第十三章 数项级数

§13.1.2 思考题

1. 解答: 记 Archilles 每次到达乌龟出发点所需的时间为 a_n, 则有 $a_{n+1}=a_n\cdot 0.1/10$ $=10^{-2}a_n, a_1=100$. Archilles 赶上乌龟所需要的时间为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{100}{1-10^{-2}}=\dfrac{10000}{99}$. □

2. 解答:

(1) 若 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 均收敛

(i)$\sum(a_n\pm b_n)$ 收敛 (极限的四则运算);

(ii)$\sum a_nb_n$ 未必收敛, 例如 $a_n=b_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$;

(iii)$\sum\dfrac{a_n}{b_n}$ 未必收敛, 例如 $a_n=\dfrac{1}{n^2}, b_n=\dfrac{1}{n^3}$.

(2) 若 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 均发散

(i)$\sum(a_n\pm b_n)$ 未必发散, 例如 $a_n=n, b_n=\mp n$;

(ii)$\sum a_nb_n$ 未必发散, 例如 $a_n=b_n=\dfrac{1}{n}$;

(iii)$\sum\dfrac{a_n}{b_n}$ 未必发散, 例如 $a_n=1, b_n=n^2$.

(3) 若 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 均为正项级数且收敛

(i) 结论不变;

(ii)$\sum a_nb_n$ 收敛. 因为级数收敛通项必定有界, 设 $a_n<M$, 则 $\sum a_nb_n<M\sum b_n$, 由比较判别法知 $\sum a_nb_n$ 收敛;

(iii) 结论不变.

(4) 若 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 均为正项级数且发散

(i)$\sum(a_n+b_n)$ 发散. 因为 $\sum(a_n+b_n)>\sum a_n\to+\infty$. $\sum(a_n-b_n)$ 未必发散, 例如 a_n $=b_n=n$;

(ii) 结论不变;

(iii) 结论不变. □

3. 解答:

对于 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 均为正项级数的情况

(1)$\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 均收敛

(i)$\sum\min\{a_n,b_n\}$ 收敛. 这是因为 $\min\{a_n,b_n\}\leqslant a_n$;

(ii)$\sum\max\{a_n,b_n\}$ 收敛. 这是因为 $\max\{a_n,b_n\}<a_n+b_n$.

(2)$\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 均发散

(i)$\sum\min\{a_n,b_n\}$ 未必发散, 例如 $a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n^2}, n=2k-1\\ n, n=2k\end{cases}$,$b_n=\begin{cases}n, n=2k-1\\ \dfrac{1}{n^2}, n=2k\end{cases}$;

(ii)$\sum\max\{a_n,b_n\}$ 发散. 这是因为 $\max\{a_n,b_n\}\geqslant a_n$.

对于 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 为一般项级数的情况

(1)$\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 均收敛

(i)$\sum \min\{a_n, b_n\}$ 未必收敛, 例如 $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} = -b_n$;

(ii)$\sum \max\{a_n, b_n\}$ 未必收敛, 反例与 (i) 相同.

(2)$\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 均发散

(i)$\sum \min\{a_n, b_n\}$ 未必发散, 反例不变;

(ii)$\sum \max\{a_n, b_n\}$ 未必发散. 例如 $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2}, n = 2k-1 \\ -n, n = 2k \end{cases}, b_n = \begin{cases} -n, n = 2k-1 \\ \dfrac{1}{n^2}, n = 2k \end{cases}$. □

4. 解答: 若 $\sum (a_n + a_{n+1})$ 收敛, 不能推出 $\sum a_n$ 收敛, 例如取 $a_n = (-1)^n$. 若 $\sum a_n$ 是正项级数, 则可由 $\sum a_n \leqslant \sum (a_n + a_{n+1})$ 可知 $\sum a_n$ 收敛. □

5. 解答: 只有当原级数收敛时, 加括号才不改变原级数的收敛性. 易证 S 是发散的, 因此不可以随意添括号. 对于该级数的 Cesàro 求和参见本章第二组参考题第 20 题 (1).

6. 解答: 注意到

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} S_{2n} = 0$$

故原级数收敛当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. □

7. 解答: 不能够推出 $\sum a_n$ 收敛, 例如取调和级数 $\sum a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i}$. □

8. 解答: 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛. 这是因为我们有

$$0 \leqslant c_n - a_n \leqslant b_n - a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n) < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty$$

但是如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则不能推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 也发散, 例如 $a_n = -1, b_n = 1, c_n = 0$. 这与数列的夹逼定理是不同的. □

9. 解答: 记原级数部分和为 S_n, 新级数部分和为 T_n, 注意到 $T_{2n} = S_{2n} \to S$ 与 $T_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+2} \to S$, 因此 T_n 也收敛. □

10. 解答: 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故余项 $R_n \to 0$. 如果始终存在 a_N 不为 0, 则会导出始终存在 $R_N \geqslant 1$, 矛盾. 因此从某项起 a_n 皆为 0, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是有限和. □

§13.2.5 练习题

1. 解答: 由 Stolz 定理可知

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{R_n}{R_n'}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{R_{n-1}-R_n}{R_{n-1}'-R_n'}=1.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{S_n'}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1.$ □

2. 解答: 如果正项级数收敛, 则加括号后的新级数可看作原级数的子列, 当然也收敛; 如果正项级数趋于正无穷, 则因为单调性, 可知加括号后的新级数作为原级数的子列也趋于正无穷. 下证正项级数重排后不改变敛散性:

设正项级数 $\{u_n\}$ 的第 n 个部分和为 S_n 且收敛于 S, 重排后的级数 $\{v_n\}$ 的第 m 个部分和为 σ_m. 易知对每一 $v_k(1\leqslant k\leqslant m)$, 都存在与其相等的 $u_{i_k}(1\leqslant k\leqslant m)$. 记

$$n=\max\{i_1,i_2,\cdots,i_m\}$$

则对任何 m, 都存在 n, 使 $\sigma_m\leqslant S_n$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, 所以对任何正整数 m 都有

$$\sigma_m\leqslant S$$

即知重排后的级数收敛, 且其和 $\sigma\leqslant S$. 但是另一方面,$\{u_n\}$ 也可看作是由 $\{v_n\}$ 重排得到的, 故也有 $S\leqslant\sigma$. 于是就有 $\sigma=S$. □

3. 解答:

(1) 当 n 充分大时,$3^{\sqrt{n}}>(\sqrt{n})^3$, 因此 $\dfrac{1}{3^{\sqrt{n}}}<\dfrac{1}{n^{3/2}}$, 由比较判别法知原级数收敛.

(2) 当 $n\to\infty$ 时,$\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}\sim\dfrac{1}{n}$, 知原级数发散.

(3) 当 $n\to\infty$ 时,$\dfrac{1}{n}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sim\dfrac{1}{2n^2}$, 知原级数收敛.

(4) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\varlimsup\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{2n^2+n+1}\right)^{1/2}\cdot\left[\dfrac{n}{(2n^2+n+1)^{1/2}}\right]^{-1/n}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1$, 原级数收敛.

(5) 注意到 $a_n=\exp\left[(\ln n)^2-n\ln\ln n\right]$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\varlimsup\limits_{n\to\infty}\exp\left[\dfrac{(\ln n)^2}{n}-\ln\ln n\right]=0$, 故原级数收敛.

(6) 当 $n\to\infty$ 时,$a_n=\exp\left[\ln n-\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)\right]/n^{p+1}\sim\dfrac{e^{-\gamma}}{n^{p+1}}$, 当 $p>0$ 时收敛, 当 $p\leqslant 0$ 时发散.

(7) 当 $n\to\infty$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}a^{1/n}-\frac{b^{1/n}+c^{1/n}}{2}&=1+\frac{\ln a}{n}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\ln b}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\ln c}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\\&=\ln\frac{a}{\sqrt{bc}}\cdot\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

故当且仅当 $a^2=bc$ 时原级数收敛.

(8) 当 $n\to\infty$ 时,$\left(1-\dfrac{\ln n}{n}\right)^n=\exp\left[n\ln\left(1-\dfrac{\ln n}{n}\right)\right]\sim\dfrac{1}{n}$, 故原级数发散. □

4. 解答: 特殊情况即 $a_n \equiv 0$. 排除这种情况, 记 $\{a_n\}$ 的部分和为 S_n. 则因为 $\sum \frac{1}{n}$ 发散, 故存在 $\varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{Z}^+, \exists p \in \mathbb{Z}^+$, 使得

$$\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\cdots+\frac{1}{N+p} \geqslant \varepsilon_0$$

这可以推得

$$\frac{S_{N+1}}{N+1}+\frac{S_{N+2}}{N+2}+\cdots+\frac{S_{N+p}}{N+p} \geqslant \frac{S_N}{N+1}+\frac{S_N}{N+2}+\cdots+\frac{S_N}{N+p} \geqslant S_N\varepsilon_0$$

与 Cauchy 收敛准则矛盾, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 必发散. □

5. 解答:

(1)$1-\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{2n+2}, \sum\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ 发散, 由 Sapagof 判别法知原数列收敛于 0.

(2)$1-\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right), \sum\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ 发散, 由 Sapagof 判别法知原数列收敛于 0.

注: 这里利用了 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 的 Maclaurin 公式 (例题 7.2.4).

(3)$1-\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x}{x+n+1}, \sum\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ 发散, 由 Sapagof 判别法知原数列收敛于 0. □

6. 解答: 取 $a_n=\begin{cases}\frac{1}{n}, n\text{为平方数}\\ 0, \text{其他}\end{cases}$. □

7. 解答:$\sum a_n$ 收敛可知 $\lim\limits_{m\to\infty} a_n=0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^p}{a_n}=0$, 从而 $\sum a_n^p$ 收敛.

注: 正项级数的条件不可去, 如当 $p=2$ 时可取反例 $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 又如当 $p=3$ 时裴礼文 P466 例 5.1.48 的例子.(本章第二组参考题第 13 题) □

8. 解答: 记 $c_n=a_n-a_{n+1}$, 则由 $b_n \geqslant 0$ 可知 $c_n \geqslant c_{n+1}$, 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n=a_1-a_{n+1}\to a_1$, 故 $\sum c_n$ 单调递减且收敛. 由 Cauchy 准则知, 任给 $\varepsilon>0, \exists N, \forall n>N$, 有

$$0<c_{N+1}+c_{N+2}+\cdots+c_n<\frac{\varepsilon}{2}$$

又当 $n>N$ 时, $a_{N+i}\geqslant a_n, i=1,2,\cdots,n-N$, 从而

$$0<(n-N)c_n\leqslant c_{N+1}+c_{N+2}+\cdots+c_n<\frac{\varepsilon}{2}$$

取 $n>2N$, 则 $0<\frac{n}{2}c_n\leqslant(n-N)c_n<\frac{\varepsilon}{2}$, 即 $0<nc_n<\varepsilon$. 因此 $nc_n\to 0$.

于是有

$$\sum_{k=1}^{n} kb_k=\sum_{k=1}^{n} k(c_k-c_{k+1})=\sum_{k=1}^{n} c_k-nc_{n+1}=a_1-a_{n+1}-nc_{n+1}\to a_1$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nb_n$ 收敛. □

9. 解答: 考虑

$$S_{2^n-1}=a_1+\sum_{k=1}^{2^{n-1}-1}(a_{2k+1}+a_{2k})>a_1+\sum_{k=1}^{2^{n-1}-1}a_k=a_1+S_{2^{n-1}-1}$$
$$>2a_1+S_{2^{n-2}-1}>\cdots>na_1$$

令 $n\to\infty$ 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. □

10. 解答: 注意到

$$\frac{x^n}{(1+x)\cdots(1+x^n)}=\frac{1}{(1+x)\cdots(1+x^{n-1})}-\frac{1}{(1+x)\cdots(1+x^n)}\xlongequal{def}b_{n-1}-b_n$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{(1+x)\cdots(1+x^k)}=b_1-b_n<b_1=\frac{1}{1+x}$$

故原级数收敛. □

11. 解答: 首先注意当 $n\to\infty$ 时 $2-x^{\frac{1}{n}}\to 1$, 故对任何 $x>0$, 当 n 充分大时, 去掉有限项后原级数是正项级数.

(1) 当 $x\in(0,1]$ 时, $\prod\limits_{k=1}^{n}(2-x^{\frac{1}{k}})\geqslant 1$, 通项不趋于 0, 原级数发散.

(2) 当 $x=2$ 时显然级数收敛.

(3) 当 $x\in(1,2)\cup(2,e)$ 时, 则因为

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\cdot\frac{x^{\frac{1}{n+1}}-1}{2-x^{\frac{1}{n+1}}}\to n\left[\exp\left(\frac{1}{n+1}\ln x\right)-1\right]\sim\frac{n}{n+1}\ln x\to\ln x$$

根据 Raabe 判别法, 当 $x\in(1,2)\cup(2,e)$ 时原级数发散.

(4) 当 $x\in(e,+\infty)$ 时, 由 (3) 可知原级数收敛.

(5) 当 $x=e$ 时, 则因为

$$\begin{aligned}\ln n\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]&\to\ln n\left[n\left(e^{\frac{1}{n+1}}-1\right)-\left(2-e^{\frac{1}{n+1}}\right)\right]\\&=\ln n\left[(n+1)e^{\frac{1}{n+1}}-n-2\right]\\&=\ln n\left[(n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)-n-2\right]\\&=\ln n\cdot o\left(\frac{1}{n+1}\right)\to 0\end{aligned}$$

由 Bertrand 判别法, 原级数发散.

综上, 当 $x\in(0,2)\cup(2,e)$ 时原级数发散, 当 $x\in\{2\}\cup[e,+\infty)$ 时原级数收敛. □

12. 解答:

(1) 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(a_n/a_{n+1})}{\ln(n+1)-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n/a_{n+1}-1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$$

(2) 由题意可知

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+\frac{\beta}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\Rightarrow\frac{na_n}{(n+1)a_{n+1}}=1+\frac{\beta}{(n+1)\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$$

故由 Stolz 定理可知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1/\left(na_n\right)\right)}{\ln\ln n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\dfrac{na_n}{(n+1)a_{n+1}}}{\ln[\ln(n+1)/\ln n]}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left[1+\dfrac{\beta}{(n+1)\ln n}+o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)\right]}{\ln\left[\ln(n+1)/\ln n\right]}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\beta}{(n+1)\ln n}+o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)}{\dfrac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\beta+o\left(1\right)}{(n+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}=\beta\end{aligned}$$

命题得证. □

13. 解答: 考虑 $\{a_n^{(1)}\},\{a_n^{(2)}\},\cdots,\{a_n^{(k)}\}$ 这 k 个数列, 其中 $a_n^{(m)}=a_{nk+m}$. 则由题设可知 $\forall m\in\{1,2,\cdots,k\}$, 都满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}^{(k)}}{a_n^{(k)}}=l$. 如果 $l<1$, 则由 d'Alembert 判别法知这 k 个数列都收敛. 而 $S_{6n}=\sum\limits_{i=1}^{6n}a_i=\sum\limits_{i=1}^{k}S_n^{(i)}$, 不难得知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 同理可证 $l>1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. □

14. 解答: 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛可知 R_n 单调递减趋于 0. 又有

$$\frac{a_n}{R_{n-1}}=\frac{R_{n-1}-R_n}{R_{n-1}}=1-\frac{R_n}{R_{n-1}}$$

由 Sapagof 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{R_{n-1}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{R_n}{R_{n-1}}\right)$ 发散.

若 $p\geqslant1$, 则结论平凡, 因为 n 充分大时有 $\dfrac{a_n}{R_{n-1}^{1-p}}\leqslant a_n$.

若 $p\in(0,1)$, 则由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi\in(R_n,R_{n-1})$ 使

$$R_{n-1}^p-R_n^p=(R_{n-1}-R_n)\cdot\frac{1}{p}\cdot\xi^{p-1}>\frac{R_{n-1}-R_n}{p}\cdot\frac{1}{R_{n-1}^{1-p}}=\frac{a_n}{R_{n-1}^{1-p}}\cdot\frac{1}{p}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{R_{k-1}^{1-p}}<p\sum_{k=1}^{n}\left(R_{n-1}^p-R_n^p\right)=p(R_0^p-R_n^p)<pR_0^p=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

故 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{R_{k-1}^{1-p}}$ 收敛. □

15. 解答: 由例题 8.1.10 可知 $a_n\sim\sqrt{\frac{3}{n}}$,$a_n^p\sim\frac{3^{p/2}}{n^{p/2}}$, 当且仅当 $p>2$ 时原级数收敛. □

§13.3.4 练习题

1. 解答:

(1) 当 n 充分大时 $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$, 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散. 由例题 13.3.3 即知原级数条件收敛.

(2)$\frac{2^{1/n}}{\sqrt{n}}$ 单调递减趋于 0,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 部分和有界, 由 Dirichlet 判别法知收敛. 但是 $\frac{2^{1/n}}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}$, 所以非绝对收敛.

(3) 考虑

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos^2 k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos 2k}{2k}$$

令 $n\to\infty$, 前者发散, 后者由 Dirichlet 判别法知收敛, 所以原级数非绝对收敛. 再考虑

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\cos 2k}{2k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(2k+k\pi)}{2k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(2+\pi)k}{2k}$$

因 $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos(2+\pi)k$ 有界, 由 Dirichlet 判别法知上述级数收敛, 从而易知原级数条件收敛.

(4) 当 $x=k\pi$ 时结论平凡, 假设 $x\neq k\pi(k\in\mathbb{Z})$. 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n}\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e}{n}$ 发散且容易验证其通项单调递减趋于 0, 利用例题 13.3.3 即知原级数条件收敛.

(5) 当 $x=k\pi$ 时结论平凡, 假设 $x\neq k\pi(k\in\mathbb{Z})$. 考虑 $a_n=\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, 则

$$a_n-a_{n+1}>\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{1}{n(n+1)^2}>0$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ 由 Cauchy 积分判别法知发散, 由例题 13.3.3 知原级数条件收敛.

(6) 注意到

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})=(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}-n\pi)=(-1)^n\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a}+n}\xlongequal{def}(-1)^n a_n$$

显然 $a_n\searrow 0$, 由 Leibniz 判别法原级数收敛. 又

$$a_n \sim \frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a}+n} \sim \frac{\pi a^2}{2n}$$

故 $\sum a_n$ 发散, 原级数非绝对收敛.

(7) 如果 $p \leqslant 0$, 显然原级数发散. 如果 $p>0$, 则 $\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$ 单调递减趋于 0, 由 Leibniz 判别法原级数收敛. 又由 Wallis 公式有

$$\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p \sim (n\pi)^{-p/2}$$

即知当 $p>2$ 时原级数绝对收敛, 当 $p \in (0,2]$ 时原级数条件收敛.

(8) 注意到

$$\frac{(-1)^n \sin n}{n} = \frac{\sin(n(1+\pi))}{n}$$

由例题 13.3.3 可知原级数条件收敛.

(9) 如果 $p \leqslant 0$ 通项不趋于 0, 原级数发散. 当 $p>0$ 时考虑

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} - \frac{(-1)^{n-1}}{[n+(-1)^{n+1}]^p} = (-1)^{n-1}\frac{[n+(-1)^{n-1}]^p - n^p}{n^p[n+(-1)^{n-1}]} \\ &= (-1)^{n-1}\frac{\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]^p - 1}{[n+(-1)^{n-1}]^p} = \frac{p+o(1)}{n\left[n+(-1)^{n-1}\right]^p} \sim \frac{p+o(1)}{n^{p+1}} \end{aligned}$$

即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 再由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 收敛知原级数收敛. 又 $\frac{1}{[n+(-1)^{n-1}]^p} \sim \frac{1}{n^p}$, 故当 $p \in (0,1]$ 时原级数条件收敛, 当 $p \in (1,+\infty)$ 时原级数绝对收敛.

注: 其他解法参见蒲和平 P284 例 30.

