装订线 • 答题时不要超过此线

中 国 科 学 技 术 大 学

2013 - 2014学年第二学期期终考试试卷(A)

考试科目: 线性代数(B1) 得分:________

学生所在院系:________ 姓名:________ 学号:________

一、 (20分) 填空题:

(1) $\mathbb{R}^3$中三个向量$\{(1,2,1),(2,5,3),(1,4,3)\}$所生成的线性子空间的维数是________.

(2) 设$\boldsymbol{A}$为2×3矩阵且$\det \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=1$, 则$\det \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=$________.

(3) 三个平面$a_ix+b_iy+c_iz=d_i,\ i=1,2,3$相交于一条直线的充要条件是

________________.

(4) 二次曲面$xy+yz+zx=1$表示的曲面类型是________________.

(5) 实二次型$Q(x,y,z)=x^2+4y^2+z^2+xz+2txy+2tyz$为正定当且仅当参数$t$满足________________.

二、 (20分) 判断下列命题是否正确, 并简要说明理由.

(1) 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关, 则$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$也线性相关.

(2) 令V是n阶实方阵按矩阵的加法与数乘构成的线性空间, W是满足行列式为零的所有n阶实方阵全体. 则W是V的子空间.

(3) 矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$不相似于矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

(4) 若矩阵A的列向量均不为零且互相正交, 则线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$没有非零解.

(5) 若$\boldsymbol{A}$为一个$m \times n$实矩阵且$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=n$, 那么$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$为正定矩阵.

三、 (14分) 给定矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 令$V$是与$\boldsymbol{A}$乘法可交换的所有三阶实方阵全体.

(1) 证明: V在矩阵的加法与数乘下构成实数域上的线性空间;

(2) 求V的维数与一组基.

四、 (12分) 设V为n维向量空间. T为V上的线性变换且满足$T^n=0$ 但$T^{n-1}\neq 0$.

(1) 证明:若存在向量$x\in V$ 满足$T^{n-1}\boldsymbol{x}\neq 0$, 则$\{\boldsymbol{x}, T\boldsymbol{x}, \cdots, T^{n-1}\boldsymbol{x}\}$ 为V 的一组基;

(2) 求T在上述基下的表示矩阵.

五、 (12分) 设$\boldsymbol{A}$为3阶实对称方阵, 其特征值分别为$5,-1,-1$, 且特征值5所对应的特征向量为$(1,1,1)$.

(1) 设V为特征值-1所对应的特征向量空间, 求V的一组标准正交基;

(2) 利用(1)确定矩阵$\boldsymbol{A}$.

六、 (14分) 在$\mathbf{R}^2$上定义内积如下:

$$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>=2x_1y_1+2x_2y_2+x_1y_2+x_2y_1$$

其中$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^T,\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)^T$.

(1) 求度量矩阵$\boldsymbol{G}$使得

$$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{y}$$

(2) 用Schmidt正交化方法从基$\{(1,0)^T,(0,1)^T\}$构造一组标准正交基;

(3) 证明: $\mathbf{R}^2$上线性变换$\mathcal{A}$是正交变换，当且仅当$\mathcal{A}$在基$\{(1,0)^T,(0,1)^T\}$下的矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{G}$.

七、 (8分) 设$\boldsymbol{A}$为n阶实对称正定方阵. 证明: 存在n阶实对称正定方阵$\boldsymbol{B}$使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.