1^{+\infty} \ln \left(\cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right) dx$ 发散

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x} = 2$, 可知 $x=0$ 并非瑕点, 又当 $x \rightarrow 1^-$ 时, 有 $\frac{1}{x} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \sim (-\ln 2) \cdot \ln(1-x)$ 且 $\int_a^1 |\ln(1-x)| dx$ 收敛 ($0 < a < 1$), 从而 $\int_0^1 \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x} dx$ 绝对收敛。

(7) $\sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \frac{\frac{1}{x} - \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\sqrt{x} + \sqrt{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}} > 0$, 又 $\frac{\frac{1}{x} - \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}}$ 和 $\left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{3}{2}}$

是同阶无穷小 ($x \rightarrow +\infty$), 从而 $\int_a^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)} dx$ 收敛 ($a > 0$), 又

$\int_0^a \sqrt{\frac{1}{x}} dx$ 收敛, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}}{\sqrt{\frac{1}{x}}} = 0$ 从而 $\int_0^a \sqrt{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)} dx$ 收敛

综上, $\int_a^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)} dx$ 绝对收敛

(8) $\int_0^A \sin x dx$ 有界, 又

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{x + \cos x}}, F'(x) = \frac{\sin x - 1}{2(x + \cos x)^{\frac{3}{2}}} < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$$

从而 $F(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 单调递减趋于 0

由 Dirichlet 判别法知, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x + \cos x}} dx$ 收敛, 又

$$\left| \frac{\sin x}{\sqrt{x + \cos x}} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x + \cos x}} = \frac{1 - \cos 2x}{2\sqrt{x + \cos x}}$$

且 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x + \cos x}} dx$ 发散, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x + \cos x}} dx$ 收敛, 从而知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x + \cos x}} dx$ 条件收敛

2. (1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin^p x \sim x^p$, $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos^q x \sim \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^q$

从而可知, 当 $p < 1$ 且 $q < 1$ 时, 有 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^p x \cos^q x} dx$ 绝对收敛

当 $p > 1$ 或者 $q > 1$ 时, 积分发散

(2) 当 $p > 1$ 时

$$\left| \frac{\cos x}{1 + x^p} \right| \leq \frac{1}{1 + x^p}$$

从而积分绝对收敛

当 $0 < p \leq 1$ 时, 积分条件收敛, 当 $p \leq 0$ 时, 积分发散。

(3)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} |\ln x|^p dx = -\int_0^e \frac{\sin x}{x} \ln^p x dx + \int_e^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \ln^p x dx$$

易知 $\int_0^e \frac{\sin x}{x} \ln^p x dx$ 收敛, $\int_e^M \sin x dx$ 有界, $\frac{\ln^p x}{x}$ 单调递减趋于 0, 故 $\int_e^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \ln^p x dx$ 条件收敛。

当 $p < -1$ 时, $\left| \frac{\sin x}{x} \ln^p x \right| \leq \frac{\ln^p x}{x}$, 此时 $\int_e^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x} dx$ 收敛

综上, 当 $p < -1$ 时, 积分绝对收敛, 当 $p \geq -1$ 时, 积分条件收敛

(4) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\ln(1+x)}{x^p} \sim \frac{1}{x^{p-1}}$, 又

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx = \int_0^a \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx + \int_a^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$$

当 $p < 2$ 时, $\int_0^a \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 收敛, 当 $p > 1$ 时, $\int_a^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 收敛, 从而

$1 < p < 2$ 时, $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 收敛

(5) 做变换 $t = x^2$ $\frac{1}{2\sqrt{t}} dt = dx$ 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1 + x^p} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}(1 + t^{p/2})} dt$$

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{2\sqrt{t}(1 + t^{p/2})} \sim \frac{1}{2t^{\frac{p+1}{2}}}$

从而当 $p \leq -1$ 时, 积分发散

当 $-1 < p \leq 1$ 时, 积分条件收敛

当 $p > 1$ 时, 积分绝对收敛

(6) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{x^p}{1+x^q} \sim x^{p-q}$

从而当 $p-q < -1$ 时, 积分绝对收敛

当 $-1 \leq p-q < 0$ 时, 积分条件收敛

当 $p-q \geq 0$ 时, 积分发散

(7) $e^{\sin x} \sin 2x = 2e^{\sin x} \sin x \cos x$ 从而有

$$\int_a^A e^{\sin x} \sin 2x dx = 2 [e^{\sin A} (\sin A - 1) - e^{\sin a} (\sin a - 1)]$$

易知 $\int_a^{+\infty} e^{\sin x} \sin 2x dx$ 为有界量, 又当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{e^{\sin x} \cdot \sin 2x}{x^p} \sim \frac{2}{x^{p-1}}$

从而当 $p < 2$ 时, $\int_0^a \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} dx$ 收敛

由此可见, 当 $0 < p \leq 1$ 时积分条件收敛

当 $1 < p < 2$ 时, $\left| \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} \right| \leq \frac{e}{x^p}$, 积分绝对收敛

