

等离子体物理学

李毅

2022.9

相关书籍

- 课本

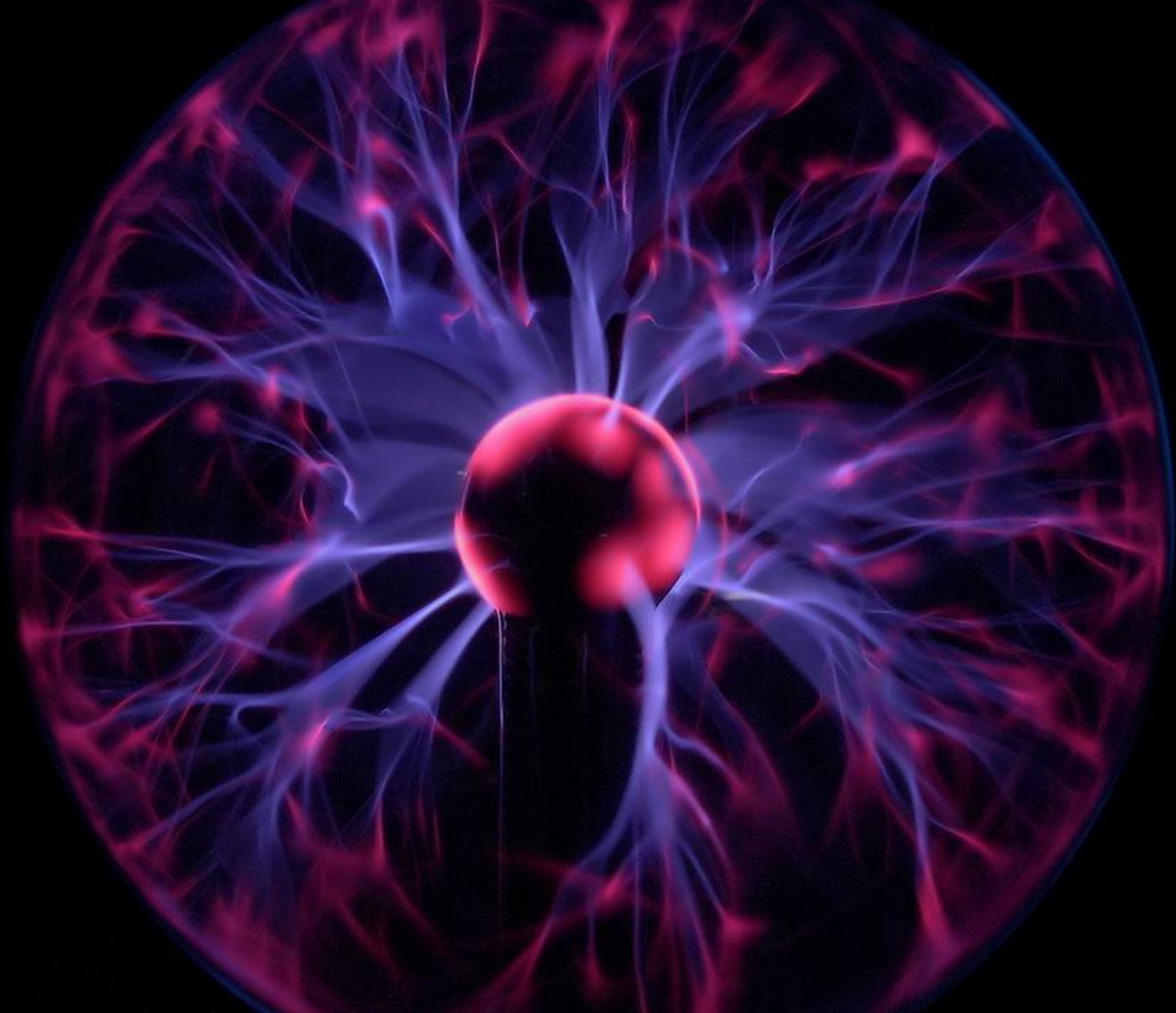
F. F. Chen, 等离子体物理学导论, 科学出版社, 2016
(Chen, F. F. Introduction to Plasma Physics. Springer New York 1974,
2nd ed. Plenum Press, 1984.)

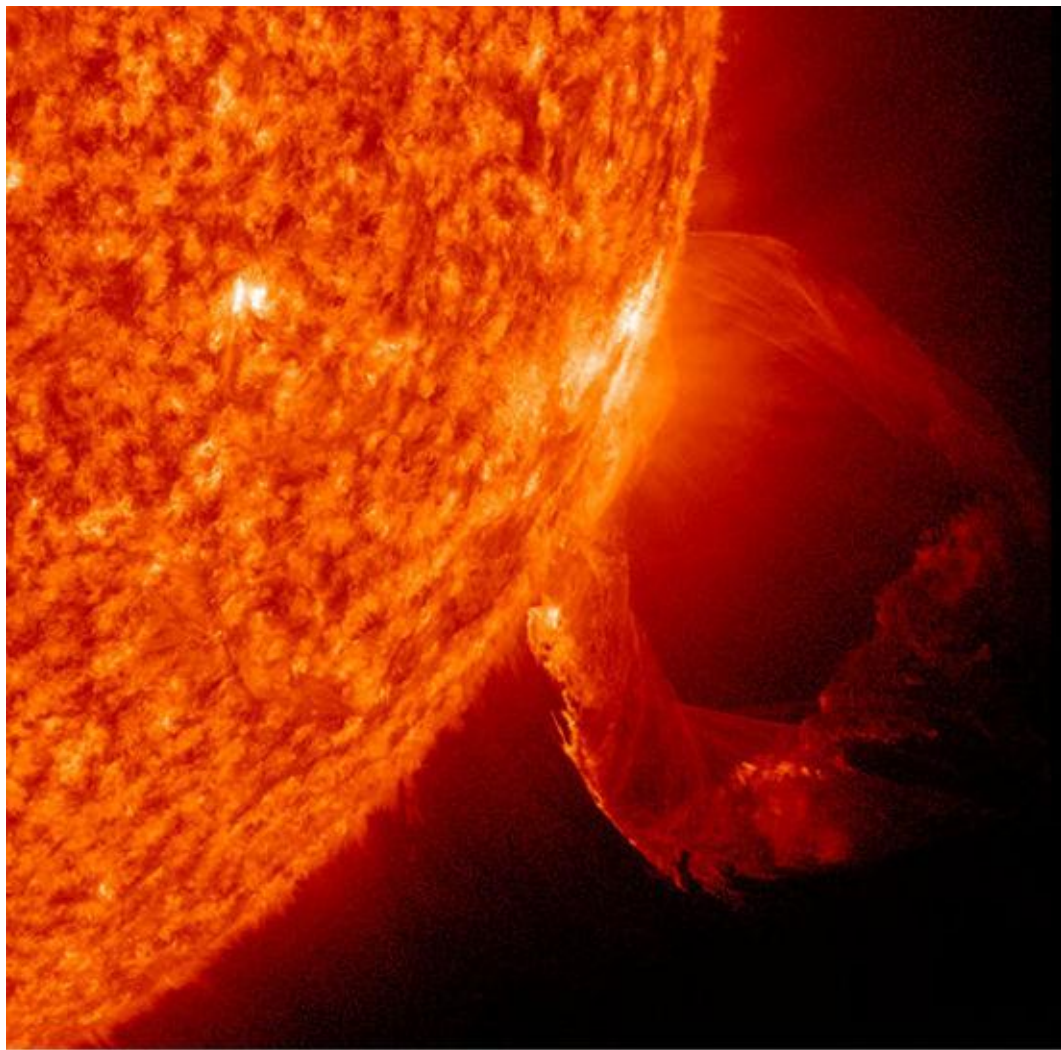
- 参考书籍

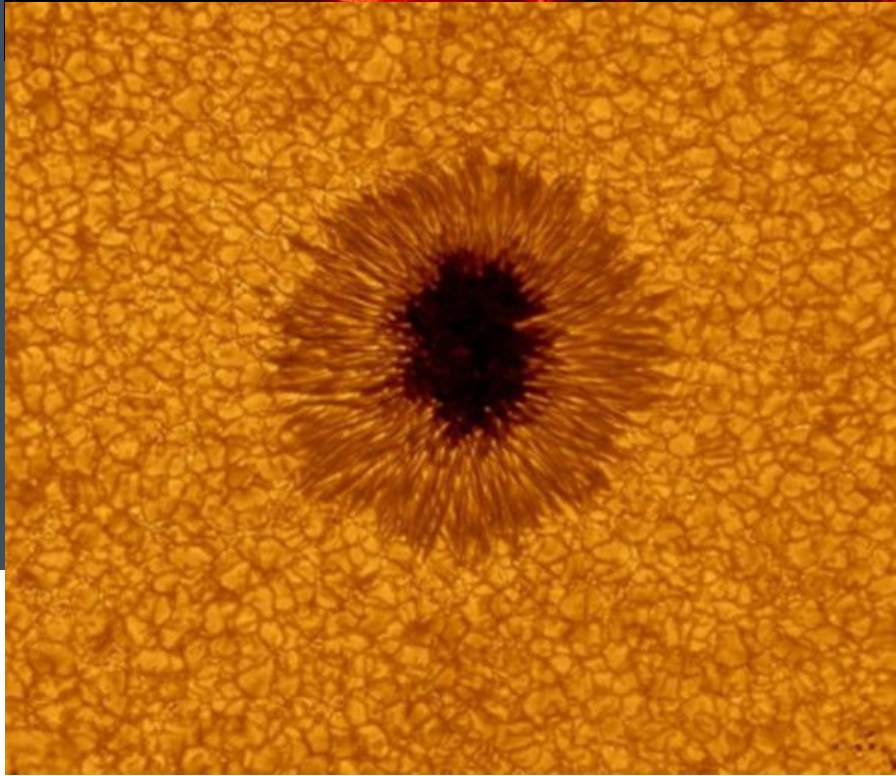
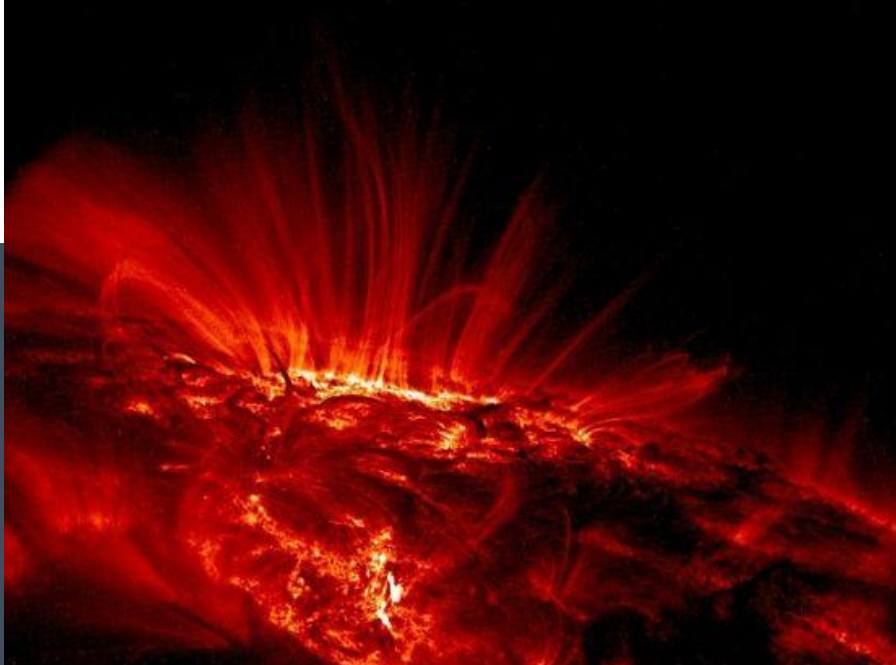
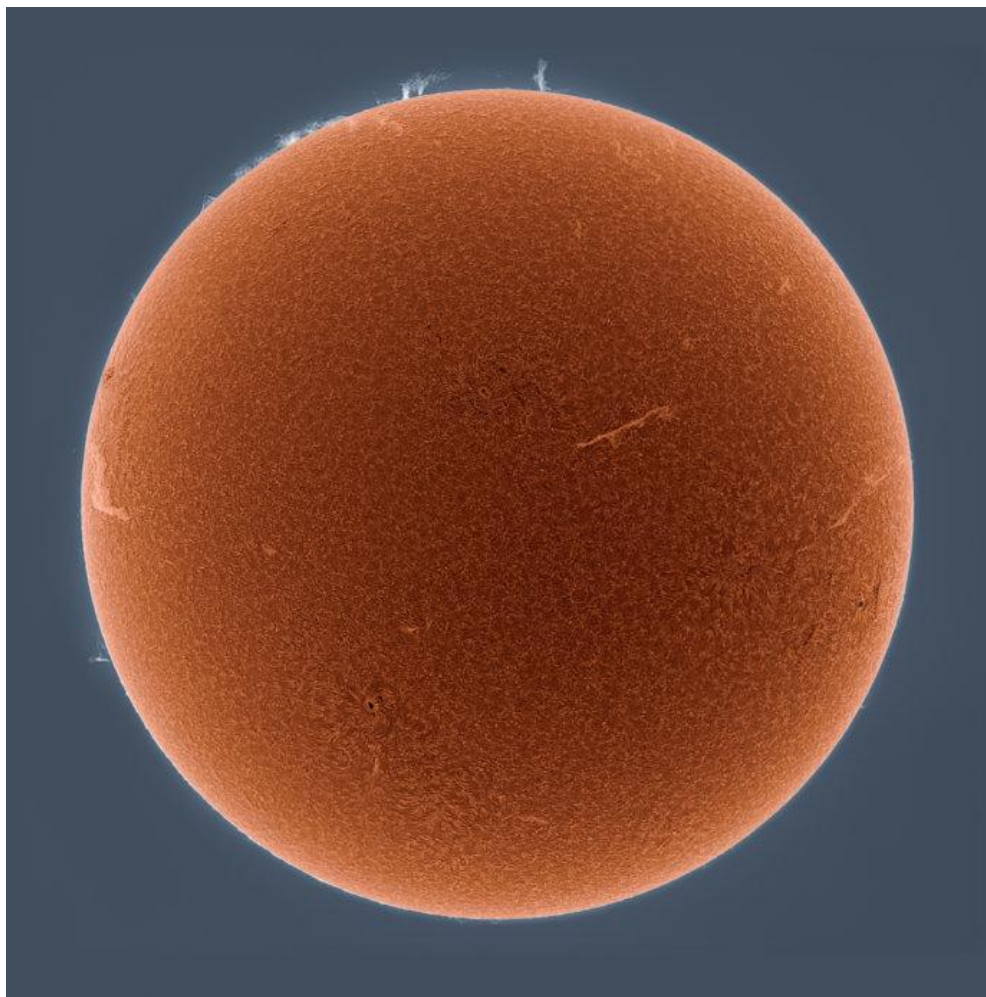
- 陈耀, 等离子体物理基础, 科学出版社, 2019
- 李定, 陈银华, 马锦绣, 杨维纮, 等离子体物理学, 高等教育出版社, 2006
- 郑春开 等离子体物理, 北京大学出版社, 2009
- 杜世刚 等离子体物理, 原子能出版社, 1988
- D.A. Gurnett, A. Bhattacharjee, Introduction to Plasma Physics: With Space and Laboratory Applications, Cambridge University Press, 2014 (有北大出版社的影印本)
- Dwight R. Nicholson, Introduction to Plasma Theory, John Wiley & Sons Inc., 1983
- T.J.M. Body and J. J. Sanderson, The Physics of Plasmas, Cambridge Univ. Press, 2003
- Wolfgang Bamjohann and Rudolf A. Treumann, Basic Space Plasma Physics, Imperial College Press, 1997
- 金尚宪 徐家鸾 等离子体物理学, 原子能出版社, 1980
- Nicholas A. Krall, Alvin W. Trivelpiece, Principles of Plasma Physics, 有中文译本。
- 马腾才 胡希伟 陈银华 等离子体物理原理, 中国科学技术大学出版社, 1988

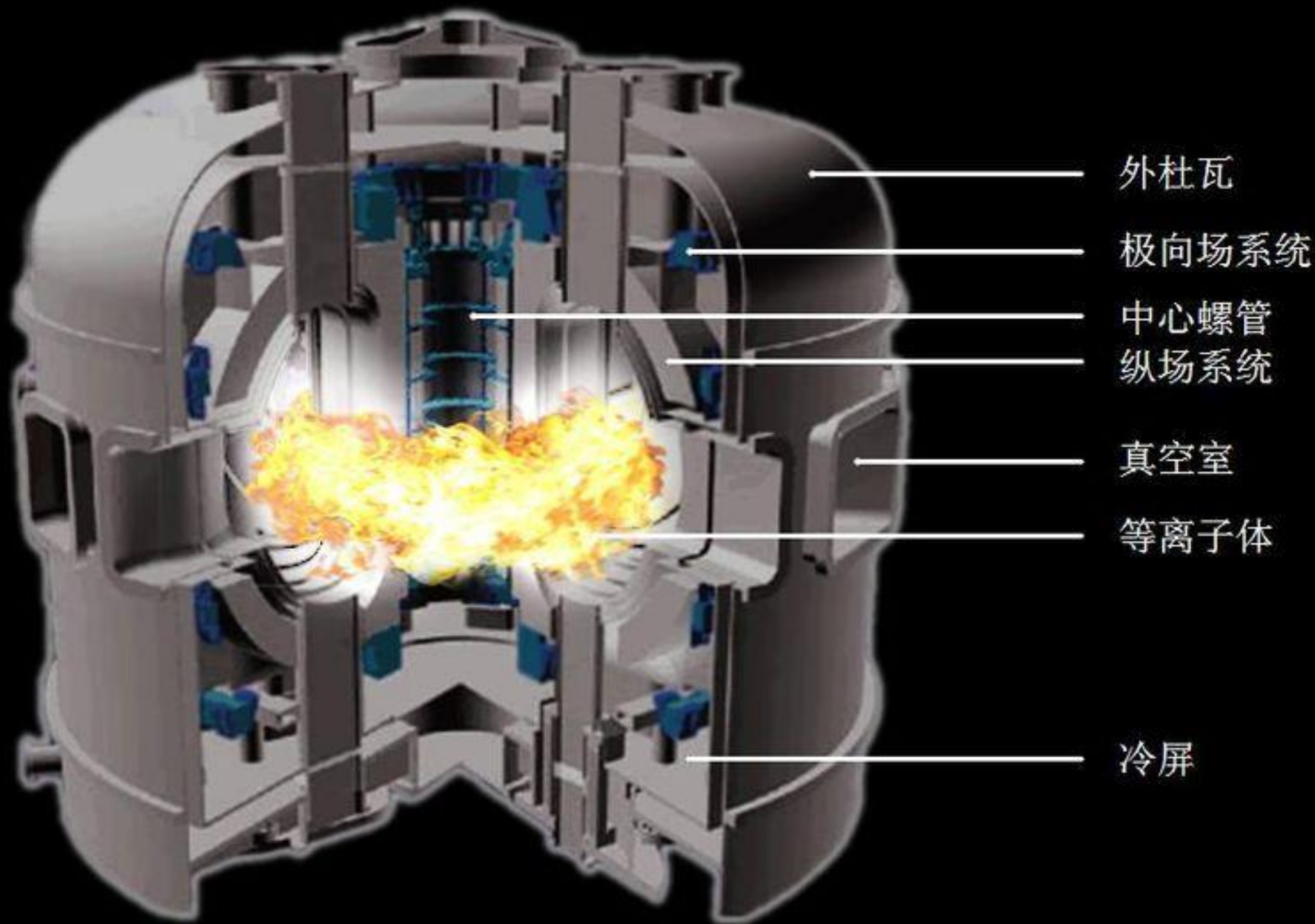
电子书籍

- 一些等离子体有关的电子书籍，网络收集，可供同学们参考。
- 有课本的电子版。
- 有些书籍使用高斯单位制，同学们可接触并有所了解。
- 未正式出版的讲义请勿外传。









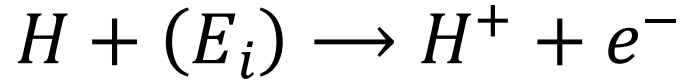
等离子体的概念和参数范围

- 等离子体从广义上说，是泛指一些具有足够能量的自由的带电粒子，其运动以受电磁场力作用为主的物质，从这个意义上来说，半导体、电解液都是等离子体。但一般相对专门性地是指电离了的气体，当然它的行为是以带电粒子和电场磁场自恰地相互作用为主导。
- 等离子体的感性认识：是部分或完全电离了的气体，它的行为受电磁场影响。
- 温度是导致物质状态变化的关键参量，等离子体是物质继固态、液态、气态之后的第四种状态。

气体电离

- 气体温度升高导致电离，从而形成等离子体态。
- 等离子体的复合率为 $\alpha n_i n_e$ 这里 α 是常数
- 只要气体有1%的电离，其行为就会由电磁场主导。
- 等离子体的温度和电子（离子）密度是它的重要参量。

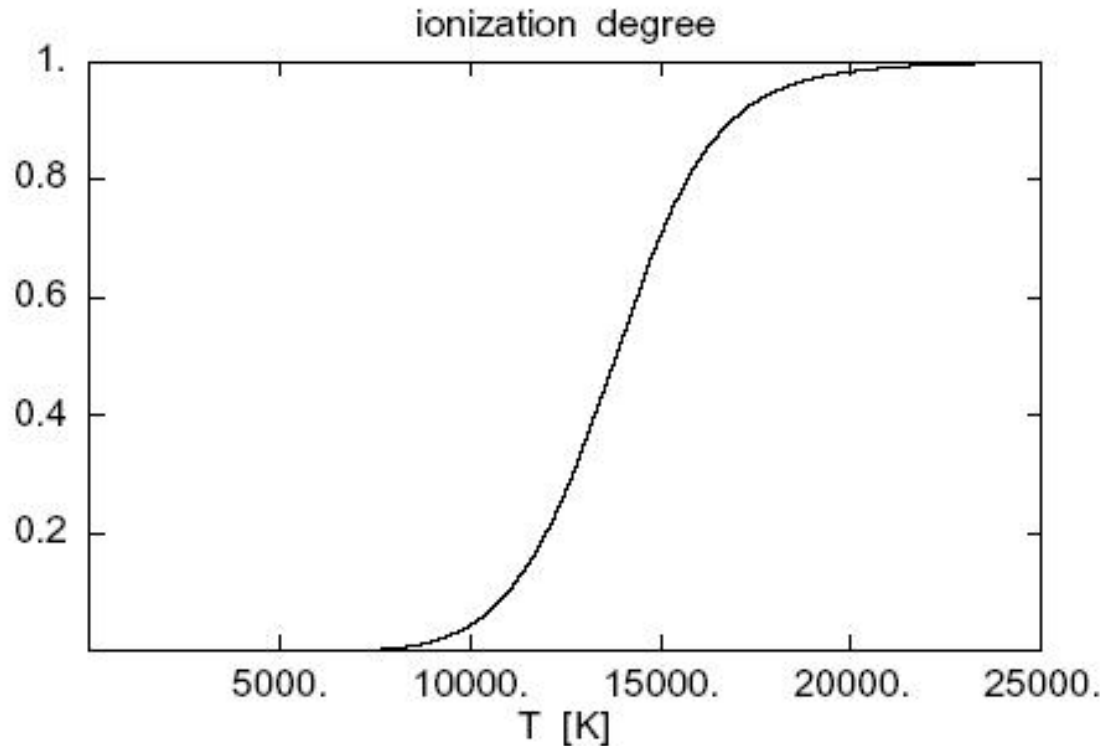
- 假设 H 原子在获得一定能量后，电离为氢离子和电子，即



- 这里 E_i 为电离能，是 13.6 eV。
- 当系统达到热平衡时，电离和复合两种相反的反应速度趋于一致，达到动态平衡。
- **Saha** 方程描述了温度与电离度（电离和复合达到平衡）的关系：

$$\frac{n_i n_e}{n_0} = \frac{\pi_i \pi_e}{\pi_0} \frac{(2\pi m_e kT)^{\frac{3}{2}}}{h^3} e^{-\frac{E_i}{kT}}$$

- 这里 n_e , n_i 是电子和氢离子的密度, n_o 是中性氢原子的密度, h 是 Planck 常数, k 是 Boltzmann 常数。
 π_e , π_i , π_o 分别是电子、氢离子和氢原子的统计权重, 分别是 2, 2, 1, 而 E_i 是电离能, 为 13.6 eV。



动能与势能

- 从等离子体密度可以估算粒子之间的平均

距离：
$$L = n^{-\frac{1}{3}}$$

- 在这个距离上，带电粒子之间的势能为

$$U = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 L}$$

- 而粒子的动能是与温度有关的，常以 kT 作为典型值或数量级。对于等离子体，一般来说，其动能要比势能大得多。

温度与速度分布

- 等离子体的温度常用能量 kT 表示，如：

$$1\text{eV} \sim 11600\text{K}$$

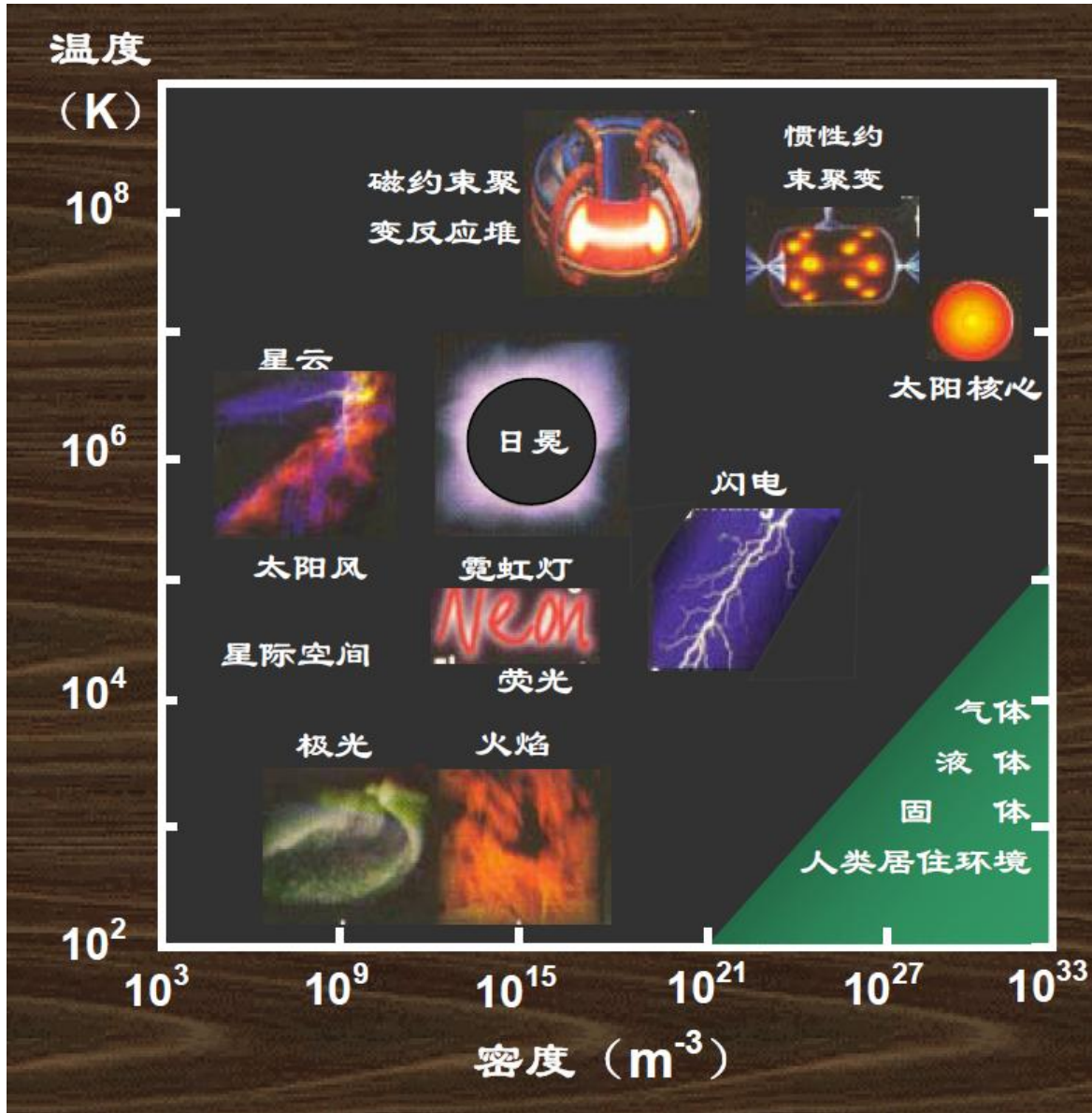
- 处于平衡态的等离子体常常具有Maxwellian

分布，即 $f = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$

- 对于非Maxwellian分布的等离子体，只有有效的动力学温度：

$$kT = \frac{1}{n} \iiint_{-\infty}^{+\infty} m(v_x - u_x)^2 f dv$$

等离子体的各种存在



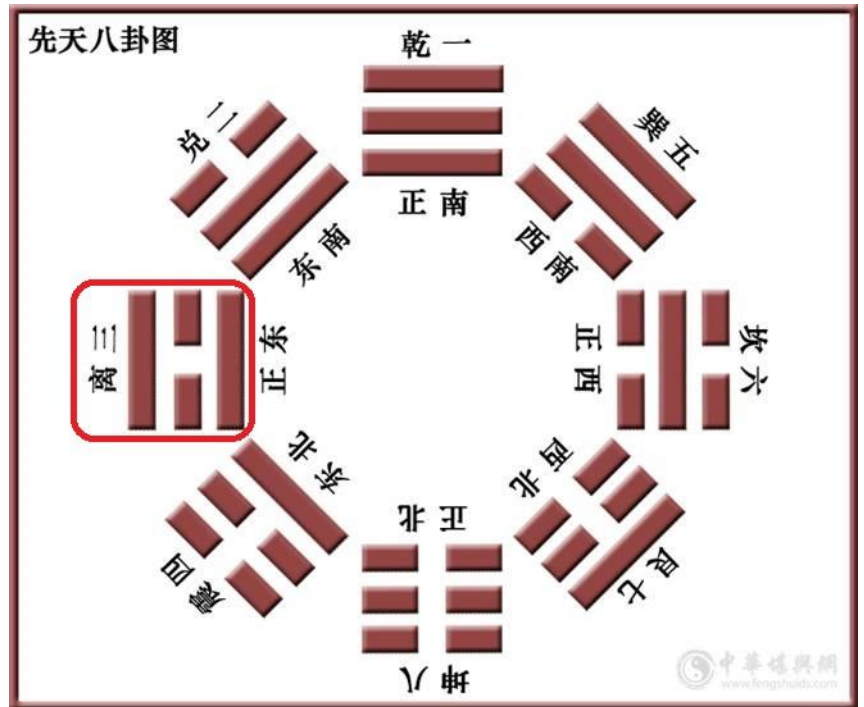
- 等离子体的参数范围很大，温度跨越了约7个量级，密度跨越约25个量级，这么大的范围类，等离子体物理都是适用的。