(10) 如果 $p \leqslant 0$ 通项不趋于 0, 原级数发散. 当 $p>0$ 时考虑

$$\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right] = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$$

当 $p \in (0,0.5]$ 时原级数发散, 当 $p \in (0.5,+\infty)$ 时级数收敛. 又有

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}\left|\ln\left[1+\frac{(-1)^k}{k^p}\right]\right| = \sum_{k=1}^{n}\left|\ln\left[1-\frac{1}{(2k-1)^p}\right]\right| + \sum_{k=1}^{n}\left|\ln\left[1+\frac{1}{(2k)^p}\right]\right|$$

等式右端前者等价 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^p}$, 后者等价 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^p}$, 当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^p} < +\infty$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^p} < +\infty$(即 $p>1$) 时可推得 S_{2n} 有界. 同理可知 S_{2n+1} 当且仅当 $p>1$ 时有界.

故当 $p\in(0.5,1]$ 时原级数条件收敛, 当 $p\in(1,+\infty)$ 时原级数绝对收敛. 其余情形原级数均发散.

注: 也可参见徐森林下册 P183 第 544 题 (1) 的解法.

(11) 由于

$$\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)=(-1)^n\sin\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

而 $\sin\left(\frac{1}{\ln n}\right)\searrow 0$, 由 Leibniz 判别法原级数收敛. 但 $\sin\left(\frac{1}{\ln n}\right)\sim\frac{1}{\ln n}$, 因此原级数条件收敛.

(12) 由于 $n^{1/n}-1\searrow 0$, 由 Leibniz 判别法原级数收敛. 但

$$n^{1/n}-1=\exp\left[\frac{\ln n}{n}\right]-1\sim\frac{\ln n}{n}$$

故原级数非绝对收敛. □

2. 解答: 设所得新级数的通项记为 a_n, 则 $|a_n|=\frac{1}{n}$ 单调递减趋于 0. 记新级数的部分和为 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$. 当 $p>q$ 时, 有

$$\begin{aligned}
S_{m(p+q)}=&\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}-\cdots-\frac{1}{p+q}\right)\\
&+\left(\frac{1}{p+q+1}+\cdots+\frac{1}{2p+q}-\frac{1}{2p+q+1}-\cdots-\frac{1}{2(p+q)}\right)\\
&+\cdots\\
&+\left[\frac{1}{(m-1)(p+q)+1}+\cdots+\frac{1}{mp+(m-1)q}\right.\\
&\left.-\frac{1}{mp+(m-1)q+1}-\cdots-\frac{1}{m(p+q)}\right]\\
>&\frac{1}{p}+\frac{1}{2p+q}+\cdots+\frac{1}{mp+(m-1)q}>\frac{1}{p}+\frac{1}{3p}+\cdots+\frac{1}{(2m-1)p}\\
=&\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2m-1}\right)\to+\infty\quad(m\to+\infty)
\end{aligned}$$

由于 $|a_n|\to 0(n\to+\infty)$, 故对 $0<l<p+q$, 有

$$S_{m(p+q)+l}=S_{m(p+q)}+[S_{m(p+q)+l}-S_{m(p+q)}]$$

后面括号中仅有 l 项, 当 $m\to+\infty$ 时, 极限为 0, 故此 $S_n(n=m(q+q)+l,0<l<p+q)\to+\infty(n\to+\infty)$, 新级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_k$ 发散于 $+\infty$.

当 $p<q$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
&S_{m(p+q)+p}\\
=&\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}\right)-\left[\left(\frac{1}{p+1}+\cdots+\frac{1}{p+q}\right)-\left(\frac{1}{p+q+1}+\cdots+\frac{1}{2p+q}\right)\right]\\
&-\left[\left(\frac{1}{2p+q+1}+\cdots+\frac{1}{2p+2q}\right)-\left(\frac{1}{2p+2q+1}+\cdots+\frac{1}{3p+2q}\right)\right]\\
&-\cdots\\
&-\left\{\left[\frac{1}{mp+(m-1)q+1}+\cdots+\frac{1}{mp+mq}\right]-\left[\frac{1}{mp+mq+1}+\cdots+\frac{1}{(m+1)p+mq}\right]\right\}\\
<&S_p-\frac{1}{p+q}-\frac{1}{2(p+q)}-\cdots-\frac{1}{m(p+q)}\\
=&S_p-\frac{1}{p+q}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\longrightarrow-\infty(m\to+\infty)
\end{aligned}
$$

由于 $|a_n|\to 0(n\to+\infty)$, 故对 $0<l<p+q$ 有

$$S_{m(p+q)+p+l}=S_{m(p+q)+p}+[S_{m(p+q)+p+t}-S_{m(p+q)+p}]$$

后面括号中仅有 l 项, 当 $m\to+\infty$ 时, 极限为 0, 故此 $S_n(n=(p+q)+p+l,0<l<p+q)\to-\infty(n\to+\infty)$, 新级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 发散于 $-\infty$.

当 $p=q$ 时, 级数变为

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}\right)-\left(\frac{1}{p+1}+\cdots+\frac{1}{2p}\right)+\left(\frac{1}{2p+1}+\cdots+\frac{1}{3p}\right)\cdots\cdots\\
=&\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left[\frac{1}{(k-1)p+1}+\cdots+\frac{1}{kp}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}A_k
\end{aligned}
$$

它为交错级数, 且

$$
\begin{aligned}
&A_k=\frac{1}{(k-1)p+1}+\cdots+\frac{1}{kp}>\frac{1}{kp+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)p}=A_{k+1}\\
&0<A_k<\frac{p}{(k-1)p+1}\longrightarrow 0\quad(k\to+\infty)
\end{aligned}
$$

根据 Leibniz 判别法, 此时级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}\right)-\left(\frac{1}{p+1}+\cdots+\frac{1}{2p}\right)+\left(\frac{1}{2p+1}+\cdots+\frac{1}{3p}\right)-\cdots$$

收敛. 由命题 13.3.2 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

注: 其他证明方法参见徐森林下册 P188 第 547 题. □

3. 解答: 先证明一个引理 (徐森林第三册引理 12.3.3): 设 $a \in \mathbb{N}$, 当 $x \geqslant a$ 时函数 f 非负单调减, 则极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=a}^{n} f(k)-\int_a^n f(x)\mathrm{d}x\right)=\alpha$$

存在, 且 $0 \leqslant \alpha \leqslant f(a)$. 更进一步, 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, 则

$$\left|\sum_{k=a}^{[\xi]} f(k)-\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x-\alpha\right| \leqslant f(\xi-1)$$

其中 $\xi \geqslant a+1$.

证: 令

$$\sum_{k=a}^{[\xi]} f(k)-\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x$$

这里 $a \in \mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned} g(n)-g(n+1) &= -f(n+1)+\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \\ &\geqslant -f(n+1)+f(n+1)=0 \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} g(n) &= \sum_{k=a}^{n-1}\left(f(k)-\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x\right)+f(n) \\ &\geqslant \sum_{k=a}^{n-1}(f(k)-f(k))+f(n)=f(n)\geqslant 0 \end{aligned}$$

这说明 $\{g(n)\}$ 是一个非负单调减的数列且有下界 0. 因此,

$$\alpha=\lim_{n\to+\infty} g(n)=\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=a}^{n} f(k)-\int_a^n f(x)\mathrm{d}x\right]$$

存在且有限. 由于 $0 \leqslant g(n) \leqslant g(a)=f(a)$, 故 $0 \leqslant \alpha \leqslant f(a)$.

如果进一步假定 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, 则

$$\begin{aligned} g(\xi)-\alpha &= \sum_{k=a}^{[\xi]} f(k)-\int_a^k f(x)\mathrm{d}x-\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=a}^{n} f(k)-\int_a^n f(x)\mathrm{d}x\right] \\ &= \sum_{k=a}^{[\xi]} f(k)-\int_a^{[\varepsilon]} f(x)\mathrm{d}x-\int_{[\xi]}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x-\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=a}^{n} f(k)-\int_a^n f(x)\mathrm{d}x\right] \\ &= -\int_{[\xi]}^{k} f(x)\mathrm{d}x-\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=[\vec{\xi}]+1}^{n} f(k)-\int_{[\xi]}^{n} f(x)\mathrm{d}x\right) \\ &= -\int_{[\xi]}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=[\xi]+1}^{n}\int_{k-1}^{k}[f(x)-f(k)]\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\leqslant \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=[\xi]+1}^{n}\int_{k-1}^{k}[f(k-1)-f(k)]\mathrm{d}x=f([\xi])\leqslant f(\xi-1)$$

类似地, 有

$$\begin{aligned}g(\xi)-\alpha&=-\int_{[\xi]}^{k}f(x)\mathrm{d}x+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=[\xi]+1}^{n}\int_{k-1}^{k}[f(x)-f(k)]\mathrm{d}x\\&\geqslant-\int_{[\xi]}^{k}f(x)\mathrm{d}x\geqslant-(\xi-[\xi])f([\xi])\geqslant-f([\xi])\geqslant-f(\xi-1)\end{aligned}$$

于是

$$\left|\sum_{k=a}^{[\xi]}f(k)-\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x-\alpha\right|=|g(\xi)-\alpha|\leqslant f(\xi-1)$$

引理证毕. 往证本题, 令 $f(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ 单调递减趋于 0, 于是利用引理有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}-\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}-A\right|\leqslant f(n-1)=\frac{1}{(n-1)^{\alpha}}$$

其中, $A=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^{\alpha}}-\displaystyle\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}\right)$ 为常数. 而

$$\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}=\frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$$

故有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}-\frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}-A\right|\leqslant\frac{1}{(n-1)^{\alpha}}$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}=\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}+A-\frac{1}{1-\alpha}+o\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$$

记 $A-\dfrac{1}{1-\alpha}=\beta$ 就得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}=\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\beta+o\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$$

再将重排后的新级数记为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_n$, 对 $\forall N\in\mathbb{N}$, 令 $m=\left[\dfrac{N}{p+q}\right]$, 则当 $N\to+\infty$ 时, $m\to+\infty$, 且有

$$m(p+q)\leqslant N<(m+1)(p+q)$$

$$S_N=\sum_{k=1}^{N}a_k=\sum_{k=1}^{m(p+q)}a_k+\sum_{k=m(p+q)+1}^{N}a_k$$

由于 $N-m(p+q)<p+q$, 故以上第 2 个和式中项数至多有 $p+q-1$ 项, 从而得

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=m(p+q)+1}^{N} a_k\right| &\leqslant \sum_{k=m(p+q)+1}^{N}|a_k| \leqslant (p+q)\frac{1}{[m(p+q)^{\alpha}]}\\ &=\frac{(p+q)^{1-\alpha}}{m^{\alpha}} \rightarrow 0(N\rightarrow+\infty, m\rightarrow+\infty)\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n &= \lim_{N\rightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{N} a_k = \lim_{N\rightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{m(p+q)} a_k\\ &=\lim_{n\rightarrow+\infty}\left(\sum_{k=1}^{mp}\frac{1}{(2k-1)^{\alpha}}-\sum_{k=1}^{mq}\frac{1}{(2k)^{\alpha}}\right)\\ &=\lim_{n\rightarrow+\infty}\left(\sum_{k=1}^{2mp}\frac{1}{k^{\alpha}}-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(2k)^{\alpha}}-\frac{1}{2^{\alpha}}\sum_{k=1}^{mq}\frac{1}{k^{\alpha}}\right)\\ &=\lim_{n\rightarrow+\infty}\left(\sum_{k=1}^{2mp}\frac{1}{k^{\alpha}}-\frac{1}{2^{\alpha}}\sum_{k=1}^{mp}\frac{1}{k^{a}}-\frac{1}{2^{\alpha}}\sum_{k=1}^{mq}\frac{1}{k^{\alpha}}\right)\\ &=\lim_{n\rightarrow+\infty}\left\{\frac{(2p)^{1-\alpha}\cdot m^{1-\alpha}}{1-a}+\beta+o\left(\frac{1}{(2mp)^{\alpha}}\right)-\frac{1}{2^{\alpha}}\frac{p^{1-\alpha}m^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{\beta}{2^{\alpha}}-o\left(\frac{1}{(mp)^{\alpha}}\right)\right.\\ &\quad\left.-\frac{1}{2^{\alpha}}\frac{q^{1-\alpha}m^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{\beta}{2^{\alpha}}-o\left(\frac{1}{(mq)^{\alpha}}\right)\right\}\\ &=\lim_{m\rightarrow+\infty}\left\{\frac{2(pm)^{1-\alpha}-(pm)^{1-\alpha}-(qm)^{1-\alpha}}{2^{\alpha}(1-\alpha)}+\beta\left(1-2^{1-\alpha}\cdot\right)+o\left(\frac{1}{m^{\alpha}}\right)\right\}\\ &=\lim_{m\rightarrow+\infty}\left[\frac{\left(p^{1-\alpha}-q^{1-\alpha}\right)m^{1-\alpha}}{2^{\alpha}(1-\alpha)}+\beta\left(1-2^{1-\alpha}\right)+o\left(\frac{1}{m^{\alpha}}\right)\right]\\ &=\begin{cases}\beta(1-2^{1-\alpha}), p=q\\ +\infty, p>q\\ -\infty, p<q\end{cases}\end{aligned}$$

即重排后的级数当且仅当 $p=q$ 时收敛. □

4. 解答:

(1) 记原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{+}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^{p}}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^{q}}$$

当 $p>1, q>1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{+}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{-}$ 都收敛, 由命题 13.3.3 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

当 $p>1, q>1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{+}$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{-}$ 发散, 由命题 13.3.3 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 同理, 当

$p \leqslant 1, q > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

当 $0 < p = q \leqslant 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为交错级数, 且 $\{|a_n|\}$ 单调递减趋于 0, 故级数收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散, 此时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛.

当 $0 < p \neq q \leqslant 1$ 时, 将原级数写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^q}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n)^p} - \frac{1}{(2n)^q}\right]$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 收敛. 当 $p \leqslant q$ 时, 由

$$\frac{1}{(2n)^p} - \frac{1}{(2n)^q} = \frac{(2n)^{q-p} - 1}{(2n)^q} \geqslant \frac{2^{q-p} - 1}{2^q} \cdot \frac{1}{n^q}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ 发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n)^p} - \frac{1}{(2n)^q}\right]$ 发散. 同理, 当 $p > q$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n)^p} - \frac{1}{(2n)^q}\right]$ 也发散. 所以此时原级数发散.

当 p, q 中有一个不大于 0 时, 由于 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, 故级数发散.

综上所述, 当 $p > 1, q > 1$ 时, 级数绝对收敛; 当 $0 < p = q \leqslant 1$ 时, 级数条件收敛. 其余情形级数发散.

注: 也可使用 Taylor 展开, 证明更为简洁, 参见周民强第二册 P248 例 3.3.20(2).

(2) 类似例题 13.3.2 可知

$$\begin{aligned}
(-1)^n \frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n! n^q} &= (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{(k+p)}{k n^q} = (-1)^n \exp\left[\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{p}{k}\right)\right] \cdot \frac{1}{n^q} \\
&= (-1)^n \frac{\exp\left[p \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]}{n^q} \\
&= (-1)^n \frac{\exp\left[C + p \ln n + o(1)\right]}{n^q} = (-1)^n \frac{e^{C+o(1)}}{n^{q-p}}
\end{aligned}$$

当 $q > p + 1$ 时级数绝对收敛. 当 $p < q \leqslant p + 1$ 时条件收敛, 其余情形发散. □

5. 解答: 分以下几种情形讨论:

(1) 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, n 充分大后有 $0 < \frac{1}{1+nx^n} < \frac{1}{n^2}$, 原级数绝对收敛.

(2) 当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n}$ 发散.

(3) 当 $x \in (-1, 1)$ 时, $\frac{1}{1+nx^n} \to 1$, 原级数发散.

(4) 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $\frac{1}{1+nx^n} = (-1)^n \frac{1}{(-1)^n + n(-x)^n}$. 当 n 充分大后 $\frac{1}{(-1)^n + n(-x)^n}$

单调递减趋于 0, 故由 Leibniz 判别法原级数收敛. 又因为

$$\frac{1}{(-1)^n+n(-x)^n}\sim\frac{1}{n(-x)^n}<\frac{1}{n^2}$$

故原级数绝对收敛.

(5) 当 $x=-1$ 时, 类似上一种情况可知原级数条件收敛. □

6. 解答: 只需要证明

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}>\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1}$$

这等价于

$$a_1+a_2+\cdots+a_n-n(a_{n+1})>0$$

结合 a_n 单调递减的条件这是显然的. 由 Leibniz 判别法即原级数收敛. □

7. 解答: 只需要证明

$$\frac{1}{2k-1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)>\frac{1}{2k+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k+1}\right)$$

变形得知这等价于证明

$$2(k+1)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+1>2k$$

这是显然的. 由 Leibniz 判别法即原级数收敛. □

8. 解答: 记 $B_n=b_1+\cdots+b_n$, 则有

$$\sum_{k=1}^{n}a_nb_n=\sum_{k=1}^{n-1}B_k(a_k-a_{k+1})+B_na_n \tag{1}$$

因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛 (设收敛于 b), 必然 B_n 有界, 设 $|B_n|\leqslant M$. 则由题设有

$$\sum|B_n(a_n-a_{n+1})|\leqslant M\sum|a_n-a_{n+1}|<+\infty$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n(a_n-a_{n+1})$ 收敛, 设它的极限为 a. 另一方面, 设 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n-1})=c$, 则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=c+a_1$$

于是由 (1) 式知

$$\sum_{n}^{\infty}a_nb_n=a+b(c+a_1)$$

命题得证. □

9. 解答: 记 $B_n = b_1 + \cdots + b_n$, 则有

$$\sum_{k=1}^{n} a_n b_n = \sum_{k=1}^{n-1} B_k(a_k - a_{k+1}) + B_n a_n \tag{1}$$

与上一题类似可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n(a_n - a_{n+1})$ 收敛, 且由题设可知 $B_n a_n \to 0$. 在 (1) 式两边令 $n \to \infty$ 即知命题成立. □

10. 解答: 令 $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_n$ 则 $a_n = \left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)b_n$. 由 $\left\{1-\dfrac{1}{n+1}\right\}$ 单调有界, 若 $\sum b_n$ 收敛, 则由 Abel 判别法 $\sum a_n$ 收敛, 矛盾. □

11. 解答: 易见 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ 绝对收敛, 故

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(q^0q^n + q^1q^{n-1} + \cdots + q^nq^0) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n$$

命题得证. □

12. 解答: 该级数与自身的 Cauchy 乘积为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xlongequal{def} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i+j=n}\frac{(-1)^i}{i+1}\cdot\frac{(-1)^j}{j+1}\right)$$

而

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i+j=n}\frac{(-1)^i}{i+1}\cdot\frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{i+j=n}\frac{(-1)^n}{(i+1)(j+1)} \\ &= \frac{(-1)^n}{n+2}\sum_{i+j=n}\left(\frac{1}{i+1}+\frac{1}{j+1}\right) = \frac{(-1)^n}{n+2}\cdot\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i} \xlongequal{def} \frac{2(-1)^n}{n+2}S_n \end{aligned}$$

容易验证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n+2} \xlongequal{\text{stolz}} 0, \qquad \frac{S_n}{n+2} > \frac{S_{n+1}}{n+3}$$

由 Leibniz 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. □

13. 解答: 设 $S(x)C(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i+j=n}\frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}\cdot\frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!} \\ &= \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+2)!}\sum_{i+j=n}\frac{(2n+2)!}{(2n+1)!(2j+1)!} \\ &= \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+2)!}\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_{2n+2}^{2i+1} = \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot 2^{2n+1} = \frac{1}{2}\frac{(-1)^n(2x)^{2n+1}}{(2n+2)!} \end{aligned}$$

即 $S(x)C(x)=\dfrac{1}{2}S(2x)$ 成立. □

14. 解答: 注意到

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_n+b_n}&=\frac{a_n}{b_n}\left(\frac{1}{1+a_n/b_n}\right)=\frac{a_n}{b_n}\left(1-\frac{a_n}{b_n}\right)\frac{1}{1-(a_n/b_n)^2}\\&=\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_n^2}{b_n^2}\right)\left(1+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{2k}\right)\end{aligned}$$

故 $\sum\dfrac{a_n}{a_n+b_n}$ 收敛. □

15. 解答: 设这两个级数为 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$, 它们 Cauchy 乘积的通项

$$c_{n+1}=\sum_{i+j=n+1}a_ib_j>0$$

$$\begin{aligned}c_{n+1}&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^n}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\\&\quad+\cdots+\left(2+\frac{1}{2^2}\right)\left(-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right)+\left(-\left(\frac{3}{2}\right)^{n}\right)\\&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}-2^{n-1}-\frac{1}{2^n}-\cdots-2-\frac{1}{2^2}-1\right)\\&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^n}\right)<\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

故 $\sum c_n$ 收敛.