当 $p \leq 0$ 时积分发散

(8) 当 $x \rightarrow e$ 时, $(x-e)^p (\ln \ln x)^q \sim \frac{(x-e)^{p+q}}{e^q}$

从而当 $p+q < 1$ 时, $\int_e^a \frac{dx}{(x-e)^p (\ln \ln x)^q}$ 收敛

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{(x-e)^p (\ln \ln x)^q} \sim \frac{1}{x^p (\ln \ln x)^q}$

当 $p \leq 1$ 时, $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p (\ln \ln x)^q} dx$ 发散

当 $p > 1$ 时, $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p (\ln \ln x)^q} dx$ 收敛

综上所述, 当 $p+q < 1$ 且 $p > 1$, 积分收敛; 当 $p+q \geq 1$ 或者 $p \leq 1$ 时, 积分发散

3. 当 $x \rightarrow \infty$ 时有

$$\frac{1}{|x-a_1|^{p_1} \cdots |x-a_n|^{p_n}} \sim \frac{1}{|x|^{p_1+p_2+\cdots+p_n}}$$

若要保证积分收敛必须有 $p_1+p_2+\cdots+p_n > 1$, 又 $x = a_k$ 为奇点, 从而 $0 < p_k < 1$ ($k = 1, 2, \dots, n$)

综上, 当 $p_1+p_2+\cdots+p_n > 1$ 且 $0 < p_1, \dots, p_n < 1$ 时积分收敛, 其它情况发散

4. 设 $F(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$, 则

$$F'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{x}{x^2(x+1)} = \frac{-x}{x^2(x+1)^2} < 0$$

即 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒大于 0,

即 $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} > 0$, 又 $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$, 从而有

$$0 < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x(x+1)}$$

积分 $\int_a^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} dx$ 收敛, 又 $x = 0$ 为奇点, $\int_0^a \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$ 收敛,

从而可得 $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} dx$ 收敛

5. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4 \sin^2 x} dx$ 的敛散性和级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \frac{x}{1+x^4 \sin^2 x} dx$ 相同, 从而只需考虑该无穷级数的敛散性

我们有

$$\begin{aligned} \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \frac{x}{1+x^4 \sin^2 x} dx &\stackrel{x-n\pi=t}{=} \int_0^\pi \frac{t+n\pi}{1+(t+n\pi)^4 \sin^2 t} dt \geq \int_0^\pi \frac{n\pi}{1+(\pi+n\pi)^4 t^2} dt \\ \int_0^\pi \frac{n\pi}{1+(\pi+n\pi)^4 t^2} dt &= \frac{n\pi}{(n\pi+\pi)^2} \int_0^\pi \frac{d(\pi+n\pi)^2 t}{1+(\pi+n\pi)^4 t^2} = \frac{n\pi}{(\pi+n\pi)^2} \cdot \arctan [\pi^3(1+n)^2] \end{aligned}$$

从而可知 $\int_0^\pi \frac{n\pi}{1+(\pi+n\pi)^4 t^2} dt \sim \frac{1}{n}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4 \sin^2 x} dx$ 发散

6.

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \left| t^2 - \frac{1}{t^2} \right|^a dt = \int_0^{+\infty} \frac{|t^4 - 1|^a}{t^{2a}} dt$$

当 $t \rightarrow 0$ 时, $\frac{|t^4 - 1|^a}{t^{2a}} \sim \frac{1}{t^{2a}}$ 故当 $a < \frac{1}{2}$ 时, $\int_0^A \frac{|t^4 - 1|^a}{t^{2a}} dt$ 收敛

当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{|t^4 - 1|^a}{t^{2a}} \sim t^{2a}$, 故当 $a < -\frac{1}{2}$ 时, $\int_4^{+\infty} \frac{|t^4 - 1|^a}{t^{2a}} dt$ 收敛

当 $t \rightarrow 1$ 时, $\left| t^2 - \frac{1}{t^2} \right|^a \sim |t-1|^a$, 当 $a > -1$ 积分收敛

综上, 定义域为 $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

7. 由 $f' \in C[0, 1]$ 且 $f' > 0$ 可知 $\forall x \in [0, 1]$ 有 $0 < m \leq f'(x) \leq M$, 故

$$\frac{f(x) - f(0)}{x^p} = \frac{f'(\xi)}{x^{p-1}} \quad \xi \in [0, x]$$

即

$$\frac{m}{x^{p-1}} \leq \frac{f(x) - f(0)}{x^p} \leq \frac{M}{x^{p-1}}$$

从而可得当 $p < 2$ 时积分收敛, 当 $p > 2$ 积分发散

8. (1) 由 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 条件收敛可知 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, $\int_a^{+\infty} |f| dx$ 发散, 所以容易得到 $\int_a^{+\infty} f \pm |f| dx$ 发散

(2)

$$\int_a^x f dx = \frac{1}{2} \int_a^x f + |f| dx + \frac{1}{2} \int_a^x f - |f| dx$$

由 $\int_a^{+\infty} f \pm |f| dx$ 发散可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x |f| - f dx = +\infty$, 又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx$, 可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\int_a^x |f| + f dx}{\int_a^x |f| - f dx} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^x f dx}{\int_a^x |f| - f dx} = 0$$