等离子体的各种存在方式

- 虽然等离子体在日常生活中不象固态、液态、气态物质那样常见，但事实上，自然界**99%**以上的物质是等离子体。遥远的恒星包括太阳都是以等离子体形式存在。行星际、磁层、电离层都是等离子体态的物质。大气中的闪电、高温火焰也是等离子体。极光、霓虹灯、闪电、电弧光、火焰等都是等离子体。等离子体的参数范围很大，温度跨越了约**7**个量级，密度跨越约**25**个量级，这么大的范围类，等离子体物理都是适用的。

古人对等离子体物质的认识

- 易经中有“离”卦，代表太阳，位置在东方，亦代表火，代表光明。
- 五行中的“火”也具有等离子体物质的特征。
- 古希腊哲学家认为火是构成世界万物的四种元素之一。
- 自古人们就认识到等离子体是构成世界的重要的物质。



等离子体物理的重要应用

- 等离子体研究的生长点：空间等离子体，能源相关的等离子体，工业技术相关的等离子体物理
- 空间物理：高层大气、电离层、磁层、行星际空间、太阳日冕、太阳光球及内部，恒星，星际等，空间环境是人类活动的新领域，空间天气与人类生活越来越紧密地联系在一起。
- 能源需求：主要是受控热核聚变。磁约束、惯性约束。
- 工业技术：等离子体电视、化学、冶金、表面处理、金刚石人工合成、镀膜、焊接、灯具

对于等离子体的描述方法

- 1. 单粒子运动
 - 仅考虑带电粒子在电磁场中的运动，不考虑带电粒子运动对电磁场的影响。
 - 方法简单直观，但不自洽，无法求出电磁场的变化
- 2. 磁流体力学
 - 将等离子体视为受磁场作用的流体，同时考虑流体的流动使磁场产生的变化。
 - 结果是自洽的，但等离子体需保持电中性和高导电性，以至于无须考虑电场的影响。仅适合处理低频长波的变化，因而被称为等离子体宏观理论。

对于等离子体的描述方法

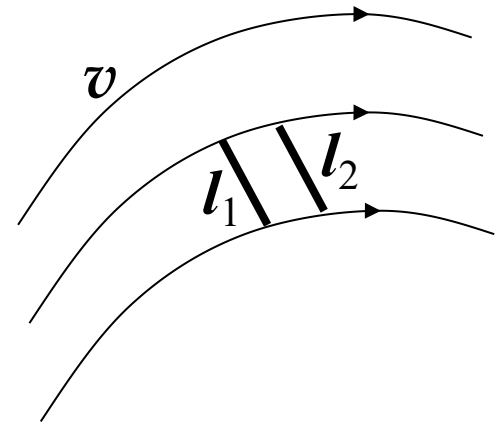
- 3. 多成分流体与电磁场相互作用
 - 对于每种带电粒子视为是一种流体，等离子体由多种流体成分组成，同时与电磁场发生自洽的相互作用。
 - 电子和离子可以分离，允许静电场存在，可以处理高频或短波长的问题，但要求同一种流体的速度分布不是远离平衡态的。
- 4. 动理学理论
 - 通过等离子体中电子和离子各种成分的速度分布函数完整描述等离子体的状态。对带电粒子加速、反射等现象能够很好地描述。
 - 需要解的信息太多，求解复杂。称为等离子体的微观理论。

流体的欧拉描述和拉格朗日描述

- 等离子体描述中，除了非自洽的单粒子运动理论，都将等离子体当作流体或相空间的流体处理。
- 对流体进行描述，考察各个物理量随着时间的变化，常用的是欧拉法，即考察固定的地点上物理量随时间的变化（偏微分 $\frac{\partial}{\partial t}$ ），另外一种方法是拉格朗日法，是考察固定的物质上的物理量随着时间的变化（全微分 $\frac{d}{dt}$ ）。因为物质是移动的，因此不但随时间变化，也随空间变化。
- 全微分与偏微分的关系

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

流体中的线段元



- 流体中的线段元在 t_1 时刻和 t_2 时刻分别为

$$l_1 = \mathbf{r}_{1B} - \mathbf{r}_{1A}, \quad l_2 = \mathbf{r}_{2B} - \mathbf{r}_{2A}$$

- 设 $\Delta t = t_2 - t_1$ 是小量, 则

$$\begin{aligned} l_2 &= \mathbf{r}_{1B} + \mathbf{v}(\mathbf{r}_{1B})\Delta t - \mathbf{r}_{1A} - \mathbf{v}(\mathbf{r}_{1A})\Delta t \\ &= l_1 + (\mathbf{v}(\mathbf{r}_{1B}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_{1A}))\Delta t \end{aligned}$$

$$\frac{l_2 - l_1}{\Delta t} = \mathbf{v}(\mathbf{r}_{1B}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_{1A}) \approx (\mathbf{r}_{1B} - \mathbf{r}_{1A}) \cdot \nabla \mathbf{v}$$

- 取 $\Delta t \rightarrow 0$ 的极限有: $\frac{dl}{dt} = l \cdot \nabla \mathbf{v}$

流体的连续性方程

- 描述流体密度的基本方程是连续性方程
 - 假设等离子体没有产生（电离）、没有消失（复合），一块等离子体的数量会保持不变。
- 拉格朗日法给出的流体连续性方程
$$\frac{d}{dt}(\rho\Delta V) = 0$$
- 随体运动时，体积 ΔV 和密度 ρ 都在不断变化，为了弄清楚体积的变化必须先知道线段在流动中的变化。

连续性方程（拉格朗日法）

- 取流体中的一个小体积元是 l_x 、 l_y 、 l_z 为平行三个坐标轴的线段元围成的长方体：

$$\Delta V = l_x \cdot (l_y \times l_z)$$

- 以及 $\frac{dl_x}{dt} = l_x \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{dl}{dt} = l_x \frac{\partial v}{\partial x}$ ，同样有 $\frac{dl_y}{dt} = l_y \frac{\partial v}{\partial y}$ ，

$$\frac{dl_z}{dt} = l_z \frac{\partial v}{\partial z}。因此$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta V}{dt} &= l_x \frac{\partial v}{\partial x} \cdot (l_y \times l_z) + l_y \frac{\partial v}{\partial y} \cdot (l_z \times l_x) + l_z \frac{\partial v}{\partial z} \cdot (l_z \times l_x) \\ &= l_x l_y l_z \frac{\partial v_x}{\partial x} + l_x l_y l_z \frac{\partial v_y}{\partial y} + l_x l_y l_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \Delta V \nabla \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

连续性方程（拉格朗日法）

- 拉格朗日法给出的流体连续性方程

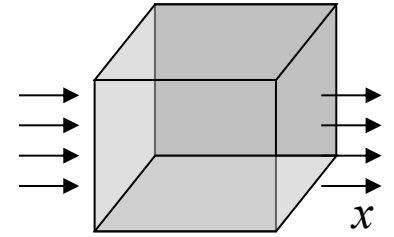
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\rho\Delta V) &= \frac{d\rho}{dt}\Delta V + \rho\frac{d}{dt}\Delta V \\ &= \frac{d\rho}{dt}\Delta V + \rho\Delta V\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0\end{aligned}$$

- 即拉格朗日型的连续性方程为

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$$

- 不可压缩条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$

连续性方程（欧拉法）



- 一个小体积元中， x 方向两侧净流入为

$$[\rho(x)v_x(x) - \rho(x + \Delta x)v_x(x + \Delta x)]\Delta y\Delta z\Delta t = -\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\Delta V\Delta t$$

- 再考虑 y 和 z 方向，最后总的净流入为

$$\begin{aligned} & [\rho(t + \Delta t) - \rho(t)]\Delta V \\ & = -\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]\Delta V\Delta t \\ & \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{aligned}$$

- 与拉格朗日法得到的连续性方程等价。

练习

- 利用积分公式 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ 验证对于分布函数

$$f(v_x, v_y, v_z) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}}$$

有
$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} f dv_x dv_y dv_z = n$$

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} v_x f dv_x dv_y dv_z = 0$$

$$\frac{1}{n} \iiint_{-\infty}^{+\infty} m v_x^2 f dv_x dv_y dv_z = kT$$

思考题

- 自然界中，有哪些等离子体物质？它们的温度、密度的参数范围是什么？试举例说明。
- 等离子体有哪些描述方式？其中，哪些是自洽的，哪些不是自洽的？
- 对于流体来说，拉格朗日法和欧拉法是怎样的描述方法？指出其中各自的特点，评论其优缺点。

动理论方程

——相空间的连续性方程

- 相空间取空间坐标和速度坐标均为自变量。分布函数 $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 是相空间的粒子密度。

- 动理论方程是相空间的连续性方程， \mathbf{x} 、 \mathbf{v} 相互独立：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (f\mathbf{v}) + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (f\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0$$

$$\frac{Df}{Dt} + f \left(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \frac{\mathbf{F}}{m} \right) = \frac{Df}{Dt} = 0$$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- 碰撞项。带电粒子紧邻的局部电磁场迥异于平均电磁场，引起碰撞效应。在速度空间分布函数有显著改变，

记为 $(\frac{\partial f}{\partial t})_c$ ，则：
$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = (\frac{\partial f}{\partial t})_c$$

满足动理论方程的平衡分布

- 麦克斯韦分布。多次碰撞后，分布趋向于

$$f(\mathbf{v}) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

- 显然满足动理论方程。波尔兹曼分布。有静电势时，

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{kT} \left(\frac{1}{2}mv^2 + q\varphi(\mathbf{x}) \right)}$$

- 显然满足动理论方程。一般带电粒子运动时，哈密顿函数 H （一般等于粒子动能和势能之和）守恒的情况下，有

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{H(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{kT}}$$

等离子体的基本性质

——高导电性和内部电场特性

- 等离子体是良导体。
 - 等离子体由能够自由移动的带电粒子组成，因而具有很好的导电特性。
- 非磁化等离子体几乎没有内部电场
 - 如果把等离子体视为电阻很小的良导体，非磁化的等离子体内部则相当于导体内部，电场趋向于0。
- 磁化等离子体中的电场基本上垂直于磁场
 - 虽然在有磁场的等离子体中可以有电场（磁场的作用阻碍了带电粒子在垂直磁场方向做自由移动，因而），但电场只有垂直于磁场的分量，平行于磁场的电场分量也很小。

等离子体的基本性质

——整体呈准电中性

- 等离子体整体呈电中性。
 - 如果等离子体中有净电荷存在的话，会导致静电场产生，这与等离子体中不存在电场的假设相违背。
- 热运动引起电荷的随机涨落，电中性被破坏
 - 由于等离子体具有一定的温度，带电粒子的热运动会引起电荷的随机涨落，时时会破坏电中性条件，而净电荷产生的静电场不断试图使等离子体保持净电荷分布处处为0的电中性。
- 准电中性
 - 等离子体只能在一定空间范围和时间尺度上保持电中性，而小于这个空间范围或时间尺度时，等离子体会在局部或在短暂时间内偏离电中性。从长时间和大尺度范围看，等离子体仍然呈现出电中性的特点。因此，我们称等离子体呈现准中性的特点。

准电中性的空间尺度

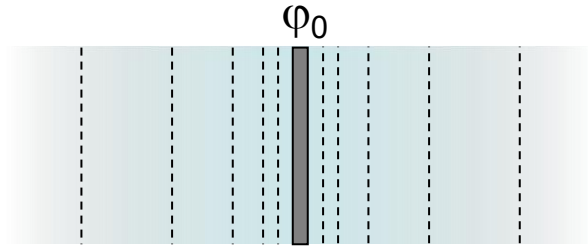
- 等离子体偏离电中性具有一定的空间尺度和时间尺度。
- 考虑在等离子体中放入一个电势为 φ_0 的无限大平板栅极。这时，假设栅极电位大于0，周围的离子被赶走，而电子被吸引，从而产生净电荷。净电荷产生的电场与带电粒子的热运动达到动态平衡。
- 此时，考虑一维静电情况下的等离子体的分布函数 $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 是波尔兹曼分布，满足动力论方程及静电方程：

$$f(x, \mathbf{v}) = n(x) \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{kT} \left(\frac{1}{2} m v^2 + q\varphi(x) \right)}$$
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\alpha=i,e} q_{\alpha} \int f_{\alpha} d\mathbf{v}$$

德拜屏蔽和德拜长度

- 考虑等离子体由电子和单一成分离子组成且 $q\varphi \ll kT$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} e^{-\frac{q_{\alpha} \varphi}{kT_{\alpha}}} \approx -\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \left(1 - \frac{q_{\alpha} \varphi}{kT_{\alpha}}\right) \\ &\approx \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha} q_{\alpha}^2}{kT_{\alpha} \varepsilon_0} \varphi = \sum_{\alpha} \frac{\varphi}{\lambda_{D\alpha}^2} = \frac{\varphi}{\lambda_D^2}\end{aligned}$$



- 其中，定义德拜长度 λ_D 满足

$$\lambda_{D\alpha} = \sqrt{\frac{kT_{\alpha} \varepsilon_0}{n_{\alpha} q_{\alpha}^2}}, \quad \lambda_D^{-2} = \sum_{\alpha} \lambda_{D\alpha}^{-2}$$

- 而此时静电势为：

$$\varphi(x) = \varphi_0 e^{-\frac{|x|}{\lambda_D}}$$

点电荷的德拜屏蔽

- 这里电势衰减的特征长度正是德拜长度。也是等离子体在空间上能够偏离中性条件的尺度。
- 考虑等离子体中的一个点电荷周围的电势。

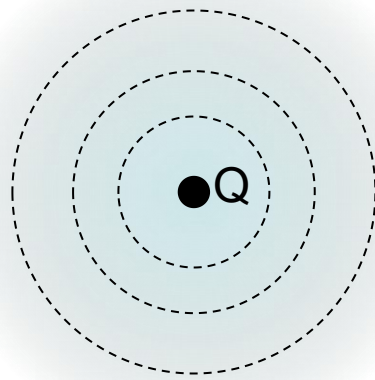
由于球对称性，电势 φ 是 r 的函数。

对点电荷周围的电荷做类似处理，有

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = \frac{\varphi}{\lambda_D^2}$$

- 令 $\psi = r\varphi$ ，方程成为 $\frac{d^2\psi}{dr^2} = \frac{\psi}{\lambda_D^2}$ ，解为 $\psi = \psi_0 e^{-\frac{r}{\lambda_D}}$ ，即有

$$\varphi(r) = \frac{\varphi_0}{r} e^{-\frac{r}{\lambda_D}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{r}{\lambda_D}}$$



点电荷的德拜屏蔽

- 其中 Q 为点电荷的电荷量。待定常数 φ_0 的取值，是使当等离子体密度趋于0时，所求的电势表达式与点电荷在真空中的电势一致。
- 等离子体中的电势比真空的显著减小，随着距离增加，以德拜长度为特征长度电势做指数衰减。
- 德拜长度是等离子体中的一个空间尺度，粗略地说，在这个尺度内，电势可以不为0，等离子体偏离电中性；而在比这个尺度更大的范围内，等离子体仍然可以被认为保持了电中性。等离子体中带电粒子的热运动通常在小尺度范围（即德拜尺度内）造成电中性被破坏。从德拜长度的表达式可知，热运动使得屏蔽效果变差，而电荷密度越大则屏蔽效果越好。

德拜球内的电子数

- 计算一下以德拜长度为尺度的等离子体中的电子个数（等离子体参量的倒数）：

$$N_e = \frac{4\pi}{3} \lambda_{De}^3 n_e = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{kT_e \epsilon_0}{n_e e^2} \right)^{\frac{3}{2}} n_e = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{kT_e \epsilon_0 L}{e^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \left(\frac{kT_e}{U} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad L = n^{-\frac{1}{3}}, \quad U = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 L}$$

- 以上的体积为球体，也有用立方体计算的。
- 这里 L 是电子之间的平均距离。 U 是在平均距离下的电势能。等离子体有热运动动能远大于势能的性质，即 $kT_e \gg U$ ，因而德拜球中的电子个数远大于1，即 $N_e \gg 1$ ，正是这样才能起屏蔽作用。

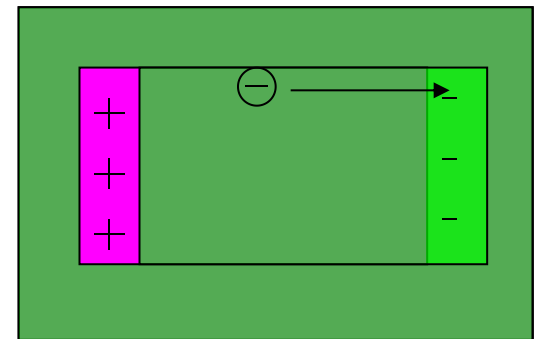
准电中性的时间尺度

- 考虑等离子体偏离电中性的时间尺度。带电粒子的热运动也会引起电荷分布的涨落，从而短时间内产生的非电中性和电场。电场试图回复等离子体的电中性，但在电荷分布回复中性时，带电粒子又具有了运动的动能，会引起新的电荷分布不均匀，结果成为振荡运动。特别对于电子振荡引起的波动，我们称电子的这种振荡为电子静电波，也叫Langmuir波。简单来说，假设电子整体移动了 x ，内部产生电场为 E ，结合电子运动方程，有

$$E = \frac{en_e x}{\epsilon_0}, \quad m_e \ddot{x} = -eE$$

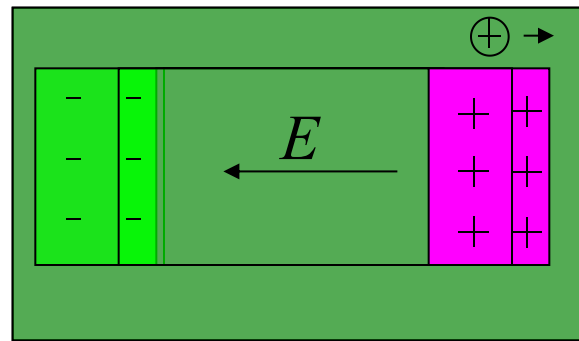
$$\text{即 } \ddot{x} + \omega_{pe}^2 x = 0, \quad \omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}}$$

$$\text{解得 } x = A \cos(\omega_{pe} t + \alpha)$$



离子与电子同时振动的情况

- 等离子体中，既有电子的热运动，也有离子的热运动。简单来说，假设电子整体向右移动了 x_e ，离子整体向右移动了 x_i ，内部产生电场 E 及各种带电粒子运动为



$$E = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} x_{\alpha}, \quad m_{\alpha} \ddot{x}_{\alpha} = q_{\alpha} E$$

- 将各个成分相加，得

$$\ddot{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \ddot{x}_{\alpha} = -\sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 E = -\omega_p^2 E$$

离子与电子同时振动的情况

- 可见电场以角频率 ω_p 振荡。这里

$$\omega_{p\alpha} = \sqrt{\frac{n_\alpha q_\alpha^2}{m_\alpha \epsilon_0}}, \quad \omega_p = \sqrt{\sum_\alpha \omega_{p\alpha}^2}$$

- ω_p 称为等离子体振荡频率。特别对于只有 H^+ 和电子组成的等离子体来说，由于 $\omega_{pi} \ll \omega_{pe}$ ，因而 $\omega_p \approx \omega_{pe}$ ，离子的运动可忽略，只需考虑电子的运动。

准电中性的时间、空间尺度和热运动

- ω_p 的倒数是满足准电中性条件的的时间尺度。它只是等离子体的密度的函数，与温度无关。
- 等离子体偏离电中性与带电粒子的热运动有很大关系。热运动的速度恰好是德拜长度和等离子体频率的乘积：

$$v_{te} = \sqrt{\frac{kT}{m_e}} = \lambda_{De}\omega_{pe}$$

- 这说明电子若用以角频率 ω_{pe} 作简谐振动，它的振幅是德拜长度 λ_{De} ，过平衡点时速度为 v_{te} 。

思考题

- 若密度为 n 的等离子体中，一半电子温度为 T 而另一半是冷的，其中的电子静电振荡的频率会如何变化？

练习题

- 验算有电势 ϕ 的 Boltzmann 分布满足动理论的稳态 Vlasov 方程。
- 等离子体中的某些电子正在做简谐振动，其振幅为 Debye 长度，动能由热运动提供，离子的运动可以忽略。问电子的简谐振荡角频率是多少？

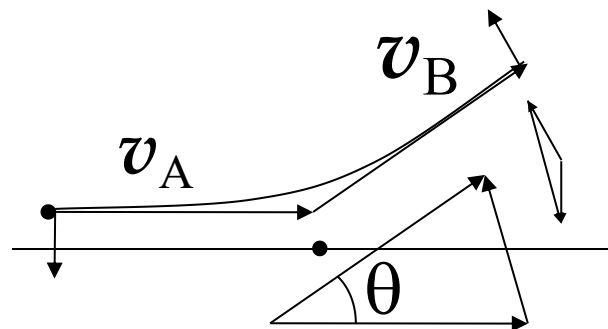
等离子体中的碰撞

- 经典的二体碰撞。两体碰撞在质心系中化为约化质量在有心力作用下的运动

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

$$m_1 \mathbf{r}_1 = -m_2 \mathbf{r}_2 = \mu \mathbf{r},$$

$$\mathbf{F} = \mu \ddot{\mathbf{r}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r,$$



- 角动量守恒有 $\mu r^2 \dot{\theta} = J = -b\mu v$, 这里 b 是瞄准距离, 以此式置换对时间积分中的 dt :

$$\mu(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) = \int_A^B \mu \ddot{\mathbf{r}} dt = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \frac{d\theta}{\dot{\theta}} = \frac{q_1 q_2 (\mathbf{e}_{\theta B} - \mathbf{e}_{\theta A})}{4\pi\epsilon_0 b v}$$

碰撞的偏转角和微分散射截面

- 设偏转角为 θ ，有 $\mu v \sin \frac{\theta}{2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 b v} \cos \frac{\theta}{2}$ ，即

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{b_0}{b}, \quad b_0 = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 \mu v^2}$$

- 为经典二体碰撞的偏转角公式。当瞄准距离 $b=b_0$ 时，偏转角为 90°
- 碰撞的微分散射截面 $d\sigma$ ，即单位立体角 $d\Omega$ 对应的靶面积，公式为：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b|db|d\varphi}{\sin\theta d\theta d\varphi} = \frac{b_0^2}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

库仑碰撞

- 按照瞄准距离，将碰撞情况近似为：
 - 近碰撞，转角大于等于 90° ： $b \leq b_0$
 - 远碰撞，转角小于 90° ： $\lambda_D > b > b_0$
 - 无碰撞，因德拜屏蔽，认为无静电场： $b \geq \lambda_D$
- 近碰撞频率为： $\nu_0 = \pi b_0^2 n_2 v$
- 处理远碰撞时，每次碰撞 $\theta \approx \frac{2b_0}{b}$ ，多次小角度碰撞累计为一次大角度偏转的情况，
$$\theta^2 = \int_{b_0}^{\lambda_D} \theta^2 n_2 v \Delta t 2\pi b db = 8\pi b_0^2 n_2 v \ln \frac{\lambda_D}{b_0} \Delta t$$
- 远碰撞频率 $\nu_c = 8\nu_0 \ln \frac{\lambda_D}{b_0} \gg \nu_0$ ，因此，远碰撞比近碰撞更重要，常用它近似表示总碰撞频率。

实验室坐标系中的碰撞

- 在实验室坐标系中，被撞的（下标2）粒子静止，偏转角与质心系中有所不同。由于大多是小角度偏转，有

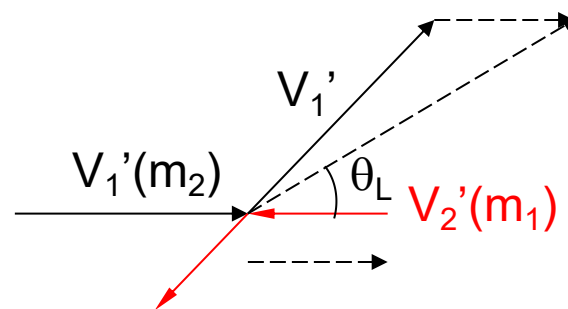
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin(\theta - \theta_L)}{\sin \theta_L} \approx \frac{\theta}{\theta_L} - 1$$

– 在 $m_1 \ll m_2$ 时，有 $\theta = \theta_L$

– 在 $m_1 \gg m_2$ 时，有 $\theta_L = \theta \frac{m_2}{m_1}$

– 在 $m_1 = m_2$ 时，有 $\theta_L = \frac{\theta}{2}$

- 因此，在实验室坐标系中，计算等离子体中的电子-电子，电子-离子，离子-离子彼此的碰撞频率时也要做相应调整。



实验室系的碰撞频率分析

考虑约化质量 $\mu_{ee} = \frac{m_e}{2}$, $\mu_{ii} = \frac{m_i}{2}$, $\mu_{ei} = \mu_{ie} = m_e$

• 相对速度 $v_{12}^2 = \langle v_1^2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + v_2^2 \rangle$

$$= \langle v_1^2 \rangle + \langle v_2^2 \rangle = \frac{3kT_1}{m_1} + \frac{3kT_2}{m_2}$$

• $v_{ee} = \sqrt{2}v_e$, $v_{ei} = v_{ie} \approx v_e$, 这里 $v_e^2 = \frac{3kT_e}{m_e}$

• 瞄准距离 $b_0 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \mu_{12} v_{12}^2}$, 因此

$$b_{0(ee)} = b_{0(ei)} = b_{0(ie)} = \frac{e^2}{12\pi\epsilon_0 kT_e}, \quad b_{0(ii)} = \frac{e^2}{12\pi\epsilon_0 kT_i}$$

实验室系的碰撞频率分析

- 对于远碰撞，前面的计算表明其碰撞频率正比于 θ^2 ，因此对于质心系(c)与实验室坐标系(L)中，有

$$\nu_L = \left(\frac{\theta_L}{\theta_c}\right)^2 \nu_c$$

- 因此，在实验室坐标系中，考虑等离子体中的带电粒子彼此的碰撞频率

$$\begin{aligned}\nu_{L(ee)} &= \frac{1}{4} \nu_{c(ee)} = \frac{1}{4} \cdot 8(\pi b_0^2 n_e \sqrt{2} v_e) \ln \frac{\lambda_D}{b_0} \\ &= 2\sqrt{2}\pi b_0^2 n_e v_e \ln \frac{\lambda_D}{b_0}\end{aligned}$$

- 如果 $T_e = T_i$ 则 $\nu_{L(ii)} = \varepsilon \nu_{L(ee)}$ ，这里 $\varepsilon = \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$

实验室系的碰撞频率分析

- 考虑等离子体中的电子-离子，离子-电子的碰撞频率

$$\nu_{L(ei)} = \nu_{c(ei)} = 8\pi b_0^2 n_e v_e \ln \frac{\lambda_D}{b_0}$$

$$\nu_{L(ie)} = \varepsilon^4 \nu_{c(ie)} = \varepsilon^4 \nu_{L(ei)}$$

- 这说明等离子体中，电子与其他粒子的碰撞频率很高，而离子与其他粒子碰撞的频率很低。
- 如果 $T_e = T_i$ ，4种碰撞频率之比为：

$$\nu_{L(ee)} : \nu_{L(ii)} : \nu_{L(ei)} : \nu_{L(ie)} = 1 : \varepsilon : 2\sqrt{2} : 2\sqrt{2}\varepsilon^4$$

实验室系碰撞的能量交换

- 每次质心系转 90° 的碰撞，在实验室系中 m_2 由静止到运动时，在平行和垂直方向速度分量均等于质心系速度 v_c ，它通过碰撞获得的能量为：

$$\Delta E = m_2 v_c^2 = m_2 \left(\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{3kT_1 \mu}{m_1 + m_2}$$

- 则有 $\Delta E_{(ee)} = \frac{3}{4} kT_e$ ， $\Delta E_{(ii)} = \frac{3}{4} kT_i$ ， $\Delta E_{(ei)} = 3\varepsilon^2 kT_e$ ， $\Delta E_{(ie)} = 3\varepsilon^2 kT_i$

- 实验室系的碰撞的能量交换效率 $\eta \propto v \Delta E$ ，若 $T_e = T_i$ ，四种之比为：

$$\eta_{(ee)} : \eta_{(ii)} : \eta_{(ei)} : \eta_{(ie)} = 1 : \varepsilon : 8\sqrt{2}\varepsilon^2 : 8\sqrt{2}\varepsilon^6$$

等离子体因碰撞趋于平衡的快慢

- 以上计算表明，等离子体中，因碰撞趋于平衡分布的时间，电子-电子最短，此时形成温度为 T_e 的电子热平衡分布；然后经离子-离子碰撞使离子达到温度为 T_i 的离子热平衡分布，最后，通过电子和离子之间的相互碰撞，使电子和离子达到共同温度 T ，系统整体达到热平衡。
- 达到热平衡需要的时间比约为

$$\tau_{(ee)} : \tau_{(ii)} : \tau_{(ei)} \approx 1 : \varepsilon^{-1} : \varepsilon^{-2}$$

单粒子运动

- 等离子体的一种最简单的描述方法，它只考察带电粒子在电磁场作用下的运动：

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} \right)$$

- 但并不考虑带电粒子运动状态变化而改变电磁场
 $\mathbf{r}(t) \Rightarrow \rho(t, \mathbf{r}), \mathbf{j}(t, \mathbf{r}), \Rightarrow \mathbf{E}(t, \mathbf{r}), \mathbf{B}(t, \mathbf{r})$

- 适用范围：稀薄的等离子体成分，或具有强大磁场的情况。其运动状态的变化不会显著改变已存在的电磁场。优点：简单直观，物理图像清晰。缺点：不是自恰地描述物理过程。无法研究带电粒子与电磁场的相互作用。

带电粒子在均匀恒定磁场中的运动

- 回旋运动

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \left(-\frac{q\boldsymbol{B}}{m}\right) \times \boldsymbol{v}$$