注: 事实上还可算出 $\sum c_n$ 的值, 参见徐森林下册 P198 第 555 题. □

16. 解答:

(1) 如 $a_n=1,b_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}$, 则 $c_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}=2-\dfrac{1}{2^{n-1}}$,$\sum c_n$ 发散. 而取 $a_n=0$, $b_n=1$, 则 $c_n=0$,$\sum c_n$ 收敛.

(2) 假设正项级数 $\sum a_n$ 发散,$\sum b_n$ 收敛, 它们的乘积为 $\sum c_n=\sum\limits_{i+j=n}a_ib_j\geqslant b_1\sum a_n\to+\infty$, 故 $\sum c_n$ 发散.

注: 也可参看周民强第二册 P270 例 3.4.5(1). □

§13.4.3 练习题

1. 解答:

(1)$P_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{k+1}{k+2}}=\sqrt{\dfrac{2}{n+2}}\to 0(n\to\infty)$, 故无穷乘积发散.

(2) 当 $x=-1$ 时不符合无穷乘积的定义; 当 $|x|>1$ 或 $x=1$ 时显然发散; 当 $|x|<1$ 时利用命题 13.4.1 的第 2 第 3 条性质,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{2n+1}$ 收敛, 故无穷乘积收敛.

(3) 我们有

$$\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}=\prod_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-1\right)\right]$$

而

$$e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-1\sim\frac{1}{n^2}(n\to\infty)$$

故由命题 13.4.1 的第 2 条性质, 无穷乘积收敛.

(4) 因

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p=\exp\left[p\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{p+1}{n^2+p}\right)\right]\sim\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-p(p+1)}{n^2+p}\right]$$

无穷乘积收敛.

(5) 设 $a_n=1+(-1)^n\dfrac{1}{n}, n\geqslant 2$, 则

$$a_{2n}a_{2n+1}=\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1$$

于是 $P_{2n+1}=a_2\cdots a_{2n+1}=1, P_{2n}=P_{2n-1}a_{2n}\to 1$, 无穷级数收敛.

(6) 由命题 13.4.1 的第 2 条性质, 只需要考察 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{e}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-1\right]$ 的敛散性.

利用 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 的 Maclaurin 公式 (例题 7.2.4), 可得

$$\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-1=-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

于是无穷乘积发散. □

2. 解答: 考虑

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a+n}{b+n}=\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{a-b}{b+n}\right)\right]\sim\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a-b}{b+n}\right]$$

当 $a=b$ 时值为 1; 当 $a>b$ 时值为 $+\infty$; 当 $a<b$ 时值为 0. □

3. 解答: 考虑

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos a_n=\exp\left[\ln\prod_{n=1}^{\infty}\cos a_n\right]=\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-a_n^2/2+o\left(a_n^2\right)\right)\right]\sim\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\right]$$

结论显然. □

4. 解答: 由题意知 $a_n>0$. 因为

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=r>0$$

所以当 n 充分大时,

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>\frac{r}{2}>0,\quad \text{即}\,\frac{a_n}{a_{n+1}}>1+\frac{r}{2n}>1$$

故 $\{a_n\}$ 单调递减. 再取 $0<\sigma<\frac{r}{2}$, 因为

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sigma}-1\right]=\sigma<\frac{r}{2}$$

所以 $\exists N\in\mathbb{N},\forall n>N$, 有

$$n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sigma}-1\right]<\frac{\lambda}{2}\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sigma}<1+\frac{\lambda}{2n}<\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

即当 $n>N$ 时,

$$n^{\sigma}a_n>(n+1)^{\sigma}a_{n+1}>0$$

数列 $\{n^{\sigma}a_n\}$ 单调递减有下界, 因而收敛, 亦有界. 记 $0<n^{\sigma}a_n\leqslant M$, 则

$$0\leqslant a_n\leqslant\frac{M}{n^{\sigma}}\to 0(n\to\infty)$$

这说明 $a_n\to 0(n\to\infty)$. 由 Leibniz 判别法 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛. □

5. 解答: 考虑

$$\begin{aligned}\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}&=\frac{1}{1+\gamma/n}\cdot\frac{1}{1+1/n}\cdot\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)\\&=\left(1-\frac{\gamma}{n}+o\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right)\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)\\&=1+\frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

于是 $\prod\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}$ 的敛散性与 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{n}$ 相同.(命题 13.4.1 性质 2)
当 $\alpha+\beta-\gamma=1$ 时, 无穷乘积收敛, 否则发散.
注: 本问题的出题背景来源于超几何级数, 参见菲赫金哥尔茨《微积分学教程》第二卷 P299(8). □

6. 解答: 考虑

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots=\frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\cdots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots}$$

上式等号右端约分后即得结论. □

7. 解答: 设此 x 值为 x_0. 对任意 $x\neq x_0$, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(x^2-1\right)\left(x^2-2^2\right)\cdots\left(x^2-n^2\right)\\=&\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(x_0^2-1\right)\left(x_0^2-2^2\right)\cdots\left(x_0^2-n^2\right)\cdot\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2-2^2\right)\cdots\left(x^2-n^2\right)}{\left(x_0^2-1\right)\left(x_0^2-2^2\right)\cdots\left(x_0^2-n^2\right)}\xlongequal{def}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n\end{aligned}$$

已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛, 而

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}=\frac{x-(n+1)^2}{x_0-(n+1)^2}$$

当 $x<x_0$ 时 $\beta_{n+1}>\beta_n$,$\{\beta_n\}$ 单调增, 当 $x>x_0$ 时 $\beta_{n+1}<\beta_n$,$\{\beta_n\}$ 单调减.
β_n 是无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2-n^2}{x_0^2-n^2}$ 的部分积, 若该无穷乘积收敛, 则 $\{\beta_n\}$ 有界. 而

$$p_n=\frac{x^2-n^2}{x_0^2-n^2}=1+\frac{x_0^2-x^2}{n^2-x_0^2}$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_0^2-x^2}{n^2-x_0^2}$ 收敛, 由此推得 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2-n^2}{x_0^2-n^2}$ 收敛,$\{\beta_n\}$ 有界. 根据 Abel 判别法,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n$ 收敛, 即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\left(x^2-1\right)\left(x^2-2^2\right)\cdots\left(x^2-n^2\right)$ 对任何 x 值都收敛. □

8. 解答: 由于当 n 充分大后级数通项不再变号, 不妨设级数通项始终为正. 考虑

$$\frac{n!a_n}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\frac{a_n}{n^x}\cdot\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\xlongequal{def}\frac{a_n}{n^x}\cdot b_n$$

我们只需要证明 $\{b_n\}$ 单调有界, 就可以由 Abel 判别法推出两级数对相同 x 收敛.
由

$$\begin{aligned}\frac{b_{n+1}}{b_n}&=\frac{(n+1)\cdot\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^x}{x+n+1}=\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{x+1}}{1+\dfrac{x+1}{n}}\\&=\left[1+\frac{x+1}{n}+\frac{(x+1)x}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\left[1-\frac{x+1}{n}+\frac{(x+1)^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\&=1+\frac{(x+1)x}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

可知对固定的 x,$\{b_n\}$ 单调.

另一方面, 由 Euler-Gauss 公式 (13.38) 知 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \Gamma(x)$, 因而有界. 由此命题得证. □

9. 解答: 设 $c_n = \dfrac{n}{n+1}O(b_n)$, 即 $\exists M, s.t.$

$$|c_n|\frac{n+1}{n} \leqslant M|b_n|$$

于是

$$|c_n| \leqslant \frac{n}{n+1}M|b_n| < M|b_n|$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛推得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_n|$ 收敛, 从而 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+|c_n|)$ 收敛, 于是由命题 13.4.1 第 5 条性质可知 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+c_n)$ 收敛. 令 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+c_n) = c \neq 0$, 就有

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{n+1}{n} + O\left(b_n\right) = \frac{n+1}{n}\left(1 + \frac{n}{n+1}O\left(b_n\right)\right) = \frac{n+1}{n}\left(1+c_n\right) \\
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{1+c_n} \\
\frac{a_{n+1}}{a_1} &= \frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdots\frac{a_2}{a_1} = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+c_n}\cdot\frac{1}{1+c_{n-1}}\cdots\frac{1}{1+c_1} \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+c_k\right)}
\end{aligned}$$

于是有

$$\frac{a_{n+1}}{\dfrac{1}{n+1}} = \frac{a_1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+c_k\right)} \longrightarrow \frac{a_1}{c} \quad (n\to+\infty)$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散, 由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. □

10. 解答: 令 $a_n = \dfrac{n!}{n\sqrt{n}}\left(\dfrac{e}{n}\right)^n$, 则

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = (n+1)\cdot\frac{en^n}{(n+1)^{n+1}}\cdot\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{e}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}\sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

$$\ln b_n = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

故 $\sum\ln b_n$ 收敛, 于是 $a_n = a_1\prod\limits_{n=1}^{n}b_n$ 亦收敛. □

§13.5.2 参考题

第一组参考题

1. 解答:

证法一: 注意到

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{n}\frac{a_i}{(1+a_1)\cdots(1+a_i)}&=\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{i-1})}-\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_i)}\right]\\
&=\frac{1}{1+a_1}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}
\end{aligned}
$$

令 $n\to+\infty,\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 或者为有限数或者为 $+\infty$, 故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}$ 收敛, 其通项极限自然为 0.

证法二: 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 则 $\varphi(n)=\frac{a_n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}\leqslant a_n\to 0(n\to\infty)$.

若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n=M>0$.

(i)M 有限, 则 $\exists\{a_{k_n}\}\subset\{a_n\}$ 使得 $\exists N>0,\forall n\geqslant N_1,a_{k_n}\geqslant\frac{M}{2}$. 当 $n\to\infty$ 时, 满足 $1\leqslant k_n\leqslant n$ 的 k_n 的个数 k 是无穷多的. 即

$$\varphi(n)\leqslant\frac{a_n}{1+a_n}\cdot\left(1+\frac{M}{2}\right)^{-k}\to 0(n\to\infty)$$

(ii)$M=+\infty$, 取 $\{a_n\}$ 的递增无界子列 $\{a_{p_m}\}$, 则对某一 p_r, 有 $a_{p_m}\geqslant a_{p_r}$. 当 $n\to\infty$ 时, 有 k 个 p_m 介于 p_r 与 $n-1$ 间, 即 $k\to\infty$. 故

$$\varphi(n)\leqslant\frac{a_n}{1+a_n}\cdot(1+a_{p_r})^{-k}\to 0(n\to\infty)$$

综上所述,$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)=0$. □

2. 解答: 在练习题 13.2.5 第 8 题中已作解答. □

3. 解答: 易知 $\left\{\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right\}$ 也单调递减趋于 0, 由上题结论可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n=0$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{a_n/\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n=0$$

由此可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛. □

4. 解答: 令 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k+1})$, 由 Abel 变换可知

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-na_{n+1}$$

利用第 2 题的结论, 上式两边令 $n \to \infty$, 命题得证.

注: 若缺少通项单调递减的条件, 可举反例 $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, n = k^2 \\ 0, n \neq k^2 \end{cases} (k \in \mathbb{N})$. □

5. 解答:

(1)$a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{n+1} + \ln \dfrac{n}{n+1} \sim -\dfrac{1}{2(n+1)^2}$, $\{a_n\}$ 收敛.

(2)$a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) \sim \dfrac{1}{4n^{3/2}}$, $\{a_n\}$ 收敛.

(3)$a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)} + \ln\left[\dfrac{\ln n}{\ln(n+1)}\right] \sim -\dfrac{1}{2(n+1)^2 \ln(n+1)}$. $\{a_n\}$ 收敛. □

6. 解答:

(1) 参见第十一章第一组参考题第 10 题.($0 \leqslant A \leqslant f(1)$ 是因为单调性)

(2) 取 $f(y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, 则 $f(1) = \dfrac{x}{x^2+1} \to 0(x \to +\infty)$. 于是由 $0 \leqslant A \leqslant f(1)$ 可知 $A = 0$. 再计算

$$\int_1^n f(y)\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} \to \frac{\pi}{2}(x \to +\infty)$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+n^2} = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \lim_{x\to+\infty} \left(\int_1^{+\infty} f(y)\mathrm{d}y + A\right) = \frac{\pi}{2}$$

命题得证. □

7. 解答:

必要性: 假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则 $a_n \to 0(n \to \infty)$. 注意到 $x = 0$ 处的连续性, 可知

$$0 = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0)$$

为证 $f'(0) = 0$, 假定 $f'(0) = a \neq 0$, 则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{1/n} = \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| = |f'(0)| = |a| \neq 0$$

这说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 矛盾.

充分性: 考虑 a_n 的 Taylor 展开式

$$a_n = f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) + f'(0)\frac{1}{n} + \frac{f''(0)}{2!}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{f''(0)}{2!}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \to \infty)$$

即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. □

8. 解答:

(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(n+1)-f(n)]=\lim\limits_{n\to\infty}[f(n+1)-f(1)]=f(+\infty)-f(1)=A-f(1)$.

(2) 由 $f''(x)<0$ 知 $f'(x)$ 递减. 而 $f(x)$ 递增, 故 $f'(x)>0$. 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f'(n)$ 与 $\int_1^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x$ 同敛散. 而

$$\int_1^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x=\lim_{M\to+\infty}\int_1^M f'(x)\mathrm{d}x=[f(+\infty)-f(1)]=A-f(1)$$

命题得证.

注: 其他解法参见周民强第二册 P180 例 3.2.3(1). □

9. 解答: 第一个等号显然, 主要证第二个等号. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=A$, 则显然有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,k}\leqslant A$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n,k}$ 收敛. 其次, 对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 N_0 使得

$$\left|A-\sum_{n=1}^{N_0}a_n\right|=\left|\sum_{n=N_0+1}^{\infty}a_n\right|<\varepsilon$$

若 n 与 m 充分大, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的项 $a_1,a_2,\cdots,a_{N_0}$ 都处于矩阵 (将 a_n 按矩阵任意排列) 的前 n 行与前 m 列之中. 则取充分大的 n_0 与 m_0, 使得当 $n>n_0,m>m_0$ 时

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{n=1}^{m}a_{n,k}-\sum_{n=1}^{N_0}a_n$$

是号码大于 N_0 的那些项的和. 令 $m\to\infty$ 可得

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,k}-\sum_{n=1}^{N_0}a_n\right|\leqslant\varepsilon$$

这样就有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,k}-A\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,k}-\sum_{n=1}^{N_0}a_n+\sum_{n=1}^{N_0}a_n-A\right|<2\varepsilon$$

由 ε 的任意性命题得证. □

10. 解答: 由上题的结论可知

$$\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^m}=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{n^m}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=1$$

命题得证. □

11. 解答: 设 $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_n)\leqslant M$, 则当 $n<m$ 时有

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_m)\leqslant\sum_{k=1}^{m}(a_k-a_m)\leqslant M$$

令 $m\to\infty$, 有

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_m)\leqslant M$$

即 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 有界, 因而收敛. □

12. 解答: 由题设知 $\{a_n-a_{n+1}\}\searrow 0$, 故 $a_n\geqslant a_{n+1}$, 即 $a_n\searrow 0$. 注意到

$$\begin{aligned}0\leqslant\frac{a_na_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}\leqslant\frac{a_n^2}{a_n-a_{n+1}}&=\frac{1}{a_n-a_{n+1}}\sum_{k=n}^{\infty}\left(a_k^2-a_{k+1}^2\right)\\&\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\frac{a_k^2-a_{k+1}^2}{a_k-a_{k+1}}=\sum_{k=n}^{\infty}(a_k+a_{k+1})\to 0(n\to\infty)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_na_{n+1}}\to+\infty$$

命题得证. □

13. 解答: 易证 $na_n\searrow 0$, 否则 $na_n\geqslant a_1\Rightarrow a_n\geqslant\dfrac{a_1}{n}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 矛盾.

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 依 Cauchy 准则, 对 $\forall\varepsilon>0$, 当 n 充分大时有

$$\varepsilon>\sum_{k=[\sqrt{n}]}^{n}ka_k\cdot\frac{1}{k}\geqslant na_n\sum_{k=[\sqrt{n}]}^{n}\frac{1}{k}\geqslant na_n\int_{\sqrt{n}}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{1}{2}na_n\ln n$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n\ln n=0$.

注: (1) 其他解法参见周民强第二册 P182 例 3.2.7(1).

(2) 可将本题与练习题 12.4.2 第 4 题进行对比. □

14. 解答: 用数学归纳法易证 $\dfrac{a_{n+1}^{-1}}{a_n^{-1}}=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant\dfrac{2}{3}<1$(徐森林下册 P217 第 578 题), 由 D'Alembert 判别法知级数收敛.

事实上, 由熟知的 Fibnonacci 数列通项公式

$$a_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

可求得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

注: Fibnonacci 数列前后项比的极限为黄金比例, 在股市中具有应用价值. 与 Fibnonacci 数列对应的还有 Pell 数列, 其递推公式为

$$a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n, a_1=0, a_1=1$$

可求得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$(白银比例), 因此 Pell 数列的倒数构成的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 也收敛. □

15. 解答: 由题设有

$$a_{n+1}+a_{n+1}a_n^p=a_n$$

故 $a_n>a_{n+1}$ 且有

$$a_{n+1}=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n^p}<\int_{a_{n+1}}^{a_n}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}a_{k+1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k+1}}^{a_k}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\lim_{n\to\infty}\int_{a_{n+1}}^{a_1}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\int_0^{a_1}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}<+\infty$$

即 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_n$ 收敛. □

16. 解答: 由基本不等式得

$$0\leqslant\frac{\sqrt{a_n}}{n^p}\leqslant\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{n^{2p}}\right)$$

而由题设知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2p}}$ 均收敛. 由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{a_n}}{n^p}$ 收敛.

注: 当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时, 可以取反例 $a_n=\dfrac{1}{n\ln^2 n}$. □

17. 解答:

(1) 在例题 2.2.7 中已经证明 $\{\sin n\}$ 发散, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n$ 发散.

(2) 关键需要证明 $\{\sin n^2\}$ 发散 (或者不趋于 0), 在此先给出一个引理 (第三章第二组参考题第 9 题引理的加强), 再给出本题的六种证明.

(主要想借助本题来讨论稠密性, 读者觉得繁琐想直接知道本题答案可跳到证法五)

引理: 若 a,b不可公度, 则集合 $S=\{ma+nb|m,n\in\mathbb{Z}\}$, 在实数轴上稠密.(不可公度的意义是不存在实数 c 使得 a/c 与 b/c 都是整数)

证: 不失一般性, 假定 $a>b$. 设定整系数的辗转相除如下:

$$
\begin{aligned}
&a=[a/b]b+r_1=q_1b+r_1\\
&b=[b/r_1]\,r_1+r_2=q_2r_1+r_2\\
&r_1=[r_1/r_2]\,r_2+r_3=q_3r_2+r_3\\
&\cdots\cdots\\
&r_{j-2}=[r_{j-2}/r_{j-1}]\,r_{j-1}+r_j=q_jr_{j-1}+r_j\\
&\Rightarrow r_j=ma+nb\in S,\quad \text{这里} m,n\in\mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

首先, 这个序列是无穷尽的, 因为如果 $r_j=0$ 终止的话, 就可以得到 a,b 均是 r_{j-1} 的整数倍从而可公度. 其次,$r_1>r_2>\cdots>r_j$. 因此, 若 $r_{j-1}<r_{j-2}/2$, 则 $r_j<r_{j-1}<r_{j-2}/2$; 若 $r_{j-1}>r_{j-2}/2$, 则 $r_j=r_{j-2}-r_{j-1}<r_{j-2}/2$. 总之 $r_j<r_{j-2}/2$. 从而 r 序列收敛到零. 对任何 $x\in\mathbb{R}$,$(x-r_j,x+r_j)$ 内都至少存在一个数 $kr_j=kma+knb\in S$, 由于 $r_j\to 0$, 集合 S 在实轴上稠密. 引理证毕.