即

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^x |f| + f dx}{\int_a^x |f| - f dx} = 1$$

9.

$$\begin{aligned}\int_a^x f'(x) \sin^2 x dx &= f(x) \sin^2 x \Big|_a^x - 2 \int_a^x \sin x \cos x f(x) dx \\ &= f(x) \sin^2 x - f(a) \sin^2 a - \int_a^x \sin 2x f(x) dx\end{aligned}$$

由题意可得 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x)$ 单调递减趋于 0, 又 $\int_a^x \sin 2x dx$ 有界, 从

而可知 $\int_a^{+\infty} f(x) \sin 2x dx$ 收敛, 即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(x) \sin 2x dx$ 存在

又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 可得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \sin^2 x = 0$, 得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f'(x) \sin^2 x dx = -f(a) \sin^2 a - \int_0^{+\infty} \sin 2x \cdot f(x) dx$$

即 $\int_a^{+\infty} f'(x) \sin^2 x dx$ 收敛

10.

$$\int_a^x f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x g(x)f'(x)dx$$

又 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界, 即 $|g(x)| \leq M$ 在 $[a, +\infty)$ 上恒成立

已知 $f'(x)$ 非负, 故

$$\int_a^x |g(x)f'(x)| dx \leq M \int_a^x f'(x) dx = M(f(x) - f(a))$$

又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 可知 $\int_a^{+\infty} g(x)f'(x) dx$ 收敛, 因为 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = 0$ 所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(x)g'(x) dx = -f(a)g(a) - \int_a^{+\infty} g(x)f'(x) dx$$

即 $\int_a^{+\infty} f(x)g'(x) dx$ 收敛

12.3 广义积分的计算

12.3.1 练习题

1. (1) 由

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \stackrel{x=\tan t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\tan t)}{\cos^2 t} dt$$

可得若 $\frac{f(\tan t)}{\cos^2 t}$ 关于 $\frac{\pi}{4}$ 为奇函数则原积分为 0

(2) 由命题 10.4.5 即证

2. (1) 由

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-x} |\sin x| dx &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi} \int_0^{\pi} e^{-x} |\sin x| dx = \frac{e^{\pi}}{e^{\pi} - 1} \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx \\ \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx &= -e^{-x} \cos x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x} \cos x dx = 1 + e^{-\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx\end{aligned}$$

可得 $\int_0^{+\infty} e^x |\sin x| dx = \frac{e^\pi + 1}{2(e^\pi - 1)}$

(2)

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{x+1} + e^{3-x}} = \int_1^{+\infty} \frac{d(e^x)}{e^{2x+1} + e^3} = \frac{1}{e} \int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + e^2} = \frac{1}{e^2} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{\pi}{4e^2}$$

(3) 令 $x = a + (b-a)\sin^2 t, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 可得

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2dt = \pi$$

(4) 令 $x = \tan \theta$ 则

$$I_{n-1} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} \theta d\theta$$

分部积分可得 $I_0 = \frac{\pi}{2}, I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$, 故 $I_{n-1} = \frac{(2n-2)!!\pi}{2(2n-1)!!}$

(5)

$$\int_0^1 x^n \ln^m \frac{1}{x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-nt} t^m d(e^{-t}) = \left(\frac{1}{n+1}\right)^m \int_0^{+\infty} e^{-y} y^m dy = \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}$$

(6) 令 $x = \tan t$ 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x - \frac{1}{x})}{x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin(\frac{2 \cos 2t}{\sin 2t})}{\sin 2t} dt$$

令 $g(t) = \frac{2 \sin(\frac{2 \cos 2t}{\sin 2t})}{\sin 2t}$ 则在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上有

$$g\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -g(\theta)$$

由本练习题的第一题可得 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x - \frac{1}{x})}{x} dx = 0$

(7)

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx &= \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx - \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+4} dx \\ &= \frac{1}{6} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx - \frac{1}{3} \frac{\ln 2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= -\frac{\pi \ln 2}{12} + \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^t dt}{e^{2t}+1} = -\frac{\pi \ln 2}{12} \end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx &= \int_{-1}^0 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx + \int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx \\ &= \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) \Big|_{-1}^{0^-} + \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) \Big|_{0^+}^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

3. (1) 由于

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx$$

又

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \stackrel{x=\frac{\pi}{2}-t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt$$

故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \tan x dx = 0$

(2)

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx \stackrel{x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

(3)

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx = \ln x \cdot \arcsin x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \ln 2$$

(4)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cot x dx = x \ln \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = \frac{\pi}{2} \ln 2$$

(5) 由于

$$\int_0^{\pi} x \ln \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \ln \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \ln \sin x dx$$

又

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \ln \sin x dx \stackrel{x=\pi-t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi-t) \ln \sin t dt$$

故

$$\int_0^{\pi} x \ln \sin x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = -\frac{\pi^2}{2} \ln 2$$

(6) $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ 则

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} dx = \int_0^{\pi} \frac{x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} dx = \int_0^{\pi} x \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} dx$$

令 $x = 2t$ 则

$$\text{原式} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cot t dt = 2\pi \ln 2$$

(7) 令 $e^x = t$ 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t\sqrt{t^2-1}} dt$$

