量子力学 B
2021 秋季学期
作业 2 *(截止期: 10 月 13 号周三课上)*

1. 如某力学量的本征态为$\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$，对应本征值为$\{A_1, A_2\}$，当体系处于量子态$|\psi\rangle = |+\rangle + i|-\rangle$时，对该力学量进行测量的可能测值及相应几率分别为多少？已知$|\pm\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|\psi_1\rangle \pm |\psi_2\rangle)$。如$|\psi\rangle = |+\rangle + 2|-\rangle$呢？(注意归一化)

2. 请证明

$$\left[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\hat{D}\right] = -\hat{A}\hat{C}\left\{\hat{D}, \hat{B}\right\} + \hat{A}\left\{\hat{C}, \hat{B}\right\}\hat{D} - \hat{C}\left\{\hat{D}, \hat{A}\right\}\hat{B} + \left\{\hat{C}, \hat{A}\right\}\hat{D}\hat{B}$$

3. 请证明 (黑体表示矢量)

$$(a)\quad \left[\hat{A}, \hat{B}^n\right] = n\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{B}^{n-1}, \quad 如果 \quad \left[\hat{B}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] = 0$$

$$(b)\quad \left[\hat{A}^n, \hat{B}\right] = n\hat{A}^{n-1}\left[\hat{A}, \hat{B}\right], \quad 如果 \quad \left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] = 0$$

$$(c)\quad \left[\hat{C}, \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{B}}\right] = \left[\hat{C}, \hat{\mathbf{A}}\right] \cdot \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{A}} \cdot \left[\hat{C}, \hat{\mathbf{B}}\right]$$

$$(d)\quad \left[\hat{C}, \hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{B}}\right] = \left[\hat{C}, \hat{\mathbf{A}}\right] \times \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{A}} \times \left[\hat{C}, \hat{\mathbf{B}}\right]$$

4. 请根据角动量算符的对易关系，证明如下关系

$$a.\ \left[\hat{l}_\alpha, \hat{\mathbf{p}}^2\right] = 0, \quad \alpha = x, y, z$$

$$b.\ \left[\hat{l}_+, \hat{l}_-\right] = 2\hbar\hat{l}_z, \quad \text{where } \hat{l}_\pm = \hat{l}_x \pm i\hat{l}_y$$

$$c.\ \left[\hat{\mathbf{l}}^2, \hat{l}_\alpha\right] = 0, \quad \alpha = x, y, z$$

5. 请证明如下关系 (λ为复数)

$$a.\ \frac{d}{d\lambda}e^{\lambda\hat{A}} = \hat{A}e^{\lambda\hat{A}} = e^{\lambda\hat{A}}\hat{A}$$

$$b.\ \left[\hat{A}, e^{\lambda\hat{B}}\right] = \lambda\hat{C}e^{\lambda\hat{B}}, \ \text{where } \hat{C} = \left[\hat{A}, \hat{B}\right], \left[\hat{C}, \hat{A}\right] = \left[\hat{C}, \hat{B}\right] = 0$$

$$c.\ e^{\lambda(\hat{A}+\hat{B})} = e^{\lambda\hat{A}}e^{\lambda\hat{B}}e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}}, \ \text{where } \hat{C} = \left[\hat{A}, \hat{B}\right], \left[\hat{C}, \hat{A}\right] = \left[\hat{C}, \hat{B}\right] = 0$$

6. 对于厄米算符$\hat{A}$及其本征态$|\psi_n\rangle$，请证明如下关系

$a.\quad \sum_n \psi_n^*(x)\psi_n(x') = \delta(x - x'),\quad$ where $\psi_n(x) = \langle x|\psi_n\rangle$

$b.\quad \hat{A} = \sum_n A_n \left|\psi_n\right\rangle \left\langle\psi_n\right|$