推论 (i): 集合 $\{ma+2n|a\in\mathbb{R}/\mathbb{Q},m,n\in\mathbb{Z}\}$ 在实轴上稠密.

推论 (ii): 集合 $\{ma+2n+1|a\in\mathbb{R}/\mathbb{Q},m,n\in\mathbb{Z}\}$ 在实轴上稠密.(实轴平移一个单位稠密性质不变)

推论 (iii):$\{\sin(2n+1)\}$ 在 $[-1,1]$ 上稠密.(这也说明了 $\{\sin(2n+1)\}$ 发散)

证: 类似第三章第二组参考题第 9 题的证明, 由推论 (ii) 对任意 $r\in[-1,1]$,$\exists m,n\in\mathbb{Z}$ 使得

$$|2m\pi+2n+1-\arcsin r|<\varepsilon$$

于是

$$|\sin(2n+1)-r|=|\sin(2m\pi+2n+1)-\sin(\arcsin r)|\leqslant|2m\pi+2n+1-\arcsin r|<\varepsilon$$

推论 (iv):$\{\cos(2n+1)\}$ 在 $[-1,1]$ 上稠密.

证: 即 $\{\cos(2n+1)\}$ 的导集为 $[-1,1]$. 任给 $r\in[-1,1]$, 对于 $\sqrt{1-r^2}\in[-1,1]$, 由集合 $\{\sin(2n+1)\}$ 的稠密性, 存在子列 $\{\sin(2n_k+1)\}$ 的极限为 $\sqrt{1-r^2}$, 由三角恒等式

$$\sin^2(2n+1)+\cos^2(2n+1)=1$$

可得到 $\cos\{(2n_k+1)\}$ 的极限为 r.

现在来证明本题.

证法一: 若 $\sin n^2\to 0$, 则对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists N>0,\forall n>N,\exists k\in\mathbb{Z},|n^2-k\pi|<\varepsilon$.

令 $a_n=n^2 \bmod \pi\left(-\dfrac{\pi}{2}<a_n\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right),b_n=2n+1 \bmod \pi\left(-\dfrac{\pi}{2}<b_n\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$. 则

$$|a_{n+1}-a_n|=|b_n|<2\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n+1)=0$, 这与推论 (iii) 矛盾. 因此 $\sin n^2\not\to 0$, 命题得证.
证法二: 如果 $\sin n^2\to 0$, 则 $n^2 \bmod \pi\to 0$. 于是存在 N, 对 $\forall n>N$ 都满足 $0\leqslant n^2 \bmod \pi<0.01$. 于是 $n^2=k_1\pi+\delta_1,(n+1)^2=k_1\pi+\delta_1+(2n+1)=k_2\pi+\delta_2,(n+2)^2=k_1\pi+\delta_1+(4n+4)=k_3\pi+\delta_3$, 其中 $-0.01<\delta_i<0.01,i=1,2,3$. 这说明 $2n+1=(k_2-k_1)\pi+(\delta_2-\delta_1)$,$2n+3=(k_3-k_2)\pi+(\delta_3-\delta_2)$, 也就是 $2=(k_3-2k_2+k_1)\pi+(\delta_3-2\delta_2+\delta_1)$, 由于 k_i 是整数,$\delta_i\in(-0.01,0.01),i=1,2,3$, 这显然是不可能的. 命题得证.
证法三: 假设 $\sin n^2$ 收敛, 则可知 $|\sin n^2|$ 和 $|\cos n^2|$ 均收敛, 设它们的极限分别为 α 和 β. 则 $\alpha^2+\beta^2=1$. 由和角公式

$$\cos(n+1)^2=\cos\left(n^2+2n+1\right)=\cos n^2\cos(2n+1)-\sin n^2\sin(2n+1)$$

所以

$$\left|(1-\cos(2n+1))\cos n^2+\cos(n+1)^2-\cos n^2\right|=\left|\sin n^2\sin(2n+1)\right|$$

由于当 $n\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}&\left|(1-\cos(2n+1))\cos n^2+\cos(n+1)^2-\cos n^2\right|=\left|(1-\cos(2n+1))\cos n^2+o(1)\right|\\=&\left|(1-\cos(2n+1))\cos n^2\right|+o(1)=(\alpha+o(1))(1-\cos(2n+1))+o(1)\\=&\alpha(1-\cos(2n+1))+o(1)\\&\left|\sin n^2\sin(2n+1)\right|=(\beta+o(1))|\sin(2n+1)|=\beta|\sin(2n+1)|+o(1)\end{aligned}$$

可得

$$\alpha(1-\cos(2n+1))=\beta|\sin(2n+1)|+o(1)$$

利用 $\{\cos(2n+1)\}$ 的导集为 $[-1,1]$, 对任何 $s\in[-1,1]$, 对上式在子列意义上求极限可得:$\alpha(1-s)=\beta\sqrt{1-s^2}$. 取 $s=-1$ 得 $\alpha=0$, 再取 $s=0$ 得 $\beta=0$, 与 $\alpha^2+\beta^2=1$ 矛盾.
证法四 $(*)$: 正如第三章第二组参考题第 9 题注中提及的, $\{\sin n^k\}(k\in\mathbb{Z}^+)$ 在 $[-1,1]$ 上稠密, 可知 $\{\sin n^k\}$ 是发散的.
证法五 (最简单): 仿照周民强第二册 P172 例 3.1.14(3), 这个证法可以证明 $\sin(n^k)\not\to 0$.
证法六: 利用 Cauchy 准则和 Dirichlet 逼近定理. 仿照周民强第二册 P172 例 3.1.14(4).
注: 推论 (i)(ii) 也可以绕开引理直接证明, 因为事实上在第三章第二组参考题第 9 题中我们已经得到 $\{\{ma\}|a\in\mathbb{R}/\mathbb{Q},m\in\mathbb{Z}\}$ 在 $[-1,1]$ 上稠密. 那么任取 $r\in\mathbb{R}$, 不妨设 $[r]$ 是偶数. 可以先找到 $m\in\mathbb{Z}$ 使得 $\{ma\}\to\{r\}$, 然后根据此 m
(1) 如果 $[ma]$ 是偶数, 那么存在 $n\in\mathbb{Z}$ 使得 $[ma]+2n=[r]$, 则

$$ma+2n=[ma]+2n+\{ma\}\to[r]+\{r\}=r$$

这就证明了推论 (i), 再平移实轴得到推论 (ii).

(2) 如果 $[ma]$ 是奇数, 那么存在 $n\in\mathbb{Z}$ 使得 $[ma]+2n+1=[r]$, 从而

$$ma+2n+1=[ma]+2n+1+\{ma\}\to[r]+\{r\}=r$$

这就证明了推论 (ii), 再平移实轴得到推论 (i).
对于 $[r]$ 为奇数的情形, 可以类似进行证明. □

18. 解答:

(1) 注意到 $\dfrac{a_n}{1+n^2a_n}\leqslant\dfrac{a_n}{n^2a_n}=\dfrac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$ 收敛.

(2) 若取 $a_n=\dfrac{1}{n}$, 则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$ 发散; 若取

$$a_n=\begin{cases}1, & n=m^2\\ 1/n^2, & \text{其他}\end{cases}\quad(m\in\mathbb{Z}^+)$$

则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散但 $\displaystyle\sum_{n}\frac{a_n}{1+na_n}<\sum_{m}\frac{1}{1+m^2}+\sum_{n}\frac{1}{n(n+1)}<+\infty$, 故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$ 收敛.

(3) 若存在 $M>0$ 使得 $|a_n|<M$, 则 $\dfrac{a_n}{1+a_n}\geqslant\dfrac{a_n}{1+M}$ 可知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 发散. 否则, 存在子列 $a_{n_k}\to+\infty$, 则 $\dfrac{a_{n_k}}{1+a_{n_k}}\to1$, 由级数收敛的必要性可知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 发散.

(4) 若取 $a_n=\dfrac{1}{n^2}$, 则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n^2}$ 收敛; 若取 $a_n=\dfrac{1}{n}$, 则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n^2}$ 发散. □

19. 解答:

(1) 记 $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$, 则由 Abel 变换可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{nS_n-\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(S_n-\sum_{k=1}^{n-1}S_k/n\right)\xlongequal{\text{stolz}}S-S=0$$

(2) 记 $b_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ka_k$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)b_k\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{b_{k-1}}{k}\\&=b_1+\sum_{k=2}^{n}\frac{b_k-b_{k-1}}{k}-\frac{b_n}{n+1}=b_1+\sum_{k=2}^{n}a_k-\frac{b_n}{n+1}\\&=\sum_{k=1}^{n}a_k-\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n+1}\to S\end{aligned}$$
□

20. 解答: 假设存在这样的 N, 使得对所有 n 都有 $|n-f(n)|\leqslant N$. 设原级数的部分和为 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, 新级数部分和为 $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{f(k)}$, 则对任何给定的 $n>N$, 考察含有 N 个项的和 $U(n)=T_{n+N}-S_n$.
(1) 断言 $U(n)$ 中一定没有 S_n 的项. 这是因为对 $k=1,2,\cdots,n$,

$$a_k\in\left\{a_{f(1)},a_{f(2)},\cdots,a_{f_{(k+N)}}\right\}\subset\left\{a_{f(1)},a_{f(2)},\cdots,a_{f_{(k+N)}},\cdots,a_{f(n+N)}\right\}$$

这也说明 $U(n)$ 内只含有 T_{n+N} 中的项.
(2) 断言 $U(n)$ 中一定没有 T_{n-N} 的项, 因为对 $k=1,2,\cdots,n-N$,

$$a_{f(k)}\in\left\{a_1,a_2,\cdots,a_{k+N}\right\}\subset\left\{a_1,a_2,\cdots,a_{k+N},\cdots,a_n\right\}$$

这就说明 $U(n)$ 中只含有 $\left\{a_{f(n-N+1)},a_{f(n-N+2)},\cdots,a_{f(n+N)}\right\}$ 中的 N 项. 设这 N 个项为 $b_{n_1},b_{n_2},\cdots,b_{n_N}$. 于是对任给 $\varepsilon>0$, 因为已知 T_n 收敛, 因此可使 n 充分大后 $|b_{n_k}|<\dfrac{\varepsilon}{N},(k=1,2,\cdots,N)$. 则

$$|T_{n+N}-S_n|=|b_{n_1}+b_{n_2}+\cdots+b_{n_N}|\leqslant|b_{n_1}|+|b_{n_2}|+\cdots+|b_{n_N}|<N\cdot\frac{\varepsilon}{N}=\varepsilon$$

即当 $n\to\infty$ 时 $|T_{n+N}-S_n|\to 0$. 但另一方面 $|T_{n+N}-S_n|\to|t-s|\neq 0$, 矛盾. 因此假设不成立, 原命题得证. □

第二组参考题

1. 解答: 我们证明推广结论:
设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n^{p-1}}$ 收敛, $p>1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^p}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^p}a_n$ 收敛.
证: 设 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, 则

$$\frac{n^p}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^p}=\frac{n^p}{S_n^p}\left(S_n-S_{n-1}\right)$$

其中 $S_0=0$, 有

$$\begin{aligned}\frac{n^p}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^p}a_n&<a_1^{1-p}+\sum_{n=2}^{m}\frac{n^p}{S_{n-1}^{p-1}}-\sum_{n=2}^{m}\frac{n^p}{S_n^{p-1}}\\&=a_1^{1-p}+\sum_{n=1}^{m-1}\frac{(n+1)^p}{S_n^{p-1}}-\sum_{n=2}^{m}\frac{n^p}{S_n^{p-1}}\\&=2a_1^{1-p}+\sum_{n=1}^{m}\frac{(n+1)^p-n^p}{S_n^{p-1}}<2a_1^{1-p}+p\sum_{n=1}^{m}\frac{(n+1)^{p-1}}{S_n^{p-1}}\end{aligned}$$

取 $r=\dfrac{p}{p-1}, s=p$, 那么 $\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{s}=1$, 则由 Hölder 不等式得到

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(n+1)^{p-1}}{S_n^{p-1}}=\sum_{n=1}^{m}\frac{(n+1)^{p-1}}{S_n^{p-1}}a_n^{\frac{p-1}{p}}\cdot\frac{1}{a_n^{\frac{p-1}{p}}}<\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{(n+1)^p}{S_n^p}a_n\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{a_n^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

又

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{n^p}{S_n^p}a_n<2a_1^{1-p}+p2^{p-1}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{n^p}{S_n^p}a_n\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{a_n^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n^{p-1}}$ 收敛, 用反证法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^p}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^p}a_n$ 也收敛.

注: 令 $p=2$ 即本题, 也可参看裴礼文 P453 例 5.1.28 或徐森林下册 P218 第 579 题. □

2. 解答: 记 $S_n=a+a_1+\cdots+a_n$, 则 $\dfrac{a_n}{S_n^{3/2}}=\dfrac{S_n-S_{n-1}}{S_n^{3/2}}$. 类似例题 13.2.5, 应用 Lagrange 中值定理, 可得到

$$\frac{a_n}{S_n^{3/2}}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^{3/2}}<\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{p-1}}-\frac{1}{S_n^{p-1}}\right)$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{S_k^{3/2}}&=\frac{a_1}{(a+a_1)^{3/2}}+\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{S_k^{3/2}}<\frac{a_1}{(a+a_1)^{3/2}}+2\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{S_{k-1}^{1/2}}-\frac{1}{S_k^{1/2}}\right)\\&<\frac{a_1}{(a+a_1)^{3/2}}+\frac{2}{(a+a_1)^{1/2}}<\frac{2}{\sqrt{a}}\end{aligned}$$

(最后一个小于号是直接去化简验证)

由极限的保号性, $S\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{a}}$ 得证. □

3. 解答: 固定 k, 由题意有

$$a_k\leqslant Ma_{k+1},a_k\leqslant Ma_{k+2},\cdots,a_k\leqslant Ma_{2k}$$

$$ka_k\leqslant M(a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k})$$

两边令 $k\to\infty$, 由 Cauchy 准则, 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$. □

4. 解答: 取

$$\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{2^{2^k}},b_n=\dfrac{1}{2^{2^{k+1}}},2^{2^{k-1}}\leqslant n\leqslant 2^{2^k}-1,k=2m\\ a_n=\dfrac{1}{2^{2^{k+1}}},b_n=\dfrac{1}{2^{2^k}},2^{2^{k-1}}\leqslant n\leqslant 2^{2^k}-1,k=2m-1\end{cases}$$

当 $n\geqslant 2$ 时上式都有意义, 且显然

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \geqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^{2m}}}\left(2^{2^{2m}}-2^{2^{2m-1}}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{2^{2m-1}}}\right)=\infty$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n \geqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^{2m-1}}}\left(2^{2^{2m-1}}-2^{2^{2m-2}}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{2^{2m-2}}}\right)=\infty$$

因此 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$ 都发散, 但 $\min\left\{a_n, b_n\right\}=\frac{1}{2^{2^{k+1}}}, 2^{2^{k-1}} \leqslant n \leqslant 2^{2^k}-1$, 因此

$$\sum_{n=2}^{\infty} \min\left\{a_n, b_n\right\}=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^{k+1}}}\left(2^{2^k}-2^{2^{k-1}}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^{k+1}}} 2^{2^k}=\frac{1}{2^{2^k}}<\infty$$

再比如取

$$\sum a_n=\overline{\frac{1}{1^2}}+\frac{1}{2^2}+\overline{\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots+\frac{1}{14^2}+\overline{\frac{1}{15^2}+\frac{1}{15^2}+\cdots+\frac{1}{15^2}}+\cdots$$

$$\sum b_n=\frac{1}{1^2}+\underline{\frac{1}{2^2}}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\underline{\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^2}}+\frac{1}{15^2}+\frac{1}{16^2}+\cdots+\frac{1}{71^2}+\cdots$$

其中重复数的个数要使得每段和不小于 $\dfrac{1}{4}$, 而显然 $\sum \min\{a_n, b_n\}=\sum \dfrac{1}{n^2}<+\infty$. □

5. 解答: 若 $\lambda<e^{-1}$, 则存在 $N, p>1$ 使得当 $n \geqslant N$ 时有

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n<\frac{1}{e^p}<\frac{1}{(1+1/n)^{np}}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n}<\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=\frac{1/(n+1)^p}{1/n^p}$$

$$\Rightarrow a_n=a_1 \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1}<\frac{a_1}{n^p}$$

由比较判别法知级数收敛.

若 $\lambda>e^{-1}$, 此时存在 N, 使得当 $n \geqslant N$ 时有

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n>\frac{1}{e}>\frac{1}{(1+1/(n-1))^n}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{n-1}{n}=\frac{1/n}{1/(n-1)}$$

$$\Rightarrow a_n=a_2 \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_3}{a_2}>\frac{a_2}{n}$$

由比较判别法知级数发散. □

6. 解答: 若 $p>1$, 则 $\exists A>1$, 使得 $x>A$ 时

$$\frac{e^x f(x)}{f(x)}>1 \Rightarrow e^x f(e^x)>f(x)$$

从而 $\forall x_{n-1}<x_n$, 有

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) \mathrm{d} x<\int_{x_{n-1}}^{x_n} e^x f\left(e^x\right) \mathrm{d} x=\int_{e^{x_{n-1}}}^{e^{x_n}} f(x) \mathrm{d} x \tag{1}$$

取 $x_{n+1}=e^{x_n},x_1=1$, 则由 (1) 式可得

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x > \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_1^{x_n} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=2}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x > n\int_1^e f(x)\mathrm{d}x \to +\infty$$

这说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散.

若 $p<1$, 取实数 $q:\lambda<q<1$. 由已知条件知 $\exists A>1$, 使得 $x>A$ 时有

$$\frac{e^x f(x)}{f(x)} < q \Rightarrow e^x f(e^x) < qf(x)$$

类似上面的推理可知

$$\int_1^{x_n} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=2}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x < \sum_{k=2}^{n-1} q^{k-1}\int_1^e f(x)\mathrm{d}x < \frac{\int_1^e f(x)\mathrm{d}x}{1-q} < +\infty$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛. $\square$

7. 解答: 由

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} b_k 2^{-k} &= \sum_{k=1}^{n} b_k\left(\frac{1}{2^{k-1}}-\frac{1}{2^k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_{k+1}}{2^k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{2^k} = b_0 - \frac{b_n}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{b_{k+1}-b_k}{2^k}\\
&= b_0 - \frac{b_n}{2^n} + 2\sum_{k=1}^{n-1}\left(b_{k+1}-b_k\right)2^{-(k+1)} \leqslant b_0 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\left(b_{k+1}-b_k\right)a_{b_k+1}\\
&\leqslant b_0 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\left(a_{b_k+1}+\cdots+a_{b_{k+1}}\right) = b_0 + 2\left(a_{b_1+1}+a_{b_1+2}+\cdots+a_{b_n}\right)\end{aligned}$$

知若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n 2^{-n}$ 也收敛. 又由

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} b_k 2^{-k} &= \sum_{k=1}^{n} b_k\left(\frac{1}{2^{k-1}}-\frac{1}{2^k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_{k+1}}{2^k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{2^k}\\
&= b_0 - \frac{b_n}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{b_{k+1}-b_k}{2^k} = b_0 - \frac{b_n}{2^n} + 2\sum_{k=1}^{n-1}\left(b_{k+1}-b_k\right)2^{-(k+1)}\\
&> b_0 - \frac{b_n}{2^n} + 2\sum_{k=1}^{n-1}\left(b_{k+1}-b_k\right)a_{b_{k+1}+1}\\
&= b_0 - \frac{b_n}{2^n} + 2\sum_{k=1}^{n-1}\left(a_{b_k+2}+\cdots+a_{b_{k+1}+1}\right)\\
&= b_0 - \frac{b_n}{2^n} + 2\left(a_{b_1+2}+a_{b_1+3}+\cdots+a_{b_n+1}\right)\end{aligned}$$

知若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n 2^{-n}$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛. □

8. 解答:

(1) 参见第二章练习题 2.5.5 的第 9 题.