令 $t = \frac{1}{\theta}$ 则

$$\text{原式} = \int_0^1 \frac{\ln \theta}{\sqrt{1-\theta^2}} d\theta = \frac{\pi}{2} \ln 2$$

(8) 若 $a \neq 0$ 则

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln |\sin^2 x - a^2| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln |\sin x - |a|| dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln |\sin x + |a|| dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln (\sin x - |a|)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln (\sin x + |a|)^2 dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx + \pi \ln |a| \\ &= \pi \ln |a| - \pi \ln 2 = \pi \ln \frac{|a|}{2} \end{aligned}$$

若 $a = 0$ 则原式 $= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = -\pi \ln 2$

4. (1) 取 $f(x) = \arctan x$ 则原式 $= (f(0) - f(+\infty)) \ln \frac{b}{a} = -\frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a}$

(2) 取 $f(x) = e^{-x}$ 则原式 $= (f(0) - f(+\infty)) \ln \frac{b}{a} = \ln \frac{b}{a}$

(3) 取 $f(x) = \cos x$ 则原式 $= f(0) \ln \frac{b}{a} = \ln \frac{b}{a}$

(4) 由于 $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta))$ 则

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(a+b)x - \cos(a-b)x}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{|a-b|}{a+b} \end{aligned}$$

(5) 取 $x = e^{-t}$ 则

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{\ln x} dx = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = - \ln \frac{b}{a}$$

(6)

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{b \sin ax - a \sin bx}{x^2} dx &= - \left. \frac{b \sin ax - a \sin bx}{x} \right|_0^{+\infty} + ab \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx \\ &= \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

5. (1) 对 $I = \int_0^{+\infty} \sin^2 x d(-1/x)$ 作分部积分, 可知

$$\begin{aligned} I &= - \left. \frac{\sin^2 x}{x} \right|_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos x}{x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx \\ &\stackrel{t=2x}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(2) 应用公式 $\sin^4 x = \sin^2 x (1 - \cos^2 x)$. 我们有

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(2x)}{(2x)^2} d(2x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

(3) 由 $\sin^4 x = \frac{1}{4}(1 - \cos 2x)^2 = \frac{1}{8}(3 - 4 \cos 2x + \cos 4x)$ 则

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{3 - 4 \cos 2x + \cos 4x}{x^4} dx &= - \left. \frac{3 - 4 \cos 2x + \cos 4x}{3x^3} \right|_0^{+\infty} + \frac{4}{3} \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin 2x - \sin 4x}{x^3} dx \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin 2x - \sin 4x}{x^3} dx \\ &= \dots \\ &= \frac{16}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

故 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}$

(4)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3} dx = - \left. \frac{x - \sin x}{2x^2} \right|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

(5)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x-\pi)} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x-\pi} dx - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

令 $x = \pi + t$ 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x-\pi} dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

故原式 = 0

(6) 令 $x = \sqrt{t}$ 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{4}$$

6. (1)

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x^2 + \frac{1}{2})^2} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{4e^{-x^2}}{(2x^2 + 1)^2} dx \\ &\stackrel{x=\frac{1}{t}}{=} 4 \int_{+\infty}^0 \frac{e^{-\frac{1}{t^2}} t^4}{(2+t^2)^2} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = 2 \int_0^{+\infty} t e^{-\frac{1}{t^2}} \frac{d(2+t^2)}{(2+t^2)^2} \\ &= -2 \left[\frac{t}{t^2+2} e^{-\frac{1}{t^2}} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+2} \left(1 + \frac{2}{t^2}\right) e^{-\frac{1}{t^2}} dt \right] \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t^2} dt \stackrel{\frac{1}{t^2}=s}{=} \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{-\frac{1}{2}} ds = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

(2) 由下面一题可知

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2x^2 - \frac{b^2}{x^2}} dx = e^{2ab} \int_0^{+\infty} e^{-(ax + \frac{b}{x})^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-2ab}$$

7. 令 $ax - b/x = t$, 则 $(x > 0) ax + b/x = \sqrt{t^2 + 4ab}$. 从而知

$$x = (t + \sqrt{t^2 + 4ab})/2a, \quad dx = (t + \sqrt{t^2 + 4ab})/2a \sqrt{t^2 + 4ab} dt$$

代人原式可得

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \cdot \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\ &= \frac{1}{2a} \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \right) f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \frac{\sqrt{t^2 + 4ab} - t}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt + \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \frac{\sqrt{t^2 + 4ab} + t}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \frac{2\sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) dt \end{aligned}$$

12.4 广义积分的特殊性质

12.4.1 练习题

1. 由题设知, 存在极限 $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f'(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [f(A) - f(a)]$, 即存在 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

若 $l \neq 0$, 不妨假定 $l > 0$, 则存在 $X : X > a$, 使得 $f(x) > l/2 (x > X)$. 此时有

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_X^A f(x) dx \geq \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{l}{2} (A - X) = +\infty, \text{ 矛盾. 证毕.}$$

2. 导函数有界说明一致连续

存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x') - f(x'')| < \delta \quad (x', x'' \in [a, \infty); |x' - x''| < \delta)$$

若 $f(x)$ 无界, 则存在 $\{x_n\} : x_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$, 且有 $x_{n+1} > x_n + \delta, |f(x_n)| \geq n$ ($n = 1, 2, \dots$). 从而得

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{x_n} f(t) dt \right| &\geq \left| \int_{x_n - \delta/2}^{x_n} f(t) dt \right| - \left| \int_a^{x_n - \delta/2} f(t) dt \right| \\ &\geq \left| \int_{x_n - \delta/2}^{x_n} f(t) dt \right| - M \geq (|f(x_n)| - 1) \frac{\delta}{2} - M \geq (n - 1) \frac{\delta}{2} - M \end{aligned}$$

这与题设矛盾. 证毕.