$c.\quad e^{\hat{A}} = \sum_n e^{A_n} \left|\psi_n\right\rangle \left\langle\psi_n\right|$

hw2 解答

Ziguang Lin

2021 年 10 月 14 日

1 第一题

1.1 题目

如某力学量的本征态为 $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$, 对应本征值为 $\{A_1,\, A_2\}$, 当体系处于量子态 $|\psi\rangle = |+\rangle + i\,|-\rangle$ 时, 对该力学量进行测量的可能测值及相应几率分别为多少? 已知 $|\pm\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|\psi_1\rangle \pm |\psi_2\rangle)$。如 $|\psi\rangle = |+\rangle + 2\,|-\rangle$ 呢? (注意归一化)

1.2 答案

由厄米算符的本征态正交可得

$$\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}, (i, j = 1, 2)$$

$$\langle\psi_1|+\rangle = \langle\psi_1|-\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\langle\psi_2|+\rangle = -\langle\psi_2|-\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(1) $|\psi\rangle = |+\rangle + i\,|-\rangle$

$$\langle\psi_1|\psi\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \langle\psi_2|\psi\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

测量得到本征值 $\{A_1,\, A_2\}$ 的概率分别为

$$P(A_1) = \frac{|1+i|^2}{|1+i|^2 + |1-i|^2} = 0.5$$

$$P(A_2)=\frac{|1-i|^2}{|1+i|^2+|1-i|^2}=0.5=1-P(A_1)$$

(2) $|\psi\rangle=|+\rangle+2\,|-\rangle$

$$\langle\psi_1|\psi\rangle=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+2)=\frac{3\sqrt{2}}{2},\langle\psi_2|\psi\rangle=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-2)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

测量得到本征值 $\{A_1,\,A_2\}$ 的概率分别为

$$P(A_1)=\frac{|3|^2}{|3|^2+|-1|^2}=0.9$$

$$P(A_2)=\frac{|-1|^2}{|3|^2+|-1|^2}=0.1$$

（注意审题，问的是测值是多少？本课程默认测量均为投影测量，即测值为某个本征态的本征值。说测值是某个本征态有点奇怪，至少在更大的背景下这肯定是不对的。）

2 第二题

2.1 题目

请证明

$$\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\hat{D}\right]=-\hat{A}\hat{C}\{\hat{D},\hat{B}\}+\hat{A}\{\hat{C},\hat{B}\}\hat{D}-\hat{C}\{\hat{D},\hat{A}\}\hat{B}+\{\hat{C},\hat{A}\}\hat{D}\hat{B}$$

2.2 答案

先求等式左边

$$LHS=\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}-\hat{C}\hat{D}\hat{A}\hat{B}$$

再求等式右边

$$\begin{aligned}RHS&=-\hat{A}\hat{C}(\hat{D}\hat{B}+\hat{B}\hat{D})+\hat{A}(\hat{B}\hat{C}+\hat{C}\hat{B})\hat{D}\\&-\hat{C}(\hat{A}\hat{D}+\hat{D}\hat{A})\hat{B}+(\hat{C}\hat{A}+\hat{A}\hat{C})\hat{D}\hat{B}\\&=\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}-\hat{C}\hat{D}\hat{A}\hat{B}\\&=LHS\end{aligned}$$

得证！

3 第三题

3.1 题目

请证明

$$[\hat{A},\hat{B}^n]=n[\hat{A},\hat{B}]\hat{B}^{n-1}\quad if\quad [\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]]=0$$

$$[\hat{A}^n,\hat{B}]=n\hat{A}^{n-1}[\hat{A},\hat{B}]\quad if\quad [\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]=0$$

$$[\hat{C},\hat{\vec{A}}\cdot\hat{\vec{B}}]=[\hat{C},\hat{\vec{A}}]\cdot\hat{\vec{B}}+\hat{\vec{A}}\cdot[\hat{C},\hat{\vec{B}}]$$

$$[\hat{C},\hat{\vec{A}}\times\hat{\vec{B}}]=[\hat{C},\hat{\vec{A}}]\times\hat{\vec{B}}+\hat{\vec{A}}\times[\hat{C},\hat{\vec{B}}]$$