这类似旋转运动的

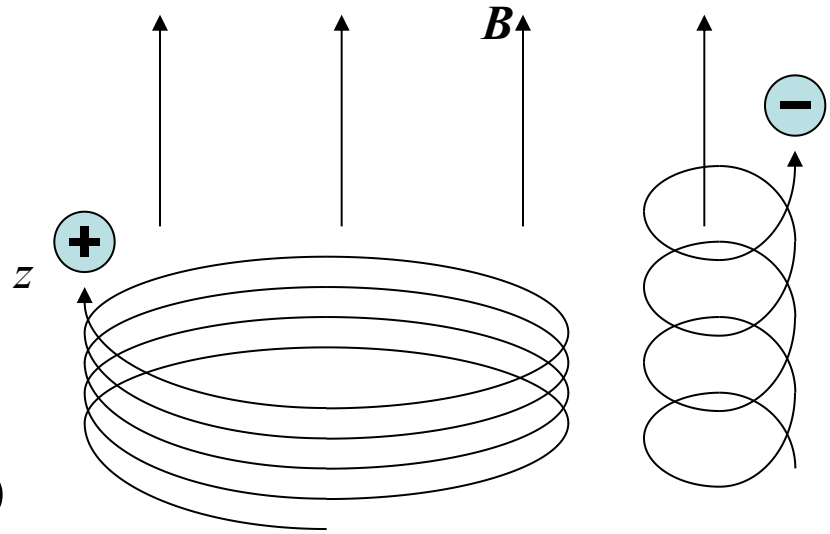
$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}, \text{ 表示为:}$$

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}$$

其中回旋频率（矢量）

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{q\boldsymbol{B}}{m} = -\Omega\boldsymbol{b}$$

这里 $\Omega = \frac{qB}{m}$, 而 $\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{B}}{B}$ 是磁场方向单位矢量。



带电粒子在均匀恒定磁场中的运动

- 取 z 轴为磁场 \mathbf{B} 方向，在 x, y 方向上

$$\dot{v}_x = \Omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\Omega v_x$$

- 令 $\tilde{v} = v_x + iv_y$ ，则 $\dot{\tilde{v}} = -i\Omega\tilde{v}$ ，可解得

$$\tilde{v} = \tilde{v}_0 \exp(-i\Omega t)$$

这里 $\tilde{v}_0 = v_{\perp} \exp(-i\alpha)$ 是常复数，其辐角为 $-\alpha$ ，模 v_{\perp} 为回旋速率。带电粒子在 x, y 平面内的投影是做匀速圆周运动（回旋）。

- 在 z 方向（平行方向）上，粒子的速度分量保持不变。

带电粒子在均匀恒定磁场中的运动

- 求解得带电粒子的运动速度:

$$v_x = v_{\perp} \cos(\Omega t + \alpha)$$

$$v_y = -v_{\perp} \sin(\Omega t + \alpha)$$

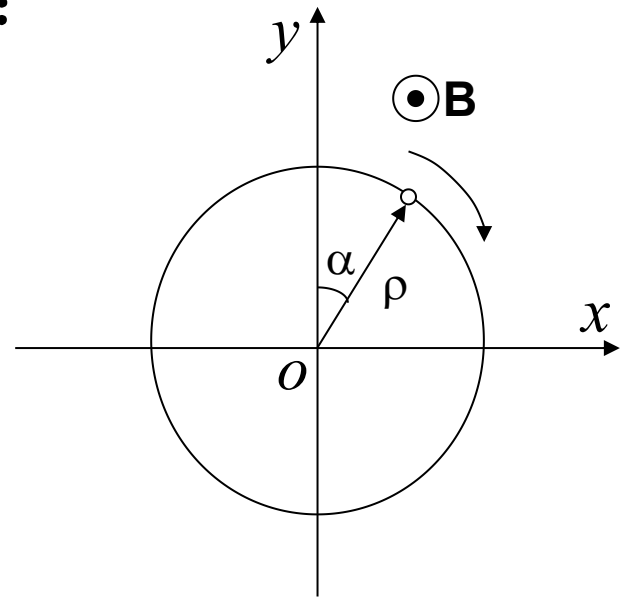
$$v_z = v_{\parallel}$$

位置为:

$$x = \rho \sin(\Omega t + \alpha) + x_0$$

$$y = \rho \cos(\Omega t + \alpha) + y_0$$

其中 $\rho = \frac{v_{\perp}}{\Omega}$ 是回旋半径。



均匀恒定磁场中带电粒子的回旋运动

- 值得注意的是，回旋频率只与磁场的大小有关，而与回旋粒子的垂直速度或回旋半径无关。但如果相对论效应不能忽略，则带电粒子的质量会发生变化，回旋频率会随着垂直方向的速度改变。此时，带电粒子的运动方程为

$$m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

- 其中 γ 是相对论因子。它只与带电粒子速度的大小有关，与速度的方向无关。因磁场力不做功，粒子的动能、速率、 γ 均不变，回旋频率 $\Omega = \frac{qB}{m\gamma}$ 。

带电粒子在均匀恒定电磁场中运动

- 磁场、电场恒定

- 假设磁场沿 z 轴，电场在 x, z 平面内。

- 设 $\tilde{v} = v_x + v_y i$ ，由运动方程得：

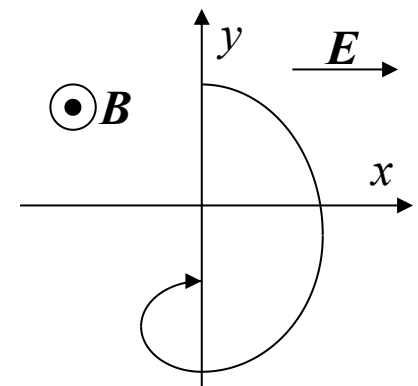
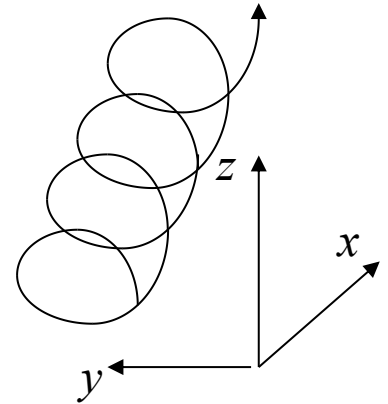
$$\dot{\tilde{v}} = -i\Omega\tilde{v} + \frac{qE_x}{m} = -i\Omega\left(\tilde{v} + \frac{iE_x}{B}\right)$$

$$\dot{v}_z = \frac{qE_z}{m}$$

- 解得 $\tilde{v} = v_{\perp} \exp(-i\alpha) - \frac{iE_x}{B}$

$$v_z = \frac{qE_z}{m}t + v_{z0}$$

- 即 $v_x = v_{\perp} \cos(\Omega t + \alpha)$

$$v_y = -v_{\perp} \sin(\Omega t + \alpha) - \frac{E_x}{B}, \text{ 有 } -y \text{ 方向的漂移速度。}$$


带电粒子引导中心的漂移运动

- 引导中心的漂移运动

- 回旋运动时

$$\mathbf{v}_{\perp} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho}, \quad \boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}}{\Omega^2}$$

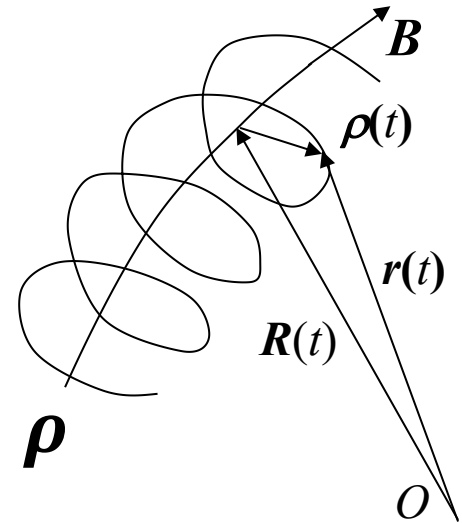
- 定义引导中心位于: $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}$

- 引导中心的运动速度为

$$\mathbf{v}_c = \dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{r}} - \dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{v} - \frac{\dot{\mathbf{v}} \times \boldsymbol{\Omega}}{\Omega^2} - \mathbf{v} \times \frac{d}{dt} \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega^2}$$

设 \mathbf{f} 是除磁场以外的力, 则加速度

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{m} (\mathbf{f} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{\mathbf{f}}{m} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$$



引导中心的漂移运动

- 化简可得

$$\mathbf{v}_c = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b} + \frac{\mathbf{f} \times \mathbf{b}}{m\Omega} + \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt\Omega}$$

- 其中，引导中心的漂移速度分为3项。

- 平行磁场的运动 $v_{\parallel} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}$,

- 外力引起的垂直磁场方向的漂移 $\mathbf{v}_f = \frac{\mathbf{f} \times \mathbf{b}}{qB}$

- 磁场的非均匀性引起的漂移 $\mathbf{v}_m = \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt\Omega}$

引导中心的漂移运动

- 带电粒子运动大致图像：首先，它绕着磁力线旋转，但其引导中心主要是沿着磁力线方向做平行运动。其次，引导中心会在外力作用下漂移偏离磁力线，其漂移方向与磁力线垂直，也与力的方向垂直。此外，磁场的不均匀性也能引起漂移运动。
- 下面我们详细分析一下带电粒子的各种引导中心的漂移运动。

恒定电场力的漂移运动

- 对于恒定静电场，漂移速度为

$$\mathbf{v}_f = \frac{\mathbf{f} \times \mathbf{b}}{qB} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{b}}{B}$$

- 值得注意的是，电场漂移速度与带电粒子的电荷的正负符号无关，也与带电粒子的质量无关。在等离子体中，离子和电子以相同的方向和速度漂移，不会造成的电荷分离。事实上，我们如果取一个以相对速度运动的新参考系（称为deHoffman-Teller参考系），通过洛伦兹变换可以发现，在新的参考系中电场为0，带电粒子只是简单地围绕磁力线旋转。而在我们原先的参考系中观察，所有的电子和离子除了回旋之外，均以一个相同的速度做漂移运动。

重力等其他恒定力的漂移运动

- 普通情况下，力总是引起与其方向一致的加速度。而在有磁场的情况下，力引起的是一个垂直方向的漂移速度 \boldsymbol{v}_f ，而不是与力同向的加速度。
- 对于电场力，这个漂移速度与带电粒子的电荷无关；对于重力等一般的力，漂移速度与电荷有关，尤其对于电荷符号相反的带电粒子，其漂移方向也相反。在等离子体中，电子和离子漂移方向不同，会引起电荷分离，从而产生一些特殊的物理现象（如等离子体-磁场分界面上产生的瑞利-泰勒不稳定性）。

思考题

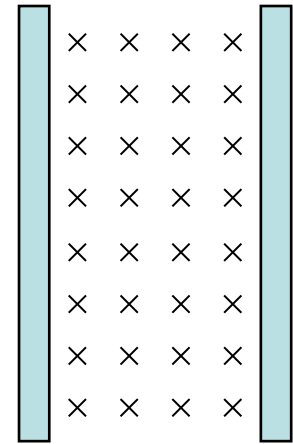
- 为什么通常Debye长度远大于近碰撞的瞄准距离？给出证明。
- 库仑碰撞所用的电势的模型是什么？库仑碰撞(远碰撞)和近碰撞一般情况下谁的碰撞频率更高？
- 磁场中的引导中心位置如何确定？受力之后引导中心向哪个方向漂移？

练习题

- 在均匀电磁场 $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_x$, $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ 中，电子原先静止在原点，求它其后的运动轨迹，并证明轨迹是摆线。

练习题

- 设两竖直放置的无限大平板之间存在等离子体，磁场 B_0 为水平方向且平行于平板，重力将引起漂移并产生电荷分离，进而产生电场。若电荷到达平板处将在平板上积累，等离子体密度一直维持不变。求在此电场作用下的粒子漂移运动情况。



磁场不均匀性引起的漂移

- 带电粒子感受到的磁场变化主要是磁场空间不均匀引起的

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt\Omega}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \approx \mathbf{v} \cdot \nabla$$

- 磁场变化的频率应远远小于回旋频率，否则引导中心的近似不成立。一般来说，磁场随时间变化会感应出电场，情况比较复杂，因而这里不予考虑。普通情况下，磁场变化频率很低。
- 空间变化的特征尺度也应该远大于回旋半径。研究漂移时需要对回旋圆周做平均。

磁场不均匀性引起的漂移

- 对回旋圆周做平均时，假设带电粒子作螺旋运动
 $\mathbf{v} = v_{\parallel} \mathbf{b} + \mathbf{v}_{\perp}$, $\mathbf{v}_{\perp} = v_{\perp} [\mathbf{e}_x \cos(-\Omega t) + \mathbf{e}_y \sin(-\Omega t)]$
- 在局部， $\mathbf{b} = \mathbf{e}_z$ ，由 $\langle \mathbf{v}_{\perp} \rangle = 0$ ，有

- $$\begin{aligned} \mathbf{v}_m &\approx \langle \mathbf{v}_m \rangle \approx \left\langle \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{b}}{\Omega} \right\rangle \\ &= v_{\parallel}^2 \mathbf{b} \times (\mathbf{b} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{b}}{\Omega} + v_{\parallel} \mathbf{b} \times (\langle \mathbf{v}_{\perp} \rangle \cdot \nabla) \frac{\mathbf{b}}{\Omega} \\ &\quad + \langle \mathbf{v}_{\perp} \rangle \times (v_{\parallel} \mathbf{b} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{b}}{\Omega} + \left\langle \mathbf{v}_{\perp} \times (\mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{b}}{\Omega} \right\rangle \\ &= \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} \mathbf{b} \times (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \left\langle \mathbf{v}_{\perp} \times (\mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{b}}{\Omega} \right\rangle \end{aligned}$$

曲率漂移

- 记

$$\boldsymbol{\kappa} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b}$$

- 则 $\boldsymbol{\kappa}$ 是曲率。沿着磁力线经过 Δl 长度，磁场方向单位向量变化为 $\Delta \mathbf{b}$ （方向转动角为 $\Delta \theta$ ），若磁力线曲率半径为 R ，径向的单位向量为 \mathbf{e}_R ，则

$$\boldsymbol{\kappa} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} \approx \frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta l} \approx \frac{\Delta \theta (-\mathbf{e}_R)}{\Delta l} = -\frac{\mathbf{e}_R}{R}$$

- \mathbf{v}_m 的第一项为

$$\mathbf{v}_{cv} = \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} \mathbf{b} \times \boldsymbol{\kappa} = \left(\frac{mv_{\parallel}^2}{R} \mathbf{e}_R \right) \times \frac{\mathbf{b}}{Bq}$$

曲率漂移

- 对比带电粒子受力产生漂移 \mathbf{v}_f 的公式，可知这相当于粒子沿磁力线以速度 v_{\parallel} 运动时，由于磁力线具有一定的曲率而产生离心力 $\frac{mv_{\parallel}^2}{R} \mathbf{e}_R$ ，从而引起漂移。
- \mathbf{v}_m 的后一项为

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \left\langle \mathbf{v}_{\perp} \times (\mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{b}}{\Omega} \right\rangle$$

- 其中 $\mathbf{v}_{\perp} = v_{\perp} [\mathbf{e}_x \cos(-\Omega t) + \mathbf{e}_y \sin(-\Omega t)]$ ，带入计算时需要的时间平均。

梯度漂移

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{\nabla B} &= v_{\perp}^2 \langle \cos^2(-\Omega t) \rangle \mathbf{e}_x \times (\mathbf{e}_x \cdot \nabla) \frac{\mathbf{b}}{\Omega} \\ &\quad + v_{\perp}^2 \langle \sin^2(-\Omega t) \rangle \mathbf{e}_y \times (\mathbf{e}_y \cdot \nabla) \frac{\mathbf{b}}{\Omega} \\ &= \frac{v_{\perp}^2}{2} \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\mathbf{b}}{\Omega} + \frac{v_{\perp}^2}{2} \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \times \frac{\mathbf{b}}{\Omega} \\ &= \frac{mv_{\perp}^2}{2q} \nabla_{\perp} \times \frac{\mathbf{b}}{B}\end{aligned}$$

- 其中 $\nabla_{\perp} = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} = \nabla - \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla)$

梯度漂移

- 在没有电流的空间，有 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ ，则
$$\begin{aligned}\nabla_{\perp} B &= \mathbf{b} \times (\nabla B \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{B} - B \nabla \times \mathbf{b}) \\ &= -B \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{b}) = B(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} = B\kappa\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_{\perp} \times \frac{\mathbf{b}}{B} &= [\nabla - \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla)] \times \frac{\mathbf{b}}{B} \\ &= \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{B^2} - \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla) \times \frac{\mathbf{b}}{B} = -\frac{2\nabla B \times \mathbf{B}}{B^3} - \mathbf{b} \times (\mathbf{b} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{b}}{B} \\ &= 2 \frac{\mathbf{b} \times \nabla B}{B^2} - \mathbf{b} \times \frac{(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b}}{B} = 2 \frac{\mathbf{b} \times \nabla_{\perp} B}{B^2} - \mathbf{b} \times \frac{\kappa}{B} = \mathbf{b} \times \frac{\kappa}{B}\end{aligned}$$

梯度漂移

- 因此，磁场不均匀性引起的梯度漂移为：

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{mv_{\perp}^2}{2q} \mathbf{b} \times \frac{\boldsymbol{\kappa}}{B} = -\mu \nabla B \times \frac{\mathbf{B}}{Bq}$$

- 这里 μ 是回旋运动的磁矩(即为小电流环的面积与电流的乘积)：

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}$$

- 而 $-\mu \nabla B$ 体现了磁场的梯度对带电粒子所施加的等效作用力。在无电流区域，曲率漂移和梯度漂移方向一致。

磁场不均匀性引起的漂移

- 综合考虑磁场不均匀性引起的曲率漂移和梯度漂移，得漂移速度为

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_m &= \mathbf{v}_{cv} + \mathbf{v}_{\nabla B} = - \left(m v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right) \nabla B \times \frac{\mathbf{B}}{B^3 q} \\ &= - m \left(v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \right) \boldsymbol{\kappa} \times \frac{\mathbf{b}}{Bq}\end{aligned}$$

- 这两种漂移速度之比为 $2v_{\parallel}^2/v_{\perp}^2 = 2\cot^2 \theta$ ，这里 θ 是投射角，即速度方向与磁力线的夹角。

带电粒子在时间变化电场中的漂移 (极化漂移)

- 有恒定磁场和垂直于磁场的变化电场

$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t) \mathbf{e}_x$$

- 解运动方程 : $\dot{\mathbf{v}} = \frac{qE_0}{m} \cos(\omega t) \mathbf{e}_x + \Omega \mathbf{v} \times \mathbf{e}_z$

- 这里 $\Omega = \frac{B_0 q}{m}$, 记 $\tilde{v} = v_x + i v_y$ 则方程变为

$$\dot{\tilde{v}} = -i\Omega \tilde{v} + \frac{qE_0}{m} \cos(\omega t),$$

- 得 $\tilde{v} = v_1 e^{-i\Omega t}$, $v_1 = \frac{qE_0}{m} \int e^{i\Omega t} \cos(\omega t) dt$

带电粒子在静电波中的极化漂移

$$\begin{aligned}\text{因此 } \tilde{v} &= e^{-i\Omega t} \frac{qE_0}{m} \left(\int e^{i\Omega t} \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} dt \right) \\ &= \frac{qE_0}{2m} \left(\frac{e^{i\omega t}}{i(\Omega + \omega)} + \frac{e^{-i\omega t}}{i(\Omega - \omega)} \right) + \tilde{v}_\perp e^{-i\Omega t}\end{aligned}$$

由积分带来的常数 \tilde{v}_\perp 提供回旋速度。则

$$v_x = \text{Re}(\tilde{v}) = v_\perp \cos(\Omega t + \alpha) - \frac{qE_0 \sin(\omega t) \omega}{m(\Omega^2 - \omega^2)}$$

$$v_y = \text{Im}(\tilde{v}) = -v_\perp \sin(\Omega t + \alpha) - \frac{qE_0 \cos(\omega t) \Omega}{m(\Omega^2 - \omega^2)}$$

极化漂移

- 按 $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$, $\frac{dE(t)}{dt} = -E_0 \omega \sin(\omega t)$, 如果电场时缓慢变化的, 即 $\omega \ll \Omega$, 可改写为:

$$v_x = v_{\perp} \cos(\Omega t + \alpha) + \frac{q}{m\Omega^2} \frac{dE}{dt}$$

$$v_y = -v_{\perp} \sin(\Omega t + \alpha) - \frac{q}{m\Omega} E$$

漂移速度为 $\mathbf{v}_D = \frac{q}{m\Omega^2} \frac{dE}{dt} \mathbf{e}_x - \frac{E}{B} \mathbf{e}_y$, 其 y 分量是普通的电场漂移, x 分量为极化漂移(方向与电场一致):

$$\mathbf{v}_{Dp} = \frac{m}{B^2 q} \frac{d\mathbf{E}}{dt}$$

粒子越重, 电场变化越快, 则极化漂移越快。漂移方向与电荷符号有关, 能引起电流、造成电荷分离。

守恒量和绝热不变量

- 对于只在磁场中运动的带电粒子，其动能守恒。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \mathbf{v} \cdot m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$$

- 有周期运动的系统中，若系统的能量变化远慢于周期运动，且能独立分离不与其他运动耦合，则周期运动的角变量 q 对于它的广义动量 p 积分一个周期(积分时间段得以限定)，可得作用变量

$$J = \oint p dq$$

- 尽管作用变量 J 不是守恒量，但它在运动中能近似保持不变。这种近似不变量称为绝热不变量。

哈密顿力学系统的作用变量

- 假设力学系统中一个广义变量 q 可分离出来，且它具有周期性，整个系统由参数 $\lambda(t)$ 主导而缓变的，其哈密顿函数 H 的值近似不变，有：

$$H(q, p, \lambda(t); \tilde{q}, \tilde{p}) = E(t)$$

这里 \tilde{q}, \tilde{p} 是系统其余的广义变量和广义动量。反解出 $p = p(q, E, \lambda; \tilde{q}, \tilde{p})$ ，即可检查作用变量 J 的守恒性：

$$\frac{dJ}{dt} = \oint \frac{\partial p(q, E(t), \lambda(t))}{\partial t} dq = \oint \left(\frac{\partial p}{\partial E} \frac{dE}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right) dq$$

- 由正则方程有 $dq = \frac{\partial H}{\partial p} dt$ ，因此

$$\frac{dJ}{dt} = \oint \left(\frac{\partial p}{\partial E} dE + \frac{\partial p}{\partial \lambda} d\lambda \right) \frac{\partial H}{\partial p}$$

作用变量的守恒性

- 为进一步简化，对等式

$$H(q, p(q, E, \lambda; \tilde{q}, \tilde{p}), \lambda; \tilde{q}, \tilde{p}) = E$$

分别以 E , λ 做偏导，又有：

$$\frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial E} = 1, \quad \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0$$

因此利用了正则方程可得：

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \oint \left(1 \cdot dE - \frac{\partial H}{\partial \lambda} d\lambda \right) = \oint \left(dH - \frac{\partial H}{\partial \lambda} d\lambda \right) \\ &= \oint \left(\frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial \tilde{q}} d\tilde{q} + \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}} d\tilde{p} \right) \\ &= \oint \left(-\frac{dp}{\partial t} dq + \frac{dq}{dt} dp - \frac{d\tilde{p}}{dt} d\tilde{q} + \frac{d\tilde{q}}{dt} d\tilde{p} \right) = 0 \end{aligned}$$

回旋运动和磁矩不变量

- 对于回旋运动，对应磁矩不变量。

$$J = \oint p_{\theta} d\theta = \oint m v_{\perp} \rho d\theta = \frac{m v_{\perp}^2}{\Omega} \cdot 2\pi \propto \frac{W_{\perp}}{B} = \mu$$

- 由于带电粒子在磁场中运动时，动能 W 不变，同时磁矩 μ 是绝热不变量，因此沿磁场方向的动能 W_{\parallel} 可写为

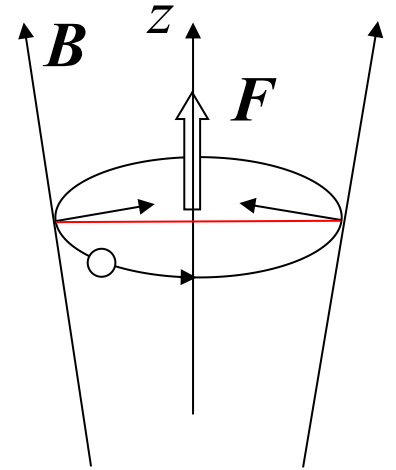
$$W_{\parallel} = W - \mu B$$

如果只考虑带电粒子的引导中心沿平行方向运动， μB 可看作等效势能，势能的负梯度是等效磁镜力：

$$\mathbf{f} = -\nabla(\mu B) = -\mu \nabla B$$

- 这个力引起带电粒子的磁场梯度漂移。

磁镜力



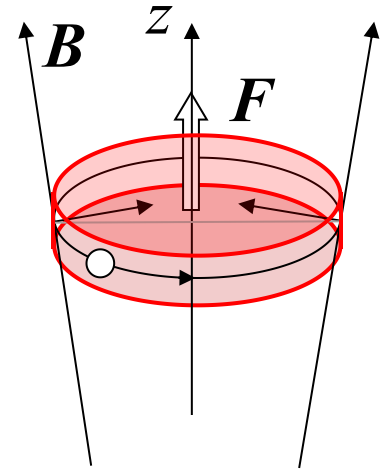
- 如图是一个非均匀（这里以会聚形为例）磁场。考察带电粒子在柱对称磁场 $\mathbf{B} = B_z \mathbf{e}_z + B_r \mathbf{e}_r$ 中旋转运动时所受的平均作用力。

- 设回旋运动速度 $\mathbf{v} = -v_{\perp} \mathbf{e}_{\theta}$ ，所受磁场力为：

$$q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -qv_{\perp} B_z \mathbf{e}_r + qv_{\perp} B_r \mathbf{e}_z$$

- 其中 $-qv_{\perp} B_z \mathbf{e}_r$ 提供回旋向心力，而 $qv_{\perp} B_r \mathbf{e}_z$ 是磁镜力，其方向指向总磁场强度 B 减小的方向。

磁镜力的计算



- 为计算 B_r ，取类似高斯面的图中圆柱体，半径为 r ，高为 h ，整个圆柱体的总磁通量为0，有：

$$2\pi r h B_r + \pi r^2 B_z\left(\frac{h}{2}\right) - \pi r^2 B_z\left(-\frac{h}{2}\right) = 0$$

令 $h \rightarrow 0$ 得 $B_r = -\frac{r}{2} \cdot \frac{dB_z}{dz}$ 。则磁镜力为：

$$\mathbf{F} = qv_{\perp} B_r \mathbf{e}_z = -\frac{qv_{\perp} r}{2} \cdot \frac{dB_z}{dz} \mathbf{e}_z = -\mu \nabla B$$

- 可见磁镜力其实就是磁场梯度力。

磁镜效应

- 当磁场会聚时，带电粒子在回旋的同时，沿着磁场方向磁场强的区域前进时，会受到反向的磁镜力。这种力可能使粒子的平行速度减为0然后反向，使粒子被反射如同镜子反射光线。
- 带电粒子的速度方向与磁场的夹角称为投射角。在磁镜反射点上，投射角变成直角，平行方向的速度是0，垂直方向的速度是粒子的总速率。假设磁镜装置中的带电粒子处于磁场较弱的区域（磁场为 B_{\min} ），其投射角如果小于某个临界角 θ_m 就能通过磁场最强的地方（磁场为 B_{\max} ），则有

$$\sin^2 \theta_m = \frac{v_{\perp}^2}{v^2} = \frac{B_{\min}}{B_{\max}}$$

损失锥分布

- 投射角小于这个临界角的带电粒子能通过磁场最大的地方，是通行粒子（或逃逸粒子），而投射角大于这个临界角的带电粒子会被两端的强磁场束缚在中间的弱场区域，成为束缚粒子。束缚粒子所形成的分布称为损失锥分布，因为投射角小于临界角的粒子都逃逸了，而投射角大于临界角的粒子依然存在，其总体分布好像挖去两个对顶的圆锥而得名。由于这种分布不是各向同性的，也不处于平衡态，因而具有自由能，可以导致一些不稳定性产生。

弹跳运动和纵向不变量

- 带电粒子在做回旋运动的时候，沿着磁场方向上会在磁镜点之间被磁镜力来回反射，称为弹跳运动，也是一种周期运动，周期远长于回旋周期。相应的绝热不变量为纵向不变量，沿着磁力线方向（纵向）其动量做空间积分：

$$J = 2 \int_{z_1}^{z_2} m v_z dz$$

- 地球辐射带中捕获了不少高能带电粒子，它们在地球南北磁极之间做弹跳运动。

费米加速

- 我们常常能观测到来自宇宙中的一些能量极高的带电粒子，如有的粒子能量可达 10^{18} eV。为了解释这些高能带电粒子的来源，费米提出了一种加速机制。宇宙中有一些地方存在强磁场，当带电粒子被两个相对运动的强磁场区域捕获时，每次反射时由于强场的相对运动都获得能量。粒子能量在漫长的岁月中不断积累，从而达到极高能量，最终逃出强磁场之间的束缚，成为自由的高能粒子。

等磁通面上的环绕漂移运动

- 在弹跳运动过程中，由于磁场的空间不均匀性，导致曲率漂移和磁镜力漂移。漂移的方向是轴向的，当漂移一圈能够回到原来的磁力线上。这种周期运动的周期又远长于弹跳运动的周期。可以取球坐标的轴向角 φ 为此种周期变化的广义变量，相应的：

$$\begin{aligned} J &= \oint p_\varphi d\varphi = \oint (mRv_\varphi + qA_\varphi R) d\varphi \approx \oint qA_\varphi R d\varphi \\ &= q \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = q \iint \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = q \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = q\Phi \end{aligned}$$

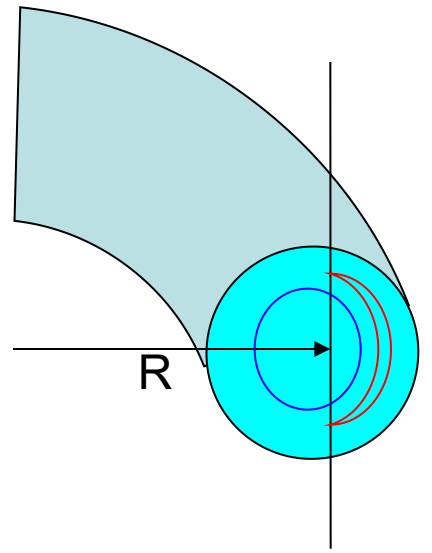
- 即为磁通不变量，带电粒子的漂移是沿着同一个的磁通面进行的。

地球磁层中的带电粒子运动

- 地球磁层中有内辐射带和外辐射带。这些辐射带中捕获大量的高能带电粒子，分别来自地球外层大气和太空。地球的磁场可以近似看作是偶极磁场，带电粒子在磁场中做回旋运动、弹跳运动和等磁通面上的绕地球漂移运动，这三种周期运动分别对应磁矩不变量、纵向不变量和磁通不变量。其周期也依次增加。这三个绝热不变量的不变性取决于外界环境变化的特征时间是否远远大于它们所对应的运动周期。如果外界环境变化较快，绝热不变量就无法保持其不变的特性。