(2) 这个无穷乘积的通项可以写成

$$\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+1}\cdot\frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1}\cdots\frac{2^n-2}{2^n-1}\cdot\frac{2^n}{2^n-1}=\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{(2^{n-1}-1)!!\,(2^n)!!}{(2^{n-1})!!\,(2^n-1)!!}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2^n}}$$

不难归纳得到

$$\prod_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{\left(2^{k-1}-1\right)!!\,\left(2^k\right)!!}{(2^{k-1})!!\,(2^k-1)!!}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2^k}}=\left\{2^{n2^n+1}\left[\frac{(2^{n-1})!}{(2^n)!}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2^n}}$$

再应用 Stirling 公式得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= 2\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{(2^{n-1}-1)!!\,(2^n)!!}{(2^{n-1})!!\,(2^n-1)!!}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2^n}}\\
&= 2\lim_{n\to\infty}\left\{2^{n2^n+1}\left[\frac{(2^{n-1})!}{(2^n)!}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2^n}}\\
&= \lim_{n\to\infty} 2\cdot 2^{n+2^{-n}}\cdot\left[\frac{\sqrt{\pi 2^n}\left(\dfrac{2^{n-1}}{e}\right)^{2^{n-1}}}{\sqrt{\pi 2^{n+1}}\left(\dfrac{2^n}{e}\right)^{2^n}}\right]^{\frac{1}{2^{n-1}}}\\
&= \lim_{n\to\infty} 2^{n+1}\cdot\frac{2^{n-1}}{2^{2n}}\cdot e = e
\end{aligned}$$

□

9. 解答: 我们证明, 对任意实数 b 和 $p\leqslant 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(\ln n)}{n^p}$ 都是发散的.

如果 $b=0$ 这个级数显然发散. 取 $b\neq 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|b|\ln n=\infty$ 且

$$\lim_{n\to\infty}[b\ln(n+1)-b\ln n]=0$$

因此对任意 $M\in\mathbb{Z}_+$, 存在充分大的 $k\in\mathbb{Z}_+$, 使得至少有 M 个 $|b|\ln n$ 的相继值处于 $\left(k-\dfrac{1}{3}\right)\pi$ 和 $\left(k+\dfrac{1}{3}\right)\pi$ 之间. 对于所有这些值,$\cos(b\ln n)$ 同号且 $|\cos(b\ln n)|>\dfrac{1}{2}$. 因此, 就绝对值而言此级数对应的 M 个相继的项的和将会大于级数 $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=q}^{q+M}n^{-p}$($q$ 为某个整数). 因为对于适当选择的 $M\in\mathbb{Z}_+$, 这个和可以任意大, 于是这级数不满足 Cauchy 收敛准则, 级数发散. □

10. 解答:

(1) 考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_{n+k} = \sum_{n=k+1}^{\infty} (n-k)a_n = \sum_{n=k+1}^{\infty} na_n \left(1-\frac{k}{n}\right)$$

因为 $\left\{1-\dfrac{k}{n}\right\}$ 单调有界, $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} na_n$ 收敛, 故由 Abel 判别法级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_{n+k}$ 收敛.

(2) 考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_{n+k} = \sum_{n=1}^{m} na_{n+k} + \sum_{n=m+1}^{\infty} na_{n+k}$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_{n+k}$ 收敛, 故对充分大的 m 有

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} na_{n+k} \to 0$$

固定 m, 记 $S_{m,k} = a_{k+1} + \cdots + a_{k+m}$, $M_{m,k} = \max\{S_{1,k}, S_{2,k}, \cdots, S_{m,k}\}$. 则由 Abel 变换

$$\left|\sum_{n=1}^{m} na_{n+k}\right| = \left|mS_{m,k} - \sum_{i=1}^{m-1} S_{i,k}\right| \leqslant (2m-1)M_{m,k}$$

令 $k\to\infty$, 则 $S_{i,k}\to 0$(不难得知 $a_k\to 0, k\to\infty$),$i=1,2,\cdots,m$, 从而 $M_{m,k}\to\infty$. 即

$$\left|\sum_{n=1}^{m} na_{n+k}\right| \to 0, k\to\infty$$

这就证明了命题. □

11. 解答: 假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$, 则由 Abel 定理 (命题 13.2.5(2)),$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 是发散的, 取 $b_n = \dfrac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 即得矛盾. □

12. 解答: 先证明数列 $\{a_n\}$ 有界. 反证 $\{a_n\}$ 无界, 则存在 $|a_{n_1}| > 1^2, |a_{n_2}| > 2^2, \cdots,$. 取 $b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{k^2}, n = n_k \\ 0, 其他 \end{cases}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛, 但 $|a_{n_k} b_{n_k}| > 1 \not\to 0$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散, 与题设不符. 因此 $\{a_n\}$ 有界, 即存在 $M>0$ 使得 $|a_n| < M$.

下取任意收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的余项 $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} b_k$, 则满足 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. 而

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) r_k = a_1 r_1 - \sum_{k=2}^{n} a_k b_k - a_{n+1} r_n$$

令 $n\to\infty$, 注意 $|a_{n+1} r_n| < M|r_n| \to 0$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) r_n$ 收敛.

这里需要澄清 r_n 的任意性等价 b_n 的任意性: 对每一列 $\{r_n\}$, 都可以通过 $r_{n-1}-r_n=b_n$ 来给出与之对应的唯一的 $\{b_n\}$ 并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛. (事实上这是双射)

于是根据上一题的结论可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n-a_{n+1}|$ 是收敛的.

注:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n-a_{n+1}|<+\infty$ 也被定义为 $\{a_n\}$ 有界变差. 其他解法参见周民强第二册 P254 例 3.3.26(3). □

13. 解答: 令

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n =&1-1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}+\cdots\\ &+\frac{1}{\sqrt[3]{k}}-\underbrace{\frac{1}{k\sqrt[3]{k}}-\cdots-\frac{1}{k\sqrt[3]{k}}}_{k\text{项}}+\cdots\end{aligned}$$

显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3=0$, 但

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3&=1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8\times 2}-\frac{1}{8\times 2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{27\times 3}+\frac{1}{k}-\frac{k}{k^3\cdot k}+\cdots\\ &=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}-1-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}-\cdots-\frac{1}{k^3}-\cdots\end{aligned}$$

发散.

注: 其他例子参见徐森林下册 P205 第 563 题. □

14. 解答: 易知 $\int_1^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 所以存在 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)=l$. 若 $l\neq 0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散 (通项不为 0) 且 $\int_1^{+\infty} f(x)$ 发散 (例题 12.4.1). 故 $l=0$, 有 $\int_{[r]}^{r} f(x)\mathrm{d}x(r\to+\infty)$. 故 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛等价于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 又有

$$\begin{aligned}\left|\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x-f(n)\right|&=\left|\int_n^{n+1}[f(x)-f(n)]\mathrm{d}x\right|=\left|\int_n^{n+1}\left[\int_n^x f'(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant\int_n^{n+1}\left[\int_n^{n+1}|f'(t)|\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=\int_n^{n+1}|f'(t)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x-f(n)\right|\leqslant\int_1^{+\infty}|f'(t)|\,\mathrm{d}t<+\infty$$

即知命题成立. □

15. 解答: 由 $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$ 的凸性可知

$$\frac{f(n-1)+f(n+1)}{2}\geqslant f(n)$$

所以有

$$\begin{aligned}S_{4n+1}&=1+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\cdots+\frac{1}{(4n+1)^p}-\frac{1}{2^p}\left[1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right]\\&\geqslant 1+\frac{2}{2^p}\left[\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right]-\frac{1}{2^p}\left[1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right]\\&=1-\frac{1}{2^p}S_{2n}\end{aligned}$$

即

$$S_{4n+1}+\frac{1}{2^p}S_{2n}\geqslant 1$$

两边取极限可知

$$S+\frac{S}{2^p}\geqslant 1\Rightarrow S\geqslant\frac{2^p}{1+2^p}>\frac{1}{2}$$

另一方面有

$$S_{2n+1}=1-\left(\frac{1}{2^p}-\frac{1}{3^p}\right)-\cdots-\left[\frac{1}{(2n)^p}-\frac{1}{(2n+1)^p}\right]<1$$

$$S_{2n}=\left(1-\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^p}\right]<1$$

并且从中看出 S_{2n} 递增, S_{2n+1} 递减, 故一定有 $S_{2n}<S<S_{2n+1}<S_1=1$,.
注: 如果视 $p>0$ 为参数, 则 S 是关于 p 的递增函数, 且 $\lim\limits_{p\to+\infty}S(p)=1$. □

16. 解答: 由 Cauchy 准则知: $\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in\mathbb{N},\forall n>N_1$, 有 $|T_n|\xlongequal{def}\left|\sum\limits_{k=N_1+1}^{n}a_kb_k\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.
由 Abel 变换

$$\begin{aligned}&\left|\left(\sum_{k=N_1+1}^{n}a_k\right)b_n\right|=\left|\sum_{k=N_1+1}^{n}a_kb_k\cdot\frac{1}{b_k}\right|b_n\\=&\left|T_{N_1+1}\cdot\frac{1}{b_{N_1+1}}+(T_{N_1+2}-T_{N_1+1})\cdot\frac{1}{b_{N_1+2}}+\cdots+(T_n-T_{n-1})\cdot\frac{1}{b_n}\right|b_n\\=&\left|T_{N_1+1}\left(\frac{1}{b_{N_1+1}}-\frac{1}{b_{N_1+2}}\right)+T_{N_1+2}\left(\frac{1}{b_{N_1+2}}-\frac{1}{b_{N_1+3}}\right)+\cdots+T_n\cdot\frac{1}{b_n}\right|b_n\\<&\frac{\varepsilon}{2}\left|\left(\frac{1}{b_{N_1+1}}-\frac{1}{b_{N_1+2}}\right)+\left(\frac{1}{b_{N_1+2}}-\frac{1}{b_{N_1+3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{b_{n-1}}-\frac{1}{b_n}\right)+\frac{1}{b_n}\right|b_n\\=&\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{b_n}{b_{N_1+1}}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

另一方面显然有

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_{N_1})b_n=0$$

则对上述 ε 和 N_1, $\exists N_2\in\mathbb{N}, n>N_2$ 时有

$$|(a_1+a_2+\cdots+a_{N_1})b_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>N$ 时有

$$|(a_1+a_2+\cdots+a_n)b_n|\leqslant\left|\left(\sum_{k=1}^{N_1}a_k\right)b_n\right|+\left|\left(\sum_{k=N_1+1}^{n}a_k\right)b_n\right|<\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)b_n=0$.

注: 其他证法参见徐森林下册 P207 第 564 题. □

17. 解答: 在上一题中取 $b_n=\dfrac{1}{n^p}$ 即可. □

18. 解答: 若 $S_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=S$, 则由 Cauchy 命题 (命题 2.4.1) 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=S$. 反之不真, 例如取 $a_n=(-1)^n$. □

19. 解答: 只需注意

$$\frac{a_n}{n}=\frac{S_n-S_{n-1}}{n}=\frac{S_n}{n}-\frac{n-1}{n}\frac{S_{n-1}}{n-1}$$

令 $n\to\infty$ 即可. □

20. 解答:

(1) 考虑 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{2n-1}=\dfrac{1}{2}$, 因此可以 Cesàro 求和;

(2) 显然不满足上一题中证明的必要条件, 因此不可以 Cesàro 求和;

(3) 考虑 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{3n+2}=\dfrac{2}{3}$, 因此可以 Cesàro 求和;

(4) 当 $x=0$ 时显然 Cesàro 和为 0. 当 $x\neq0$ 时有

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\cos\dfrac{x}{2}-\cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$$

$$\begin{aligned}n\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}S_k&=\frac{n}{2}\cot\frac{x}{2}-\frac{1}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}\cdot\sum_{k=1}^{n}[\sin(k+1)x-\sin kx]\\&=\frac{n}{2}\cot\frac{x}{2}-\frac{\sin(n+1)x-\sin x}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}\end{aligned}$$

易见 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\dfrac{1}{2}\cot\dfrac{x}{2}$. □

21. 解答: 必要性显然, 下证充分性. 注意到

$$\frac{n+1}{n}S_n-\sigma_n=\frac{(n+1)S_n-S_1-S_2-\cdots-S_n}{n}=\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n} \tag{1}$$

对 (1) 式用 Stolz 定理

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}S_n-\sigma_n\right)=\lim_{n\to\infty}na_n=0$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$. □

22. 解答: 利用上一题中的 (1) 式, 充分性显然. 至于必要性, 若级数收敛 Cesàro 和必然存在并与之相同, 因此也是显然的了.

注: Cesàro 求和可以作为发散级数的求和法, 发散级数也还有许多其他被定义的求和方法, 可阅读菲赫金哥尔茨《微积分学教程》第二卷第十一章 §9. □

第十四章 函数项级数与幂级数

.1.3 练习题

1. 解答:

(1) 极限函数 $S(x)=0$, 由于

$$\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\frac{1}{1/|x|+n^2|x|}\leqslant\frac{1}{2n}\to 0(n\to+\infty)$$

故 $S_n(x)\rightrightarrows S(x), x\in(-\infty,+\infty)$.

(2) 极限函数 $S(x)=0$. 取 $x_n=\dfrac{1}{n}$, 则 $S_n(x)=\dfrac{1}{2}$, 显然 $S_n(x)\not\rightrightarrows S(x), x\in(-\infty,+\infty)$.

(3) 极限函数 $S(x)=\dfrac{1}{x}$, 取 $x_n=n$ 则

$$\sup_{x\in(0,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{x\in(0,+\infty)}\frac{x}{n}\geqslant 1$$

故 $S_n(x)\not\rightrightarrows S(x), x\in(0,+\infty)$.

(4) 极限函数 $S(x)=0$.

(i) 当 $x\in(0,1)$ 时, 令 n 充分大, 则 $\dfrac{x}{n}<\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{e}$. 注意 $|x\ln x|$ 在 $(0,e^{-1})$ 递增, 于是

$$\sup_{x\in(0,1)}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{x\in(0,1)}\left|\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}\right|\leqslant\left|\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}\right|\to 0(n\to+\infty)$$

故 $S_n(x)\rightrightarrows S(x), x\in(0,1)$.

(ii) 当 $x\in(0,+\infty)$ 时, 可取 $x_n=en$ 则

$$\sup_{x\in(0,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}\right|\geqslant e$$

故 $S_n(x)\not\rightrightarrows S(x), x\in(0,+\infty)$.

(5) 极限函数 $S(x)=x$.

(i) 当 $x\in[0,a]$ 时, 由于 $x-n\sin\dfrac{x}{n}$ 不变号且单调递增, 故

$$\sup_{x\in[0,a]}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{x\in[0,a]}\left|x-n\sin\frac{x}{n}\right|\leqslant\left|a-n\sin\frac{a}{n}\right|\to 0(n\to+\infty)$$

故 $S_n(x)\rightrightarrows S(x), x\in[0,a]$.

(ii) 当 $x\in(0,+\infty)$ 时, 取 $x_n=n$ 则

$$\sup_{x\in(0,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|x-n\sin\frac{x}{n}\right|\geqslant|n(1-\sin 1)|\to+\infty(n\to+\infty)$$

故 $S_n(x) \not\rightrightarrows S(x), x \in (0,+\infty)$.

(6) 极限函数 $S(x)=\begin{cases}0, x \geqslant 0\\ -x, x<0\end{cases}$.

(i) 当 $x \geqslant 0$ 时, 由于

$$\sup_{x\geqslant 0}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{x\geqslant 0}\frac{\ln(1+e^{-nx})}{n}<\frac{e^{-nx}}{n}\to 0(n\to+\infty)$$

故 $S_n(x) \rightrightarrows S(x), x \geqslant 0$.

(ii) 当 $x<0$ 时, 由于

$$\sup_{x<0}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{x<0}\left|\frac{\ln(1+e^{-nx})}{n}+x\right|<\left|\frac{\ln(2e^{-nx})}{n}+x\right|=\frac{\ln 2}{n}\to 0(n\to+\infty)$$

故 $S_n(x) \rightrightarrows S(x), x<0$.

(7) 记 $f_n=x^n+x^{-n}, 1/t \leqslant |x| \leqslant t$, 则

$$f_n'(x)=nx^{n-1}-nx^{n-1}=\frac{n}{x^{n+1}}\left(x^{2n}-1\right)$$

当 $\dfrac{1}{t}<x<1$ 时, $f_n'(x)<0$; 当 $1<x<\dfrac{1}{t}$ 时, $f_n'(x)>0$. 于是

$$0 \leqslant \max_{1/t\leqslant|x|\leqslant t}|f_n(x)|=\max\left\{f_n\left(\frac{1}{t}\right), f_n(t)\right\}=t^n+t^{-n}$$

因此

$$\left|\frac{n^8}{\sqrt{n!}}\left(x^n+x^n\right)\right|=\frac{n^8}{\sqrt{n!}}|f_n(x)|\leqslant\frac{n^8}{\sqrt{n!}}\left(t^n+t^{-n}\right)<\frac{2t^nn^8}{\sqrt{n!}}$$

由 D'Alembert 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2t^nn^8}{\sqrt{n!}}$ 收敛, 再根据 Weierstrass 判别法知原函数项级数一致收敛.

(8) 因为

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\sin x\cdot\sin kx\right|&=\left|\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\cos(k-1)x-\cos(k+1)x)\right|\\&=\frac{1}{2}|1+\cos x-\cos nx-\cos(n+1)x|\leqslant 2\end{aligned}$$

而 $\dfrac{1}{\sqrt{n+x}}$ 递减且一致趋于 $0(n\to+\infty)$, 由 Dirichlet 判别法原函数项级数一致收敛

(9)(i) 事实上在任意有限闭区间 $[a,b]$ 上由

$$e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{t^2}{n}e^{-t}\quad(t\leqslant n)$$

则当 n 充分大时, 有

$$\frac{1}{n}\left[e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]\leqslant\frac{x^2}{n^2}e^x$$

令 $M=\max\{|a|,|b|\}$, 则当 $x\in[a,b]$ 时, $e^x\leqslant e^M, x^2\leqslant M^2$, 故

$$\frac{1}{n}\left[e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]\leqslant\frac{M^2}{n^2}e^M$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{M^2}{n^2}e^M=M^2e^M\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法知原函数项级数在 $[a,b]$ 上一致收敛.

(ii) 取 $x_n=n$, 则当 $n\to+\infty$ 时

$$\frac{1}{n}\left[e^n-\left(1+\frac{n}{n}\right)^n\right]=\frac{1}{n}\left(e^n-2^n\right)=\frac{2^n}{n}\left[\left(\frac{e}{2}\right)^n-1\right]\to+\infty$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[e^n-\left(1+\frac{n}{n}\right)^n\right]\not\rightrightarrows 0$.

注: (*) 式的证明参见徐森林下册 P257 第 621 题. □

2. 解答: 对 $|x|<1$, 由 $|f_n(x)|=\left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right|<|x|^n$ 可知它绝对收敛. 并且注意到 $|f_n(x)|=|f_n(x^{-1})|$, 故在 $|x|>1$ 时它也绝对收敛. 当 $|x|=1$ 时, 显然发散. 故收敛域 $\mathbb{R}/\{-1,1\}$.

令 $x_n=1\pm\frac{1}{n}$, 可知通项 $\frac{x_n^n}{1+x_n^{2n}}\not\to 0$, 因此非一致收敛. □

3. 解答: $x=0$ 时结论平凡, $x\neq 0$ 时 $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=\frac{1}{1+x^2}<1$, 原函数项级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对收敛. 又因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{nx^2}{(1+x^2)^n}\xlongequal{def}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛且一致收敛. 而当 $n>\frac{1}{x^2}$ 时

$$\frac{b_n(x)}{b_{n+1}(x)}=\frac{n\left(1+x^2\right)}{n+1}=\frac{1+x^2}{1+1/n}>1$$

即 $\{b_n(x)\}$ 单调递减, 且显然 $|b_n(x)|\leqslant 1$. 由 Abel 判别法知原函数项级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛. 下面利用 Cauchy 准则来证明非一致收敛性.