3.2 答案

第一个（为方便起见，这里所有算符都省略 hat 号）：

由 $[\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]]=0$ 知，$B[A,B]=[A,B]B$

$$\begin{aligned}RHS&=n[A,B]B^{n-1}\\&=[A,B]B^{n-1}+B[A,B]B^{n-2}+\cdots+B^{n-1}[A,B]\\&=AB^n-BAB^{n-1}+BAB^{n-1}-B^2AB^{n-2}+B^2AB^{n-2}-\cdots-B^nA\\&=AB^n-B^nA\\&=[A,B^n]\\&=LHS\end{aligned}$$

（也可以用数学归纳法证明）

第二个证法同第一个。

第三个（为方便起见，这里所有算符都省略 hat 号）：

将 $\vec{A}\cdot\vec{B}$ 写成分量形式 A_iB_i，有：

$$\begin{aligned}[\hat{C},\hat{\vec{A}}\cdot\hat{\vec{B}}]&=[C,A_iB_i]\\&=A_i[C,B_i]+[C,A_i]B_i\\&=[\hat{C},\hat{\vec{A}}]\cdot\hat{\vec{B}}+\hat{\vec{A}}\cdot[\hat{C},\hat{\vec{B}}]\end{aligned}$$

第四个（为方便起见，这里所有算符都省略 hat 号）：

将 $\vec{A}\times\vec{B}$ 写成分量形式 $\epsilon_{ijk}A_iB_j\vec{e_k}$，有：

$$\begin{aligned}[\hat{C},\hat{\vec{A}}\times\hat{\vec{B}}] &= [C,\epsilon_{ijk}A_iB_j\vec{e_k}] \\ &= \epsilon_{ijk}[C,A_iB_j]\vec{e_k} \\ &= \epsilon_{ijk}A_i[C,B_j]\vec{e_k}+\epsilon_{ijk}[C,A_i]B_j\vec{e_k} \\ &= \epsilon_{ijk}A_i[C,\vec{B}]_j\vec{e_k}+\epsilon_{ijk}[C,\vec{A}]_iB_j\vec{e_k} \\ &= \hat{\vec{A}}\times[\hat{C},\hat{\vec{B}}]+[\hat{C},\hat{\vec{A}}]\times\hat{\vec{B}}\end{aligned}$$

4 第四题

4.1 题目

请根据角动量算符的对易关系, 证明如下关系：

$$[\hat{l_\alpha},\hat{\vec{p}^2}]=0$$

$$[\hat{l_+},\hat{l_-}]=2\hbar\hat{l_z}$$

$$[\hat{\vec{l}^2},\hat{l_\alpha}]=0$$

4.2 答案

注：为方便起见，这里所有算符都省略 hat 号

先复习几个常用的关于角动量的公式

$$[l_\alpha,x_\beta]=i\hbar\epsilon_{\alpha\beta\gamma}x_\gamma$$

$$[l_\alpha,p_\beta]=i\hbar\epsilon_{\alpha\beta\gamma}p_\gamma$$

$$[l_\alpha,l_\beta]=i\hbar\epsilon_{\alpha\beta\gamma}l_\gamma$$

第一个证明：

$$\begin{aligned}[l_x,\vec{p}^2] &= [l_x,p_x^2+p_y^2+p_z^2]=[l_x,p_x^2]+[l_x,p_y^2]+[l_x,p_z^2] \\ &= p_x[l_x,p_x]+[l_x,p_x]p_x+p_y[l_x,p_y]+[l_x,p_y]p_y+p_z[l_x,p_z]+[l_x,p_z]p_z \\ &= 0+0+i\hbar p_yp_z+\hbar p_zp_y-\hbar p_zp_y-\hbar p_yp_z \\ &= 0\end{aligned}$$