托卡马克中的带电粒子运动

- 在托卡马克中，因为环向磁场与大半径 R 成反比， $B_t \sim 1/R$ ，靠近中心的地方磁场更强。而带电粒子沿磁面运动时，如果投射角小于临界角，则为通行粒子，如果投射角大于临界角，则沿着磁力线运动向中心附近时，会发生反射，这些粒子称为捕获粒子。同时，因其轨道类似香蕉，也称为香蕉粒子。由于被捕获粒子和通行粒子这两类粒子的存在，速度分布也不是平衡的，能产生一些动力学效应。



练习题

- 假设地球赤道处的磁场为0.3G，并且它象理想偶极子一样，以 r^{-3} 衰减。假设存在1eV质子和 3×10^4 eV的电子，分布各向同性。在赤道平面 $r=5R$ (R 为地球半径)处，二者密度都为 $n=10^5 \text{m}^{-3}$ 。(1)计算离子和电子的磁场梯度漂移速度。(2)电子的漂移方向如何？(3)一个电子绕地球缓转一周所需要的时间。(4)计算环向漂移电流密度。
- 在磁镜比 $R_m=5$ 的两个运动磁镜间俘获的一个宇宙射线的质子，它的初始能量为 $W=10^3 \text{eV}$ ，并且在中间平面处有： $v_{\text{垂直}}=v_{\text{平行}}$ ，每个磁镜以速度 $v_m=10^4 \text{m/s}$ 向中间平面运动， $L=10^{10} \text{m}$ 。(1)用损失锥公式和磁矩不变性，求出质子逃逸前将加速到多高能量。(2)粒子由初始被捕获到逃逸需要多少时间？

分布函数的宏观物理量

- 分布函数的意义在于描述了局域中具有特定速度的粒子有多少。所有速度的粒子总数即为单位体积内的粒子数：

$$n(t, \mathbf{x}) = \int f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}$$

- 若所测物理量 ψ 在微观上是粒子速度的函数，其宏观测量值应该是局域所有粒子的 $\psi(\mathbf{v})$ 的平均值：

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{n} \int \psi(\mathbf{v}) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}$$

- 即宏观观测值为该物理量对粒子分布的加权平均。例如，微观速度 \mathbf{v} 对应的测量值是等离子体的流动速度。

等离子体的流体运动模型

- 等离子体的流体运动模型是研究等离子体的宏观观测物理量的变化和满足的方程。
- 而微观的分布函数满足动理论方程：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0$$

- 这里忽略碰撞项，或电场仍包含可导致碰撞的微观粒子静电场。为了求出宏观物理量 $\langle \psi \rangle$ 满足的方程，对动理论方程乘以**仅以 \mathbf{v} 为自变量的函数 $\psi(\mathbf{v})$** 并做速度积分，得：

$$\int \psi(\mathbf{v}) \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f \right) d\mathbf{v} = 0$$

矩方程

- 积分后的方程即为矩方程。其中各项有：

$$\int \psi \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \int \psi f d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} (n\langle\psi\rangle)$$

$$\int \psi \mathbf{v} \cdot \nabla f d\mathbf{v} = \nabla \cdot (\int \psi \mathbf{v} f d\mathbf{v}) = \nabla \cdot (n\langle\psi \mathbf{v}\rangle)$$

$$\begin{aligned} & \int \psi (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f d\mathbf{v} \\ &= \int (\nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\psi (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) f) - f \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \psi (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})) d\mathbf{v} \\ &= - \int f (\nabla_{\mathbf{v}} \psi \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})) d\mathbf{v} = - n\langle \nabla_{\mathbf{v}} \psi \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rangle \end{aligned}$$

- 散度积分项可化为面积分，而面上的速度无限大的地方分布函数 $f = 0$ ，该项积分为0。得矩方程为：

$$\frac{\partial}{\partial t} (n\langle\psi\rangle) + \nabla \cdot (n\langle\psi \mathbf{v}\rangle) - \frac{q}{m} n\langle \nabla_{\mathbf{v}} \psi \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rangle = 0$$

0阶和1阶矩方程

- 矩方程是由动理论推导流体方程的桥梁。

- 取 $\psi = 1$ ，即得0阶矩方程：
$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0$$

这里 $\mathbf{u} = \langle \mathbf{v} \rangle$ 是微观粒子速度的平均值，即流体的流动速度。而这个方程是流体的连续性方程。这个方程

的拉格朗日形式为：
$$\frac{dn}{dt} + n\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

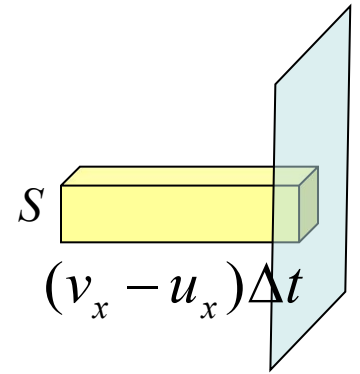
- 取 $\psi = v_x$ ，得一阶矩方程：

$$\frac{\partial(nu_x)}{\partial t} + \nabla \cdot (n\langle v_x \mathbf{v} \rangle) - \frac{qn}{m} \langle \mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rangle = 0$$

方程可化为(其中 \mathbf{P}_x 是压强张量分量，随后解释其由来)：

$$\frac{\partial(nu_x)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(nu_x \mathbf{u} + \frac{\mathbf{P}_x}{m} \right) - \frac{nq}{m} (E_x + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})_x) = 0$$

压强张量



- 假想有一个在随流体流动的坐标系中不动的小面积元 S ，法线为 x 正向，考虑单位时间经过该小面积的粒子总动量(以流动坐标系计):

$$\Delta \mathbf{p} = \int (v_x - u_x)\Delta t \cdot S \cdot m(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot f d\mathbf{v}$$

- 用经小面积元运输的动量计算受力，为 $\mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$ ，计算法线 x 方向的压强为 $\frac{F}{S} = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{P} = P_x$ ，有：

$$\frac{\mathbf{F}}{S} = m \int (v_x - u_x)(\mathbf{v} - \mathbf{u}) f d\mathbf{v} = mn \langle (v_x - u_x)(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \rangle$$

- 因此流体中的压强张量为： $\mathbf{P} = mn \langle (\mathbf{v} - \mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \rangle$ 。

压力张量的计算

- 对于普通的Maxwellian分布，压强张量为

$$\mathbf{P} = nkT\mathbf{I} = p\mathbf{I}$$

这里 $\mathbf{I} = \mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z$ 是单位张量。

- 若平行磁场和垂直磁场方向的温度不同，则

$$\mathbf{P} = p_{\perp}\mathbf{I} + (p_{\parallel} - p_{\perp})\mathbf{b}\mathbf{b}$$

这里 \mathbf{b} 是磁场方向的单位向量。取 $\mathbf{b} = \mathbf{e}_z$ ，则

$$\mathbf{P} = p_{\perp}\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + p_{\perp}\mathbf{e}_y\mathbf{e}_y + p_{\parallel}\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z$$

- 压强张量的9个分量关于对角对称。有粘滞的流体力学中，或非平衡态分布等离子体中，压强张量非对角项常常不为0，并可能对流体或等离子体的运动产生一些非常规的影响。

动量方程中的碰撞项

- 如果动理论方程中保留碰撞项，动量方程中则要考虑碰撞效应，单位时间内 a 种粒子因与 b 种粒子碰撞而产生的动量变化为：

$$\left. \frac{\partial(n_a m_a \mathbf{u}_a)}{\partial t} \right|_c = -\nu_{ab} n_a m_{ab} (\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b)$$

这里 $m_{ab} = \frac{m_a m_b}{m_a + m_b}$ 是两种粒子的约化质量， ν_{ab} 是 a 种粒子碰撞 b 种粒子的频率。碰撞的动量改变量与坐标系无关，而在质心系中，每个粒子初动量大小为 $m_{ab}(\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b)$ ，末动量偏转 90° 方向在垂面内各向同性，统计平均为0。

动量方程和受力方程

- 包含碰撞项的动量方程：

$$\frac{\partial(n_a m_a \mathbf{u}_a)}{\partial t} + \nabla \cdot (m_a n_a \mathbf{u}_a \mathbf{u}_a + \mathbf{P}_a) - n_a q_a (\mathbf{E} + \mathbf{u}_a \times \mathbf{B}) = - \sum_b v_{ab} n_a m_{ab} (\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b)$$

- 利用连续性方程可以得到与之等价的受力方程：

$$n_a m_a \frac{d\mathbf{u}_a}{dt} = n_a q_a (\mathbf{E} + \mathbf{u}_a \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \mathbf{P}_a - \sum_b v_{ab} n_a m_{ab} (\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b)$$

受力方程(牛顿方程)

- 单位体积中的等离子体随体运动时的受力

$$\mathbf{f} = n_a m_a \frac{d\mathbf{u}_a}{dt}, \text{ 分别来自:}$$

- 压力梯度力: $-\nabla \cdot \mathbf{P}_a$, 流体中也有这种力, 例如风力, 水的浮力, 飞机的升力等。
- 电磁力: $n_a q_a (\mathbf{E} + \mathbf{u}_a \times \mathbf{B})$, 其中电场力在电中性等离子体中经求和后相消。
- 碰撞阻力: $-\sum_b \nu_{ab} n_a m_{ab} (\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b)$ 。碰撞频率可使用库仑碰撞频率。此项中含不同种类粒子的速度差, 碰撞可能使各种离子速度趋于一致, 但若有电流, 电子与离子必然有速度差。

二阶(平方)矩方程

- 在矩方程中，取 $\psi = v_x^2 = ((v_x - u_x) + u_x)^2$ ，有
$$\frac{\partial}{\partial t} (n \langle v_x^2 \rangle) + \nabla \cdot (n \langle v_x^2 \mathbf{v} \rangle) - \frac{2qn}{m} \langle v_x (E_x + v_y B_z - v_z B_y) \rangle = 0$$

- 忽略非对称分布产生的高阶项（对麦克斯韦分布该项为0），即 $\nabla \cdot (mn \langle (v_x - u_x)^2 (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \rangle) \approx 0$ ，并利用压强张量的表达式，有

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p_{xx}}{m} + nu_x^2 \right) + \nabla \cdot \left(nu_x^2 \mathbf{u} + \frac{2u_x \mathbf{P}_x}{m} + \frac{p_{xx} \mathbf{u}}{m} \right) - \frac{2q}{m} nu_x (E_x + u_y B_z - u_z B_y) - \frac{2q}{m^2} (p_{xy} B_z - p_{xz} B_y) = 0$$

二阶(平方)矩方程化简

- 利用0阶矩方程可化简，有

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial t} \frac{1}{m} + 2u_x n \frac{du_x}{dt} + \frac{2\mathbf{P}_x}{m} \cdot \nabla u_x + 2u_x \nabla \cdot \frac{\mathbf{P}_x}{m} + \nabla \cdot \frac{p_{xx} \mathbf{u}}{m} - \frac{2q}{m} n u_x (E_x + u_y B_z - u_z B_y) - \frac{2q}{m^2} (p_{xy} B_z - p_{xz} B_y) = 0$$

- 利用1阶矩方程(受力方程)上式红色部分被消去，得

$$\frac{dp_{xx}}{dt} + 2\mathbf{P}_x \cdot \nabla u_x + p_{xx} \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{2q}{m} (p_{xy} B_z - p_{xz} B_y) = 0$$

同理有：

$$\frac{dp_{yy}}{dt} + 2\mathbf{P}_y \cdot \nabla u_y + p_{yy} \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{2q}{m} (p_{yz} B_x - p_{xy} B_z) = 0$$

$$\frac{dp_{zz}}{dt} + 2\mathbf{P}_z \cdot \nabla u_z + p_{zz} \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{2q}{m} (p_{zx} B_y - p_{yz} B_x) = 0$$

绝热方程(各向同性情况)

- 若压强各向同性, $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p$, 三式相加得

$$3 \frac{dp}{dt} + 5p \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

- 利用连续性方程得 $\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{n} \cdot \frac{dn}{dt}$, 则化简得

$$\frac{d}{dt} (pn^{-\gamma}) = 0, \quad \gamma = \frac{5}{3}$$

- 这即为各向同性时的绝热方程。这里 γ 是绝热的多方过程指数。若运动是 D 维的, 则 $\nabla \cdot \mathbf{u}$ 有 D 项, 无磁场

时有: $\frac{D}{p} \cdot \frac{dp}{dt} + (2 + D) \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, 同样处理得

$$\frac{d}{dt} (pn^{-\gamma}) = 0, \quad \gamma = \frac{D + 2}{D}$$

绝热方程(磁场存在情况)

- 若存在磁场 $B_0 \mathbf{e}_z$ ，因磁场使粒子旋转导致 $p_{xx} = p_{yy} = p_{\perp}$ ，且压强张量非对角项均为0，则有

$$\frac{1}{p_{xx}} \cdot \frac{dp_{xx}}{dt} + 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + \nabla \cdot \mathbf{u} - 2q \left(\frac{p_{xy}}{p_{xx}} B_z \right) = 0$$

$$\frac{1}{p_{yy}} \cdot \frac{dp_{yy}}{dt} + 2 \frac{\partial u_y}{\partial y} + \nabla \cdot \mathbf{u} + 2q \left(\frac{p_{xy}}{p_{yy}} B_z \right) = 0$$

$$\frac{1}{p_{zz}} \cdot \frac{dp_{zz}}{dt} + 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

- 三式相加，记 $p_{zz} = p_{\parallel}$ ，求得：

$$\frac{d}{dt} (p_{\perp}^2 p_{\parallel} n^{-5}) = 0$$

双绝热模型的压强方程

- 另外，利用单粒子轨道理论中，带电粒子的磁矩是绝热不变量的结果，用垂直方向的热运动速度代替粒子的垂直速度，有：

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{W_{\perp}}{B} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{nkT_{\perp}}{nB} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{p_{\perp}}{nB} \right) = 0$$

- 这里假设粒子垂直方向上恰是典型的热运动速度，即 $W_{\perp} = kT_{\perp}$ 。方程导出虽不严格，但也可以用后面磁流体理论中的冻结方程导出。
- 综合两个双绝热方程，可求解 p_{\perp} 、 p_{\parallel} 。

双绝热模型的压力方程

- 磁流体理论指出，等离子体冻结在磁场中时，它与线元流动具有相同的方程：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{B}}{n} \right) = \left(\frac{\mathbf{B}}{n} \cdot \nabla \right) \mathbf{u}$$

- 取磁场的方向分量有： $\frac{d}{dt} \left(\ln \frac{B}{n} \right) = \frac{\partial u_z}{\partial z}$
- 再由压强方程 $\frac{1}{p_{zz}} \cdot \frac{dp_{zz}}{dt} + 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$
- 可得： $\frac{d}{dt} \left(\frac{p_{\parallel} B^2}{n^3} \right) = 0$ ，结合 $\frac{d}{dt} \left(\frac{p_{\perp}^2 p_{\parallel}}{n^5} \right) = 0$ ，同样能导出： $\frac{d}{dt} \left(\frac{p_{\perp}}{nB} \right) = 0$

能量方程

- 对于一般分布函数对称情况， P_{ij} 只有对角项 ($i=j$) 不为0。取 $i=j$ 并从1到3求和矩方程得：

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{u} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) - nq\mathbf{E} \cdot \mathbf{u} = 0$$

- 这里 $\varepsilon = \frac{1}{2}nm\mathbf{u}^2 + \frac{3}{2}nkT$ 是单位体积内的能量 (该种粒子的动能和平动热能)。可取 $\mathbf{P} = nkT\mathbf{I}$ ，从这个方程结合运动方程，可以解出温度 T 随时间的变化。当分布函数远离平衡分布时，没有统一的温度，不同的方向上的压力也不一样，需要对每个的压力张量分量分别计算。

压强方程的讨论

- 如果不是绝热情况，需要知道热流，而写出热流满足的方程中，又必然需要引入更高阶矩的物理量，以至于将问题复杂化。对于有热流情况处理的简化办法是设置多方指数 γ 为合理的数值来求解，如 $\gamma=1$ 是等温过程。
- 压强张量的非对角项，虽然在一般情况下，分布函数具有对称性，此时压强张量非对角分量为0，但对于特殊区域或有特殊效应出现的情况，常不为0，需通过矩方程来建立相应方程求解。

电磁流体方程组

- 通过矩方程的计算所得电磁流体方程组为：
- 1. 连续性方程：

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0 \quad \text{或} \quad \frac{dn}{dt} + n\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

- 2. 动量方程（守恒型）或牛顿方程

$$\frac{\partial(n_a m_a \mathbf{u}_a)}{\partial t} + \nabla \cdot (m_a n_a \mathbf{u}_a \mathbf{u}_a) + \nabla \cdot \mathbf{P}_a - n_a q_a (\mathbf{E} + \mathbf{u}_a \times \mathbf{B}) = - \sum_b v_{ab} n_a m_{ab} (\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b)$$

- 前两项可写为： $n_a m_a \frac{d\mathbf{u}_a}{dt}$ ，即拉格朗日表达。

电磁流体方程组

- 3.1 能量方程(各向同性, 有电场的焦耳热):

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{u} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) - nq\mathbf{E} \cdot \mathbf{u} = 0$$

这里 $\varepsilon = \frac{1}{2}nm\mathbf{u}^2 + \frac{3}{2}nkT$ 是单位体积内的能量。

- 3.2 绝热方程(各向同性, D 维运动, 无磁场):

$$\frac{d}{dt}(pn^{-\gamma}) = 0, \quad \gamma = \frac{D+2}{D}$$

- 3.3 双绝热方程 (下面三个中取二个)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_{\parallel}B^2}{n^3}\right) = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{p_{\perp}^2 p_{\parallel}}{n^5}\right) = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{p_{\perp}}{nB}\right) = 0$$

- 这三个方程依据具体情况选择其二。

练习题

- 从矩方程推导出等离子体的受力方程。
- 从能量方程 $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{u} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) - nq\mathbf{E} \cdot \mathbf{u} = 0$
(这里 $\varepsilon = \frac{1}{2}nm\mathbf{u}^2 + \frac{3}{2}nkT$ 是单位体积内的能量)
导出其拉格朗日形式:

$$n \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{u}^2 + \frac{3}{2} kT \right) + \nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) - nq\mathbf{E} \cdot \mathbf{u} = 0$$

磁流体力学方程组

- 将等离子体中的各个成分写出的电磁流体方程相加，即得等离子体整体满足的磁流体力学方程组。
- 连续性方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad \text{或} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

- 这里 $\rho = \sum_a m_a n_a$ 是等离子体密度，而 $\rho \mathbf{u} = \sum_a m_a n_a \mathbf{u}_a$ 是单位体积的等离子体的动量，可见 \mathbf{u} 也是每小块等离子体的质心运动速度。考虑到等离子体是准中性的，运动时，各种离子成分的速度基本为 \mathbf{u} 。但在有电流存在时，电子速度会有所不同，由于电子很轻，电子速度对质心速度的贡献极小，速度不同所带来的影响可以忽略。

磁流体力学方程组

- 受力方程:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \rho_q \mathbf{E},$$

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha} \frac{d\mathbf{u}_{\alpha}}{dt} = \sum_{\alpha} \left[\frac{d(m_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha})}{dt} - m_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \frac{dn_{\alpha}}{dt} \right]$$

$$= \frac{d(\rho \mathbf{u})}{dt} + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} n_{\alpha} (\nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha}) \approx \frac{d(\rho \mathbf{u})}{dt} + \rho \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} \mathbf{P}_{\alpha}, \quad \mathbf{j} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}, \quad \rho_q = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha}$$

- 碰撞项由于是等离子体各个成分内部的碰撞，求和之后总动量并不随碰撞改变，因而相互抵消。
- 如果考虑准电中性条件，则 $\rho_q = 0$

电磁流体方程组

- 3.1 能量方程(各向同性, 有电流的焦耳热):

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{u} + p \mathbf{u}) - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = 0$$

这里 $\varepsilon = \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{3}{2} p$ 是单位体积内的能量。

- 3.2 绝热方程(各向同性, D 维运动, 无磁场):

$$\frac{d}{dt} (p \rho^{-\gamma}) = 0, \quad \gamma = \frac{D+2}{D}$$

- 3.3 双绝热方程 (下面三个中取二个)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_{\parallel} B^2}{\rho^3} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{p_{\perp}^2 p_{\parallel}}{\rho^5} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{p_{\perp}}{\rho B} \right) = 0$$

磁流体力学方程组

- 能量方程:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} u^2 + \varepsilon \right) + \nabla \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = 0$$

- 式中 ε 是等离子体中的平均热运动动能。
- 各项同性条件下, 可以使用绝热方程:

$$\frac{d}{dt} (P \rho^{-\gamma}) = 0$$

- 或有磁场时的双绝热方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{P_{\perp}}{\rho B} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{P_{\parallel} B^2}{\rho^3} \right) = 0$$

电场、磁场、电流

- 利用麦克斯韦方程组，进一步给出磁场：

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

- 其中的电场的获得比较复杂，最简单的方法是，假设等离子体是良导体，内部没有平行电场，而垂直电场完全是流动造成的：

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

- 从单粒子理论我们知道，这个电场恰好导致等离子体整体以速度 \mathbf{u} 流动。或者说，坐标变换到与等离子体一起运动时，就感受不到这个电场了。

封闭的磁流体力学方程组

- 简化的磁流体力学方程组如下：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla P + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

$$\frac{d}{dt}(P \rho^{-\gamma}) = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}$$

等离子体的磁流体描述

- 描述等离子体的物理量，有密度 ρ ，速度 \mathbf{u} ，温度 T （或压力 p ），磁场 \mathbf{B} （或者为矢势或磁标势），它们均是随空间和时间变化的场量。
- 等离子体作为中性的整体运动。其中可以有电流存在，电流是由磁场形态决定的。
- 磁场力和热压力共同对等离子体整体运动起作用。
- 等离子体的运动也影响磁场变化。

磁压力和磁张力

- 磁流体区别于普通流体的一个显著特征是，在磁流体中存在磁场和电流相互作用形成的洛仑兹力。而电流也可以从磁场得到：

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}$$

- 因此从牛顿方程看：

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\nabla \cdot \left(\mathbf{P} + \frac{B^2}{2\mu_0} \mathbf{I} \right) + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}}{\mu_0}$$

- 从而单位体积的受力除了普通的压力梯度力之外，磁场的作用力可化为磁压力梯度力和磁张力。

磁压力

- 从受力的表达式中，可知磁压力为：

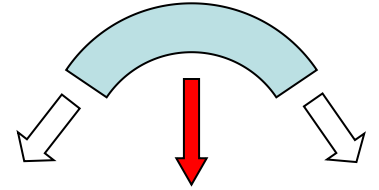
$$P_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

- 其表现和普通的热压力行为一样。热压力与磁压力之比称为 β 值，是表征等离子体的磁化程度的重要参量：

$$\beta = \frac{P}{P_m} = \frac{2\mu_0 P}{B^2}$$

- 行星际空间等离子体中的 β 值大致是1左右，此时，磁场属于较弱的形态；日冕中或聚变实验装置（如托卡马克）中， β 值的典型数值是0.1，此时，磁场相对较强。

磁张力



- 受力的另一项为：

$$\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{B^2}{\mu_0} (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla \frac{B^2}{2\mu_0}) \mathbf{b} = \frac{B^2}{\mu_0} \boldsymbol{\kappa} + (\nabla \frac{B^2}{2\mu_0})_{\parallel}$$

- 前一项是磁张力 B^2 / μ_0 （其值是磁压力的2倍）拉紧磁力线造成的，合力指向曲率中心，大小和磁张力及磁力线曲率成正比，是磁力线弯曲的恢复力。
- 磁压力梯度力不一定垂直于磁场，但总的洛仑兹力一定是垂直于磁场的。而后一项正抵消了磁压力梯度力的平行分量。

洛仑兹力与电磁张量

- 另一方面，洛仑兹力可以写为：

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\nabla \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}}{\mu_0} = \nabla \cdot \mathbf{T}$$

$$\mathbf{T} = -\frac{B^2}{2\mu_0} \mathbf{I} + \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}}{\mu_0}$$

- 其中， \mathbf{T} 是电磁张量，包括各项同性的磁压力，以及沿着磁场方向的磁张力。抵消之后，是垂直于磁场的磁压力，以及沿着磁力线方向的磁张力（其最后的合力为垂直于磁场的恢复力）。

磁力线与等离子体一同流动

- 磁场的变化方程为：

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

- 这个方程可以化为：

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{u})$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathbf{B}}{dt} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\mathbf{B}}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{B}}{\rho} = \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u}$$

- 与流动场中的线段所满足的方程形式相同。说明磁力线是冻结在等离子体中一起流动。这也是我们计算双绝热时所用的方程。

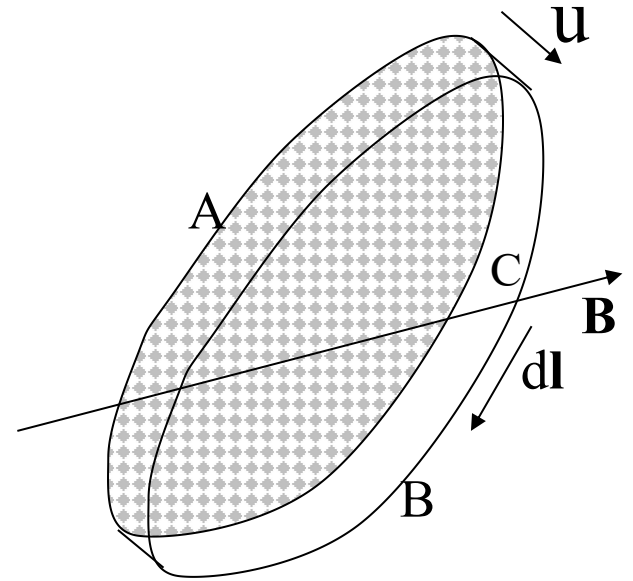
磁场冻结时磁通不变

- 在磁通量管中，等离子体质量不变，而

$$\frac{B}{\rho} = \frac{B \Delta S \Delta l}{\rho \Delta V} = \frac{\Phi}{m} \Delta l$$

- 与线段元行为相同，说明磁通 Φ 也是不变的。
- 另一方面，我们也可以直接从方程考察磁通冻结，在同一块面积 S 上的磁通保持不变：

$$\begin{aligned} \Phi'_B &= \Phi_B + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \int_B \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\Phi_A - \Phi_C + \Delta t \int_B \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ &= -\Phi_A - \int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \times \mathbf{u} \Delta t + \Delta t \int_B \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = -\Phi_A \end{aligned}$$



磁场的扩散项

- 当碰撞存在时，等效为等离子体中存在电阻。此时，在与等离子体一起运动的坐标系中的电场和电流之间有欧姆定律

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j}$$

- 此时，磁场的变化方程变为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{j}) = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla \times \left(\frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} \right) \\ &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B} \end{aligned}$$

- 最后一步等号在电阻率为常量时成立。这个方程我们已知右端第一项是等离子体和磁场冻结为一体的效应。而右端第二项对等离子体起到扩散作用。

磁场扩散方程的一维解

- 考虑在与等离子体相对速度为0的随体坐标系中，此时，等离子体的速度为0，则方程只剩扩散项：

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B}$$

- 考虑一维情况：

$$\frac{\partial B_z(t, x)}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 B_z(t, x)}{\partial x^2}, \quad \gamma = \frac{\eta}{\mu_0}$$

- 初始条件： $B_z(0, x) = \delta(x)$ ， 经傅里叶变换：

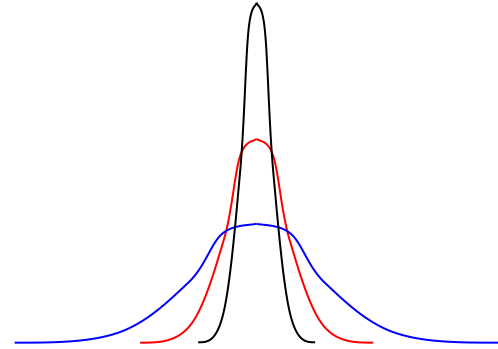
$$\frac{\partial B_z(t, k)}{\partial t} = -\gamma k^2 B_z(t, k), \quad B_z(0, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-ikx} dx = 1$$

- 解出 $B_z(t, k) = B_z(0, k) e^{-\gamma k^2 t} = e^{-\gamma k^2 t}$

磁场扩散方程的一维解

- 逆变换得：

$$\begin{aligned} B_z(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx - \gamma k^2 t} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma t \left(k - \frac{ix}{2\gamma t}\right)^2 - \frac{x^2}{4\gamma t}} dk \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\gamma t}} e^{-\frac{x^2}{4\gamma t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma t \left(k - \frac{ix}{2\gamma t}\right)^2} d\sqrt{\gamma t}k = \frac{1}{2\pi\sqrt{\gamma t}} e^{-\frac{x^2}{4\gamma t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\gamma t}} e^{-\frac{x^2}{4\gamma t}}, \quad \lambda = \sqrt{\gamma t} \left(k - \frac{ix}{2\gamma t}\right) \end{aligned}$$



- 其磁通量保持常数： $\int_{-\infty}^{+\infty} B_z(t, x) dx = 1$
- 但宽度与 γ 的开平方及时间的开平方成正比。
- 这说明磁场随时间逐渐扩散。

磁雷诺数

- 磁场的冻结和扩散是两种相反的特性。在理想等离子体或无碰撞等离子体中，只有冻结效应。在具有有限电阻的等离子体中，扩散也起一定的作用，但总的来说，冻结是占主要地位的。

- 冻结项与扩散项的比值定义为磁雷诺数：

$$R_m = \frac{|\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})|}{\left| \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B} \right|} \approx \frac{\mu_0 u L}{\eta}$$

- 式中， L 是磁场空间变化的特征尺度。

广义欧姆定律

- 当碰撞存在时，等离子体中存在等效电阻。从电子的受力方程出发，可导出广义欧姆定律

$$n_e m_e \frac{d\mathbf{u}_e}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{P}_e - n_e e (\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) - \nu_{ei} n_e m_{ei} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i)$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} = -\mathbf{u}_e \times \mathbf{B} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}_e}{n_e e} - \frac{m_e}{e} \frac{d\mathbf{u}_e}{dt} - \frac{\nu_{ei} m_{ei}}{e} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i)$$

$$= -\mathbf{u}_i \times \mathbf{B} + \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{ne} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}_e}{ne} - \frac{m_e}{e} \frac{d\mathbf{u}_e}{dt} + \frac{\nu_{ei} m_e}{ne^2} \mathbf{j}$$