3. 考虑 $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$
 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$, 如果不等于 0, 不妨设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = m > 0$, 则对于充分大的 x

可知 $f(x) > \frac{m}{2x}$ 可得 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散矛盾, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$

不妨设 $f(x) \geq 0$, 则

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{x}}^x f(t) dt &= \int_{\sqrt{x}}^x t f(t) \frac{dt}{t} \geq x f(x) \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{t} \\ &= x f(x) [\ln x - \ln \sqrt{x}] = \frac{1}{2} x f(x) \ln x \end{aligned}$$

所以令 $x \rightarrow +\infty$ 即可得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) \ln x = 0$

5. 考虑

$$f(\xi_n) = \int_n^{n+1} f(x) dx \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$$

则

$$f'(x_n) = \frac{f(\xi_{n+2}) - f(\xi_n)}{\xi_{n+2} - \xi_n}$$

6. 考虑 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上, 可知条件收敛结论是不成立的, 考虑

$$\int_{2^k}^{2^{k+1}} |f(x)| dx = 2^k |f(\xi_n)| \rightarrow 0, k \rightarrow +\infty$$

可知

$$\xi_n |f(\xi_n)| \leq 2^{k+1} |f(\xi_n)| = 2 \cdot 2^k |f(\xi_n)| \rightarrow 0, k \rightarrow +\infty$$

12.5 对于教学的建议

12.5.1 第一组参考题

1.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} &= \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^6)} = \frac{\pi}{4}$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^{100} x} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{100})} = \frac{\pi}{4}$$

2. 记 I 为相应的积分值可得

$$(1) \frac{1}{29} = \int_1^{+\infty} \frac{x^{30}}{x^{60}} dx < I < \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^{60}} + \frac{x^{30}}{x^{60}} \right) dx = \frac{1}{29} + \frac{1}{59}$$

$$(2) A = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{10} = \frac{A}{5} < I < \frac{A}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$(3) \frac{1}{30} < \frac{1}{24} = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx < I < \int_2^{+\infty} x^{-\frac{7}{2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{20}$$

$$(4) -\frac{1}{10000} = -\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{10000} dx < -\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{100(x+100)} dx = I - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100} dx < 0$$

3. 对于任意 $\epsilon > 0$, 由于 $|f|^p$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可积, 可得存在 $R > 0$, s.t.

$$\int_R^{+\infty} |f|^p + \int_{-\infty}^{-R} |f|^p < \epsilon$$

记 $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-R}^R |f(x) - f(x+h)|^p dx = 0$, 存在 $h_1 > 0$, s.t.

$$\int_{-R}^R |f(x) - f(x+h)|^p dx < \epsilon, \forall h, 0 < h < h_1$$

由于

$$\int_R^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx < C \int_R^{+\infty} |f(x+h) - f(x)| dx < C\epsilon$$

由 Minkowski 不等式知 C 是一个只依赖 p 的常数, 因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx < (1+2C)\epsilon, \forall 0 < h < h_1$$

故

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0$$

4. 由于

$$\begin{aligned}\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x+t) dx \right| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)g(x+t)| dx \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+t)|^{p/(p-1)} dx \right)^{1-1/p}\end{aligned}$$

故原广义积分收敛

由于

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} |I(t+h) - I(h)| &= \lim_{h \rightarrow 0} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x+t+h) - f(x+t))g(x)dx \right| \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x+t+h)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g^{p/(p-1)} dx \right)^{(p-1)/p} = 0 \end{aligned}$$

最后一个极限等于零由上一题可知。

5. \Rightarrow : $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, $f > 0$, f 单调递减 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$, 因此

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R xf'(x)dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(Rf(R) - af(a) - \int_a^R f(x)dx \right)$$

收敛.

\Leftarrow : $\int_a^{+\infty} xf'(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists R > 0$, s.t

$$\left| \int_{R_1}^{R_2} xf'(x)dx \right| < \epsilon, \forall R < R_1 < R_2$$

由

$$|f(R_1) - f(R_2)| = \left| \int_{R_1}^{R_2} f'(x)dx \right| = \left| \frac{1}{\zeta} \int_{R_1}^{R_2} xf'(x)dx \right| < \frac{1}{\zeta} \epsilon < \frac{\epsilon}{R_1}$$

其中 $\zeta \in [R_1, R_2]$

可得

$$f(R_1) - f(R_2) < \frac{\epsilon}{R_1}$$

又 $\lim_{R_2 \rightarrow +\infty} f(R_2) = 0$ 可得

$$R_1 f(R_1) < \epsilon$$

又因为

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R xf'(x)dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(Rf(R) - af(a) - \int_a^R f(x)dx \right)$$

可得 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

6. 对于充分大的 x , 当 $p < -1$ 时有

$$f(x) < x^{-\frac{p+1}{2}}$$

所以原广义积分收敛

当 $p > -1$ 时有

$$f(x) > x^{-\frac{p+1}{2}}$$

故原广义积分发散

7.