第二个证明：

$$
\begin{aligned}
[l_+, l_-] &= [l_x + il_y, l_x - il_y] \\
&= [l_x, l_x] + i[l_y, l_x] - i[l_x, l_y] + [l_y, l_y] \\
&= \hbar l_z + \hbar l_z \\
&= 2\hbar l_z
\end{aligned}
$$

第三个证明：

$$
\begin{aligned}
[l^2, l_\alpha] &= [l_\alpha^2, l_\alpha] + [l_\beta^2, l_\alpha] + [l_\gamma^2, l_\alpha] \\
&= 0 + \epsilon_{\beta\alpha\gamma} l_\beta l_\gamma + \epsilon_{\beta\alpha\gamma} l_\gamma l_\beta + \epsilon_{\gamma\alpha\beta} l_\beta l_\gamma + \epsilon_{\gamma\alpha\beta} l_\gamma l_\beta \\
&= \epsilon_{\beta\alpha\gamma} l_\beta l_\gamma + \epsilon_{\beta\alpha\gamma} l_\gamma l_\beta - \epsilon_{\beta\alpha\gamma} l_\beta l_\gamma - \epsilon_{\beta\alpha\gamma} l_\gamma l_\beta \\
&= 0
\end{aligned}
$$

5 第五题

5.1 题目

$$
\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda\hat{A}} = \hat{A} e^{\lambda\hat{A}} = e^{\lambda\hat{A}} \hat{A}
$$
$$
[\hat{A}, e^{\lambda\hat{B}}] = \lambda\hat{C} e^{\lambda\hat{B}} \quad where \quad \hat{C} = [\hat{A}, \hat{B}], [\hat{C}, \hat{A}] = [\hat{C}, \hat{B}] = 0
$$
$$
e^{\lambda(\hat{A}+\hat{B})} = e^{\lambda\hat{A}} e^{\lambda\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\hat{C}} \quad where \quad \hat{C} = [\hat{A}, \hat{B}], [\hat{C}, \hat{A}] = [\hat{C}, \hat{B}] = 0
$$

5.2 答案

第一个证明：

首先我们知道

$$
e^{\lambda A} = \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda A)^n}{n!}
$$

对等式的 λ 参数求导可得：

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda A} = \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda)^{n-1} A^n}{(n-1)!} &= A(\Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda A)^n}{n!}) = A e^{\lambda A} \\
&= (\Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda A)^n}{n!}) A = e^{\lambda A} A
\end{aligned}
$$

第二个证明：首先复习本册作业前面的公式

$$[\hat{A},\hat{B}^n]=n[\hat{A},\hat{B}]\hat{B}^{n-1}\quad if\quad [\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]]=0$$

利用这个公式可以算此题：

$$\begin{aligned}[A,e^{\lambda B}]&=[A,\Sigma_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda B)^n}{n!}]\\&=\Sigma_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n[A,B^n]}{n!}\\&=C\Sigma_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^nB^{n-1}}{(n-1)!}\\&=\lambda C\Sigma_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda B)^n}{n!}\\&=\lambda Ce^{\lambda B}\end{aligned}$$

第三个证明：

这个证明可以直接通过 Baker-Campbell-Hausdorff formula 来证。但我这里给出一个构造的函数的办法。

我们要构造的第一个函数是：

$$g(t)=e^{At}Be^{-At}$$

我们考虑它的各阶导数：

$$\begin{aligned}&(\frac{dg}{dt})_{t=0}=(e^{At}[A,B]e^{-At})_{t=0}=[A,B]\\&(\frac{d^2g}{dt^2})_{t=0}=(e^{At}[A,[A,B]]e^{-At})_{t=0}=[A,[A,B]]\\&\cdots\end{aligned}$$

所以接下来对 g(t) 进行 Taylor 展开：

$$\begin{aligned}g(t)&=\Sigma\frac{1}{n!}(\frac{d^ng}{dt^n})_{t=0}t^n\\&=B+[A,B]t+\cancel{[A,[A,B]]t^2/2+\cdots}\end{aligned}$$