- 其中我们用到电流关系：

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \approx n_e (-e) \mathbf{u}_e + \left(\sum_{\alpha \neq e} n_{\alpha} q_{\alpha} \right) \mathbf{u}_i = n_e e (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$$

广义欧姆定律

- 对比先前使用的欧姆定律，有碰撞和电阻的关系：

$$\eta = \frac{v_{ei} m_e}{n e^2}$$

- 这个关系也可以用电子加速的模型得到：

$$j = n(-e)u_e = -ne \frac{E(-e)}{m_e} \Delta t = \frac{ne^2}{m_e v_{ei}} E = \eta E$$

- 广义欧姆定律给出了电场的表达式。其中各项依次为：流动项，霍尔效应项，电子压力项，电子惯性项，碰撞项（电阻项）。流动项所起的作用是磁场的冻结效应，而碰撞项（电阻项）起磁场的扩散作用。

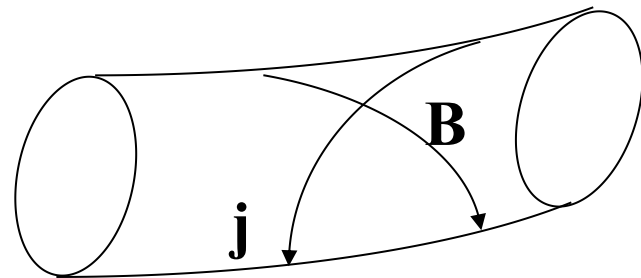
广义欧姆定律中的各项

- 霍尔效应项来源于电流和磁场作用时的霍尔效应，当电子流动速度和粒子流动速度不一致而产生电流时，在磁场的作用下，电子和离子受力不同，产生分离趋势，从而等离子体因其准中性特性而自发产生电场来抵消这种分离趋势。电子压力项能在 β 值大的等离子体中起作用，产生平行电场；而电子惯性项在电磁场结构的特征尺度与电子惯性长度相当时起作用，也能产生平行电场。而流动项和霍尔效应项只能提供垂直方向的电场。

等离子体的平衡

- 平衡时，等离子体不运动，满足

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$



- 这表明，磁力线和电流线都是在等压面内。
(∇p 是沿着等压面的法线方向， \mathbf{j} 和 \mathbf{B} 都与它垂直，因此他们都平行于等压面)
- 对于平直的磁力线，在垂直方向，有

$$p + \frac{B^2}{2\mu_0} = \text{constant}$$

- 对于柱等离子体，由于对称性，等压面就是柱的同心圆面。磁场既有轴向也有径向分量：

$$\mathbf{B} = B_z(r)\mathbf{e}_z + B_\theta(r)\mathbf{e}_\theta$$

柱形等离子体的平衡

- 柱对称平衡时，磁力线具有一定的曲率：

$$-\nabla\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}}{\mu_0} = 0$$

- 其中

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} = B_\theta(r) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [B_\theta(r) \mathbf{e}_\theta(\theta)] = -\frac{1}{r} B_\theta^2 \mathbf{e}_r(\theta)$$

- 因而，径向的平衡方程为：

$$\frac{d}{dr} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} = 0$$

无力场的平衡

- 在低 β 等离子体中，磁场力占主导地位，热压力梯度力可以忽略不计。平衡时，必须电流与磁场平行，满足：

$$\nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}$$

- 其中 α 为常数时，是线性无力场，系统达到整体势能最小的平衡状态。
- 做旋度，得Helmholtz方程：

$$(\nabla^2 + \alpha^2)\mathbf{B} = 0$$

- 可分别解其中的三个分量。太阳低日冕中常用无力场模型。
- 当 α 不为常数时，是非线性无力场，求解更困难些。

螺度

- 对于一个场矢量的旋度与其自身点乘，称之为该矢量的螺度，表征它的螺旋特性。
- 常见的螺度有
$$\mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{u})$$
$$\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$
$$\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \mu_0 \mathbf{j}$$
- 线性无力场中，参数 α 的选取与螺度有关。
- 在理想磁流体中，封闭区域内的螺度守恒。
- 在磁场重联过程中，螺度仍近似守恒。

思考题：

- 从广义欧姆定律出发，简述等离子体中哪些原因有可能导致出现平行于磁场的电场分量。
- 设半径为 a 的柱体等离子体中，若 $\beta=1$ ，磁场为 \mathbf{B}_0 沿轴，且等离子体处于平衡状态，那么电流应该是什么样的分布，外磁场的大小方向如何？

练习题：

- 如果磁流体中没有电阻耗散，证明磁场 \mathbf{B} 、密度 ρ 和速度 \mathbf{u} 满足关系

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{B}}{\rho} = \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u}$$

等离子体物理学（二）

李毅

2022.10

等离子体中的线性波

- 等离子体中，电场、磁场、速度、密度、压力、温度等任何一个物理量 ψ 一般会随空间和时间变化。
- 扰动量原则上它可以分解为各个平面波的叠加，即：

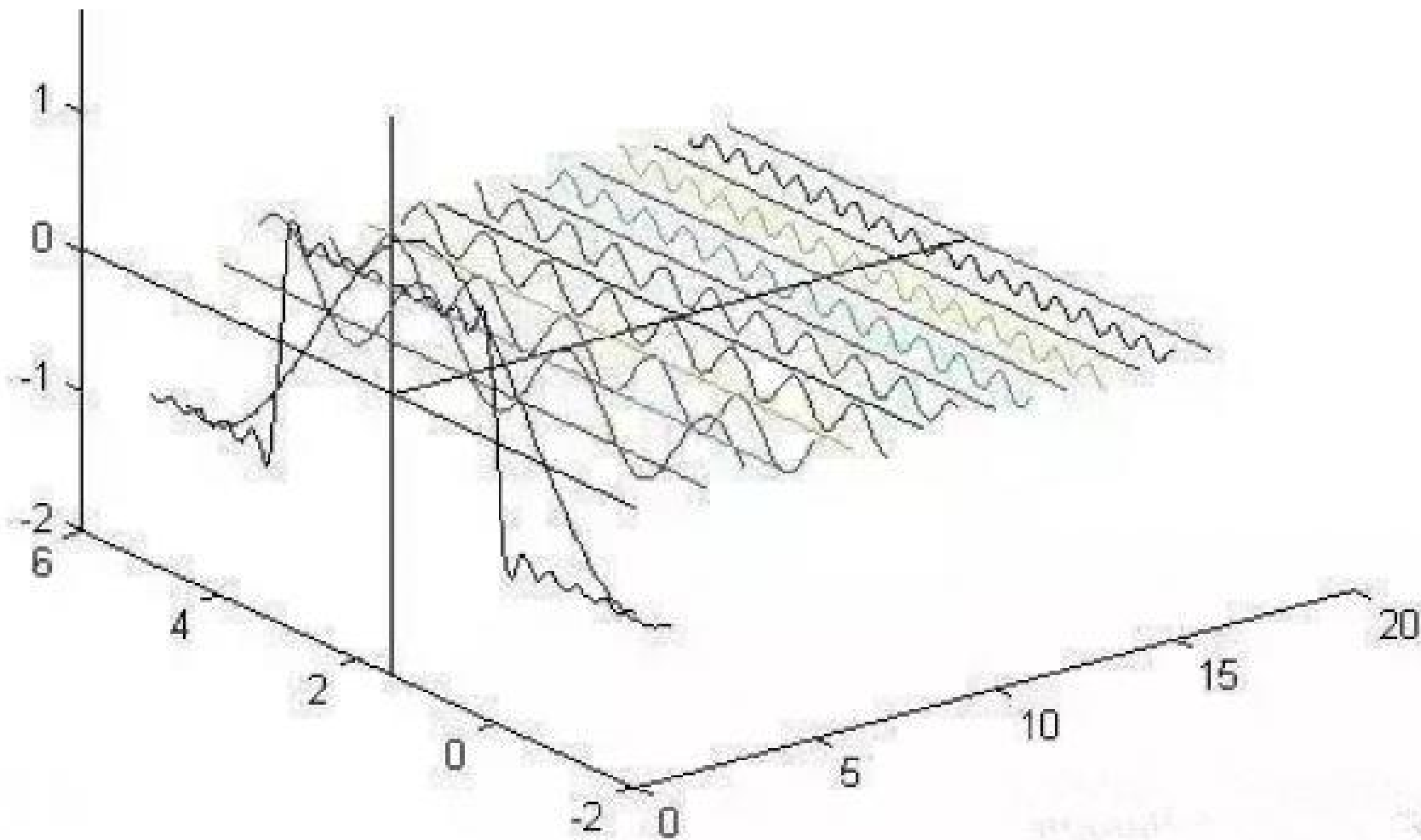
$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega$$

- 其中 $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, \omega)$ 为波的幅度，是物理量的Fourier分解：

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int \psi(\mathbf{x}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d\mathbf{x} dt$$

- 对于其中任意一支平面波来说， \mathbf{k} 为波矢， ω 为频率。
- 这里我们用复数来表示波是方便的，取其实部就是实际的值。

图：方波扰动分解为多个谐波叠加



波的相速度

- 波的速度可以用相速度和群速度来描述。相速度是波在保持相位不变的情况下的运动速度。相位为： $\varphi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$

- 一维传播时，在相位不变的情况下，有：

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} (kx - \omega t) = 0$$

- 得到相速度：

$$v_p = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

波包

- 波的群速度描述波包整体运动的速度，而波包是由满足一定色散关系的各种频率的波组成。假设该波包的色散关系为

$$\omega = \omega(k)$$

- 只有频率满足此关系的波才存在，可以表示为：

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, \omega) = \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{k})\delta(\omega - \omega(k))$$

- 由积分式，当波沿 x 方向直线传播情况下可得：

$$\psi(x, t) = \int \psi_{\mathbf{k}}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk$$

波的群速度

- 假设波包的主要波数为 k_0 ，对应的频率

$$\omega_0 = \omega(k_0)$$

- 近似有： $\omega(k) \approx \omega_0 + v_g(k - k_0)$

- 其中群速度定义为： $v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\omega_0}$ ，代入可得：

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \int \psi_k(k) e^{ik(x - v_g t)} dk \cdot e^{i(k_0 v_g - \omega_0)t} \\ &= \psi(x - v_g t, 0) e^{i(k_0 v_g - \omega_0)t}\end{aligned}$$

- 可见波包的包络以群速度 v_g 的速度前进。波的相速度可以超过光速。但群速度一定不能超过光速，因为群速度可以传递信息和能量，否则会违背爱因斯坦的狭义相对论原理。

波的旋转与偏振

- 一支波沿x方向传播，在y、z两个垂直方向上，电场矢量的分量 E_y 和 E_z 一般可以表示成：

$$E_y = E_{y0} \cos(\varphi), \quad E_z = E_{z0} \cos(\varphi - \delta)$$

- 其中， $\varphi = kx - \omega t + \alpha$ ， $\delta = \alpha - \beta$ ， E_{y0} 和 E_{z0} ， α ， β 均为常数。
- 在yz平面上的电场分量满足：

$$\frac{E_z}{E_{z0}} = \cos \varphi \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta$$

$$\left[\frac{E_z}{E_{z0}} - \frac{E_y}{E_{y0}} \cos \delta \right]^2 = \sin^2 \delta \left(1 - \frac{E_y^2}{E_{y0}^2} \right)$$

波的旋转与偏振

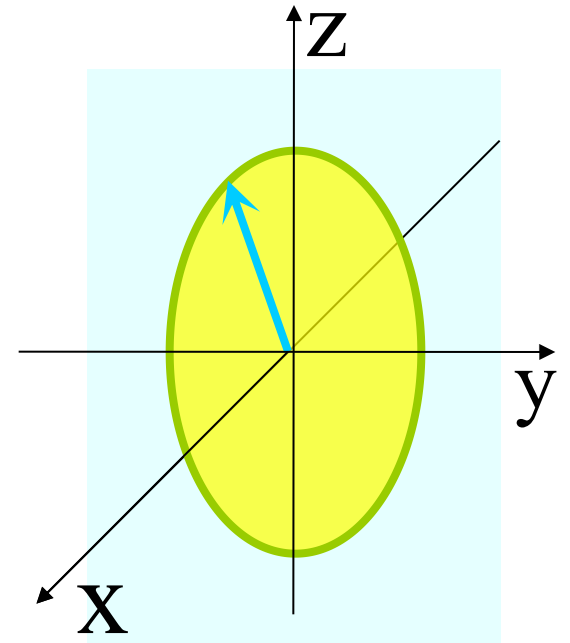
- 这表明，电场矢量端点在 yz 平面内的轨迹是二次曲线中的椭圆（只有椭圆离原点距离有限），因而是椭圆偏振。
- 特殊情况下，可以是线偏振（ $\alpha=\beta$ 或 $|\alpha-\beta|=\pi$ ），偏振方向与 y 轴夹角为 $\arctan(E_{y0}/E_{z0})$
- 也可以是圆偏振（ $E_{y0}=E_{z0}$ 且 $|\alpha-\beta|=\pi/2$ ）。
- 当 $\alpha - \beta = \pi/2$ 时，例如 $\alpha = 0$ 而 $\beta = -\pi/2$ ，此时
- $E_y = E_{y0} \cos(kx - \omega t)$, $E_z = E_{z0} \sin(kx - \omega t)$
- 随着波沿着 x 方向前进，相位增加， E 矢量做右手旋转。所以是波是右旋的。

波的旋转与偏振

- 当 $\alpha - \beta = -\pi/2$ 时，例如，当 $\alpha = 0$ 而 $\beta = \pi/2$ 时：

$$E_y = E_{y0} \cos(kx - \omega t),$$
$$E_z = -E_{z0} \sin(kx - \omega t)$$

- 随着波沿着 x 方向前进， E 矢量按左手旋转。所以这时波是左旋的。
- 一般情况下，不妨取 $|\alpha - \beta| \leq \pi$ ，当 $\alpha - \beta > 0$ 时，是右旋；而 $\alpha - \beta < 0$ 时，是左旋； $\alpha - \beta = 0$ 或 π 时，是线偏振。



波的线性化和平面波分解

- 将等离子体中的扰动作**Fourier**分解，也即化为多个平面波的线性叠加。如果方程组是线性的，对于所有满足方程组的平面波来说，其线性叠加也满足方程组。因此，从研究最简单的平面波入手，我们就可以研究扰动在等离子体中的传播和发展。方程组中的非线性项应该被忽略，这是由方程的线性特性所决定的。另外，非线性项都是二阶或二阶以上的小量，在解线性波动问题时，可以忽略。

线性波的色散关系

- 一般来说，对于等离子体中的波动来说，其频率和波长有一定的对应关系。或者说，对于一个给定的频率，只有对应波长的波动才能存在。这种对应关系即为波的色散关系： $D(\mathbf{k}, \omega) = 0$
- 波的群速度的计算需要用到波的色散关系：

$$v_g = \frac{d\omega(k)}{dk}$$

- 更重要的是有了色散关系，将初始的扰动 $\psi_0(\mathbf{x})$ 分解为各波矢为 \mathbf{k} 且振幅为 $\psi_k(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \int \psi_0(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}$ 的波叠加，并知道了在随后扰动的发展变化：

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int \psi_k(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t)} d\mathbf{k}$$

电子静电波

- 等离子体中，电子的运动会引起电荷分离，使得等离子体偏离电中性，从而产生静电场。在这个静电场的作用下，电子会改变运动状态，力图使等离子体恢复电中性，但是在等离子体恢复了电中性之后，电子仍然具有一定的动能，其运动又会使等离子体产生非电中性。我们称电子的这种振荡为电子静电波，也叫Langmuir波。这种波维持了等离子体的准电中性。

冷等离子体中的电子静电波

- 在冷等离子体中，这种波动可以用一维方程组描述：

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial(n_e v)}{\partial x} = 0,$$

$$n_e m_e \frac{dv}{dt} = n_e (-e) E, \quad \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e(n_0 - n_e)}{\epsilon_0}$$

- 将方程组进行线性化和平面波分解，得到方程组：

$$\text{程组: } \begin{cases} -i\omega n_{e1} + ikn_0 v = 0 \\ -i\omega m_e v = -eE_1 \\ ikE_1 = -en_{e1}/\epsilon_0 \end{cases}$$

电子静电波的频率

- 经过化简成为:

$$ikE_1 \left(1 - \frac{1}{\omega^2} \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0} \right) = 0$$

- 这表明, 如果要 $E \neq 0$, 即波动存在, 必须有

$$\omega = \omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}}$$

- 在电子热压力不可忽略的情况下, 方程需改动添加:

$$n_e m_e \frac{dv}{dt} = n_e (-e) E - \frac{\partial p_e}{\partial x},$$

$$\frac{d}{dt} (p_e n_e^{-\gamma}) = 0, \quad \gamma = \frac{D+2}{D}$$

电子静电波的频率

- 这里 D 是运动的维数，而对于电子做1维运动的电子静电波情况，取多方指数 $\gamma=3$ 。而对于普通电子做3维运动的情况，取我们熟知的 $\gamma=5/3$ 。
- 方程组经过线性化和平面波分解，成为：

$$\left\{ \begin{array}{l} -i\omega n_{e1} + ikn_0 v = 0 \\ -i\omega m_e v = -eE - ikp_{e1}/n_0 \\ ikE = -en_{e1}/\varepsilon_0 \\ p_{e1}/p_{e0} - \gamma n_{e1}/n_0 = 0 \end{array} \right.$$

热等离子体中的电子静电波

- 得到色散关系，也即这组方程存在非0解的条件为：

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 v_{se}^2, \quad v_{se} = \sqrt{\gamma \frac{\kappa T_e}{m_e}}$$

- 这里 v_{se} 是电子的声波速度。在 $T_e \rightarrow 0$ 冷等离子体近似的条件下，回到冷等离子体时的电子静电波色散表达式，此时对应的Langmuir波的群速度为0，因而是不能传播的局域震荡。

热电子静电波的讨论

- 而在热等离子体中，Langmuir波的群速度与电子热运动速度可达同样的量级，类似于电子压力引起的纵波。
- 电子静电波的频率必须不小于电子等离子体频率 ω_{pe} ，通常这是较高的频率。在这个频率下，离子由于其质量远大于电子质量，它来不及响应这么高的频率变化。其运动可以忽略。

热电子静电波的讨论

- 对于长波情况， $k\lambda_{De} \ll 1$ ，色散关系取近似

$$\omega = \omega_{pe} \sqrt{1 + 3k^2 \lambda_{De}^2} \approx \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} k^2 \lambda_{De}^2 \right)$$

其群速度 $v_g = \frac{d\omega}{dk} \approx 3(k\lambda_{De})v_{the}$ 远小于电子的热速度 v_{the} 。对于短波情况，当 $k\lambda_{De} \sim 1$ 时， $\omega \sim 2\omega_{pe}$ 群速度为 $v_g \sim 1.5v_{the}$ 与电子热速度相当，这时会产生强烈的波与电子的相互作用，需要用动力学才能加以研究。

考虑离子成分时的静电波

- 离子的运动可以产生频率较低的波动。在研究较低频率的等离子体波动时，需要同时考虑电子和离子的运动（其中， α 代表等离子体中的所有粒子，即电子和各种离子）：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial(n_\alpha v_\alpha)}{\partial x} = 0 \\ n_\alpha m_\alpha \frac{dv_\alpha}{dt} = n_\alpha q_\alpha E - \frac{\partial p_\alpha}{\partial x} \\ \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha \\ \frac{d}{dt} (p_\alpha n_\alpha^{-\gamma_\alpha}) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{n_{\alpha 1}}{n_{\alpha 0}} = \frac{kv_\alpha}{\omega} \\ -i\omega m_\alpha v_\alpha = q_\alpha E - \frac{ikp_{\alpha 1}}{n_{\alpha 0}} \\ ikE = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_\alpha q_\alpha n_{\alpha 1} \\ \frac{p_{\alpha 1}}{p_{\alpha 0}} = \gamma \frac{n_{\alpha 1}}{n_0} \end{array} \right.$$

考虑离子时的静电波色散关系

- 将以上做过线性化和平面波分解之后的方程组再进行消元化简，得到色散方程：

$$1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - k^2 v_{s\alpha}^2} = 0, \quad \omega_{p\alpha}^2 = \frac{n_{\alpha 0} q_{\alpha}^2}{m_{\alpha} \epsilon_0}, \quad v_{s\alpha}^2 = \gamma \frac{\kappa T_{\alpha}}{m_{\alpha}}$$

- 其中 $\omega_{p\alpha}$ 和 $v_{s\alpha}$ 分别是 α 类粒子对应的等离子体振荡频率和声速。由于离子质量远大于电子质量，则有 $\omega_{pi} \ll \omega_{pe}$ ，因此在高频时 $\omega \geq \omega_{pe}$ ，色散关系公式中的求和的各项中，离子项远小于电子项，因而可以忽略。只保留电子项，此色散关系回到电子静电波的色散关系式。

离子声波

- 考虑低频情况（为简化分析起见，不妨假设只有一种氢离子成份）。
- 离子声波：
对于低频长波， $k\lambda_{De} \leq 1$ ，色散关系公式中的电子项和离子项均远大于1（因为它们的分母均很接近于0），因此可以忽略第一项（常数1），得到离子声波色散关系：

$$\omega = kv_s, \quad v_s = \sqrt{\frac{\gamma_e \kappa T_e + \gamma_i \kappa T_i}{m_i}}$$

离子声波的讨论

- 这很像在普通气体中传播的声波。由于波长很长，在这种长尺度条件下等离子体可以很好地保持电中性，因此引起的扰动类似于中性气体中产生的压缩波。但由于离子和电子必须保持电中性，当离子运动时，电子必须跟随，两者牢牢地结合在一起。这时电子的压力影响也通过这种结合传递给离子，即使离子温度为0，因为有电子压力的存在，也可以产生离子声波。事实上，在以后的动力论中我们知道，如果离子热运动速度与离子声波的相当的时候，会产生阻尼现象，离子声波不能存在，因此离子声波大多在 $T_i \ll T_e$ 的情况下存在。

练习题

- 计算热等离子体中，电子朗缪尔波的相速度和群速度各是多少？

思考题

- 推导有电子、氢离子、氦离子组成的非磁化热等离子体中的静电波色散关系，各成分的温度均为 T ，数密度分别为 n_e ， n_p ， n_α 。

离子静电波

- 对于低频短波， $k\lambda_{De} \geq 1$ ，在色散关系公式中，电子项远小于1（分母很大），可以忽略。这时得到离子静电波的色散关系

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 + k^2 v_{si}^2$$

- 由于在短波情况下，电子热压强的存在，使得电子无规运动速度很大，不能很好地去屏蔽电荷分离引起的静电场，从而引起电荷分离，并引起离子的静电振荡。

非磁化等离子体静电波总结

- 对于非磁化等离子体静电波，具有色散关系：

$$1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - k^2 v_{s\alpha}^2} = 0$$

- 波动是由于静电荷非电中性而产生的静电场引起，电场方向平行于波的传播方向（波矢方向）。等离子体的热效应产生的压力也促使扰动的带电粒子向其平衡位置做回复运动。
- 高频时，电子起主要作用，产生电子静电波。
- 低频时，长波波段能产生离子声波，短波波段能产生离子静电波。

电磁波

- 与静电波不同，电磁波的电场不是电荷非中性产生，而是因磁场变化感应产生的。从磁感应方程可知，若波矢 \mathbf{k} 方向与波的电场 \mathbf{E} 方向相同，则波只有电场成分而没有磁场成分，为静电波。反之，若波矢方向与波的电场方向不完全平行，其波场具有磁场部分，为电磁波。电磁波与静电波不同之处在于要考虑到波的磁场成分。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}_1 = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E}_1$$

电磁波的色散关系

- 脚标1代表是扰动量波的场量), 脚标0代表未扰动(无波动)时的量。代入法拉第方程

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad i\mathbf{k} \times \left(\frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E}_1 \right) \\ &= \mu_0 \mathbf{j}_1 - \frac{i\omega}{c^2} \mathbf{E}_1\end{aligned}$$

- 假设从带电粒子的运动方程, 我们可以解出电流和电场的线性关系为

$$\mathbf{j}_1 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}_1$$

- 这里 $\boldsymbol{\sigma}$ 是电导率张量。则带入可得:

$$(\mathbf{n}\mathbf{n} - n^2 \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{E}_1 = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{I} + \frac{i\boldsymbol{\sigma}}{\omega\varepsilon_0}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}c}{\omega}$$

- 其中 \mathbf{I} 为单位张量, \mathbf{n} 为折射率(带有 \mathbf{k} 的方向), $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为介电张量。

非磁化冷等离子体中的电导率

- 波的电场若有非零解，条件是其张量系数矩阵行列式为0，否则只有0解，波不能存在。
- 在非磁化均匀冷等离子体中，存在高频电磁波。其中主要是由电子的运动对波产生影响，而离子的效应可以忽略。即运动方程中只考虑电子的运动：

$$m_e n_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -n_e e \mathbf{E}$$

- 从而可得： $-i\omega m_e \mathbf{v}_{e1} = -e \mathbf{E}_1$,

$$\mathbf{j}_1 = -n_0 e \mathbf{v}_{e1} = i \frac{ne^2}{\omega m_e} \mathbf{E}_1, \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \frac{i\varepsilon_0 \omega_{pe}^2}{\omega} \mathbf{I}$$

非磁化冷等离子体中的电磁波

- 取波矢 \mathbf{k} 方向为 z 方向，得到波场满足的关系：

$$\left[-n^2(\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y\mathbf{e}_y) + \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)\mathbf{I} \right] \cdot \mathbf{E}_1 = \mathbf{0}$$

- 对应的波动有：

- 电场沿 z 方向的静电波，有 $E_z \neq 0$ 而 $E_x = E_y = 0$ 。其色散关系为 $\omega = \omega_{pe}$ 。这是我们已知的电子静电波。波的电场方向与波矢方向平行，都是 z 方向。
- 电磁波。电场垂直于 z 方向。有 $E_z = 0$ 而 E_x, E_y 不同时为0。色散方程为：

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2$$

非磁化冷等离子体中的电磁波的讨论

- 电场与传播方向垂直。色散关系在等离子体密度趋于0时，趋同于真空中的电磁波。
- 在等离子体中传播的电磁波的相速度大于光速，而群速度小于光速。且有一定的截止频率，即在频率小于等离子体振荡频率的时候，电磁波不能传播。当小于截止频率的电磁波由真空向等离子体传播时，只能进入一定的趋肤深度（这时波矢 k 成为纯虚数，趋肤深度是其模的倒数），且会发生反射。电离层反射无线电短波广播就是一个例子。

$$E = E_0 e^{i(kx - \omega t)} = E_0 e^{-|k|x} e^{i\omega t}, \quad k = i|k|$$

磁化等离子体中的磁流体力学波

- 磁流体力学波是低频的电磁波，等离子体整体震荡，电子跟随离子一起运动，保持电中性。在磁流体中，除了同样具有压力引起的纵波（即普通的流体中的声波），还具有磁场的压力和张力，引起磁流体中特有的磁声波、**Alfvén**波。
- 对磁流体中的波动，可用磁流体力学方程组来描述

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B},$$

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}, \quad \frac{d}{dt} (p \rho^{-\gamma}) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

磁化等离子体中的磁流体力学波

- 对方程组进行线性化，并分解为平面波

$$-i\omega\rho_1 + i\rho_0\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad -i\omega\rho_0\mathbf{v} = -i\mathbf{k}p_1 + \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0$$

$$\frac{p_1}{\rho_0} - \gamma\frac{\rho_1}{\rho_0} = 0, \quad -i\omega\mathbf{B}_1 = i\mathbf{k} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0), \quad \mathbf{j}_1 = \frac{1}{\mu_0}i\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1$$

$$\Rightarrow -i\omega\rho_0\mathbf{v}$$

$$= -i\mathbf{k} \left(\gamma p_0 \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega} \right) + \left[\frac{1}{\mu_0} i\mathbf{k} \times \left(-\frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0)}{\omega} \right) \right] \times \mathbf{B}_0$$

$$\Rightarrow \omega^2\mathbf{v} - v_S^2\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) - v_A^2[\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z))] \times \mathbf{e}_z = 0$$

- 其中， $v_S^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}$ ， $v_A^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0\rho_0}$ 分别是声波速度和Alfvén波速度的平方。

磁化等离子体中的磁流体力学波

- 取本底磁场沿 z 轴方向。设波矢方向与 z 轴交角为 θ ，且在 x, z 平面内，即

$$\mathbf{k} = k(\cos \theta \mathbf{e}_z + \sin \theta \mathbf{e}_x) = k_z \mathbf{e}_z + k_x \mathbf{e}_x$$

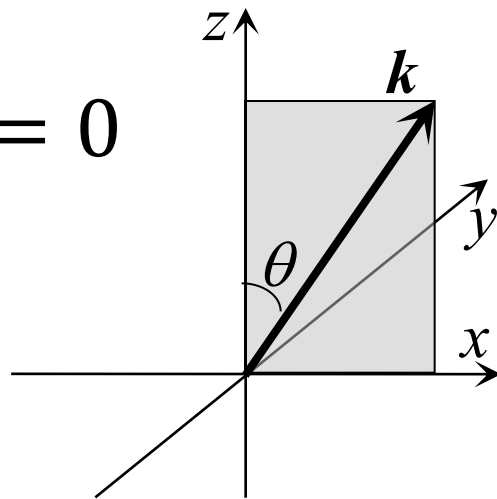
- 进一步得到：

$$(\omega^2 - k^2 v_A^2 - k_x^2 v_S^2) v_x - k_x k_z v_S^2 v_z = 0$$

$$(\omega^2 - k_z^2 v_A^2) v_y = 0$$

$$(\omega^2 - k_z^2 v_S^2) v_z - k_x k_z v_S^2 v_x = 0$$

- 方程中 v_y 与 v_x 、 v_z 是解耦的，可分别求解。



Alfvén波

- 色散关系 $\omega = k_z v_A = k v_A \cos \theta$
- 速度扰动 $v_y \neq 0, v_x = v_z = 0$
- 波的相速度与群速度均为 $v_A \cos \theta$
- 电场扰动 $\mathbf{E}_1 = -B_0 v_y \mathbf{e}_x$
- 磁场扰动 $\mathbf{B}_1 = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E}_1 = -\frac{k_z B_0}{\omega} v_y \mathbf{e}_y$
- 密度扰动 $\rho_1 = 0$
- 压力扰动 $p_1 = 0$
- 电流扰动 $\mathbf{j}_1 = -\frac{ik_z B_0}{\mu_0 \omega} v_y \mathbf{k} \times \mathbf{e}_y$