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x} \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right) = \gamma$$

8. 由

$$\left(1 - \frac{\sin x}{x} \right)^{-\frac{1}{3}} - 1 = -\frac{\sin x}{3x} + O(x^{-2}), (x \rightarrow 0)$$

故原级数条件收敛但不绝对收敛

9. (1) 当 $p \geq q - 1$, 原级数发散:

当 $p < q - 1$ 有

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q|\sin x|^r} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{(k\pi+t)}{1+(k\pi+t)^q|\sin t|^r} dt$$

可得

$$\int_0^{\pi} \frac{(k\pi+t)^p}{1+(k\pi+t)^q|\sin t|^r} dt \leq (k+1)\pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+(k\pi)^q \left(\frac{2}{\pi}x\right)^r} = \frac{c(k+1)}{k^{\frac{q}{r}}} \int_0^{2k^{\frac{q}{r}}\pi^{\frac{q}{r}}} \frac{dx}{1+x^r}$$

可知

$$C_1 \frac{k^p}{k^{\frac{q}{r}}} \int_0^{k^{\frac{q}{r}}} \frac{dx}{1+x^r} \leq \int_0^{\pi} \frac{(k\pi+t)^p}{1+(k\pi+t)^q|\sin t|^r} dt \leq C_2 \frac{k^p}{k^{\frac{q}{r}}} \int_0^{k^{\frac{q}{r}}} \frac{dx}{1+x^r}$$

若 $r > 1$, $\int_0^A \frac{dx}{1+x^r}$ 有界若 $r \leq 1$, 则

$$\int_0^A \frac{dx}{1+x^r} \sim A^{1-r} (r < 1) \text{ 或 } \ln A (r = 1)$$

由于 $q > p + 1$ 故原广义积分收敛当且仅当 $q > (p + 1)r$

(2) 原广义积分收敛可得 $p > 0$ 又因为

$$\int_0^1 \frac{\sin x \cos \frac{1}{x}}{x^p} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{y} \cos y}{y^{2-p}} dy$$

且

$$\sin \frac{1}{y} \sim \frac{1}{y}, \cos \frac{1}{x} \rightarrow 1, x \rightarrow +\infty$$

可得 $p < 3$, 再由 Dirichlet 判别法可得当 $0 < p < 3$ 时条件收敛, 当 $1 < p < 2$ 时绝对收敛

10. 不妨设 f 是单调递减的。对于充分大的 k , 和任意的 ϵ 可得

$$\int_{\frac{(12k+1)\pi}{6p}}^{\frac{(12k+5)\pi}{6p}} f(x) \sin px dx < \epsilon$$

故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

任意给定 $\epsilon > 0$. 由 Riemann 引理可知

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^A f(x) \sin px dx = 0, \forall A > 0$$

对于充分大的 $R, 0 < f(x) < \epsilon$ 可得

$$\left| \int_R^{R+t} f(x) \sin px dx \right| = \left| f(R) \int_R^{\xi} \sin px dx \right| < 2\epsilon \Rightarrow \left| \int_R^{+\infty} f(x) \sin px dx \right| < 2\epsilon.$$

故

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(x) \sin px dx = 0$$

11. $\forall \epsilon > 0$, 对于充分大的 n , 有 $\left| f\left(\frac{x}{n}\right) - f(0) \right| < \epsilon$ 可得

$$\left| \int_0^{\sqrt{n}} f\left(\frac{x}{n}\right) \phi(x) dx - \int_0^{\sqrt{n}} f(0) \phi(x) dx \right| < \epsilon \int_0^{+\infty} |\phi(x)| dx$$

可得

$$\left| \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} f\left(\frac{x}{n}\right) \phi(x) dx - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} f(0) \phi(x) dx \right| < \epsilon \int_0^{+\infty} |\phi(x)| dx$$

由 ϵ 的任意性可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{n}} f\left(\frac{x}{n}\right) \phi(x) dx = f(0) \int_0^{+\infty} \phi(x) dx$$

12. 我们将证明对于在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积的 f 和周期为 $T > 0$ 的连续函数 g 有

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(px) dx = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \int_0^T g(x) dx$$

由此由此可推出 (1), (2). 由例题 10.2.7 (Riemann 定理) 可知

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) g(px) dx = \frac{1}{T} \int_0^T g(x) dx \int_a^b f(x) dx$$

因为 f 绝对可积且 g 有界, 可得

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(px) dx - \int_{-A}^{+A} f(x) g(px) dx \right| < M \int_{-\infty}^{-A} |f(x)| dx + M \int_A^{+\infty} |f(x)| dx < 2M\epsilon,$$