显然，划掉的项是 0. 所以我们现在通过第一个构造的函数得到了：

$$e^{At}Be^{-At}=B+[A,B]t$$

不妨令 $B\to I$(单位算符)，可得

$$e^{At}e^{-At}=I$$

显然令 $A \to -A$ 可得 $e^{-At}e^{At} = I$，即得到逆算符。

则回到第一个构造函数，等号两边右乘逆算符，得到

$$e^{At}B = (B + [A, B]t)e^{At}$$

（虽然这个结论能从上一小题得到，但我们顺便证明了逆算符，这在后面也要用到）

接下来构造第二个函数

$$f(t) = e^{At}e^{Bt}$$

求导可得

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt} \\ &= Ae^{At}e^{Bt} + (B + [A, B]t)e^{At}e^{Bt} \\ &= (A + B + [A, B]t)e^{At}e^{Bt} \\ &= (A + B + [A, B]t)f\end{aligned}$$

注意到 $f(0) = 1$ 初始条件，可得

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}C}$$

令 $A \to (A + B)$，$B \to \frac{1}{2}C$，利用 $[A, C] = [B, C] = 0$ 可得

$$e^{A+B}e^{\frac{1}{2}C} = e^{A+B+\frac{1}{2}C+0} = e^{A+B+\frac{1}{2}C}$$

综上两式子可得：

$$e^A e^B = e^{A+B}e^{\frac{1}{2}C}$$

两边都乘上 $e^{-\frac{1}{2}C}$，且注意到 $e^{-\frac{1}{2}C}e^{\frac{1}{2}C} = 1$ 由此可得

$$e^{\lambda(A+B)} = e^{\lambda A}e^{\lambda B}e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 C}$$

λ 的产生是由于做了 $A \to \lambda A$ 和 $B \to \lambda B$ 的代换

(关于本题的其他解法：不建议暴力展开 + 数学归纳法的做法；利用微分方程同初始条件唯一解结论的做法应该可以吧？)

6 第六题

6.1 题目

对于厄米算符 $\hat{A}$ 及其本征态 $|\psi_n\rangle$，请证明如下关系

a. $\sum_n \psi_n^*(x)\psi_n(x') = \delta(x-x')$, where $\psi_n(x) = \langle x|\psi_n\rangle$

b. $\hat{A} = \sum_n A_n |\psi_n\rangle \langle\psi_n|$

c. $e^{\hat{A}} = \sum_n e^{A_n} |\psi_n\rangle \langle\psi_n|$

6.2 答案

a.

$$\begin{aligned}\sum_n \psi_n^*(x)\psi_n(x') &= \sum_n \langle\psi_n|x\rangle\langle x'|\psi_n\rangle = \sum_n \langle x'|\psi_n\rangle\langle\psi_n|x\rangle \\ &= \langle x'|(\sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|)|x\rangle = \langle x'|(I)|x\rangle = \delta(x-x')\end{aligned}$$

b.

$$\hat{A} = \hat{A}(\sum_n |\psi_n\rangle \langle\psi_n|) = \sum_n \hat{A}\,|\psi_n\rangle \langle\psi_n| = \sum_n A_n\,|\psi_n\rangle \langle\psi_n|$$

c.

$$\begin{aligned}e^{\hat{A}} &= \sum_m \frac{\hat{A}^m}{m!} = (\sum_m \frac{\hat{A}^m}{m!})(\sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|) = \sum_{n,m} \frac{\hat{A}^m}{m!}|\psi_n\rangle\langle\psi_n| \\ &= \sum_{n,m} \frac{A_n^m}{m!}|\psi_n\rangle\langle\psi_n| = \sum_n e^{A_n}\,|\psi_n\rangle \langle\psi_n|\end{aligned}$$

(第二行第一个等号由 b. 的结果得到)