Alfvén波的一些性质

- 等离子体运动速度与扰动磁场相反，相当于磁场张力提供的恢复力，产生振荡，形成垂直传播方向的波动，因此，**Alfvén**波是横波，也是电磁波。
- 在**Alfvén**波不引起密度扰动，也不引起压力的扰动。而等离子体的温度和压力都不影响波的传播速度。
- **Alfvén**波是空间中的最重要的波动之一。它具有很高的饱和水平，即发展到非线性饱和之前可以达到很高的振幅。

磁声波

- 波动方程组另一组解为 $v_y = 0$ 且 v_x 和 v_z 不同时为0。

$$\begin{aligned}(\omega^2 - k^2 v_A^2 - k_x^2 v_S^2)v_x - k_x k_z v_S^2 v_z &= 0 \\ -k_x k_z v_S^2 v_x + (\omega^2 - k_z^2 v_S^2)v_z &= 0\end{aligned}$$

- 色散关系是系数行列式为0:

$$(\omega^2 - k^2 v_A^2 - k_x^2 v_S^2)(\omega^2 - k_z^2 v_S^2) - k_x^2 k_z^2 v_S^4 = 0$$

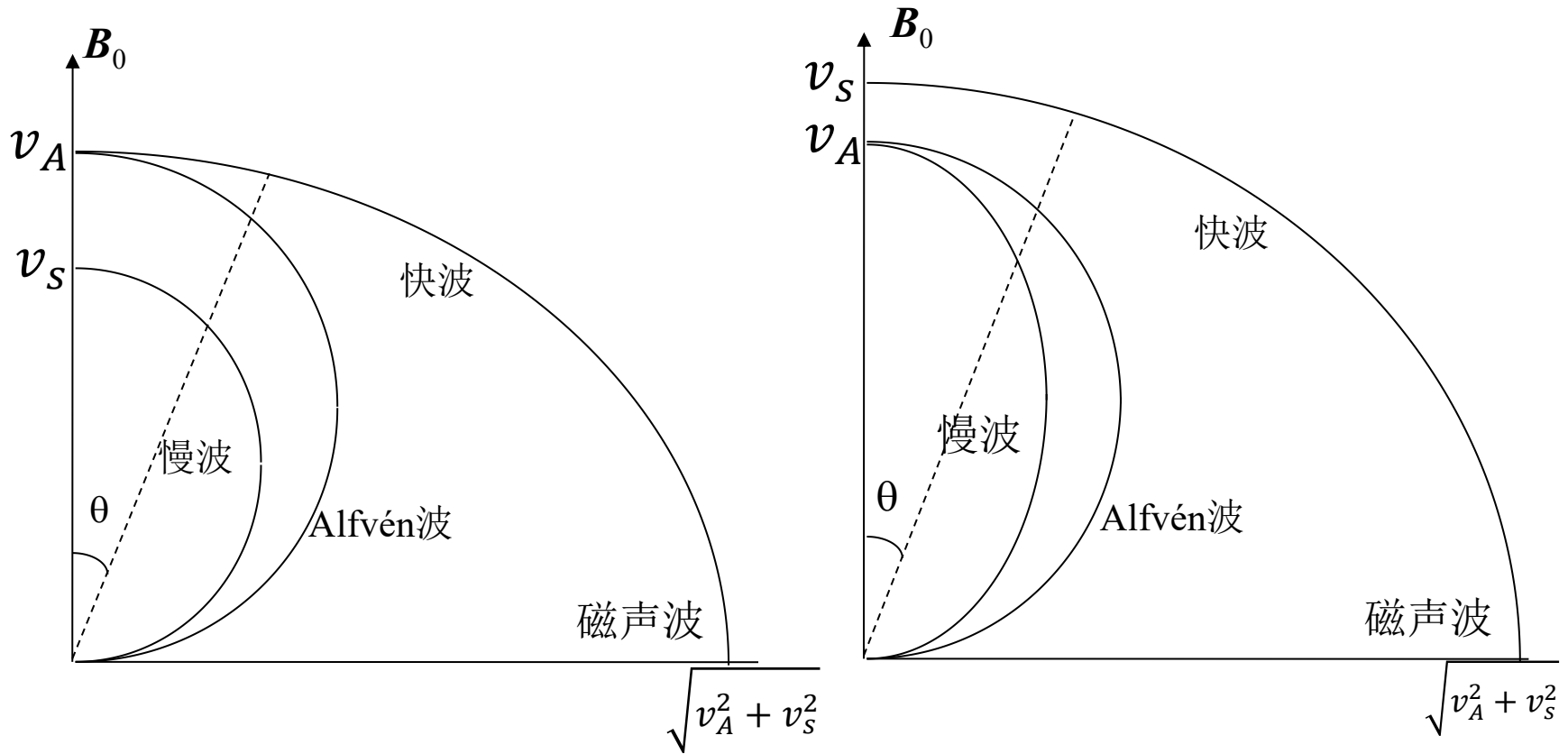
$$\Rightarrow \omega^4 - k^2(v_A^2 + v_S^2)\omega^2 + k_z^2 v_S^2 k^2 v_A^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{2}(v_A^2 + v_S^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(v_A^2 + v_S^2)^2 - 4v_S^2 v_A^2 \cos^2 \theta}$$

磁声波

- 这两个根代表两只磁声波，取正号的速度大，叫做快磁声波；取负号的速度较小，叫慢磁声波。
- 在垂直方向传播时，这两支波的速度分别变为 $\sqrt{v_A^2 + v_S^2}$ 和0。这时候，对于快磁声波来说，磁场的压力和等离子体的热压力共同作用，形成类似声波的纵波波动。但相比于声波，多了磁压力的作用，因而传播速度比声波更快。
- 通过分析可知，垂直方向传播的快磁声波，其波的运动速度也沿着波的方向（ x 方向），而波的磁场与本底磁场方向一致（ z 方向）。由此产生的磁力线疏密相间的纵向波动。

磁流体力学波



$v_A > v_s$ 情况

$v_A < v_s$ 情况

不同方向传播的三种磁流体力学波的速度

磁声波与Alfvén波速度关系

- 在平行方向传播时，快磁声波的速度变为 v_A 和 v_S 之中较大的一个，而慢磁声波的速度是 v_A 和 v_S 之中较小的一个。
- 对于快磁声波，总是比Alfvén速度快。
- 对于慢磁声波，甚至比同方向的Alfvén波的速度慢。

$$v_{fast} = \sqrt{\frac{1}{2}(v_A^2 + v_S^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(v_A^2 + v_S^2)^2 - 4v_S^2v_A^2\cos^2\theta}} \geq v_A \geq v_A\cos\theta$$

$$v_{slow} = \sqrt{\frac{1}{2}(v_A^2 + v_S^2) - \frac{1}{2}\sqrt{(v_A^2 + v_S^2)^2 - 4v_S^2v_A^2\cos^2\theta}} \leq v_A\cos\theta \leq v_A$$

思考题

- 非磁化等离子体中，比较静电波和电磁波的频率、群速度的特性，讨论其中的原因。
- 证明对于快磁声波，总是比Alfvén速度快，对于慢磁声波，比同方向的Alfvén波传播速度更慢。

磁化冷等离子体中的电磁波

- 考虑本底磁场取为z方向，带电粒子的运动方程为

$$m_\alpha n_\alpha \frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt} = n_\alpha q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B})$$

- 经过线性化和平面波分解，得到

$$-i \frac{\omega}{\Omega_\alpha} \mathbf{v}_\alpha = \frac{\mathbf{E}}{B_0} + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{e}_z$$

- 在z方向： $v_{\alpha z} = \frac{i\Omega_\alpha E_z}{\omega B_0}$

- 在垂直方向上， $\times \mathbf{e}_z$ 后用原式替换，解得

$$\mathbf{v}_{\alpha\perp} = \left(\frac{\mathbf{E}_\perp}{B_0} \times \mathbf{e}_z - i \frac{\omega \mathbf{E}_\perp}{\Omega_\alpha B_0} \right) / \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_\alpha^2} \right)$$

磁化等离子体中的介电张量

- 因此，电流可以表示为：

$$\mathbf{j} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}$$

$$= \varepsilon_0 \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}} \left((\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{e}_z - i \frac{\omega}{\Omega_{\alpha}} \mathbf{E}_{\perp}) / (1 - \frac{\omega^2}{\Omega_{\alpha}^2}) + \frac{i\Omega_{\alpha}}{\omega} E_z \mathbf{e}_z \right)$$

- 从上式可求电导率张量 $\boldsymbol{\sigma}$ ，进一步得到介电张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ ：

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{I} + \frac{i\boldsymbol{\sigma}}{\omega\varepsilon_0} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0 \\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \text{ 其中}$$

$$\varepsilon_1 = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2}, \quad \varepsilon_2 = - \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha}}{\omega} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2}, \quad \varepsilon_3 = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2}$$

磁化等离子体中的波场方程

- 假设波的传播方向，即波矢 \mathbf{k} 的方向与本底磁场夹角为 θ ，不失一般性，可假设该矢量在 xz 平面内，对应的方程为：

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 - n^2 \cos^2 \theta & i\varepsilon_2 & n^2 \sin \theta \cos \theta \\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 - n^2 & 0 \\ n^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & \varepsilon_3 - n^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0$$

- 波存在的条件为系数行列式为0，即波动的色散关系：

$$\begin{aligned} & -\varepsilon_2^2(\varepsilon_3 - n^2 \sin^2 \theta) + (\varepsilon_1 - n^2) \cdot \\ & ((\varepsilon_1 - n^2 \cos^2 \theta)(\varepsilon_3 - n^2 \sin^2 \theta) - n^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta) = 0 \end{aligned}$$

磁化等离子体中的色散关系

- 化简为:

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_1(\varepsilon_1 - n^2) - \varepsilon_2^2)(\varepsilon_3 - n^2)\sin^2 \theta \\ & - (\varepsilon_2^2 - (\varepsilon_1 - n^2)^2)\varepsilon_3 \cos^2 \theta = 0 \end{aligned}$$

- 或整理成 n^2 的一元二次方程式:

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta)n^4 \\ & - (\varepsilon_1 \varepsilon_3 (1 + \cos^2 \theta) + (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)\sin^2 \theta)n^2 + \varepsilon_3(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \\ & = 0 \end{aligned}$$

- 可以解出2个 n^2 , 就是说, 在同一个色散关系的波中, 对于一个 ω , 最多可对应两个 k :

$$n^2 = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = f_1(\omega), \quad n^2 = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = f_2(\omega)$$

垂直传播的电磁波色散关系讨论

- 讨论:

- 垂直传播色散关系 ($\theta = \pi/2$):

$$(\varepsilon_1(\varepsilon_1 - n^2) - \varepsilon_2^2)(\varepsilon_3 - n^2) = 0$$

- 波场方程为:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0 \\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 - n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0$$

- 有两个解。其一是普通的电磁波 (寻常模, O模)

$$n^2 = \varepsilon_3, E_z \neq 0, E_x = E_y = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = k^2 c^2 + \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \approx k^2 c^2 + \omega_{pe}^2$$

垂直传播的电磁波色散关系讨论

- 寻常模是线偏振波，它的电场振荡方向与本底磁场平行的电磁波，波中的带电粒子运动方向也是沿本底磁场方向，因此，带电粒子感受不到本底磁场的作用，与非磁化等离子体中的电磁波一样。

- 另一个解是异常模（X模）：

$$n^2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2^2/\varepsilon_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/\varepsilon_1$$

- 对应 $E_x \neq 0$ 或 $E_y \neq 0$ ，而 $E_z = 0$ 。有

$$\varepsilon_1 E_x + i\varepsilon_2 E_y = 0$$

- 是xy面内的椭圆偏振波，并不完全垂直于波的传播方向（波沿着x轴方向传播）。

垂直传播的电磁波的截止

- 使得 $k = 0$ 的频率是波的截止频率。这个频率是波能够传播的频率区间与不能传播的频率区间的分界点。
- 寻常模截止于 ω_{pe} ，当频率更小的时候波不能传播。
- 异常模截止的条件是 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ 或 $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ 。对应的截止频率为 ω_L 和 ω_R ：

$$\omega_L = -\frac{|\Omega_e|}{2} + \sqrt{\frac{\Omega_e^2}{4} + \omega_{pe}^2}, \quad \omega_R = \frac{|\Omega_e|}{2} + \sqrt{\frac{\Omega_e^2}{4} + \omega_{pe}^2}$$

- 在截止频率上，波的群速度一般都为0，是局域振动：

$$n^2 = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = f(\omega) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dk} = \frac{2kc^2}{2\omega f(\omega) + \omega^2 f'(\omega)} = 0$$

垂直传播的电磁波的共振

- 而使得 $k \rightarrow \infty$ 的频率是波的共振频率。在共振频率附近，存在大范围区间的短波。
- 寻常模没有有限的共振频率，但 $\omega \rightarrow \infty$ 可使 $k \rightarrow \infty$ 。
- 异常模的共振条件是 $\varepsilon_1 = 0$ ，若考虑离子仅 H^+ ，有

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \Omega_i^2} = 0$$

- 有高频和低频的两个解，分别是高混杂波 (ω_{HH}) 和低混杂波 (ω_{LH})，对于高频忽略离子项，近似有：

$$\omega_{HH}^2 = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \Omega_e^2}。对于低频，忽略上式中的红色各$$

项，近似有 $\omega_{LH} = \sqrt{\Omega_i |\Omega_e|}$ ，可见 $|\Omega_e| \gg \omega_{LH} \gg \Omega_i$ ，忽略是合理的。

垂直传播的电磁波的共振

- 异常模满足共振条件时 $\varepsilon_1 = 0$ ，从而由波场方程 $\varepsilon_1 E_x + i\varepsilon_2 E_y = 0$ 知， $E_y = 0$ 而 $E_x \neq 0$ ，此时， $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$ (均沿 x 方向)，此时异常模电磁波的电磁成分完全消失，仅有静电成分保留，即高混杂波 ω_{HH} 和低混杂波 ω_{LH} 均完全转化为静电波，且是沿 x 方向的线偏振波。
- 带电粒子在沿 x 方向的波动电场作用下振荡，但由于有 z 方向的背景磁场存在，磁场力产生 y 方向的振荡，其速度为：

$$\mathbf{v}_{\alpha\perp} = -\frac{E_x}{B_0} \left(\frac{i\omega}{\Omega_\alpha} \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \right) / \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_\alpha^2} \right)$$

- ω 对应为高混杂频 ω_{HH} 或低混杂频 ω_{LH} 。在平面内带电粒子的运动合成产生近似椭圆型轨迹的运动。

高混杂波和低混杂波

- 高混杂波是电子起主要作用，电子的振荡除了受到静电回复力，还受到磁场的约束，使得振荡频率是静电振荡频率和回旋频率共同作用的结果：

$$\omega_{HH}^2 = \omega_{pe}^2 + \Omega_e^2$$

- 低混杂波中，离子的作用也不可或缺。由于离子和电子在磁场作用下做回旋运动的频率不一致，但低频情况下要保持电中性，使得离子和电子的运动相互影响，它们共同运动的振荡频率是离子和电子回旋频率的几何平均：

$$\omega_{LH} = \sqrt{|\Omega_i| |\Omega_e|}$$

思考题

- 垂直传播的电磁波什么时候转化为静电波？给出其频率的准确表达式。
- 某处均匀等离子体中有 $\Omega_e = \omega_{pe}$ ，画出波在其中45度斜传播时的 ω - k 曲线（手绘图需要标明重要参数表达式）。

平行传播的电磁波色散关系讨论

- 讨论：
- 平行传播色散关系 ($\theta = 0$) :

$$(\varepsilon_2^2 - (\varepsilon_1 - n^2)^2)\varepsilon_3 = 0$$

- 波场方程为：

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 - n^2 & i\varepsilon_2 & 0 \\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0$$

- 有三个解。其一是普通的电子静电波，电子运动沿 z 方向，感受不到磁场的作用，产生与非磁化时一样的电子静电波：

$$\varepsilon_3 = 0, E_z \neq 0, E_x = E_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2$$

平行传播的左旋圆偏振波

- 左旋圆偏振波。色散关系为： $n^2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \Rightarrow$

$$\left(\frac{kc}{\omega}\right)^2 = 1 - \frac{1}{\omega} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega - \Omega_{\alpha}} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2}{(\omega + |\Omega_e|)(\omega - \Omega_i)}$$

- 偏振关系为左旋圆偏振波： $E_x = iE_y \neq 0, \quad E_z = 0$
- 频率较高时，左旋圆偏振波的颜色散关系又能写为

$$\left(\frac{kc}{\omega}\right)^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + |\Omega_e|)}$$

- 截止频率为（也是垂直传播的X模的截止频率）

$$\omega_L = -\frac{|\Omega_e|}{2} + \sqrt{\frac{\Omega_e^2}{4} + \omega_{pe}^2}$$

平行传播的左旋圆偏振波讨论

- 频率较低、波长较短时，成为离子回旋波：

$$\omega = \Omega_i \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 c^2} \right)$$

- 在离子回旋频率上共振。共振时，离子可持续从左旋圆偏振波中获得或失去能量。
- 频率极低时，成为左旋圆偏振Alfvén波：

$$\omega = kv_A \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

- 在 $c \gg v_A$ 情况下，可忽略位移电流，与MHD结果一致。

平行传播的右旋圆偏振波

- 右旋圆偏振波。色散关系为： $n^2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \Rightarrow$

$$\left(\frac{kc}{\omega}\right)^2 = 1 - \frac{1}{\omega} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega + \Omega_{\alpha}} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2}{(\omega - |\Omega_e|)(\omega + \Omega_i)}$$

- 偏振关系为右旋圆偏振： $E_x = -iE_y \neq 0, \quad E_z = 0$
- 频率较高时，右旋圆偏振波の色散关系又能写为

$$\left(\frac{kc}{\omega}\right)^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - |\Omega_e|)}$$

- 截止频率为（也是垂直传播的X模的截止频率）

$$\omega_R = \frac{|\Omega_e|}{2} + \sqrt{\frac{\Omega_e^2}{4} + \omega_{pe}^2}$$

平行传播的右旋圆偏振波讨论

- 接近电子回旋频率、波长较短时，是电子回旋波：

$$\omega = |\Omega_e| \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 c^2} \right)$$

- 在电子回旋频率上共振。共振时，电子可持续从右旋圆偏振波中获得或失去能量。
- 频率极低时，成为右旋圆偏振Alfvén波：

$$\omega = kv_A \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

- 在 $c \gg v_A$ 情况下，可忽略位移电流，与MHD结果一致。

哨声波

- 右旋偏振波在频率远低于电子回旋频率但又远高于离子回旋频率时，成为哨声波：

$$\omega = \frac{k^2 c^2 |\Omega_e|}{\omega_{pe}^2}$$

- 它的群速度为会随着频率升高：

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2kc^2 |\Omega_e|}{\omega_{pe}^2} = \frac{2c}{\omega_{pe}} \sqrt{\omega |\Omega_e|}$$

- 当扰动发生时，高频成分的波群速度较快，会先被观测到，而低频成分的波随后才能被观测到。在地球表面，雷电引起的电磁脉冲扰动在电离层激发低频的哨声波，可以收到沿地球磁场传播到另一端，可以听到由高到低的类似哨声的信号。

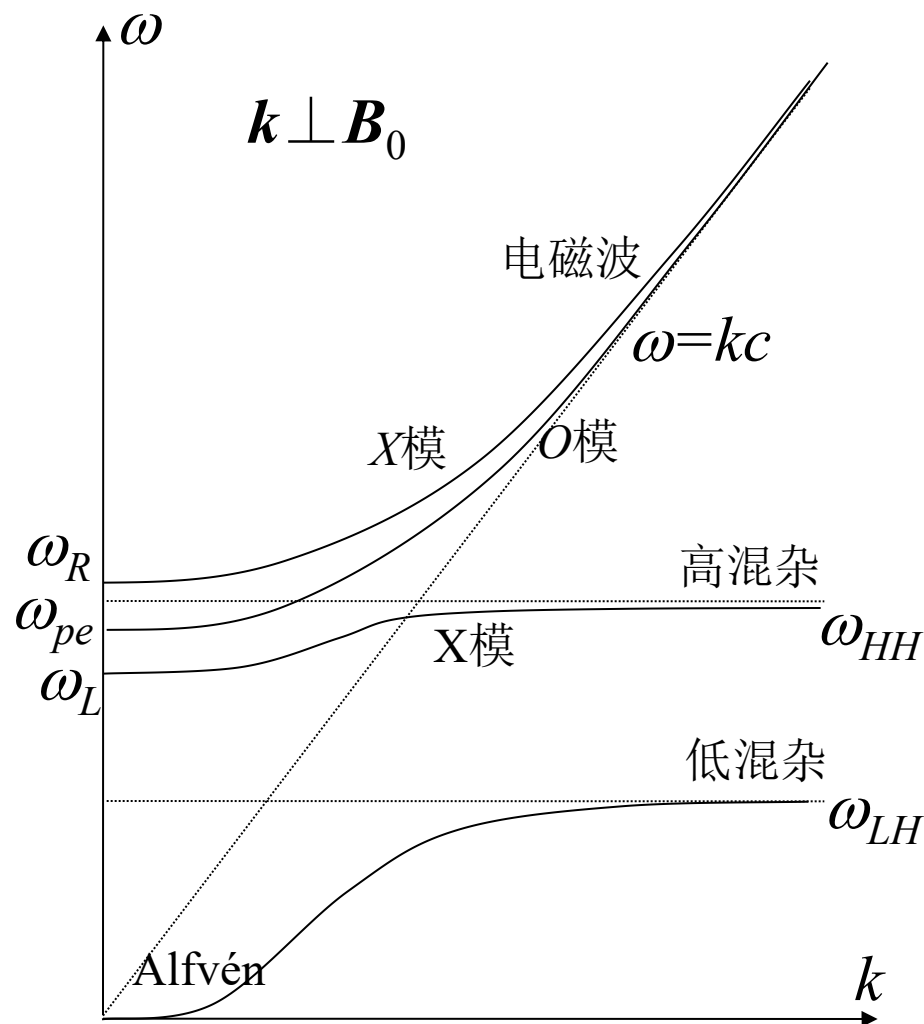
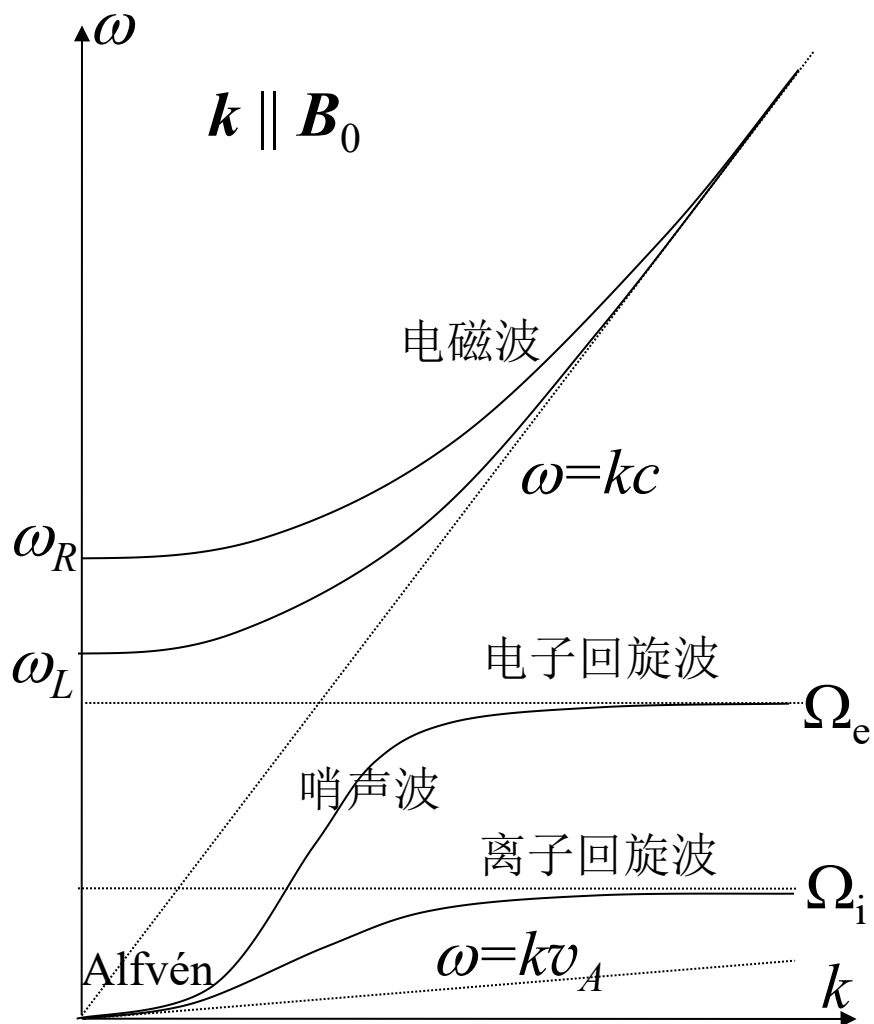
Alfvén波

- 线性的Alfvén波是左旋和右旋圆偏振波的叠加：

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= E_0 \mathbf{e}_y e^{i(kz - \omega t)} \\ &= \frac{E_0}{2} (i\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) e^{i(kz - \omega t)} + \frac{E_0}{2} (-i\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) e^{i(kz - \omega t)}\end{aligned}$$

- 反之，圆偏振波也能看成是两个相互垂直、相位差为90度、振幅相同的线偏振波的叠加。
- 左旋或右旋圆偏振Alfvén波，线偏振Alfvén波，它们都具有相同的色散关系。
- Alfvén波是沿磁场传播的左旋和右旋偏振波的低频长波极限情况。在频率趋于0时，波数 k 也趋于0，但与普通的截止情况不同，这不是通带与阻带的分界点。

平行磁场和垂直磁场传播的波的色散关系图



法拉第旋转

- 高频电磁波在等离子体中沿磁场传播时，左旋的波和右旋的波遵守不同的色散关系，他们的相速度也不同。假设初始时一个线偏振的电磁波，可以分解为左旋波和右旋波的叠加。设电磁波在 $z = 0$ 处为 $\mathbf{E}(z = 0, t) = E_0 e^{-i\omega t} \mathbf{e}_x$ ，则在等离子体中传播之后，波场为：

$$\mathbf{E}(z, t) =$$

$$\frac{E_0}{2} e^{i(k_L z - \omega t)} (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) + \frac{E_0}{2} e^{i(k_R z - \omega t)} (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)$$

- 这两支波在等离子体中传播相同一段距离之后，由于旋转的角度不同，从而两者叠加之后的线偏振波的偏振方向就会有所改变。

法拉第旋转

- 其中， k_L 和 k_R 分别是左旋波和右旋波的波矢，记：

$$k = \frac{k_L + k_R}{2}, \quad \phi = \frac{(k_L - k_R)z}{2}$$

则 $\mathbf{E}(z, t) = E_0 e^{i(k \cdot z - \omega t)} (\cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y)$

- 可见角度 ϕ 即为偏振方向转动的角度。而：

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{(k_L - k_R)z}{2} \\ &= \frac{z\omega}{2c} \left(\sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega + |\Omega_e|)(\omega - \Omega_i)}} - \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - |\Omega_e|)(\omega + \Omega_i)}} \right) \\ &\approx \frac{z\omega^2 \omega_{pe}^2 (|\Omega_e| - \Omega_i)}{2c(\omega^2 - \Omega_e^2)(\omega^2 - \Omega_i^2)} \approx \frac{z\omega_{pe}^2 |\Omega_e|}{2c(\omega^2 - \Omega_e^2)} \end{aligned}$$

法拉第旋转

- 在磁场已知的情况下，可以用测量电磁波偏振方向的旋转角度来得到等离子体的密度。当等离子体密度随空间变化时，上页的偏振方向的转动角 ϕ 的表达式中， $z\omega_{pe}^2$ 项改写为 $\int \omega_{pe}^2 dz \propto \int n_e dz$ ，即通过测量偏转角 ϕ 来获知等离子体电子密度的线积分：

$$\int_0^z n_e dz = \frac{2m_e \varepsilon_0 c (\omega^2 - \Omega_e^2) \phi}{e^2 |\Omega_e|}$$

- 电离层电子密度的线积分是近地空间物理的一项重要的探测内容。多个卫星同时做不同路径的线积分，可以用类似CT反演的方法求出电离层中各处的 $n_e(\mathbf{r})$ 。

思考题

- 证明平行磁场传播的电磁波在极低频段是 **Alfvén**波。
- 导出平行磁场传播的哨声波的色散关系。

动理论波动理论

- 动力论方程是描述等离子体分布函数的变化的。对于处理热效应、波与粒子相互作用、多种速度成分的带电粒子等现象时，用磁流体力学的描述显然是不全面的，这时应该选用动力论来处理。
- 对于波动的问题，磁流体描述适合于冷等离子体，且波与粒子相互作用较弱的情况，除此之外，用动力论方程来研究波动问题更加准确全面，且能得到一些流体的波动理论中没有的结果。
- 对于空间等离子体，无碰撞的Vlasov动理论方程为：

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}} f + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \partial_{\mathbf{v}} f = 0$$

一维静电波动

- 考虑一维静电波扰动，线性化之后为：

$$\partial_t f_1 + v \partial_x f_1 + \frac{q}{m} E \partial_v f_0 = 0$$

$$\partial_x E = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{1\alpha} dv$$

- 注意此时 v 仅仅是坐标变量，它不是1阶小量。经 **Fourier** 变换解得：

$$f_1 = \frac{iqE \partial_v f_0}{m(kv - \omega)}$$

- 色散关系为：

$$D(\omega, k) = 1 - \sum_{\alpha} \int \frac{\omega_{p\alpha}^2 \partial_v f_{0\alpha}}{n_{0\alpha} k (kv - \omega)} dv = 0$$

一维静电波色散方程

- 考虑长波， k 很小，相速度很大，展开：

$$1 + \sum_{\alpha} \int \frac{\omega_{p\alpha}^2 \partial_v f_{0\alpha}}{n_{0\alpha} k \omega} \cdot \left(1 + \frac{kv}{\omega} + \left(\frac{kv}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{kv}{\omega}\right)^3 + \dots \right) dv = 0$$

- 取平衡时的分布函数为Maxwellian分布：

$$f_0 = n_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi\kappa T}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2\kappa T}\right), \quad \Rightarrow \partial_v f_0 = -\frac{mv}{\kappa T} f_0$$

- 注意到 f_0 的对称性，进而色散方程为：

$$1 + \sum_{\alpha} \int \frac{\omega_{p\alpha}^2}{n_{0\alpha} k \omega} \left(-\frac{m_{\alpha} v}{\kappa T_{\alpha}}\right) f_{0\alpha} \cdot \left(\frac{kv}{\omega} + \left(\frac{kv}{\omega}\right)^3 + \dots\right) dv = 0$$