对于充分大的 A 有

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(px) dx - \int_{-A}^{+A} f(x) g(px) dx \right| < 2M\epsilon$$

故

$$\left| \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(px) dx - \frac{1}{T} \int_{-A}^{+A} f(x) dx \int_0^T g(x) dx \right| < 2M\epsilon$$

可得

$$\begin{aligned} & \left| \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(px) dx - \frac{1}{T} \int_0^T g(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right| \\ & \leq \left| \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(px) dx - \frac{1}{T} \int_{-A}^{+A} f(x) dx \int_0^T g(x) dx \right| \\ & + \left| \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \int_0^T g(x) dx - \frac{1}{T} \int_{-A}^{+A} f(x) dx \int_0^T g(x) dx \right| < 2M\epsilon + M\epsilon = 3M\epsilon. \end{aligned}$$

可得

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(px) dx = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \int_0^T g(x) dx$$

13. 不妨设 $f(x)$ 单调递减且 $f \geq 0$, 我们证明

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(a^+) \int_a^\xi g(x) dx$$

设 $m = \inf_{A \in [a, b]} \int_a^A g(x) dx$, $M = \sup_{A \in [a, b]} \int_0^A g(x) dx$. 积分是收敛的, 故 $\exists A_1, A_2 \in$

$[a, b]$, $m = \int_a^{A_1} g(x) dx$, $M = \int_a^{A_2} g(x) dx$, 我们需要证明

$$mf(a^+) \leq \int_a^b fg dx \leq Mf(a^+).$$

因为

$$mf(a^+) \leq \int_{a-\delta}^{b+\delta} f(x) g(x) dx \leq Mf(a^+)$$

由积分的收敛性可知

$$mf(a^+) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq Mf(a^+)$$

A_1, A_2 的存在性可以保证 ξ 的存在性

14. 取 $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = f(x)$ 代入上题中

15. 任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $A > 0$, s.t. $\frac{1}{A} \int_a^{+\infty} f(x)^2 dx < \epsilon^2$. 任意 $A_2 > A_1 > 0$ 有

$$\left(\int_{A_1}^{A_2} \frac{f(x)}{x} dx \right)^2 \leq \int_{A_1}^{A_2} f^2(x) dx \int_{A_1}^{A_2} \frac{1}{x^2} dx \leq \frac{1}{A_1} \int_{A_1}^{+\infty} f^2(x) dx < \epsilon^2$$

可知 $\int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 收敛

16. (1) 由 $t^{x-1}e^{-t} = O(e^{-\frac{t}{2}})$ 和 $x > 0, t^{x-1}e^{-t} = O(t^{x-1})$ 可得原积分收敛

$$(2) \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt^x = \frac{1}{x} e^{-t} t^x \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$$

(3) 由 (2) 可得

$$(4) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t} d\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

12.5.2 第二组参考题

1. 不等式易证由

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

可得

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} x dx$$

而

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \int_0^1 \cos^{2n-2} x dx = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2}$$

故由 Wallis 公式可得

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2. 由

$$g(x) = \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{x}, g'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(-1 + \frac{1}{x^2} + 1\right) > 0$$

可知 $g(x)$ 单调递增且 $g(x) < g(+\infty) = 0$

由

$$h(x) = \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{x}{x^2+1}, h'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(-\frac{2}{(x^2+1)^2}\right) < 0$$

可知 $h(x)$ 单调递减且 $h(x) > h(+\infty) = 0$

3. 由 L'Hospital 法则

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g^2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2g(x)f(x) = 0$$

故对于 $A > 0$, 由分部积分

$$\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2} dx = \int_0^A g^2(x) d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{g^2(A)}{A} + 2 \int_0^A \frac{f(x)g(x)}{x} dx$$

而由 Schwarz 不等式

$$\left[\int_0^A \frac{f(x)g(x)}{x} dx \right]^2 \leq \left[\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2} dx \right] \left[\int_0^A f^2(x) dx \right]$$

故

$$\left[\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2} dx + \frac{g^2(A)}{A} \right]^2 \leq 4 \left[\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2} dx \right] \left[\int_0^A f^2(x) dx \right]$$

又 f 在 $[0, +\infty)$ 上平方可积, 故两边取上极限

$$\left[\limsup_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2} dx \right]^2 \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2(x) dx \left[\limsup_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2} dx \right]$$

$\limsup_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2} dx = 0$, 则 $\int_0^{+\infty} \frac{g^2(x)}{x^2} dx = 0$, 显然结论成立

若 $\limsup_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2} dx \neq 0$, 则

$$\limsup_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2} dx \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2(x) dx$$

即 $\limsup_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2} dx$ 有界, 由单调有界定理知 $\frac{g(x)}{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上平方可积, 且

$$\int_0^{+\infty} \frac{g^2(x)}{x^2} dx \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2(x) dx$$