考虑

$$\left|\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}+\cdots+\frac{x^2}{(1+x^2)^{2n}}\right|=\frac{1-\frac{1}{(1+x^2)^{2n}}}{(1+x^2)^n}$$

若取 $x_n^2=\frac{1}{n}$, 则余项将趋于 $\frac{1}{e}-\frac{1}{e^3}$, 这与 Cauchy 收敛准则矛盾. □

4. 解答: 注意到

$$0\leqslant \ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)\leqslant \frac{x^2}{n\ln^2 n}<\frac{a^2}{n\ln^2 n}$$

而 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^2}{n\ln^2 n}$ 收敛 (积分判别法), 故由 Weierstrass 判别法知原函数项级数一致收敛. □

5. 解答: 易见通项

$$|u_n(x)|\leqslant \frac{2^n}{3^n x}$$

因此在 $(0,+\infty)$ 上原函数项级数处处绝对收敛. 但取 $x_n=\frac{2}{3^n\pi}$, 则

$$|u_n(x_n)|=2^n\nrightarrow 0(n\to+\infty)$$

因此在 $(0,+\infty)$ 上原函数项级数非一致收敛. □

6. 解答: 假设 $\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall m>n>N,\forall x\in[0,1]$, 有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x(t^n+\cdots+t^m)\sin\pi t\mathrm{d}t\right|\leqslant&\int_0^1\frac{t^n}{1-t}\sin\pi t\mathrm{d}t\\=&\int_0^{1/2}+\int_{1/2}^1\leqslant\int_0^{1/2}\frac{t^n}{1/2}\mathrm{d}t+\int_{1/2}^1\frac{t^n}{1-t}\cdot\pi(1-t)\mathrm{d}t\\=&2\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\pi\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]\leqslant\frac{2+\pi}{n+1}<\varepsilon\end{aligned}$$

为此只需要取 $N=\left[\frac{2+\pi}{\varepsilon}\right]$ 即可满足 Cauchy 收敛准则, 从而该函数项级数在 $[0,1]$ 上一致收敛.

7. 解答: 记 $\{f_n\}$ 在 (a,b) 上的极限函数为 f. 利用例题 14.1.3 的结论 (逆否命题) 可知 $f(x)$ 在 a 点和 b 点都收敛 (延拓定义 $f(a)$ 和 $f(b)$), 即对 $\forall\varepsilon>0,\exists N_1$, 当 $n>N_1$ 时有

$$|f_n(a)-f(a)|<\varepsilon,\quad |f_n(b)-f(b)|<\varepsilon$$

又 $f_n\rightrightarrows f,x\in(a,b)$, 则对上述 $\varepsilon>0,\exists N_2$, 当 $n>N_2$ 后对任意 $x\in(a,b)$ 满足

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>N$ 后对所有 $x\in[a,b]$ 满足 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, 即 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f. □

8. 解答: 对任意 $x\in(a,b),\forall n,\exists\xi_n\in\left(x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}\right)$ 使得 $F_n(x)=f'(\xi_n)$. 由于 $\xi_n\to x$ 且 f' 连续, 故 $F_n(x)\to f'(x)$, 即 F_n 在 (a,b) 上处处收敛于 f'.

对任意 $[c,d]\subset(a,b)$, $f'(x)$ 在 $[c,d]$ 连续从而一致连续. 因此对任给的 $\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $|\xi_n-x|<\delta$ 时有

$$|F_n(x)-f'(x)|=|f'(\xi_n)-f'(x)|<\varepsilon$$

为此, 只要取 $N>\dfrac{1}{\delta}$, 则当 $n>N$ 后就有了上式成立. 故 F_n 内闭一致收敛于 f'. □

9. 解答: 不妨设 $\{u_n(x)\}$ 单调增加, 则对任意 $x\in[a,b],n\in\mathbb{N}$ 有

$$|u_n(x)|\leqslant\max\{|u_n(a)|,|u_n(b)|\}$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(a)|$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(b)|$ 都收敛, 故由 Weierstrass 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. □

10. 解答: 易见 f 连续无零点, 不妨设 $f>0$, 则存在 $A>0$ 使得 $f(x)\geqslant A$. 由于 $f_n\rightrightarrows f$, 故对任给的正数 $\varepsilon<\dfrac{A}{2},\exists N,\forall n>N,\forall x\in[a,b]$, 有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\Rightarrow f_n(x)>f(x)-\varepsilon>\frac{A}{2}$$

因此当 $n>N$ 后 f_n 在 $[a,b]$ 上无零点且恒正. 于是

$$\left|\frac{1}{f_n}-\frac{1}{f}\right|=\left|\frac{f_n-f}{f_nf}\right|<\frac{2}{A^2}|f_n-f|<\frac{2}{A^2}\varepsilon$$

由 ε 的任意性可知 $\dfrac{1}{f_n}\rightrightarrows\dfrac{1}{f}$. □

11. 解答: 由于 $f_n\rightrightarrows f(n\to\infty),x\in I$, 则对 $\forall\varepsilon>0,\exists N$, 当 $n>N+1>N$ 时, 对所有 $x\in I$, 有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\quad |f_{N+1}(x)-f(x)|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow|f_n(x)-f_{N+1}(x)|\leqslant|f_n(x)-f(x)|+|f(x)-f_{N+1}(x)|<2\varepsilon$$

$$\Rightarrow|f_n(x)|<|f_{N+1}(x)|+1$$

又对每个 n 有 f_n 有界, 设

$$|f_n(x)|\leqslant M_n,n=1,2,\cdots,N+1,x\in I$$

令 $M=\max\{M_1,M_2,\cdots,M_{N+1}\}$, 则对一切正整数 n 有

$$|f_n(x)|\leqslant M+1,x\in I$$

即 $\{f_n\}$ 在 I 上一致有界. □

12. 解答: 设 $f_n \rightrightarrows f, g_n \rightrightarrows g$. 上一题可知 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 在 I 上一致有界. 设 $|f_n| \leqslant M_1, |g_n| \leqslant M_2$, 则

$$\begin{aligned}|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| &= |f_n(x)g_n(x) - f(x)g_n(x) + f(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \\ &\leqslant |f_n(x) - f(x)||g_n(x)| + |f(x)||g_n(x) - g(x)| \\ &\leqslant M_2|f_n(x) - f(x)| + M_1|g_n(x) - g(x)|\end{aligned}$$

再由 $f_n \rightrightarrows f, g_n \rightrightarrows g$ 的定义, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 可取充分大的 N 使得对所有 $n > N$ 和 $x \in I$ 有

$$|f_n - f| < \frac{\varepsilon}{2M_2}, \quad |g_n - g| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M_1}$$

$$\Rightarrow |f_n \cdot g_n - f \cdot g| \leqslant M_2 \cdot \frac{\varepsilon}{2M_2} + M_1 \cdot \frac{\varepsilon}{2M_1} = \varepsilon$$

于是 $f_n \cdot g_n \rightrightarrows f \cdot g$.

注: 去掉 $f_n(x)$ 和 $g_n(x)$ 有界后结论不成立, 反例参见徐森林下册 P233 第 592 题. □

13. 解答: 由 f 连续易见 $f(x+t)$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积且对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$\int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

对任意 $[a,b] \subset (-\infty, +\infty)$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|f_n(x) - \int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left[f\left(x + \frac{k}{n}\right) - f(x+t)\right]\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \sum_{t=0}^{n} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left|f\left(x + \frac{k}{n}\right) - f(x+t)\right|\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0$, f 在 $[a, b+1]$ 上连续且一致连续, 故 $\exists \delta > 0, \forall x', x'' \in [a, b+1], |x' - x''| < \delta$ 时

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

取 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\dfrac{1}{N} < \delta$, 则当 $n > N$ 时 $\dfrac{1}{n} < \delta$. 当 $t \in \left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right]$ 时, $x + t \in [a+t, b+t] \subset [a, b+1]$, 于是

$$\left|\left(x + \frac{k}{n}\right) - (x+t)\right| = \left|\frac{k}{n} - t\right| < \frac{1}{n} < \delta$$

从而

$$\begin{aligned}\left|f_n(x) - \int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left|f\left(x + \frac{k}{n}\right) - f(x+t)\right|\mathrm{d}t \\ &< \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varepsilon\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\varepsilon = \varepsilon\end{aligned}$$

故 $f_n(x) \rightrightarrows \int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t, x \in [a,b]$. $\square$

14. 解答: $f_1(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 所以在 $[a,b]$ 上有界, 即 $\exists M>0, |f_1(x)| \leqslant M$. 由此知

$$|f_2(x)| = \left|\int_a^x f_1(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^x |f_1(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant M(x-a)$$

$$|f_3(x)| \leqslant \int_a^x M(x-a)\mathrm{d}x = \frac{M}{2}(x-a)^2$$

$$\cdots\cdots$$

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{M}{n!}(x-a)^{n-1} \leqslant \frac{M}{n!}(b-a)^{n-1} \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

所以 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0. $\square$

14.2.4 练习题

1. 解答: 因为 $\frac{1}{2^n n^x} < \frac{1}{2^n}$, 由 Weierstrass 判别法知原级数一致收敛, 于是

$$\lim_{x\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1$$ $\square$

2. 解答: 当 $x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$ 时通项不趋于 0, 级数发散; 当 $x \in [0,1)$ 时, 因为当 n 充分大后总是存在常数 a, $x<a<1$ 使得 $\left(x+\frac{1}{n}\right)^n < a^n$, 故级数收敛; 当 $x \in (-1,0)$ 时, 则当 n 充分大后有 $\left|x+\frac{1}{n}\right|^n < |x|^n$, 故级数绝对收敛. 因此定义域 $(-1,1)$.

下面考虑 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(x+\frac{1}{n}\right)^{n-1}$:

当 $x \in [0,b] \subset [0,1)$ 时, 存在常数 c 使得 $x<b<c<1$, 则当 n 充分大后有

$$n\left(x+\frac{1}{n}\right)^{n-1} \leqslant n\left(b+\frac{1}{n}\right)^{n-1} < nc^{n-1}$$

当 $x \in [d,0) \subset (-1,0)$ 时, 存在常数 e 使得 $-1<e<d$, 则当 n 充分大后

$$\left|n\left(x+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right| \leqslant \left|n\left(d+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right| < n|e|^{n-1}$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ 在 $(-1,1)$ 上内闭一致收敛. 于是 $S(x)$ 可微, 当然也连续. $\square$

3. 解答: 在任意有界区间 $[a,b]$ 上, 由于 $\left|\frac{x}{x^2+n^2}\right| \leqslant \frac{\max\{|a|,|b|\}}{n^2}$, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2+x^2}$ 内

闭一致收敛. 另一方面, 令 $u_n(x)=\dfrac{n}{n^2+x^2}$. 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$u_n(x)-u_{n+1}(x)=\frac{n}{n^2+x^2}-\frac{n+1}{(n+1)^2+x^2}=\frac{n^2+n-x^2}{(n^2+x^2)\left[(n+1)^2+x^2\right]}$$

当 n 足够大时 $u_n(x)-u_{n+1}(x)>0.\{u_n(x)\}$ 单调递减且

$$u_n(x)=\frac{n}{n^2+x^2}<\frac{1}{n}\to 0$$

而 $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k$ 一致有界. 由 Dirichlet 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n^2+x^2}$ 一致收敛.

因此 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{x+n(-1)^n}{n^2+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭一致收敛.(内闭 + 内闭 = 内闭, 这点由 $|(f+g)-(f_n+g_n)|\leqslant|f_n-f|+|g_n-g|$ 易证)

再考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x+n(-1)^n}{n^2+x^2}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-2(-1)^nnx-x^2}{(n^2+x^2)^2}$$

在任意有界闭区间 $[a,b]$ 内, 设 $M=\max\{|a|,|b|\}$, 则有

$$\left|\frac{n^2-2(-1)^nnx-x^2}{(n^2+x^2)^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}+\frac{2M}{n^3}+\frac{M^2}{n^4}$$

由 Weierstrass 判别法知该级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭一致收敛, 因此和函数可导. □

4. 解答:$\forall\varepsilon>0$, 由于 $S_n\rightrightarrows S$, 故存在 N, 当 $n>N$ 后对任意 x,y 有

$$|S(x)-S_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3},\quad |S(y)-S_n(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

再由 S_n 一致连续,$\exists\delta>0$, 只要 $|x-y|<\delta$ 就有

$$|S_n(x)-S_n(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

于是, 当 $n>N$ 后, 只要 $|x-y|<\delta$, 就有

$$|S(x)-S(y)|\leqslant|S(x)-S_n(x)|+|S_n(x)-S_n(y)|+|S_n(y)-S(y)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

即 $S(x)$ 一致连续. □

5. 解答: $g(x)$ 可积因此有界, 存在 $M>0$ 使得

$$|f_n(x)|\leqslant g(x)\leqslant M, x\in[a,b], n=1,2,\cdots$$

因此, 我们只需要证明 f 在 $[a,b]$ 上可积即可使用命题 14.2.4 得到结论.

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{4M}$. 设 $f_n \to f$, 因 f_n 可积 (连续), 且在 $[a, b-\delta]$ 上 $f_n \rightrightarrows f$, 因此 f 在 $[a, b-\delta]$ 上可积 (连续). 由此, 对细度任意小的分割

$$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_r = b - \delta < x_{r+1} < \cdots < x_n = b$$

可有

$$\sum_{i=1}^{r} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, ω_i 是 f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅. 显然 $\omega_i \leqslant 2M$, 故有

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{r} \omega_i \Delta x_i + \sum_{i=r+1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon$$

这就证明了 f 在 $[a, b]$ 上可积.

注: 也可以不使用命题 14.2.4, 方法类似徐森林下册 P251 第 614 题. □

6. 解答:

充分性: 由题意, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \exists N, \forall x \in O_\delta(x_0)$(这里我们确保 δ 充分小使得 $O_\delta(x_0) \subset O(x_0)$), 成立

$$|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon$$

又 f_N 在 x_0 处连续, $f_N(x_0) \to f(x_0)$, 因此

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |f_N(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

于是就有

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

即 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

必要性: 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 类似地, 我们可以得到

$$|f_N(x) - f(x)| \leqslant |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

命题得证. □

7. 解答:

必要性: 若 $f_n \rightrightarrows f$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, \forall n > N_1, x \in [a, b]$ 成立 $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

对 $\{x_n\} \to x_0$, $\{x_n\} \subset [a, b]$, 则有 $|f_n(x_n) - f(x_n)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

再依 f 的连续性, 存在 N_2, $n > N_2$ 则 $|f(x_n) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时就有

$$|f_n(x_n)-f(x_0)|\leqslant|f_n(x_n)-f(x_n)|+|f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon$$

即 $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n)=f(x_0)$.

充分性: 若 $f_n \not\rightrightarrows f$, 则存在 $\varepsilon_0>0$, $n\to+\infty$, $|f_n(x_n)-f(x_n)|\geqslant\varepsilon_0$. 由于 $\{x_n\}\subset[a,b]$, 故存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}\to x_0$ 且

$$|f_{n_k}(x_{n_k})-f(x_{n_k})|\geqslant\varepsilon_0$$

利用 f 的连续性存在 N, $\forall n>N$ 有 $|f(x_{n_k})-f(x_0)|<\dfrac{\varepsilon_0}{2}$, 则

$$\varepsilon_0\leqslant|f_{n_k}(x_{n_k})-f(x_{n_k})|\leqslant|f_{n_k}(x_{n_k})-f(x_0)|+|f(x_0)-f(x_{n_k})|$$

$$\Rightarrow|f_{n_k}(x_{n_k})-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0-|f(x_0)-f(x_{n_k})|>\frac{\varepsilon_0}{2}$$

即 $\lim_{n_k\to\infty} f_{n_k}(x_{n_k})\neq f(x_0)$, 矛盾. 假设不成立, 命题得证. □

8. 解答: 本题给的条件较弱, 因此需要加强换序定理.

(1) 先证明 f 可积. (徐森林第三册定理 13.2.3)

反证易知对于 f 中不连续的点, 必然存在 f_n 在此点不连续. 若记 D^* 为 $[a,b]$ 中不连续点的集合, 则

$$D_f^*\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}D_{f_n}^*$$

可数个零测集的并为零测集, 因此 D_f^* 为零测集. 又 $f_n\rightrightarrows f$, 故存在 N_0 使得

$$|f(x)-f_{N_0}(x)|\leqslant1,\quad\forall x\in[a,b]$$

$$|f_{N_0}(x)|\leqslant M\Rightarrow|f(x)|\leqslant|f_{N_0}(x)|+1\leqslant M+1,\quad\forall x\in[a,b]$$

所以 f 在 $[a,b]$ 上有界且不连续点为零测集, 由 Lebesgue 定理知 f 可积.

注: 不用零测集的证明参见伍胜健定理 10.4.3.

(2) 再证明 F_n 的极限与求导运算可换序.(Rudin《数学分析原理》定理 7.17)

由于 f_n 存在原函数, 设 $F_n(x)=\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$ 为 f_n 的一个原函数, 则 $F_n'(x)=f_n(x)\rightrightarrows f$

且显然 $F_n(x)$ 在点 a 处收敛. 于是 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当 $n\geqslant N, m\geqslant N$ 时有

$$|F_n(a)-F_m(a)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad|f_n(t)-f_m(t)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\quad(a\leqslant t\leqslant b)$$

对 F_n-F_m 用 Lagrange 中值定理, 则对任意 $x,t\in[a,b]$ 有

$$|F_n(x)-F_m(x)-F_n(t)+F_m(t)|\leqslant\frac{|x-t|\varepsilon}{2(b-a)}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow|F_n(x)-F_m(x)|\leqslant|F_n(x)-F_m(x)-F_n(a)+F_m(a)|+|F_n(a)-F_m(a)|<\varepsilon$$

即 $\{F_n(x)\}$ 一致收敛. 令 $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)$, 对 $[a,b]$ 上固定的点 $x, a\leqslant t\neq x\leqslant b$ 定义

$$\varphi_n(t)=\frac{F_n(t)-F_n(x)}{t-x},\quad \varphi(t)=\frac{F(t)-F(x)}{t-x} \tag{2}$$

那么

$$\lim_{t\to x}\varphi_n(t)=F_n'(x)=f_n(x) \tag{3}$$

利用 (1) 式可得到

$$|\varphi_n(t)-\varphi_m(t)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\quad(n\geqslant N,m\geqslant N)$$

于是 $\{\varphi_n\}$ 对于 $a\leqslant t\neq x\leqslant b$ 一致收敛. 又因为 $F_n\rightrightarrows F$, 由 (2) 式得到, 对 $a\leqslant t\neq x\leqslant b$ 一定有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\varphi(t)$$

一致地成立. 由 (2)(3) 两式有 (可参看 Rudin《数学分析原理》定理 7.11)

$$\lim_{t\to x}\varphi(t)=\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x}\varphi_n(t)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$$

根据 $\varphi(t)$ 的定义可知

$$F'(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$$

这就证明了 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数.

注: 在一般的教科书中, 积分换序和求导换序的结论都是较弱的. 通常情况积分换序要求连续且一致收敛, 求导换序要求具有连续的导函数且导函数一致收敛, 因此本题不可以直接使用一般的教科书上给出的换序定理.

基于本题, 下面总结: 若函数列 f_n 在 I 上一致收敛于 f, 哪些性质可以传递?

可传递: (1) 连续 (2) 可积 (3) 可导 (4) 原函数存在 (5)(非严格) 单调 (6) 一致连续 (其中 (3) 要有收敛点, (6) 无需 I 是闭区间)

不可传递: (1) 不连续 (2) 不可积 (3) 不可导 (4) 原函数不存在 (5)(严格) 单调 (6) 非一致连续 (7) 有 (无) 界 □

14.3.2 思考题

1. 解答:

(1) 若 $a<x_0<b$

(i) 若 $|x_0-a|<|x_0-b|$, 则级数在 $[a,b]$ 上收敛且一致收敛, 在 $[a,b)$ 上绝对收敛.