积分展开项

- 令 $w = \sqrt{\frac{m_\alpha}{2\kappa T_\alpha}} v$, 色散方程为

$$1 - \sum_{\alpha} \int \frac{2\omega_{p\alpha}^2 e^{-w^2}}{k\omega\sqrt{\pi}} \left(\frac{k w^2}{\omega} + \frac{k^3 w^4}{\omega^3} + \dots \right) dw = 0$$

- 应用定积分公式: $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^n dx = -$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{n-1} de^{-x^2} = \frac{n-1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{n-2} e^{-x^2} dx = \frac{n-1}{2} I_{n-2}$$

及 $I_0 = \sqrt{\pi}$, 递推得 $I_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{2^m} \sqrt{\pi}$ 。色散方程为:

$$1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)!! \frac{k^{2m}}{\omega^{2m}} \left(\frac{\kappa T_\alpha}{m_\alpha} \right)^m = 0$$

主值积分的结果

- 取头两项，并考虑主要是电子的贡献，则：

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 T_e}{\omega^2 m_e} \right) = 0$$

- 进一步近似可得：

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 (1 + 3k^2 \lambda_{De}^2)$$

- 这个结果和流体理论得到的色散关系完全一致。而朗道认为，以上运算过程中，积分存在奇点问题，即在速度等于波的相速度时，积分的分母为0。以上的处理方法只是主值积分，正确的计算需要沿着奇点下方的路径进行。

朗道积分围道

- 如果按照朗道指出的路径积分，结果为：

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 T_e}{\omega^2 m_e}\right) - \pi i \frac{\omega_{pe}^2 \partial_v f_{0e}}{n_{0e} k^2} \Bigg|_{v=\omega/k} = 0$$

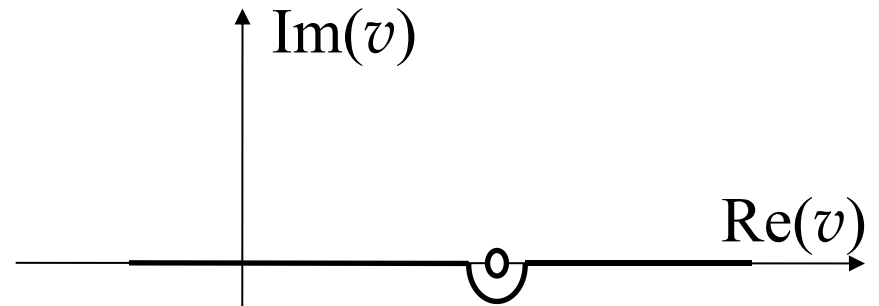
- 这时， ω 不再为实数，而是含有虚部的复数。一般对于形如

$$D_r(\omega, k) + iD_i(\omega, k) = 0$$

- 其中虚部是小量，则

$$\omega_i = - \frac{D_i(\omega_r, k)}{\partial_\omega D_r(\omega_r, k)}$$

- 这里下标 r 、 i 对应为实部和虚部。



积分围道

朗道阻尼率

- 应用到此处，可以得到电子静电波的阻尼率：

$$\omega_i = \pi \frac{\omega_{pe}^2 \partial_v f_{0e}}{n_{0e} k^2} / \frac{2\omega_{pe}^2}{\omega_r^3} \Big|_{v=\frac{\omega_r}{k}} = -\pi \frac{\omega_r^4}{2n_{0e} k^3} \frac{m_e}{T_e} f_{0e}$$

$$= -\pi \frac{\omega_r^4}{2k^3} \frac{m_e}{T_e} \sqrt{\frac{m_e}{2\pi T_e}} \exp\left(-\frac{m_e \omega_r^2}{2T_e k^2}\right)$$

$$= -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pe}}{k^3 \lambda_{De}^3} \exp\left(-\frac{1}{2k^2 \lambda_{De}^2} - \frac{3}{2}\right)$$

- 至于为什么要使用朗道围道进行积分，还需要从问题本来的物理过程看。

静电波动的物理过程

- 如果最初有扰动，可以对Vlasov方程进行时间 t 的Laplace变换求得以后的扰动电场，而不是做Fourier变换（空间上仍然做Fourier变换）：

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} (\partial_t f_1 + v \partial_x f_1 + \frac{q}{m} E \partial_v f_0) dt = 0$$

- 积分可得

$$pf_1(p) - f_1|_{t=0} + ikvf_1(p) + \frac{qE(p)\partial_v f_0}{m} = 0$$
$$f_1(p) = \frac{1}{p + ikv} \left(f_1|_{t=0} - \frac{qE(p)\partial_v f_0}{m} \right)$$

- 代入电场方程

$$ikE = \frac{(-e)}{\epsilon_0} \int f_1(p) dv$$

朗道围道的数学解释

- 可解出电场：

$$E(p) = \frac{q}{\varepsilon_0} \left(\int_v \frac{f_1|_{t=0} dv}{p + ikv} \right) \cdot \left(ik + \frac{\omega_p^2}{n_0} \int_v \frac{\partial_v f_0 dv}{p + ikv} \right)^{-1}$$

- 经Laplace反变换

$$E(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} E(p) dp$$

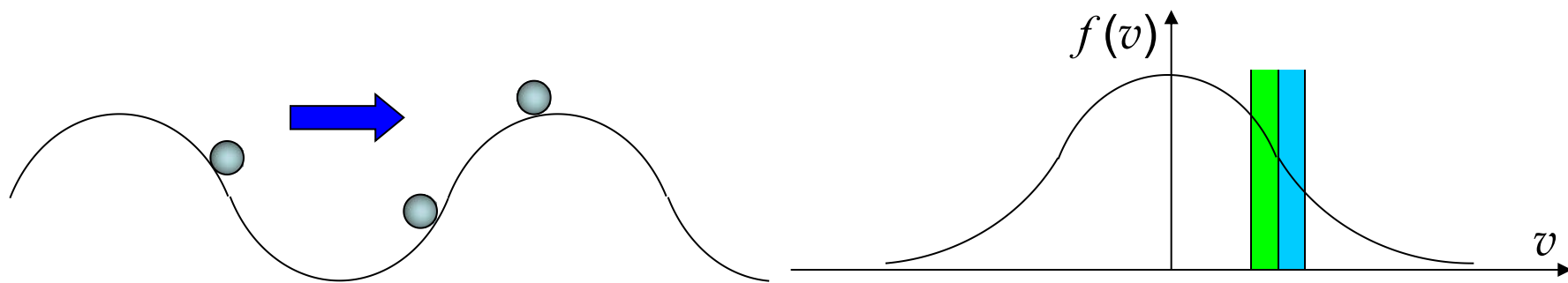
- 这里 σ 是充分大的实数，使得所有积分奇点都在积分线路的左边。而这些奇点（使分母为0）就是经过对应 $p \rightarrow -i\omega$ 之后的色散方程。而 σ 是充分大的条件对应于色散方程对速度 v 的积分中，奇点 $\omega/k \rightarrow ip/k$ 具有充分大的虚部，因此积分是从奇点下方通过的。

朗道阻尼的物理解释

- 有趣的是，朗道阐明了要解决这个问题，积分围道需从下方绕过，才能满足数学上的要求。而一些数学家则认为这种做法只是纯数学的东西，没有物理意义。直到后来实验和模拟都证实了朗道阻尼的存在，朗道的处理方法才被普遍的接受。
- 从物理上看，朗道阻尼其实是波与电子的共振相互作用。当电子的运动速度与波的相速度相差不大时，电子就被波的势阱捕获，从而与波一起运动。开始时速度小于波速的粒子得到加速，而开始时速度大于波速的粒子被减速，最后被捕获的粒子平均速度都与波的速度相同。

朗道围道的物理解释

- 对于Maxwellian分布，运动速度在波速附近的粒子中，速度慢的比速度快的粒子更多。从而获得加速的粒子多于减速的粒子。总体看来，波失去能量而粒子获得能量。波的幅度就会逐渐减小，形成阻尼。



通行粒子和波的势阱中捕获粒子

被波加速的粒子（绿色）
和被波减速的粒子（蓝色）

磁化等离子体中波动的动理论

- 设磁场沿 z 方向，而波矢为：

$$\mathbf{k} = k_z \mathbf{e}_z + k_\perp \mathbf{e}_x$$

- 对于动力论方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

- 线性化之后

$$(-i\omega + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})f_1 + \frac{q}{m}(\mathbf{E}_1 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} + \frac{q}{m}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

- 在速度空间的柱坐标系 (v_\perp, θ, v_z) 中，有

$$-i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})f_1 + \frac{q}{m}(\mathbf{E}_1 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} - \Omega \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = 0$$

磁化等离子体波的扰动分布函数

- 对于Maxwellian的初始分布：

$$f_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2T}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{m\mathbf{v}}{T} f_0$$

- 代入得

$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta} + \frac{i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{\Omega} f_1 + \frac{m \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{v}}{T B_0} f_0 = 0$$

- 解此微分方程：

$$f_1 = -\frac{m}{B_0 T} e^{-ig} \int d\theta e^{ig} f_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_1$$

其中， $g = a\theta - b\sin\theta$ ， $a = \frac{\omega - k_z v_z}{\Omega}$ ， $b = \frac{k_\perp v_\perp}{\Omega}$

磁化等离子体波的扰动分布函数

- 利用Fourier展开式：

$$e^{-ibs \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(b) e^{-in\theta}$$

以及此式对 θ 和 b 的偏导：

$$\cos \theta e^{-ibs \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{b} J_n(b) e^{-in\theta},$$

$$\sin \theta e^{-ibs \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i J'_n(b) e^{-in\theta}$$

可积分求 f_1 。

磁化等离子体波的扰动分布函数

- 积分求 f_1 得:

$$f_1 = -\frac{f_0 m}{B_0 T} e^{-ig} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(a-n)\theta}}{i(a-n)} \left(v_z \mathbf{e}_z J_n(b) + v_{\perp} \mathbf{e}_x \frac{n}{b} J_n(b) + v_{\perp} \mathbf{e}_y i J'_n(b) \right) + \mathbf{c} \right] \cdot \mathbf{E}_1$$

- 其中, \mathbf{c} 是对 θ 做不定积分产生的常矢量, 虽然它可以是 v_z, v_{\perp} 的函数, 但由于 f_1 对 θ 必须有 2π 的周期, 而一般情况 $\mathbf{c}e^{-ig}$ 不具有这个性质, 故应该取为 $\mathbf{c} = 0$ 。

磁化等离子体中的静电波

- 利用Fourier展开式：

$$f_1 = -\frac{f_0 m}{B_0 T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(n'-n)\theta}}{i(a-n)} J_{n'}(b)$$

$$\cdot \left((v_z \mathbf{e}_z + v_{\perp} \mathbf{e}_x \frac{n}{b}) J_n(b) + v_{\perp} \mathbf{e}_y i J'_n(b) \right) \cdot \mathbf{E}_1$$

- 用动理论处理磁化等离子体中的静电波，如伯恩斯坦波。电场满足：

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla\phi, \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{q}{\epsilon_0} \int f_1 d\mathbf{v}$$

- 线性化后 $\mathbf{E}_1 = -i\mathbf{k}\phi$ ，而 $\phi \neq 0$ 消去可得色散关系。

动理论静电波的色散关系

- 求得关系为:

$$\int \frac{q^2 f_0 d\mathbf{v}}{k^2 \epsilon_0 \Omega T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(n'-n)\theta}}{a-n} J_{n'}(b) J_n(b) \left(k_z v_z + k_{\perp} v_{\perp} \frac{n}{b} \right) = 1$$

- 在对速度空间的 θ 做一个周期的积分之后, $n' \neq n$ 的项积分为0, 对求和只有 $n' = n$ 这一项不为0。因而化简为:

$$\int \frac{2\pi q^2 f_0 v_{\perp} dv_{\perp} dv_z}{k^2 \epsilon_0 \Omega T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(b)}{a-n} (k_z v_z + n\Omega) = 1$$

- 进一步积分 dv_{\perp} , 需要利用定积分公式:

$$\int_0^{\infty} e^{-sx^2} J_n(px) J_n(qx) x dx = \frac{1}{2s} e^{-(p^2+q^2)/4s} I_n\left(\frac{pq}{2s}\right)$$

- 这里 $I_n()$ 是 n 阶修正Bessel函数。

动理论静电波色散关系中的积分

- 进一步得

$$\frac{\omega_{pe}^2 m}{k^2 \Omega T} \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} \int dv_z e^{-\frac{mv_z^2}{2T} - \lambda} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(\lambda) \frac{k_z v_z + n\Omega}{a - n} = 1$$

- 其中 $\lambda = \frac{k_{\perp}^2 T}{\Omega^2 m}$ 。进一步处理有：

$$\frac{\omega_{pe}^2 m e^{-\lambda}}{k^2 \Omega T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(\lambda) \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi T}} \int \frac{\omega dv_z}{a - n} e^{-\frac{mv_z^2}{2T}} - \Omega \right) = 1$$

- 若 $k_z \neq 0$ ，色散方程中，积分会出现奇点。如同朗道阻尼的处理，需要用朗道围道做积分。即在满足共振条件的情况下，色散方程中会出现虚部。

斜向传播静电波的色散关系

- 定义等离子体色散函数如下：

$$Z(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x - \zeta} dx + is\sqrt{\pi}e^{-\zeta^2}, \quad s = 0, 1, 2$$

- 其中， $s = 0, 1, 2$ 分别对应着积分围道取从奇点之上（对应于主值积分）、穿过奇点、以及从奇点之下穿过（朗道围道）。应用 $Z(\zeta)$ 函数，色散关系化简为：

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2 m}{k^2 T} \left(\frac{\omega}{k_z} \sqrt{\frac{m}{2T}} e^{-\lambda} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(\lambda) Z(\zeta) + 1 \right) = 0$$

- 这里， $\zeta = \sqrt{\frac{m}{2T}} \frac{\omega - n\Omega}{k_z}$ 。

磁化等离子体中粒子与波的共振

- 波与带电粒子的共振条件为色散关系积分式中，被积函数分母为0，即

$$a - n = \frac{\omega - k_z v_z}{\Omega} - n = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega - k_z v_z = n\Omega$$

- 这表明，当波的频率经过多普勒效应频移后，正好是带电粒子回旋频率的整数倍，则会发生波与带电粒子之间的共振相互作用，伴随高效率的能量传递或转移。若粒子将能量传递给波，则波得到激发；若波将能量传递给粒子，粒子得到加热或加速，波被衰减。粒子与波发生共振并被加热，是用波加热等离子体的常用手段，如托卡马克中常用的低混杂波加热。

垂直磁场传播的静电波

- 考虑垂直磁场传播的静电波，此时 $k_z = 0$, $k_{\perp} = k$, 没有共振现象发生。此时色散方程为：

$$\frac{\omega_{pe}^2 m e^{-\lambda}}{k^2 T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n I_n(\lambda)}{a - n} = 1$$

- 利用 $I_n(x) = I_{-n}(x)$ 的性质化为

$$\frac{2\omega_{pe}^2 e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 I_n(\lambda)}{\omega^2 - n^2 \Omega^2} = 1$$

- 在极限情况下，

$$I_n(\lambda) \approx (\lambda/2)^n / n! \quad \lambda \rightarrow 0$$

$$I_n(\lambda) \approx e^{\lambda} / \sqrt{2\pi\lambda} \quad \lambda \rightarrow \infty$$

- 用此考察色散关系的极限情况。

垂直磁场传播的静电波

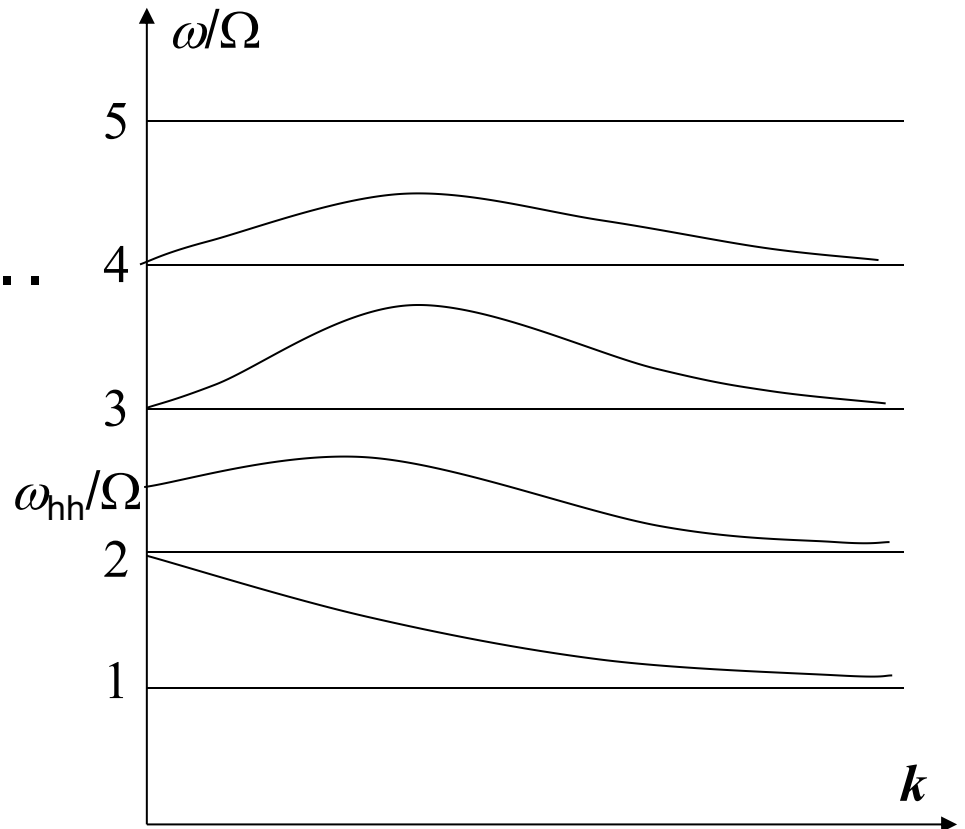
- 在 $\lambda \rightarrow 0$ 的极限下, 有

$$\omega = \omega_{HH} \left(= \sqrt{\omega_{pe}^2 + \Omega^2} \right), 2\Omega, 3\Omega, \dots$$

- 在 $\lambda \rightarrow \infty$ 的极限下, 有

$$\omega = \Omega, 2\Omega, 3\Omega, \dots$$

- 图中是动理论伯恩斯坦波的色散关系。这比流体理论给出了更丰富的频率分支, 揭示更多流体理论无法解释或预言的波动。

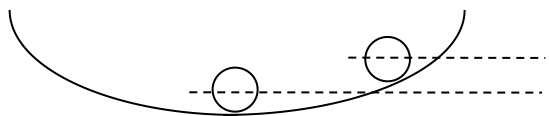


思考题

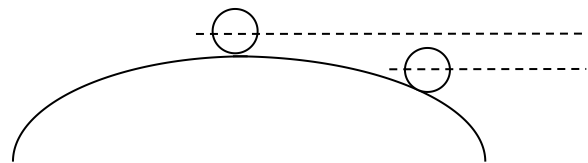
- 波长仅是德拜长度的 2π 倍的电子静电波，其阻尼率是等离子体电子振荡频率的多少倍？
- 磁化等离子体中，波与带电粒子共振的条件是什么？试解释该共振条件满足时，产生共振的物理机制。

平衡系统的MHD不稳定性

- MHD不稳定性能量原理：
- 假设系统中的等离子体各处都有微小位移，如果系统整体的能量有所上升，则系统处于稳定平衡状态，反之，则不平衡。如图所示：



位移之后势能增加，系统稳定



位移之后势能减小，系统不稳定

- 设位移 $\xi(\mathbf{r}, t) = \xi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ ，由于0阶量在空间不均匀，空间不宜做Fourier分解。速度可以表示为：

$$\mathbf{v} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \xi = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{d\xi}{dt} \cdot \nabla \xi \approx \frac{\partial \xi}{\partial t} = -i\omega \xi$$

扰动对系统的影响

- 连续性方程得到: $\rho_1 = -\nabla \cdot (\rho_0 \boldsymbol{\xi})$
- 由绝热方程有 $\frac{dp}{dt} - \gamma p \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) = 0$, 应用随体运动求导及连续性方程得: $p_1 = -\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}$
- 从磁场冻结方程得到

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0)$$

- 从牛顿方程得到

$$\mathbf{F} = -\rho_0 \omega^2 \boldsymbol{\xi} = \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_1 - \nabla p_1$$

- 由此知 \mathbf{F} 与 $\boldsymbol{\xi}$ 成正比, 系统能量的变化为

$$\begin{aligned} \delta W &= - \int \int \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\xi} dV = \int \int \rho_0 \omega^2 \boldsymbol{\xi} \cdot d\boldsymbol{\xi} dV = \frac{1}{2} \int \rho_0 \omega^2 \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} dV \\ &= -\frac{1}{2} \int \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\xi} dV = -\frac{1}{2} \int (\mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_1 - \nabla p_1) \cdot \boldsymbol{\xi} dV \end{aligned}$$

系统能量的变化

- 其中：
$$\int (\mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0) \cdot \boldsymbol{\xi} dV = - \int (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) \cdot \frac{\nabla \times \mathbf{B}_1}{\mu_0} dV$$
$$= \frac{1}{\mu_0} \int [\nabla \cdot ((\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_1) - \mathbf{B}_1 \cdot (\nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0))] dV$$
$$= \frac{1}{\mu_0} \left(\oint ((\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_1) \cdot d\mathbf{S} - \int B_1^2 dV \right)$$
$$= - \frac{1}{\mu_0} \left(\oint (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1) \boldsymbol{\xi} \cdot d\mathbf{S} + \int B_1^2 dV \right)$$

最后一步用了磁场与边界面平行的条件(否则等离子体会沿着磁力线运动, 边界无法静止), 即 $\mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{S} = 0$ 。给个简单的固定边界条件, 等离子体只能平行边界运动, 即 $\boldsymbol{\xi} \cdot d\mathbf{S} = 0$, 则上式第一项的边界积分为0。

系统能量的变化

- 应用此条件，有

$$\begin{aligned}\int \nabla p_1 \cdot \boldsymbol{\xi} dV &= \int (\nabla \cdot (p_1 \boldsymbol{\xi}) - p_1 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) dV \\ &= \oint p_1 \boldsymbol{\xi} \cdot d\mathbf{S} - \int p_1 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} dV = - \int p_1 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} dV\end{aligned}$$

- 因而 $\delta W =$

$$\frac{1}{2} \int \left(\frac{B_1^2}{\mu_0} - (\mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_1) \cdot \boldsymbol{\xi} + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} \right) dV$$

- 第一项总是正的，起稳定作用。本来平衡时空间的磁场处于能量最低状态，任何磁场形态的改变都要花费能量，等离子体扰动时，引起磁场变化，需消耗能量。因此这项起抑制等离子体形变的稳定作用。

扰动满足的边界条件

- 在边界两边总压力是一样的，即 $p + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{B_e^2}{2\mu_0}$

- 考虑到扰动时，其随体的变化为：

$$p_1 + \frac{\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1}{\mu_0} + \xi_n \mathbf{e}_n \cdot \nabla \left(\frac{B_0^2}{2\mu_0} + p_0 \right) = \frac{\mathbf{B}_{0e} \cdot \mathbf{B}_{1e}}{\mu_0} + \xi_n \mathbf{e}_n \cdot \nabla \left(\frac{B_{0e}^2}{2\mu_0} \right)$$

- 在等离子体和真空的边界，在跟随等离子体运动的坐标系中，电场切向分量连续，且都为0，即知边界附近的真空中

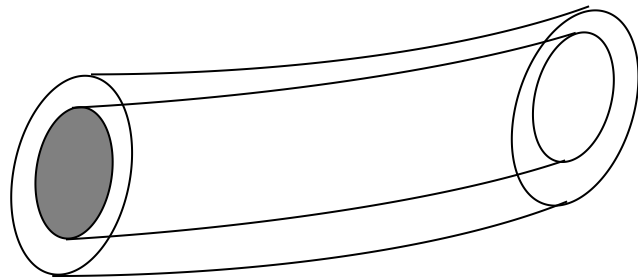
$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_{1e} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{0e}) = -\mathbf{e}_n \times \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} - \left(\mathbf{e}_n \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \mathbf{B}_{0e} = 0$$

- 其中运用了磁场与边界面平行的边界条件。上式可简化为

$$\mathbf{e}_n \times \mathbf{A}_1 = -\xi_n \mathbf{B}_{0e}$$

- 并注意真空的表面和等离子体的表面的矢量方向相反，且真空中没有电流，即 $\nabla \times \mathbf{B}_{1e} = 0$

金属壁包围等离子体的系统



- 运用 $\mathbf{B}_{1e} = \nabla \times \mathbf{A}_1$ 化简,

$$\oint \xi_n \mathbf{B}_{0e} \cdot \mathbf{B}_{1e} dS = - \oint \mathbf{e}_n \times \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_{1e} dS = \oint \mathbf{B}_{1e} \times \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{S}$$

$$= - \oint_{vac} \mathbf{B}_{1e} \times \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{S}$$

$$= - \int_{vac} \nabla \cdot (\mathbf{B}_{1e} \times \mathbf{A}_1) dV = \int_{vac} (\mathbf{B}_{1e} \cdot \nabla \times \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{B}_{1e}) dV = \int_{vac} B_{1e}^2 dV$$

- 上式中, 在完全导电的金属壁上, 电场切向分量是连续的故为零, 因此在真空中的金属壁边界附近

$$\mathbf{e}_n \times \left(-\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_n \times \mathbf{A}_1 = 0$$

- 因此可以不考虑真空与金属壁边界面上的积分。

系统能量的变化的各项

- 最后化简能量公式得

δW

$$\begin{aligned} &= \oint \left(\frac{\xi_n \mathbf{B}_{0e} \cdot \mathbf{B}_{1e}}{2\mu_0} + \frac{\xi_n^2}{2} \mathbf{e}_n \cdot \nabla \left(\frac{B_{0e}^2 - B_0^2}{2\mu_0} - p_0 \right) \right) dS + \int \frac{B_1^2}{2\mu_0} dV \\ &\quad - \frac{1}{2} \int (\mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_1 \cdot \boldsymbol{\xi} + p_1 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) dV \\ &= \int_{vac} \frac{B_{1e}^2}{2\mu_0} dV + \oint \frac{\xi_n^2}{2} \nabla \left(\frac{B_{0e}^2 - B_0^2}{2\mu_0} - p_0 \right) \cdot d\mathbf{S} + \int \frac{B_1^2}{2\mu_0} dV \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_1 \cdot \boldsymbol{\xi} dV + \frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} dV \end{aligned}$$

系统能量的变化各项的作用

- **第二项**，经常引起不稳定，即电流驱动的不稳定性。
第三项，常常引起压力不均匀导致的不稳定性，**最后一项**总是正的，由等离子体的可压缩性提供的稳定作用，对于不可压缩等离子体，这项为0。所以在考查不稳定性时，我们常假设等离子体不可压缩，这能带来处理的便利，同时若在等离子体不可压缩时都能使其稳定，实际情况是可压缩的，当然更能稳定。

Rayleigh-Taylor 不稳定性

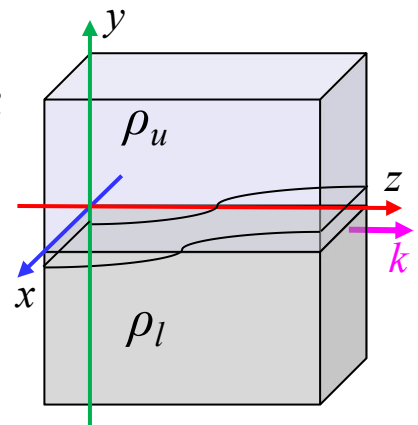
- 考虑有重力的情况，在垂直方向（ y 方向），磁流体在 $y > 0$ 处密度为 ρ_u ，在 $y < 0$ 处密度为 ρ_l ，在一定条件下可以引发 Rayleigh-Taylor 不稳定性。设位移扰动在 yz 平面内变化，在 z 方向上由于背景均匀，可以做 Fourier 分解，即可假设位移扰动为：

$$\xi(y, z, t) = (\xi_y(y)\mathbf{e}_y + \xi_z(y)\mathbf{e}_z)e^{i(kz - \omega t)}$$

- 假设磁流体是不可压缩的，有

$$\nabla \cdot \xi = \xi'_y + ik\xi_z = 0$$

这里用一撇代替 $\partial/\partial y$ ，两撇代替 $\partial^2/\partial y^2$ 。



Rayleigh-Taylor 不稳定性

- 由连续性方程得到:

$$\rho_1 = -\nabla \cdot (\rho_0 \xi) = -\nabla \rho_0 \cdot \xi = -\rho_0' \xi_y$$

- 由于 $\mathbf{v} = -i\omega \xi$, 由运动方程得到:

$$\mathbf{F} = -\rho_0 \omega^2 \xi = -\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right)_1 + \left(\frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}}{\mu_0} \right)_1 + \rho_1 \mathbf{g}$$

- 对这个等式做旋度以消去总压强梯度项, 得:

$$\nabla \times [\mu_0 \rho_0 \omega^2 \xi + (\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B})_1 + \mu_0 \rho_1 \mathbf{g}] = 0$$

- 注意到 \mathbf{B}_0 应平行于分界面, 否则磁力线将上下两区域连通, 等离子体可自由往来, 分界面失去意义。即 \mathbf{B}_0 没有 y 分量, 因此

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B})_1 = \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1 \cdot \nabla \mathbf{B}_0 = ikB_{0z} \mathbf{B}_1 + B_{1y} \mathbf{B}'_0$$

Rayleigh-Taylor 不稳定性

- 由磁感应方程得到:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_1 &= \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) = \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{B}_0 \\ &= ikB_{0z}\boldsymbol{\xi} - \xi_y \mathbf{B}'_0\end{aligned}$$

- 由此可得:

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B})_1 = -k^2 B_{0z}^2 \boldsymbol{\xi}$$

- 将这些结果代入前面的方程, 并化简得:

$$\begin{aligned}[(\mu_0 \rho_0 \omega^2 - k^2 B_{0z}^2) \xi'_y]' - k^2 (\mu_0 \rho_0 \omega^2 - k^2 B_{0z}^2 \\ + \mu_0 \rho'_0 g) \xi_y = 0\end{aligned}$$

- 在密度均匀的上半部(或下半部), 有 $\rho'_0 = 0$, 而 B_{0z}^2 随 y 变化一般很缓慢, 可假定为常数, 则有

$$\xi''_y - k^2 \xi_y = 0$$

Rayleigh-Taylor 不稳定性

- 简化时已取 $\mu_0 \rho_0 \omega^2 - k^2 B_{0z}^2 \neq 0$ ，因为该式为0将得到Alfvén波的色散关系，仅意味着等离子体中可有Alfvén存在。
- 结合边界条件解得：

$$\xi_y = \begin{cases} \xi_0 e^{-ky} & y \geq 0 \\ \xi_0 e^{ky} & y < 0 \end{cases}$$

