中国科学技术大学2019－2020学年第二学期
数学分析B2(10/11)*

姓名：_____ 学号：_____

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

2020 年 5 月 1 日

一、计算题.

(1). $\iint\limits_D xy^2\,dx\,dy$, 其中D为抛物线$y^2=2x$和直线$2x=1$所围的区域;

(2). $\int_0^1 dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} e^{-x^2-y^2}dy+\int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}} e^{-x^2-y^2}dy$;

(3). 设(r,θ)是平面的极坐标系，求曲线$r=\sin 3\theta$围成区域的面积；

(4). $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}\left[(x+y+z)^2+\dfrac{y\,\log(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\right]dx\,dy\,dz$;

(5). $\oint_\Gamma (xy+yz+xz)ds$, 其中$\Gamma$是球面$x^2+y^2+z^2=1$和平面$x+y+z=0$的交线;

(6). $\iint\limits_\Sigma (x+y+z)\,dS$其中$\Sigma$是下半球面$x^2+y^2+z^2=1, z\le 0$;

(7). $\iint\limits_\Sigma \dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, 其中$\Sigma$是$\left\{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\right\}$，正向为外法向.

(1)

*评分标准：交卷分（8分或10分），正确率得分（至多5分）。交卷时间2020.5.8 20:00之前，得分10分；5.8.20:01–5.10 20:00得分8分，之后交卷0分; 助教依据正确率可适当加分，不超过5分

二、试证：

$$\sqrt{2}-1 \le \frac{1}{\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{dx\,dy}{\sqrt{1+\sin^2 x+\sin^2 y}} \le 1.$$

三、设D是直角坐标平面上由直线$x=0, y=0$与曲线$\sinh x\cos y=1,\ \cosh x\sin y=1$围成的区域，求积分

$$\iint\limits_{D}(\sinh^2 x+\cos^2 y)\sin 2x\sin 2y\,dxdy.$$

四、求球面$\{x^2+y^2+(z-R)^2=R^2\}$被椭圆锥面$ax^2+by^2=z^2\ (a,b>0)$截下部分S的面积。

五、设函数$\varphi(x)$具有连续的导数，在任意不绕原点且不过原点的简单光滑闭曲线Γ上，曲线积分$\oint_{\Gamma}\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=0$. 试求(1). 函数$\varphi(x)$; (2). 设$C$是绕原点的简单光滑正向闭曲线，求$\oint_{C}\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$.

六、设$\Omega\subset\mathbb{R}^3$是Gauss公式中的闭区域，数量场$f\in\mathbb{C}^2(\Omega)$在$\Omega$中处处不为零，且满足条件

$$\nabla\cdot(f\nabla f)=af,\quad \nabla f\cdot\nabla f=bf,$$

其中a,b是常数。试计算$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial f}{\partial\vec{\mathbf{n}}}\,d\sigma$，这里$\vec{\mathbf{n}}$ 是$\partial\Omega$的外法向量。

七、设向量场$\vec{v}=(2x+yz, xz-3y^2, 1+xy)$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$。请问向量场$\vec{v}$是否为有势场？若是，求$\vec{v}$的一个势函数。