(ii) 若 $|x_0-a|>|x_0-b|$, 则级数在 $[a,b]$ 上收敛且一致收敛, 在 $(a,b]$ 上绝对收敛.

(iii) 若 $|x_0-a|=|x_0-b|$, 则级数在 $[a,b]$ 上收敛且一致收敛, 在 (a,b) 上绝对收敛.

(2) 若 $x_0<a<b$, 则级数在 $[a,b]$ 上收敛且一致收敛, 在 $[a,b)$ 上绝对收敛.

(3) 若 $a<b<x_0$, 则级数在 $[a,b]$ 上收敛且一致收敛, 在 $(a,b]$ 上绝对收敛.

(4) 若 $x_0=a$, 则, 则级数在 $[a,b]$ 上收敛且一致收敛, 在 $[a,b)$ 上绝对收敛.

(5) 若 $x_0=b$, 则, 则级数在 $[a,b]$ 上收敛且一致收敛, 在 $(a,b]$ 上绝对收敛.

2. 解答: 记 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径为 R_3, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_nb_n)x^n$ 的收敛半径为 R_4, 则

$$R_3=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n+b_n|}}\geqslant\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\max\{|a_n|,|b_n|\}}}=\min\{R_1,R_2\}$$

$$R_4=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_nb_n|}}\geqslant\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}\cdot\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|b_n|}}=R_1R_2$$

注: (1) 第二个不等式可参看第三章第一组参考题第 6 题.

(2) 也可参看《超越普里瓦洛夫》——数项级数卷第 102 题的解法.

3. 解答: 该级数 $S(x)$ 在端点处一定收敛. 由 $S(x)$ 在 (x_0-R,x_0+R) 内一致收敛的 Cauchy 准则有 $|S_m(x)-S_n(x)|<\varepsilon/2$, 利用 S_m,S_n 的连续性可知 $|S_m(\pm R)-S_n(\pm R)|\leqslant\varepsilon/2<\varepsilon$, 从而 $S(x)$ 在 $[x_0-R,x_0+R]$ 上一致收敛, 在端点处收敛且单侧连续.

4. 解答: 不能. 因为端点可能发散, 无法找到优级数.

5. 解答:

(1) 可取 $a_n=(n+1)(-1)^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^nx^n$ 的收敛半径为 1. 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ 发散, 而 $\int_0^1\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^nx^n\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

(2) 当 $|x|<R$ 时, $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛, 则有

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},\quad x\in(-R,R)$$

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 收敛, 故由 Abel 第二定理知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 在 $x=R$ 处左连续, 故

$$\int_0^R\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\mathrm{d}x=\int_0^R f(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to R^-}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$$

命题成立.

6. 解答: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\left(x^2\right)^n$, 所以 $x^2\in[0,R)$, 其收敛半径为 $\sqrt{R}$.

7. 解答: 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 是正项级数, 结论成立. 因为如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散, 则必然 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$. 对 $\forall M > 0, \exists N, \forall n > N, \sum_{k=0}^{n} a_k > 2M$. 取 $0 < \delta < 1-2^{-\frac{1}{N}}$, 则当 $0 < 1-x < \delta < 1-2^{-\frac{1}{N}}$ 时, $x^N > \frac{1}{2}$. 于是

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n > \sum_{n=0}^{N} a_n x^n > \sum_{n=0}^{N} a_n x^N > \sum_{n=0}^{N} a_n \cdot \frac{1}{2} > M$$

这说明 $\lim_{x\to 1^-} S(x)$ 不存在.

注: 其他解法参见徐森林下册 P283 第 642 题. □

§14.3.4 练习题

1. 解答: 易证

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1^n + 2^n + \cdots + k^n}{n^2}} = k$$

因此

$$\frac{1-x}{1+x} \in \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \Rightarrow x \in \left(\frac{k-1}{k+1}, \frac{k+1}{k-1}\right)$$

考虑端点处有

$$\left|\frac{1^n + 2^n + \cdots + k^n}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^k\right| \leqslant \frac{k}{n^2}$$

由 Weierstrass 判别法知级数在端点处收敛, 所以收敛域为 $\left[\frac{k-1}{k+1}, \frac{k+1}{k-1}\right]$. □

2. 解答: 设 $a_n = a_0 + nd$, 则 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_0 + nd} = 1$, 收敛半径为 1. □

3. 解答: 我们有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{a^n}{1+a^{2n}}} = \begin{cases} a^{-1}, a \geqslant 1 \\ a, \quad 0 < a < 1 \end{cases}$$

故当 $a \geqslant 1$ 时收敛半径为 a, 当 $0 < a < 1$ 时收敛半径为 a^{-1}. □

4. 解答: 记 $a_n = \frac{(n!)^k}{(kn)!}$, 则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[(n+1)!]^k}{[k(n+1)]!} \frac{(kn)!}{(n!)^k} = \frac{(n+1)^k}{(kn+k)(kn+k-1)\cdots(kn+1)}$$

令 $n \to \infty$ 得 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{k^k}$. 故半径为 k^k. 在端点处级数通项不趋于 0, 发散. 故收敛域 $(-k^k, k^k)$.

注: (1) 求收敛半径时也可由 Stirling 公式得到

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n!)^k}{(kn)!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left[\sqrt{2\pi n}\right]^k\left(\frac{n}{e}\right)^{kn}/\sqrt{2k\pi n}\left(\frac{kn}{e}\right)^{kn}}=\frac{1}{k^k}$$

(2) 推广结论参见周民强第二册 P339 例 5.1.9(2).

5. 解答:

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

收敛半径为 e^{-1}. 在端点处通项不趋于 0, 发散. 故收敛域 $(-e^{-1},e^{-1})$.

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}}=1$$

收敛半径为 1. 在 $x=1$ 处, 记 $a_n=\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{e}{n}\right)^n$, 则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n/e<1$$

$$a_n\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\to 0\quad(n\to\infty)$$

由 Leibniz 判别法级数收敛. 在 $x=-1$ 处, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}=+\infty$. 故收敛域 $(-1,1]$.

(3)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{a^n+(-b)^n}{n}}=\max\{|a|,|b|\}$$

收敛半径为 $R=\frac{1}{\max\{|a|,|b|\}}$.

(i) 若 $|a|>|b|$, 则 $R=a^{-1}$. 在 $x=a^{-1}$ 处级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-b/a)^n}{n}$ 级数发散, 在 $x=-a^{-1}$ 处 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+(b/a)^n}{n}$ 收敛. 收敛域为 $[-a^{-1},a^{-1})$.

(ii) 若 $|a|<|b|$, 则 $R=b^{-1}$. 在 $x=b^{-1}$ 处级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+(a/b)^n}{n}$ 收敛, 在 $x=-b^{-1}$ 处级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+(-a/b)^n}{n}$ 发散. 收敛域为 $(-b^{-1},b^{-1}]$.

(iii) 若 $|a|=|b|$, 则在 $x=\pm a^{-1}$ 处级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n}$ 发散. 收敛域为 $(-a^{-1},a^{-1})$.

(4)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{1+n^2}}=1$$

收敛半径为 1. 在 $x=1$ 处, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{1+n^2}}\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$ 收敛 (练习题 13.2.5 的 3(1)). 在 $x=-1$ 处根据 Leibniz 判别法知收敛. 收敛域为 $[-1,1]$.

(5)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}=\lim_{n\to\infty}\exp\left[\frac{\ln n+\gamma+o(1)}{n}\right]=1$$

收敛半径为 1. 在 $x=\pm1$ 处通项不趋于 0, 级数发散. 收敛域为 $(-1,1)$.

注: 本题的和函数是可以计算出来的, 参见陈兆斗 P328 第 35 题.

(6) 记 $a_k=\begin{cases}n^{n^2},k=n^3\\0,k\neq n^3\end{cases}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{n^2}x^{n^3}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kx^k$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^3]{n^{n^2}}=1$. 收敛半径为 1. 在 $x=\pm1$ 处通项不趋于 0, 级数发散. 收敛域为 $(-1,1)$.

(7) 记 $t=x^2+x+1$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin\frac{1}{3n}}=\lim_{n\to\infty}\exp\left[\frac{\ln\sin\frac{1}{3n}}{n}\right]\xlongequal{\text{L'hospital}}\lim_{n\to\infty}\exp\left[-\frac{1}{3n^2}\cdot\frac{\cos(3n)^{-1}}{\sin(3n)^{-1}}\right]=1$$

在 $t=1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{3n}\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$ 发散, 在 $t=-1$ 时由 Leibniz 判别法级数收敛. 收敛域为 $t\in(-1,1]$, 解得 $x\in(-1,0)$.

(8) 令 $t=\frac{x}{3x+1}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n-1}{n^2+1}}=1$$

在 $t=1$ 时级数发散, 在 $t=-1$ 时级数收敛. 收敛域为 $[-1,1)$, 解得 $x\in\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)$. □

6. 解答:

(1) 收敛半径为 1, 在 $x=\pm1$ 时级数收敛, 收敛域为 $[-1,1]$.

$$S'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n-1}=x\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1}$$

$$\left[\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1}\right]'=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^nx^{n-2}=\frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1}=\int_0^t\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\ln(1+x)$$

$$\Rightarrow S(x)=\int_0^t t\ln(1+t)\mathrm{d}t=\frac{(x^2-1)\ln(x+1)}{2}-\frac{x^2-2x}{4}$$

(2) 收敛半径为 1, 在 $x=\pm1$ 时级数收敛, 收敛域为 $[-1,1]$.

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\quad S''(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}$$

$$\Rightarrow S'(x)=2\arctan x\Rightarrow S(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$$

(3) 收敛半径为 1, 在 $x=\pm1$ 时级数发散, 收敛域为 $(-1,1)$.

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}\right]'=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-1}=\frac{2x}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}=\int_0^x\frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t=\ln(1+x^2)$$

$$\Rightarrow S(x)=\left[x\ln(1+x^2)\right]'=\frac{2x^2}{1+x^2}+\ln(1+x^2)$$

(4) 收敛半径为 1, 在 $x=\pm1$ 时级数发散, 收敛域为 $(-1,1)$.

$$S(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2x^{n-1}=xI_1(x)$$

$$\int_0^x I_1(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1}=xI_2(x)$$

$$\int_0^x I_2(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n=-\frac{x}{1+x}$$

$$\Rightarrow I_2(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}\Rightarrow I_1(x)=\frac{2x}{(1+x)^3}-\frac{1}{(1+x)^2}\Rightarrow S(x)=\frac{2x^2}{(1+x)^3}-\frac{x}{(1+x)^2}$$

(5) 收敛半径为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 在 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时级数发散, 收敛域为 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$S(x)=4\sum_{n=0}^{\infty}(2x^2)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n=\frac{4}{1-2x^2}-\frac{1}{1-x^2}$$

(6) 收敛半径为 1, 在 $x=0$ 或 2 时级数发散, 收敛域为 $(0,2)$. 令 $t=x-1$.

$$S(t)=\sum_{n=1}^{\infty}nt^n=t\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}=t\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^n\right)'=t\left(\frac{t}{1-t}\right)'=\frac{t}{(t-1)^2}$$

$$\Rightarrow S(x)=\frac{x-1}{(x-2)^2}$$

7. 解答:

$$u^{(4)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{x^{4n}}{(4n)!}\right]^{(4)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n(4n-1)(4n-2)(4n=2)(4n-3)x^{4n-4}}{(4n)!}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4(n-1)}}{4(n-1)!}=u(x)$$ □

8. 解答: 计算得

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[(2n)!!]^2}x^{2n}$$
$$u'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n}{[(2n)!!]^2}x^{2n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+2)}{[(2n+2)!!]^2}x^{2n+1}$$
$$u''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n(2n-1)}{[(2n)!!]^2}x^{2n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+2)(2n+1)}{[(2n+2)!!]^2}x^{2n}$$

$$xu''+u'+xu=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{[(2n)!!]^2}+\frac{(-1)^{n+1}(2n+2)}{[(2n+2)!!]^2}+\frac{(-1)^{n+1}(2n+2)(2n+1)}{[(2n+2)!!]^2}\right\}x^{2n+1}$$

直接验证每一项的系数为 0, 因此 $xu''+u'+xu=0$. □

9. 解答:

(1) 当 $x\in[-1,1]$ 时,

$$\left|\frac{x^n}{n^2\ln(1+n)}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$$

知 $S_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛, 因而 $S(x)\in C[-1,1]$.

(2) $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\ln(1+n)}$, $S'(-1-0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln(1+n)}$ 收敛, 由命题 7.1.7 知 $S'_-(-1)<+\infty$. $S'(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(1+n)}$ 发散, 由思考题 14.3.2 第 7 题知 $S'_+(1)=+\infty$. □

10. 解答: 当 $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 时, 有 $\left|\frac{2^n}{n^2}x^n\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$, 由 Weierstrass 判别法知级数在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上一致收敛, 所以 f 在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上连续且在 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 上可逐项求导. 在端点处, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ 发散, 由思考题 14.3.2 第 7 题知 $f(x)$ 在 1/2 处不可导, 而 $f'(-0.5+0)$ 收敛, 由命题 7.1.7 知 $f(x)$ 在 $-1/2$ 处虽然不可导但存在右导数. □

11. 解答: 令

$$F(x)=\begin{cases}f(x)+f(1-x), & x=0,1\\ f(x)+f(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x), & x\in(0,1)\end{cases}$$

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且容易由 Weierstrass 判别法知 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上可导, 因此

$$F'(x)=f'(x)-f'(1-x)+\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln x}{1-x}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n\equiv 0$$

故在 $[0,1]$ 上, $F(x)\equiv C$(常数). 由 $F(1)=f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, 显然命题得证. □

12. 解答: 由题意知 S_n 在 $\mathbb{R}$ 上内闭一致收敛于 S, 故对任意闭区间 $[a,b]$, S 在 $[a,b]$ 上连续, 从而也一致连续. 所以对任给的 $\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x,y\in[a,b],|x-y|<\delta$ 有

$$|S(x)-S(y)|<\varepsilon$$

另一方面, $S_n\rightrightarrows S,x\in[a,b]$. 故 $\exists N,\forall n>N,\forall x\in[a,b]$, 有

$$|S_n(x)-S(x)|<\delta$$

于是有

$$|S(S_n(x))-S(S(x))|<\varepsilon,\quad\forall n>N,x\in[a,b]$$

即 $\{S\circ S_n\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭一致收敛于 $\{S\circ S\}$. □

13. 解答:

(1) 设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n$ 的收敛半径为别为 R_1,R_2. 在 $(-R_1,R_1)$ 内成立等式(由题设可知 $R_1\leqslant 1$)

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n$$

由 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛可知 $\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n$ 收敛, 故 $R_2\geqslant R_1$. 又有 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{S_n}\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}$, 故 $R_2\leqslant R_1$. 从而 $R_1=R_2$.

注: 涉嫌遗漏 $a_n\geqslant 0$, 原题参见周民强第二册 P338 例 5.1.7(2).

(2) 由 $R\leqslant 1$ 知 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\geqslant 1$. 由题设知, 当 $n\to\infty$ 时有

$$\frac{S_{n-1}}{S_n}=1-\frac{a_n}{S_n}\to 1$$

进而

$$\sqrt[n]{a_0+a_1+\cdots+a_n}=\sqrt[n]{S_n}=\sqrt[n]{\frac{S_n}{S_{n-1}}\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}\cdots\frac{S_2}{S_1}S_1}\to 1$$

又因 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=0$, 故 $\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时有

$$\frac{a_n}{S_n}<1\Rightarrow a_n<a_0+a_1+\cdots+a_n$$

故

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_0+a_1+\cdots+a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{S_n}=1$$

因此 $\dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}=1,\ R=1.$

注: 其他证法参见徐森林下册 P300 第 656 题. □

14.4.4 练习题

1. 解答:

(i) $f(x)=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{1-x/a}=\dfrac{1}{a}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{a}\right)^n$;

(ii) $f(x)=\dfrac{1}{a-b}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x-b}{a-b}}=\dfrac{1}{a-b}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x-b}{a-b}\right)^n$;

(iii) $f(x)=-\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{1-a/x}=-\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{a}{x}\right)^n$. □

2. 解答: 令 $\dfrac{x-1}{x+1}=t$, 则 $x=\dfrac{1+t}{1-t}$, 于是

$$\begin{aligned}f(x)=\ln x=\ln\frac{1+t}{1-t}&=\ln(1+t)-\ln(1-t)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{2k-1}}{2k-1}\\&=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2k-1}\end{aligned}$$

□

3. 解答: 设 $|f^{(n)}(x)|\leqslant M, n=1,2,\cdots,x\in(-a,a)$. 任取 $x_0\in(-a,a)$, 利用 Lagrange 型余项, 对任意 $x\in(-a,a)$ 有

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\leqslant M\cdot\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0,\quad(n\to\infty)$$

由命题 14.4.3, f 在 $(-a,a)$ 上可以展开为 Maclaurin 级数. □

4. 解答: 由上题结论知 f 可展开为 Maclaurin 级数, 即对任意 $x\in\mathbb{R}$ 有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

由题设可得

$$f(0)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=0$$

由 Rolle 定理, 在 (x_i,x_{i+1}) 间存在 $y_i\to 0$ 使得 $f(y_i)=0,i=1,2,\cdots$. 于是

$$f'(0)=\lim_{n\to\infty}f(y_n)=0$$

以此类推可得 $f^{(n)}(0)=0,n=1,2,\cdots$, 即 $f(x)\equiv 0,x\in(-\infty,+\infty)$.

5. 解答:

(1)$f(x)=\sqrt{4-x}=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}\left(-\frac{x}{4}\right)^n,x\in[-4,4]$;

(2)$f(x)=e^{x\ln a}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^n}{n!},x\in\mathbb{R}$;

(3)

$$\begin{aligned}f'(x)=\frac{4x+3}{1+3x+2x^2}=\frac{2}{1+2x}+\frac{1}{1+x}&=2\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2^{n+1}+1)x^n\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+1}+1}{n+1}x^{n+1},x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

注: 求导后收敛域可能减小, 积分后收敛域可能变大, 在 1/2 处收敛性与推导并不矛盾

(4)

$$f'(x)=\frac{2}{1+x^2}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}$$

$$\Rightarrow f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},x\in[-1,1]$$

(5)$f(x)=\frac{1-x}{1-x^5}=\frac{1}{1-x^5}-\frac{x}{1-x^5}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{5n}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{5n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n,x\in(-1,1)$, 其中

$$a_n=\begin{cases}1,n=5k\\-1,n=5k+1\end{cases}\quad k=0,1,2,\cdots$$

(6) 设 $f(x)=\frac{e^{x^2}}{1-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 则

$$e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}=a_0+a_1x+\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+2}-a_n)x^{n+2}$$

$$\Rightarrow a_0=1,a_1=0,a_{2k}-a_{2k-2}=\frac{1}{k!},a_{2k+1}=0,k=1,2,\cdots$$

$$\Rightarrow a_{2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + a_0 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

再计算收敛半径

$$R^{-1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{a_{2k}} = 1$$

在端点 ± 1 处通项不趋于 0(偶数列趋于 e), 所以收敛域是 $(-1,1)$.