4. 由 $f^2(x) + (f''(x))^2 \geq 2|f(x)f''(x)|$ 可知, $\int_a^{+\infty} f(x)f''(x) dx$ 收敛. 由 $\int_a^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛以及 $f^2(x) - f^2(a) = 2 \int_a^x f(t)f'(t) dt$ 可知, 不可能有 $f(x)f'(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow +\infty$). 从而根据

$$\int_a^x f(t)f''(t) dt = f(x)f'(x) - f(a)f'(a) - \int_a^x [f'(t)]^2 dt$$

可选取一个趋于正无穷的数列 $\{x_n\}$ 使得 $f(x_n)f'(x_n)$ 有界, 可得 $\int_a^{x_n} [f'(t)]^2 dt$ 有

界, 可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x [f'(t)]^2 dt$ 存在。

5. (1) 由

$$\int_0^A f^2 dx = x f^2(x) \Big|_0^A - 2 \int_0^A x f(x) f'(x) dx$$

由柯西不等式知

$$\int_0^A x f(x) f'(x) dx$$

收敛, 由于 $\int_0^A f^2 dx$ 是关于 A 的递增函数, 只需找到一个趋于正无穷的数列 $\{x_n\}$,

使得 $x_n f^2(x_n)$ 有界此时 $\int_0^{x_n} f^2 dx$ 有界故 $\int_0^{+\infty} f^2 dx$ 存在

如果存在 $m > 0$ 使得 $x f^2(x) > m$ 则 $x^2 f^2(x) > mx$ 与 $x f(x)$ 平方收敛矛盾。故存在这样的 $\{x_n\}$, 使得 $x_n f^2(x_n)$ 有界

所以 f 平方可积

(2) 由 (1) 的过程可知存在趋于正无穷的 $\{x_n\}$ 使得 $x_n f^2(x_n)$ 趋于 0, 故

$$\int_0^{+\infty} f^2 dx = -2 \int_0^{+\infty} x f(x) f'(x) dx$$

所以由柯西不等式知

$$\int_0^{+\infty} f^2(x) dx = -2 \int_0^A x f(x) f'(x) dx \leq 2 \left(\int_0^{+\infty} x^2 f^2(x) dx \int_0^{+\infty} (f'(x))^2 dx \right)^{1/2}$$

(3) 等号当且仅当 $x f(x) = c f'$ 即 $f(x) = a e^{-bx^2}$, $b > 0$

6. 积分下限是 0, 而 b 是正实数, 导致 $\sqrt{x-b}$ 在 $(0, b)$ 上无意义, 这题我们跳过。

7. 利用复变函数里的柯西积分公式即得。

8. (1) 由于 (2) 包含 (1) 的结论, 我们只证 (2)

(2) 令 $\xi = e^{\frac{i\pi}{2n}}$ 由上题可知

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \frac{\xi^{2m(2k-1)}}{2n\xi^{(2n-1)(2k-1)}} = \\ \frac{i\pi}{n} \sum_{k=1}^n \xi^{(2m+1)(2k-1)} &= \frac{i\pi}{n} \xi^{2m+1} \frac{1-\xi^{2n(2m+1)}}{1-\xi^{2(2m+1)}} = \frac{\pi}{n} \csc \frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

(3) 令 $\xi = e^{\frac{i\pi}{2n}}$, n 为偶数, 则

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+1} dx &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \frac{\xi^{n(2k-1)}}{2n\xi^{(2k-1)(2n-1)}} = \\ \frac{i\pi}{n} \sum_{k=1}^n \xi^{(n+1)(2k-1)} &= \frac{i\pi}{n} \xi^{n+1} \frac{1-\xi^{2n(n+1)}}{1-\xi^{2(n+1)}} = \frac{\pi}{n} \sec \frac{\pi}{2n} \end{aligned}$$

取 $n = 50, 30$ 可得我们想要的答案

9. 设

$$A = \int_x^{+\infty} f(x) dx, B = \int_x^{+\infty} x f(x) dx, C = \int_x^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

则由 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$AC \geq B^2, (1-A)(1-C) \geq B^2, B \geq xA$$

如果 $A > \frac{1}{x^2+1}$, 则

$$B > \frac{x}{1+x^2}, C > \frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow (1-A)(1-C) < \frac{x^2}{(1+x^2)^2} < B^2$$

矛盾, 故 $A \leq \frac{1}{1+x^2}$ (1) 和 (2) 都是 $A \leq \frac{1}{1+x^2}$ 的推论

10. 设 $x > 0$, $k = [x/p]$ 则

$$\begin{aligned} \sum_{n=-[x/p]}^{[x/p]} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})pt \sin xt}{\sin \frac{1}{2}pt} \frac{1}{t} &= \sum_{n=-k}^k \cos npt \frac{\sin xt}{t} = \\ \frac{1}{2} \sum_{n=-k}^k \frac{\sin \frac{npt+xt}{2} - \sin \frac{npt-xt}{2}}{t} & \end{aligned}$$

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin st}{t} dt = \operatorname{sgn}(s)\pi$$

则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-[x/p]}^{[x/p]} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})pt}{\sin \frac{1}{2}pt} dt =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=-k}^k [\operatorname{sgn}(np + x) - \operatorname{sgn}(np - x)]\pi = (2k + 1)\pi$$

可知等式对 $x > 0$ 成立，对 $x < 0$ 类似可得。