- 在边界 $y = 0$ 的两侧附近，对原方程做积分 $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dy$ ，然后令 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，得：

$$(\mu_0 \rho_0 \omega^2 - k^2 B_{0z}^2) \xi'_y \Big|_{0-}^{0+} - k^2 \mu_0 \rho_0 g \xi_y \Big|_{0-}^{0+} = 0$$

这里0+(或0-)是指在 $y > 0$ (或 $y < 0$) 区域令 $y \rightarrow 0$ 。

Rayleigh-Taylor 不稳定性

- 即得色散关系:

$$\omega^2 = \frac{2k^2 B_{0z}^2}{\mu_0(\rho_u + \rho_l)} + kg \frac{\rho_l - \rho_u}{\rho_u + \rho_l}$$

- 若上半部的密度大于下半部的密度，且没有磁场，则 $\omega^2 < 0$ ，意味着存在正虚数的频率，引发不稳定性，波幅随时间增长为 $e^{|\omega|t}$ 。
- 若有磁场存在，则提供稳定因素，即使上半部的密度大于下半部的密度，只要磁场项足够大，也有抑制不稳定的可能。直观地看，磁力线有张力而趋于平直，它与等离子体冻结，起固定等离子体的作用，增加整体的稳定性。

柱形等离子体不稳定性

- 假设等离子体离开平衡位置的位移可表示为:

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t) = (\xi_r(r)\mathbf{e}_r + \xi_\theta(r)\mathbf{e}_\theta + \xi_z(r)\mathbf{e}_z)e^{ikz+im\theta-i\omega t}$$

- 且等离子体是不可压缩的, 即 $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$
- 考虑柱形等离子体内部磁场和压力是均匀且电流存在于等离子体柱表面的情况,
- 内部磁场 $\mathbf{B}_{0i} = B_0\mathbf{e}_z$
- 外部磁场 $\mathbf{B}_{0e} = B_{0z}\mathbf{e}_z + B_\theta(r)\mathbf{e}_\theta, B_\theta(r) \sim \frac{1}{r}$
- 受力方程为 $\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla(p + \frac{B^2}{2\mu_0}) + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}}{\mu_0}$

柱形等离子体不稳定性

- 记总压强： $\tilde{p} = p + \frac{B^2}{2\mu_0}$

- 保留一阶扰动小量时

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\nabla \tilde{p}_1 + \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial z}$$

- 而从磁感应方程及不可压缩条件式可知

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0) = ikB_0 \xi$$

- 进而可得： $(\rho_0 \omega^2 - \frac{k^2 B_0^2}{\mu_0}) \xi = \nabla \tilde{p}_1$

- 取散度，由不可压缩条件可得： $\nabla^2 \tilde{p}_1 = 0$

柱形等离子体不稳定性

- 化为**Bessell**方程：

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \right) \tilde{p}_1 = 0$$

- 可解得满足 $r = 0$ 处有限的解：

$$\tilde{p}_1 = \tilde{p}_1(a) \frac{I_m(kr)}{I_m(ka)} e^{ikz+im\theta-i\omega t}$$

- 这里 $I_m()$ 是修正**Bessell**函数。对压力梯度式取方向分量，可得

$$\left(\rho_0 \omega^2 - \frac{k^2 B_0^2}{\mu_0} \right) \xi_r(a) = \tilde{p}_1(a) \frac{k I'_m(ka)}{I_m(ka)}$$

柱形等离子体不稳定性

- 在等离子体外部，因为没有电流，故磁场可以用势场表示： $\mathbf{B}_{1e} = \nabla\varphi$
- 因为磁场的散度总是为0，即有 $\nabla^2\varphi = 0$
- 同样满足与类似的Bessell方程，其解为在无穷远处为0，在这个边界条件下，

$$\varphi = \varphi(a) \frac{K_m(kr)}{K_m(ka)} e^{ikz+im\theta-i\omega t}$$

- 这里 $K_m(\)$ 是修正Bessell函数。因而，

$$\mathbf{B}_{1e}(a) = \varphi(a) \left[\frac{kK'_m(ka)}{K_m(ka)} \mathbf{e}_r + i \frac{m}{a} \mathbf{e}_\theta + i k \mathbf{e}_z \right]$$

柱形等离子体不稳定性

- 等离子体内部和外部的扰动场现在都已经知道，还需要用边界条件将他们联系起来，考虑等离子体内外的边界上的连续条件，一个是压力平衡，即

$$\tilde{p}_1 = p_1 + \frac{\mathbf{B}_{0i} \cdot \mathbf{B}_1}{\mu_0} = \frac{\mathbf{B}_{0e} \cdot \mathbf{B}_{1e}}{\mu_0} + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \frac{B_{0e}^2}{2\mu_0}$$

- 化为

$$\mu_0 \tilde{p}_1(a) = i \left(kB_{0z} + \frac{m}{a} B_\theta(a) \right) \varphi(a) - \frac{B_\theta^2(a)}{a} \xi_r(a)$$

- 由于在边界两边磁场的法向分量（即这里的径向分量）连续，则可知这是第二个边界上的连续条件

$$\mathbf{e}_r \cdot \nabla \varphi = \mathbf{e}_r \cdot \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_{0e})$$

柱形等离子体不稳定性

- 即 $\varphi(a)k \frac{K'_m(ka)}{K_m(ka)} = i(kB_{0z} + \frac{m}{a}B_\theta(a))\xi_r(a)$
- 对于此式结合前面的表达式，可以解得：
$$\mu_0\rho_0\omega^2 = k^2B_0^2 - \frac{I'_m(ka)}{I_m(ka)} \left(\frac{K_m(ka)}{K'_m(ka)} (kB_{0z} + \frac{m}{a}B_\theta(a))^2 + \frac{kB_\theta^2(a)}{a} \right)$$
- 讨论：右式中的各项，若大于0，则起稳定作用，若小于0，则起不稳定作用。右式中的第一项，内部的z方向磁场存在，使得磁力线尽量延z方向伸直，对圆柱起稳定作用。右边第二项，由于 $I_m/I'_m > 0$ ，而 $K_m/K'_m < 0$ ，因而也总不小于0，起稳定作用，只有在扰动与磁力线同步时，这一项才为0，此时，不稳定性最容易发生，即产生螺旋不稳定性。

腊肠不稳定性

- 发生在 $B_{0z} = 0, m = 0$ 。此时，稳定性判别式为

$$\mu_0 \rho_0 \frac{\omega^2}{k^2} = B_0^2 - \frac{I'_0(ka) B_\theta^2(a)}{I_0(ka) ka}$$

- 由于 $I'_0(x)/xI_0(x)$ 的极大值为 $1/2$ ，故稳定性条件是

$$B_0^2 > \frac{B_\theta^2(a)}{2}$$

- 直观看来，当等离子体柱的半径变化时，内部场因磁通量不变，与横截面面积成反比，即 $B_0 \propto r^{-2}$ 而外部场 $B_e \propto r^{-1}$

- 当柱的半径变化时，内部磁压强、外部磁压强变

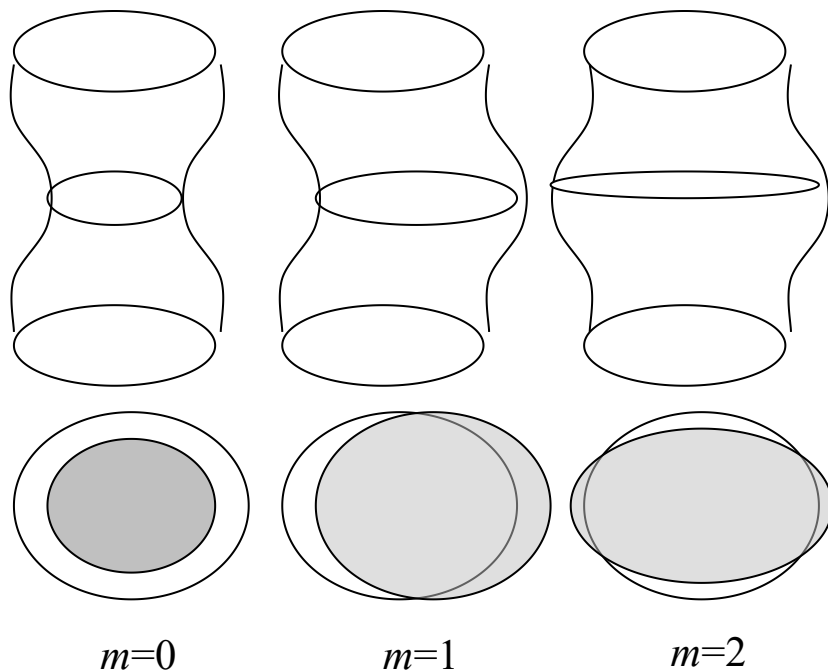
$$\text{化为 } \delta\left(\frac{B_0^2}{2\mu_0}\right) = -4 \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{\delta r}{r}, \quad \delta\left(\frac{B_\theta^2}{2\mu_0}\right) = -2 \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \frac{\delta r}{r}$$

腊肠不稳定性

- 稳定条件为

$$\delta\left(\frac{B_{\theta}^2}{2\mu_0} - \frac{B_0^2}{2\mu_0}\right)\delta r > 0$$

- 即可化为与我们之前推导一样的结果： $B_0^2 > \frac{B_{\theta}^2(a)}{2}$



扭曲不稳定性

- 发生在 $B_{0z} = 0$, $m = 1$ 。此时，稳定性判别式为

$$\mu_0 \rho_0 \frac{\omega^2}{k^2} = B_0^2 - \frac{I_1'(ka)}{I_1(ka)} \left(\frac{K_1(ka)}{K_1'(ka)} \left(\frac{1}{ka} \right)^2 + \frac{1}{ka} \right) B_\theta^2(a)$$

- 对于短波， ka 较大的情况，稳定性可以保证；但对于长波情况， $ka \rightarrow \infty$ ，此时，两类修正

Bessel函数的近似表达式为：

$$I_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! (m+k)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{m+2k}, \quad K_m(x) = (-1)^{m+1} I_m(x) \ln \frac{x}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \frac{(m-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k-m} + \frac{(-1)^m}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(m+k+1) + \psi(k+1)}{k! (m+k)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{m+2k}$$

$$\psi(m) = -C + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k}, \quad C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0.5772\dots$$

扭曲不稳定性

- 特别地 $K_1(x) = \frac{1}{x} + \left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) + c - \frac{1}{2}\right)\frac{x}{2} + \dots$, $c \approx 0.577\dots$

$$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{16} + \dots$$

- 在长波极限下，近似有：

$$\mu_0 \rho_0 \frac{\omega^2}{k^2} = B_0^2 + \left(\ln\left(\frac{ka}{2}\right) + c\right) B_\theta^2(a) \approx B_0^2 + \ln(ka) B_\theta^2(a)$$

$\rightarrow -\infty$

- 因此，对于长波扰动， B_{0z} 为0的情况总是不稳定的。
- 对于有足够大的 $\ln(ka)$ 的情况，最容易产生不稳定性的依然是的长波情况。此时，等离子体柱弯曲时，内侧磁场变强，加剧弯曲，而纵向磁场 B_{0z} 起着阻止弯曲继续加大的趋势，起稳定作用。

扭曲不稳定性

- 利用修正Bessell函数的近似展开式

$$\frac{I'_m(x)}{I_m(x)} \approx \frac{m}{x}, \quad \frac{K'_m(x)}{K_m(x)} \approx -\frac{m}{x}$$

- 可得：

$$\mu_0 \rho_0 \omega^2 = k^2 B_0^2 + \left(k B_{0z} + \frac{m}{a} B_\theta(a) \right)^2 - \frac{m}{a^2} B_\theta^2(a)$$

- 对于不同的 k ，频率取得的最小值为

$$\omega_{\min}^2 = \frac{m B_\theta^2}{\mu_0 \rho_0 a^2} \left(\frac{m B_0^2}{B_0^2 + B_{0z}^2} - 1 \right)$$

- 只要它不小于0，系统一定是稳定的。

交换不稳定性

- 普通流体中的Rayleigh-Taylor不稳定性，在等离子体中表现为交换不稳定性。以磁场来平衡等离子体所受到的非电磁力（例如重力），就可能会出现这种不稳定性。
- 设想磁通相同的两束相邻的流管1与2，交换过后体积互变，体积改变的同时，压力变化满足绝热条件，以流管1为例，体积由 V_1 变为 V_2 ，压力从 P_1 变为 P'_1 ，设

$$\delta V = V_2 - V_1, \quad \delta P = P_2 - P_1$$

- 内能的表达式为

$$U = \int_V^\infty P dV = \int_V^\infty P_0 V_0^\gamma V^{-\gamma} dV = \frac{P_0 V_0^\gamma V^{1-\gamma}}{1-\gamma} \Big|_V^\infty = \frac{P_0 V_0^\gamma V^{1-\gamma}}{\gamma-1} = \frac{PV}{\gamma-1}$$

交换不稳定性

- 交换之后，内能变化为

$$\begin{aligned}\delta U &= \frac{1}{\gamma - 1} (P'_1 V_2 + P'_2 V_1 - P_1 V_1 - P_2 V_2) \\ &= \frac{1}{\gamma - 1} (P_1 V_1^\gamma V_2^{1-\gamma} + P_2 V_2^\gamma V_1^{1-\gamma} - P_1 V_1 - P_2 V_2) \\ &= \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left(\left(1 + \frac{\delta V}{V_1}\right)^{1-\gamma} + \left(1 + \frac{\delta P}{P_1}\right) \left(1 + \frac{\delta V}{V_1}\right)^\gamma - 1 - \left(1 + \frac{\delta P}{P_1}\right) \left(1 + \frac{\delta V}{V_1}\right) \right) \\ &\approx \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left(\left[1 + (1 - \gamma) \frac{\delta V}{V_1} + \frac{(1 - \gamma)(-\gamma)}{2} \frac{\delta V^2}{V_1^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{\delta P}{P_1}\right) \left(1 + \gamma \frac{\delta V}{V_1} + \frac{\gamma(\gamma - 1)}{2} \frac{\delta V^2}{V_1^2}\right) - 2 - \frac{\delta P}{P_1} - \frac{\delta V}{V_1} - \frac{\delta P \delta V}{P_1 V_1} \right) \\ &\approx \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left(\frac{(1 - \gamma)(-\gamma)}{2} \frac{\delta V^2}{V_1^2} + \frac{\gamma(\gamma - 1)}{2} \frac{\delta V^2}{V_1^2} + \gamma \frac{\delta P \delta V}{P_1 V_1} - \frac{\delta P \delta V}{P_1 V_1} \right) = \gamma P_1 \frac{\delta V^2}{V_1} + \delta P \delta V\end{aligned}$$

交换不稳定性

- 由于上式中的第一项总是正的，因此不稳定性仅在于当第二项小于0时才有可能出现。考虑等离子体边界处，等离子体通量管和它相邻的真空通量管交换时，总有 $\delta P < 0$ ，因此稳定条件为 $\delta V < 0$ ，即同样磁通量的真空通量管的体积比相邻的等离子体通量管小，因此
$$\delta V = \delta \int S dl = \delta \int \frac{\Phi}{B} dl = \Phi \delta \int \frac{dl}{B} < 0$$

式中， Φ 是磁通量， B 是磁场强度。即

$$\delta \int \frac{dl}{B} < 0$$

双流体不稳定性

- 考虑等离子体由两种成分构成，它们各自有初始的速度。在此基础上，研究有小扰动之后等离子体的稳定性问题。假设是一维的静电情况，且各成分均是冷的。

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_\alpha v_\alpha) = 0$$

$$m_\alpha n_\alpha \frac{dv_\alpha}{dt} = n_\alpha q_\alpha E \quad \left(-\frac{\partial P_\alpha}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha$$

双流体不稳定性色散关系

- 做小扰动的波动分析，得：

$$-i\omega n_{\alpha 1} + ik(n_{\alpha 0}v_{\alpha 1} + n_{\alpha 1}v_{\alpha 0}) = 0$$

$$-i\omega m_{\alpha}v_{\alpha 1} + ikm_{\alpha}v_{\alpha 0}v_{\alpha 1} = q_{\alpha}E$$

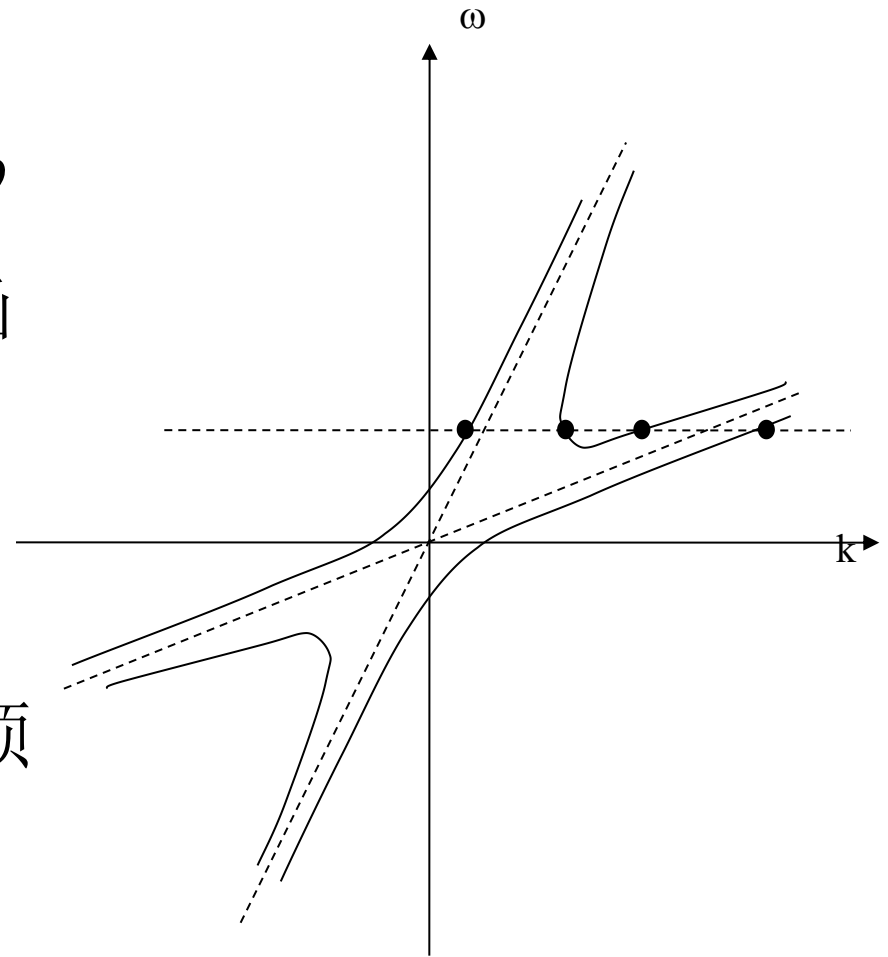
$$ikE = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\alpha} n_{\alpha 1} q_{\alpha}$$

- 因此，色散关系为：

$$\sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{(\omega - kv_{\alpha 0})^2} = 1$$

双流体不稳定性色散图分析

- 对于只有两种成分的等离子体，这个色散方程对于任意一个 k 去求解 ω 都有4个解（包括复数根）。从频率-波数的函数的图形上看出，在频率和波数都趋向于无穷大时，分母为零的两个直线其实是图形的渐近线，此时色散方程其中一项趋向于0，而另一项由于在渐近线附近，分母却不是很大，该项的值趋向于1。



双流体不稳定性临界波数

- 讨论不稳定性发生的条件和增长率。从色散关系的图形中可以看出，有一个长波区域，当 $|k|$ 小于某个临界值时，出现不稳定性，这时给定 k 之后，只能求得2个实频率，另两个是一队共轭的复数解，其中必有一个产生不稳定性。通过令 $dk/d\omega = 0$ 求出临界波数 k_c 满足

$$-\frac{\omega_{pi}^2}{(\omega - k_c v_{i0})^3} = \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - k_c v_{e0})^3} = \frac{1}{\lambda^3}, \quad \Rightarrow \lambda^2 = \omega_{pi}^{\frac{2}{3}} + \omega_{pe}^{\frac{2}{3}}$$
$$\Rightarrow k_c(v_{i0} - v_{e0}) = \lambda(\omega_{pi}^{\frac{2}{3}} + \omega_{pe}^{\frac{2}{3}}) = (\omega_{pi}^{\frac{2}{3}} + \omega_{pe}^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

双流体不稳定性色散方程求解

- 在这个临界波数上，增长率为0，随着 k 减小，增长率逐渐增大，但当 $k=0$ 时，方程可简单求解，增长率（解的虚部）又变为0。中间有可以使增长率达到最大的 k ，下面估算一下这个最大的增长率。首先替换

$$x = \frac{\omega - kv_{i0}}{\omega_{pe}}, \quad a = \frac{k(v_{e0} - v_{i0})}{\omega_{pe}}, \quad b = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pe}^2} \ll 1$$

$$x^2(x - a)^2 - x^2 - b(x - a)^2 = 0$$

$$(x^2 - b)(x - a + 1)(x - a - 1) = b$$

双流体不稳定性最大增长率

- 当 b 取为0时， x 有4个实数解，分别是 $x=0$ （重根）和 $x=a-1$ ， $x=a+1$ 。当 b 是个正的小量时，我们关心 x 有一个小的虚部的根，但这个虚部要尽可能大。由于这个虚部的存在，方程左边每一项的绝对值都难以变得很小。由于 a 可以变动，当 a 取近似为-1或1时，方程近似为

$$\pm 2x^3 = b, \quad x = \pm \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$

- 对应的最大增长率为

$$\gamma = \omega_{pe} \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{m_e}{2m_i}\right)^{\frac{1}{3}}$$

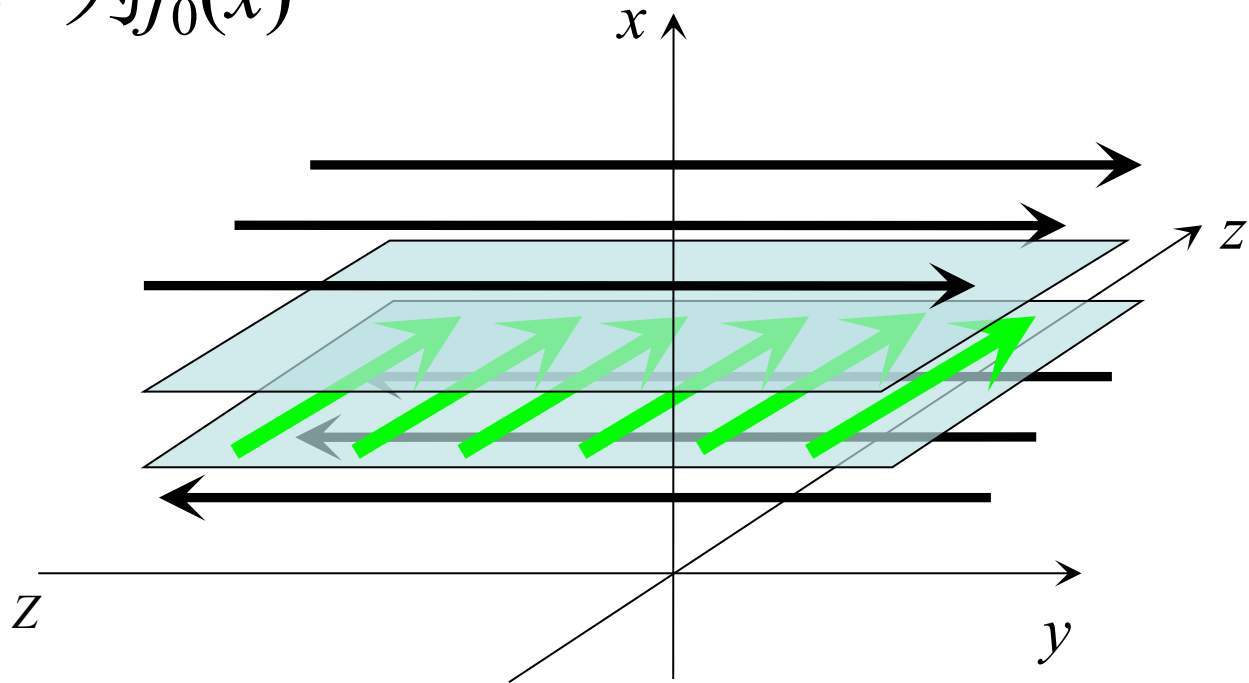
撕裂模不稳定性

（线性理论）

- 撕裂模不稳定性发生在方向相反的两部分磁场得分界面上。通常分界面处必须有一个电流片。电流片之间有相互吸引力，若有的地方具有一定的电阻，就会使得电流片在此处破裂，形成不稳定性。
- 方向相反的两部分磁场相互靠近时，撕裂模不稳定性可以引起磁场重联，从而引发多种空间爆发事件。磁场对销的结果是，磁场能量转化为等离子体的动能和热能，表现为快速的能量释放过程。

平衡时的情况

- 边界层结构如图，取系统主要沿 x 方向变化，在 z 方向上均匀。而本底磁场主要沿 y 方向，也是扰动传播的方向。本底磁场为 B_0 ，电流沿 z 方向，为 $j_0(x)$



磁流体力学方程组

- MHD方程组

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

$$\frac{d}{dt} (P \rho^{-\gamma}) = 0$$

近似处理

- 扰动量（1级小量）具有的 $e^{\gamma t + iky}$ 形式，扰动量的

$$\frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow ik, \quad \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow \gamma$$

- 取不可压缩条件近似，取消连续性方程

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad u'_x + iku_y = 0$$

- 不考虑能量方程（压力方程），做旋度消去压力梯度，取消压力方程。

$$\nabla \times \left[\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla P - \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right] = 0$$

方程的化简

- 受力方程

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial \nabla \times \mathbf{v}}{\partial t}\right)_z &= (\nabla \times (\mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0) + \nabla \times (\mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_1))_z \\ &= (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)j_{1z} + (\mathbf{B}_1 \cdot \nabla)j_{0z}\end{aligned}$$

- 其中

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times A_z \mathbf{e}_z = ikA_z \mathbf{e}_x - A'_z \mathbf{e}_y$$

$$\mu_0 \mathbf{j}_1 = \nabla \times \mathbf{B}_1 = (k^2 A_z - A''_z) \mathbf{e}_z$$

- 受力方程简化为

$$\gamma \rho (v'_y - ikv_x) = ikB_0 j_{1z} + ikA_z j'_{0z}$$

- 从 $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j}$ 可得

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial A}{\partial t} = \eta \mathbf{j} - \mathbf{v} \times \mathbf{B} \Rightarrow \gamma A_z = v_x B_0 - \eta j_{1z}$$

方程的化简

- 综合各式，受力方程继续简化

$$\gamma\rho\left(\frac{v_x''}{ik} - ikv_x\right) = ikB_0 \frac{v_x B_0 - \gamma A_z}{\eta} + ikA_z j'_{0z}$$

- 广义欧姆定律

$$\gamma A_z = v_x B_0 - \frac{\eta}{\mu_0} (k^2 A_z - A_z'')$$

- 两者联立求色散关系，或不稳定性的增长率。在 $x = 0$ 的中心点附近， $B_0 \approx B'_0 x$ ，受力方程为

$$\gamma\rho\left(-\frac{v_x''}{k^2} - v_x\right) = B_0 \frac{v_x B_0 - \gamma A_z}{\eta} + A_z j'_{0z} \Rightarrow \frac{v_x''}{k^2} + \frac{B_0^2 x^2 v_x}{\gamma\rho\eta} = 0$$

- 特征宽度为 $\delta a = \left(\frac{\gamma\rho\eta}{B_0'^2 k^2}\right)^{\frac{1}{4}}$

进一步求增长率

- 由 $x = 0$ 附近，广义欧姆定律化简

$$\gamma A_z + \frac{\eta}{\mu_0} (k^2 A_z - A_z'') = v_x B_0 \approx 0$$

- 定义宏观参数: $\Delta' = \frac{1}{A_z(0)} \left(\frac{dA_z}{dx} \Big|_{x+} - \frac{dA_z}{dx} \Big|_{x-} \right)$
- 在 $x = 0$ 的中心点附近积分,

$$2\delta a \left(\gamma + \frac{\eta k^2}{\mu_0} \right) - \frac{\eta}{\mu_0} \Delta' = 0$$

- 增长率为

$$\gamma \approx \gamma + \frac{\eta k^2}{\mu_0} = \frac{\eta \Delta'}{2\mu_0} \left(\frac{\gamma \rho \eta}{B_0'^2 k^2} \right)^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow \gamma = \left(\frac{\eta^3 \Delta'^4 B_0'^2 k^2}{2^4 \mu_0^4 \rho} \right)^{\frac{1}{5}}$$

进一步求增长率

$$\begin{aligned}\gamma &= 0.5(ka)^{\frac{2}{5}}(\Delta'a)^{\frac{4}{5}}\left(\frac{\eta}{\mu_0 a^2}\right)^{\frac{3}{5}}\left(\frac{B'_0{}^2}{\mu_0 \rho}\right)^{\frac{1}{5}} \\ &= 0.5(ka)^{\frac{2}{5}}(\Delta'a)^{\frac{4}{5}}\tau_R^{-\frac{3}{5}}\tau_A^{-\frac{2}{5}}\end{aligned}$$

- 其中 $\tau_R = \frac{\mu_0 a^2}{\eta}$, $\tau_A = \frac{a}{v_A} = \sqrt{\frac{\mu_0 \rho}{B'_0{}^2}}$
- 分别为磁场的扩散时间和Alfvén波渡越时间。撕裂模增长率对应线性增长阶段，再发展到非线性阶段，引起磁场重联进入相对稳定进行的阶段，线性理论失效，需要用非线性理论或数值模拟进行研究。

磁场重联初态的平衡解

- 0阶物理量应该是MHD方程组的初态的平衡解
- 下面是一组常用的解：

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_0(x) &= B_{0y}(x)\mathbf{e}_y + B_{0z}(x)\mathbf{e}_z \\ &= B_0 \tanh\left(\frac{x}{a}\right)\mathbf{e}_y + B_{0z}\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

$$\rho(x) = \rho_\infty + \rho_n \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{a}\right)$$

- 参数之间满足平衡关系

$$P + \frac{B^2}{2\mu_0} = \text{const}, \quad \frac{\rho_n T}{m_i} = \frac{B_0^2}{2\mu_0}$$

数值求解方程

- 非线性撕裂模不稳定性