(7) $f(x) = \left[\dfrac{e^x-1}{x}\right]' = \left[\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}\right]' = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}, x \in (-\infty, +\infty)$;

(8) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2} \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^{2n-2}}{(2n)!} \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!}, x \in \mathbb{R}$. □

6. 解答:

(1) $f(x) = \dfrac{1}{3+x} = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{1+\dfrac{x-2}{5}} = \dfrac{1}{5} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n (x-2)^n$;

(2) 令 $t = x+1$, 则

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln \frac{1}{2+t^2} = -\ln 2 - \ln\left(1 + \frac{t^2}{2}\right) \\ &= -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{t^2}{2}\right)^n = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left[\frac{(x+1)^2}{2}\right]^n \end{aligned}$$

(3) $f(x) = \ln x = \ln 3 + \ln\left(1 + \dfrac{x-3}{3}\right) = \ln 3 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{x-3}{3}\right)^n$;

(4) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{x-1}{2} \cdot \dfrac{1}{1+\dfrac{x-1}{2}} = \dfrac{x-1}{2} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-x}{2}\right)^n$;

(5)
$$\begin{aligned} f(x) = \sin x &= \sin\left(\frac{\pi}{6} + x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{2n+1} \end{aligned}$$
□

§14.5.2 参考题

第一组参考题

1. 解答: 令 $S_n(x) = \dfrac{D(x)}{n}$(其中 $D(x)$ 是 Dirichlet 函数), $|S_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n}$, 由 Weierstrass 判别法知 $S_n(x) \rightrightarrows 0$, 但是对每个 n, S_n 在 $[0,1]$ 上处处不连续. □

2. 解答: 归纳易知 $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)^{(k)} = (-1)^k \dfrac{\ln^k n}{n^x}, k = 1, 2, \cdots$. 对任意 $\delta > 0$, 当 $x \in [1+\delta, +\infty)$, n 充分大时有

$$\left|(-1)^k \frac{\ln^k n}{n^x}\right| \leqslant \frac{\ln^k n}{n^{1+\delta}} = \frac{1}{n^{1+\frac{\delta}{2}}} \cdot \frac{\ln^k n}{n^{\frac{\delta}{2}}} < \frac{1}{n^{1+\frac{\delta}{2}}}$$

由 Weierstrass 判别法知对 $k \in \mathbb{Z}_+$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^k \dfrac{\ln^k n}{n^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上内闭一致收敛, 因此

$$\zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln^k n}{n^x}$$

注: $\zeta(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上非一致连续, 非一致收敛, 参见徐森林下册 P270 第 636 题. □

3. 解答: 把 Dirichlet 级数写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_2}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_2}}$$

当 $x > x_2$ 时, 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^{x_2}}$ 收敛, $\dfrac{1}{n^{x-x_2}}$ 单调有界, 由 Abel 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^x}$ 收敛. 同时反证易知 $x < x_1$ 有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^x}$ 发散. 故当 $x \in (-\infty, x_1]$ 时级数发散, 当 $x \in [x_2, +\infty)$ 时级数收敛. 记 $a_1 = x_1, b_1 = x_2$, 取 $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$, 如果 c_1 处级数收敛, 则取 $a_2 = x_1, b_2 = c_1$, 否则取 $a_2 = c_1, b_2 = x_2$, 依次进行下去便得到区间长度趋于 0 的闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$, 于是存在唯一的 $r \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. 注意这样取得的 $\{a_n\}$ 都使级数发散, $\{b_n\}$ 都使级数收敛. 因此任取 $x < r$, 都可取得一个 a_n 满足 $x < a_n < r$, 从而级数发散, 反之亦然.

注: 事实上是把实数集分割成了两个集合, 一个集合可使 Dirichlet 级数收敛, 另一个则使 Dirichlet 级数发散. 直接应用 Dedekind 分割定理 (第三章第二组参考题第 2 题) 也可得到结论. □

4. 解答:

充分性: 因 $S_n(x)$ 连续, 可设 $|f(x)| \leqslant M$. 对任给的 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $x \in (1-\delta, 1]$ 时有

$$|S_n(x)| = |S_n(x) - S_n(1)| < \varepsilon$$

对此 $\delta > 0$, 当 $x \in [0, 1-\delta]$ 时有

$$|S_n(x)| \leqslant (1-\delta)^n M \to 0 \quad (n \to \infty)$$

易见在 $[0, 1]$ 上 $S_n(x) \rightrightarrows 0$.

必要性: $S_n(x)$ 连续又一致收敛, 故极限函数连续. 当 $x \in [0, 1)$ 时显然极限为 0, 由连续性知 $f(1) = 0$. □

5. 解答: 易见 $|x-r_n|\leqslant 1$, 故

$$|u_n(x)|=\frac{|x-r_n|}{3^n}\leqslant\frac{1}{3^n}$$

由 Weierstrass 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛. 又因为 $u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续.

设 $x_0\in[0,1]$ 为一无理数, 考虑级数 $(x\neq x_0)$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-r_n|-|x_0-r_n|}{3^n(x-x_0)}&=\frac{1}{x-x_0}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-r_n|}{3^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_0-r_n|}{3^n}\right)\\&=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\end{aligned}$$

因为

$$\left|\frac{|x-r_n|-|x_0-r_n|}{3^n(x-x_0)}\right|\leqslant\frac{|x-r_n-x_0+r_n|}{3^n|x-x_0|}=\frac{1}{3^n}$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x-r_n|-|x_0-r_n|}{3^n(x-x_0)}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 于是

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}\frac{|x-r_n|-|x_0-r_n|}{3^n(x-x_0)}$$

而

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|x-r_n|-|x_0-r_n|}{3^n(x-x_0)}=\begin{cases}-\dfrac{1}{3^n}, & x_0<r_n\\ \dfrac{1}{3^n}, & x_0>r_n\end{cases}$$

所以

$$f'(x_0)=\sum_{x_0<r_n}\left(\frac{-1}{3^n}\right)+\sum_{x_0>r}\frac{1}{3^n}$$

即 f 在无理点处可微. 再设 x_0 是有理数, 则 $\exists k$, $x_0=r^k$, 同上方法可得 $\sum\limits_{\substack{n=1\\n\neq k}}^{\infty}\frac{|x-r_n|}{3^n}$ 是可微的. 但 $\frac{|x-r_k|}{3^k}$ 在 $x_0=r_k$ 处不可微. 故

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x-r_n}{3^n}=\frac{|x-r_k|}{3'}+\sum_{\substack{n=1\\n\neq k}}^{\infty}\frac{|x-r_n|}{3^n}$$

在 $x_0=r_k$ 处不可微. □

6. 解答: 假设 $f(x_0)\neq 0$, 则考虑带有 Lagrange 型余项的 Taylor 展开式

$$f(x_0)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)x_0^k}{n!}+\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}$$

由于 $a_nf^{(n)}\rightrightarrows 0, x\in[0,1]$, 故对序列 $\xi_n\in[0,1]$ 有

$$n!a_n=\frac{f^{(n)}(\xi_n)a_n}{f(x_0)}\to 0, n\to\infty$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}n!a_n=0$.

注: 这里需要注意的是虽然在以前我们强调仅有任意阶导在 $x=0$ 处的值都为 0 不能推断出 $f(x)$ 可以展开为 Maclaurin 级数 (幂级数) 的 (反例例题 6.2.4). 但是本题我们使用的是带有 Lagrange 型余项的 Taylor 展开式, 只需要任意阶可导的条件即可. □

7. 解答: 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 都收敛, 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nx^n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nx^n$ 在 $(-1,1)$ 内绝对收敛. 因为绝对收敛的级数可以相乘, 因此当 $x\in(-1,1)$ 时有

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)\overset{def}{=\!=}s_1(x)s_2(x)$$

由 Abel 定理立刻得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}c_n&=\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\lim_{x\to1^-}s_1(x)s_2(x)\\&=\lim_{x\to1^-}s_1(x)\cdot\lim_{x\to1^-}s_2(x)=s_1(1)s_2(1)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right)\end{aligned}$$

即 $C=AB$.

注: 不用幂级数的方法可以参看周民强第二册 P271 例 3.4.5(3). □

8. 解答:

(1) 参见练习题 6.2.4 第 3 题的解答过程.

(2) 令

$$f(x)=\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\Rightarrow f'(x)=\frac{2\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{x^2+1}}$$

则

$$(x^2+1)f'^2(x)=4f(x)$$

两边求导整理得

$$xf'(x)+(x^2+1)f''(x)=2$$

应用 Leibniz 公式, 两边求 n 次导得

$$xf^{(n+1)}(x)+nf^{(n)}(x)+(x^2+1)f^{(n+2)}(x)+2nxf^{(n+1)}(x)+n(n-1)f^{(n)}(x)=0$$

令 $x=0$ 得

$$f^{(n+2)}(0)=-n^2f^{(n)}(0)=0$$

结合 $f'(0)=0, f''(0)=2$ 可得

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & ,n=2k-1\\ 2(-1)^n((2k-2)!!)^2 & ,n=2k\end{cases}$$

那么原来函数的 Maclaurin 级数就显然了.

注: (1)(2) 两问的形式都是 $f(x)f'(x)$ 的形式, 这给予了我们启发, 可以总结出这一类题通用的解题方法.

(3) 在练习题 6.2.4 第 3 题中已经解得了 $(\arcsin x)^2$ 的 Maclaurin 级, 除以 x^2 即可. □

9. 解答: 收敛半径为 1 是显然的. 下面考虑

$$(1-x)f(x)=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n+1}=a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n-1})x^n$$

当 $x=1$ 时, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n-1})=L-a_1$ 收敛, 因此由 Abel 第二定理, 其在 1 处左连续, 于是令 $x\to 1^-$ 有

$$(1-x)f(x)\to a_1+L-a_1=L$$

命题得证. □

10. 解答: 设 $P_n(x)=a(n,m)x^m+\cdots+a(n,1)x+a(n,0)$. 由于 $\{P_n(x)\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 $P(x)$, 故对任给的 $\varepsilon>0, \exists N$, 当 $n,k>N$ 时对 $x\in\mathbb{R}$ 有

$$|P_n(x)-P_k(x)|<\varepsilon$$

易见多项式 $f(x)=P_n(x)-P_k(x)$ 上有界, 这说明 $f(x)$ 中没有含 x 的项. 这样 $f(x)$ 必然形如 $a(n,0)-a(k,0)$. 由 ε 的任意性可知 $\{a(n,0)\}$ 收敛, 记收敛于 a. 令 $k\to\infty$ 可得

$$P_n(x)-P(x)=a(n,0)-a(k,0)\to a(n,0)-a$$

显然 $P(x)$ 是多项式. □

11. 解答: 设 $P_n(x)=a_D(n)x^D+a_{D-1}(n)x^{D-1}+\cdots+a_1(n)x+a_0(n)$. 由于 $\{P_n(0)\}$ 收敛, 故 $\{a_0(n)\}$ 收敛. 从而, $\forall x\in[0,1]$, 序列

$$a_D(n)x^D+a_{D-1}(n)x^{D-1}+\cdots+a_1(n)x \tag{1}$$

收敛.

若 $D=1$, 则 $|P_n(x)|=|a_1(n)x+a_0(n)|\leqslant|a_1(n)|+|a_0(n)|=|P_n(1)-P_n(0)|+|P_n(0)|$,
因 $P_n(0)$ 和 $P_n(1)$ 都收敛, 故 $\{P_n(x)\}$ 一致收敛.

以下考虑 $D>1$ 的情形:

(i) 考虑序列

$$a_D(n)+a_{D-1}(n)+\cdots+a_1(n) \tag{2}$$

及序列

$$a_D(n)\left(\frac{1}{2}\right)^D+a_{D-1}(n)\left(\frac{1}{2}\right)^{D-1}+\cdots+a_1(n)\frac{1}{2} \tag{3}$$

由 (1) 可知 (2)(3) 都收敛, 于是又有序列

$$a_D(n)\left(\frac{1}{2}\right)^D+a_{D-1}(n)\left(\frac{1}{2}\right)^D+\cdots+a_1(n)\left(\frac{1}{2}\right)^D \tag{4}$$

收敛. 这样, 令 $b_k=\left(\frac{1}{2}\right)^k-\left(\frac{1}{2}\right)^D$, (3) − (4) 得

$$a_{D-1}(n)b_{D-1}+a_{D-2}(n)b_{D-2}+\cdots+a_1(n)b_1 \tag{5}$$

收敛. 用同样的方法, 令 $c_k=\left(\frac{1}{3}\right)^k-\left(\frac{1}{3}\right)^D$, 可得

$$a_{D-1}(n)c_{D-1}+a_{D-2}(n)c_{D-2}+\cdots+a_1(n)c_1 \tag{6}$$

收敛.

(ii) 考虑序列 (5)(6), 令 $\lambda=\frac{c_1}{b_1}$, 由 $\lambda\cdot(5)-(6)$ 可得

$$a_{D-2}(n)(\lambda b_{D-2}-c_{D-2})+a_{D-3}(n)(\lambda b_{D-3}-c_{D-3})+\cdots+a_1(n)(\lambda b_1-c_1) \tag{7}$$

收敛. 用同样的方法, 取 $\mu=\frac{d_1}{b_1}$, 令 $d_k=\left(\frac{1}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}\right)^D$, 可得

$$a_{D-2}(n)(\mu b_{D-2}-d_{D-2})+a_{D-3}(n)(\mu b_{D-3}-d_{D-3})+\cdots+a_1(n)(\mu b_1-d_1) \tag{8}$$

(iii) 与 (ii) 类似地考虑序列 (7)(8), 又可消去含 $a_{D-2}(n)$ 的项, 得两个收敛序列

$$a_{D-3}(n)B_{D-3}+\cdots+a_1(n)B_1,\qquad a_{D-3}(n)C_{D-3}+\cdots+a_1(n)D_1$$

其中 $B_k,C_k\neq 0,(k=1,2\cdots,D-3)$. 如此进行下去, 可得序列 $\{a_1(n)\},\{a_2(n)\},\cdots,\{a_D(n)\}$ 均收敛. 则

$$|P_n(x)|\leqslant|a_D(n)|+|a_{D-1}(n)|+\cdots+|a_1(n)|$$

由 Weierstrass 判别法知 $P_n(x)$ 于 $[0,1]$ 上一致收敛.

注: (1) $\{P_n(x)\}$ 的系数收敛, 可见极限函数也是多项式.

(2) 这里的 $[0,1]$ 区间改作任意的闭区间 $[a,b]$. □

12. 解答: 必要性是第 10 题的直接推论. 下证充分性:

由于 $f(x)$ 是多项式, 故可令 $f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_0$, 则当 $k=0,1,\cdots,m$ 时 $a_k=\dfrac{1}{k!}f^{(k)}(0)$, 当 $k>m$ 时, $f^{(k)}(x)=0$. 这样, 当 $n>m$ 时, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n&=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{1}{m!}f^{(m)}(0)x^m\\&=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m=f(x)\end{aligned}$$

从而 $\forall\varepsilon>0,\exists N=m$, 当 $n>N$ 时, $\forall x\in\mathbb{R}$, 有

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-f(x)\right|<\varepsilon$$

即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 一致收敛于 $f(x)$.

注:$(-\infty,+\infty)$ 改为任意闭区间 $[a,b]$ 后结论未必成立. 例如令 $P_n(x)=\sum\limits_{n=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}$, 则 $\{P_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 e^x, 但 e^x 不是多项式. 本质原因就在于 $\{P_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上非一致收敛. □

13. 解答: 易知

$$C(-y-1)=\binom{-y-1}{2003}=\frac{(-1)^{2003}(y+1)(y+2)\cdots(y+2003)}{2003!}$$

代入原式后注意到

$$\begin{aligned}\text{原式}&=-\frac{1}{2003!}\int_0^1[(y+1)(y+2)\cdots(y+2003)]'\,\mathrm{d}y\\&=-\frac{(2004-1)2003!}{2003!}=-2003\end{aligned}$$

注: 从证明过程可见 2003 可以改为任意正整数 k 作为推广结论. □

14. 解答: 记

$$f(m,n)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^2n}{3^m\left(n3^m+m3^n\right)}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^2n^2}{n3^m\left(n3^m+m3^n\right)}$$

显然 $f(m,n)$ 中 m,n 地位相同, 即 $f(m,n)=f(n,m)$. 因此

$$f(m,n)=\frac{f(m,n)+f(n,m)}{2}$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^2n^2}{n3^m(n3^m+m3^n)}&=\frac{1}{2}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^2n^2}{n3^m(n3^m+m3^n)}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n^2m^2}{m3^n(m3^n+n3^m)}\right]\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n^2m^2}{m3^n+n3^m}\left(\frac{1}{n3^m}+\frac{1}{m3^n}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n^2m^2}{m3^n+n3^m}\frac{m3^n+n3^m}{mn3^m3^n}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{nm}{3^m3^n}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{3^m}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\right)^2=\frac{9}{32}\end{aligned}$$

□

15. 解答: 记事件 A 为甲投中六点, 事件 B 为乙投中六点, 则所求概率为

$$\begin{aligned}P&=P(A)+P(\bar{A})P(\bar{B})P(A)+P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{A})P(\bar{B})P(A)+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}P(A)\left[P(\bar{A})P(\bar{B})\right]^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{25}{36}\right)^n=\frac{6}{11}\end{aligned}$$

□

16. 解答: 设第 n 年的这一天需要提取 n 万元所需要的本金为 a_n, 则得有本息和 $a_n(1+0.01a)^{n-1}\geqslant n$, 即

$$a_n\geqslant\frac{n}{(1+0.01a)^{n-1}}$$

记 $x=\dfrac{1}{1+0.01a}$, 总本金至少得为

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{(100+a)^2}{a^2}$$

□

第二组参考题

1. 解答: 与命题 14.2.4 的证明类似. 对任给的 $\varepsilon>0$, 定义

$$\{A_n\}=\{x\in[a,b]|\exists i,j\geqslant n\ s.t.\ |f_i(x)-f_j(x)|\geqslant\varepsilon\}$$

由于 f_n 在 $[a,b]$ 上收敛, 则 A_n 为单调递减序列且 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$. 记

$$\alpha_n=\sup\{m(E)|E\text{为含于}A_n\text{中的初等集}\}$$

由 Lewin 引理 (命题 14.2.5) 得 $\alpha_n \to 0(n \to \infty)$. 故 $\exists N, \forall n > N$, 对于 A_n 中的初等集 E 有 $m(E) < \varepsilon$. 下证对 $\forall m, n > N$ 存在常数 K 使得 $\int_a^b |f_n - f_m| \leqslant K\varepsilon$.

对 $\forall m, n > N$, 存在阶梯函数 $S(x)$ 使得在 $[a, b]$ 上有

$$0 \leqslant S(x) \leqslant |f_n(x) - f_m(x)|$$

再定义 $E = \{x \in [a, b] | S(x) \geqslant \varepsilon\}$, $F = [a, b] \backslash E$, 则 $E \subset A_n$ 从而 $m(E) < \varepsilon$. 于是对 $\forall x \in F$ 有 $S(x) < \varepsilon$. 又 $\{f_n\}$ 一致有界, 设 $|f_n| \leqslant M$, 于是有

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x = \int_E S(x)\mathrm{d}x + \int_F S(x)\mathrm{d}x \leqslant 2M \cdot m(E) + (b-a)\varepsilon \leqslant (2M + b - a)\varepsilon$$

因此 $\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ 是 Cauchy 列, 必然收敛. □

2. 解答: 在练习题 14.2.4 第 8 题中已经证得 f 可积, 于是由 $f_n \rightrightarrows f$ 可知 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, $\forall n > N$ 有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon(b-a)\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

注: 也可用定积分的定义去证, 参见裴礼文 P531 例 5.2.55. □

3. 解答: 由于 f 在 $[a, b]$ 上连续, 故也一致连续, 从而

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in [a, b]\text{且}|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

将 $[a, b]$ 划分为

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$$

满足 $0 < x_{i+1} - x_i < \delta, i = 0, 1, 2, \cdots, m-1$, 于是

$$\forall i = 0, 1, 2, \cdots, m, \forall x \in [x_i, x_{i+1}], |f(x) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

另一方面由题设条件 f_n 逐点收敛于 f, 于是 $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2 \cdots, m$. 即

$$\exists N, \forall i = 0, 1, 2, \cdots, \forall n > N, |f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

设 $x \in [a, b]$, 于是 $\exists i$ 使得 $x \in [x_i, x_{i+1}]$. 不妨设 f_n 单调递增, 则有

$$f_n(x_i) \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(x_{i+1})$$

从而对 $\forall n > N$ 有

$$[f_n(x_i) - f(x_i)] + [f(x_i) - f(x)] \leqslant f_n(x) - f(x) \leqslant [f_n(x_{i+1}) - f(x_{i+1})] + [f(x_{i+1}) - f(x)]$$

联系 (1)(2) 式可知

$$-\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < f_n(x) - f(x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

即

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

即 $f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in [a,b]$.

4. 解答: 对 $\forall x \in [a,b]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. 由于 $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$, 所以 $f(x) \geqslant f_1(x)$. 而 $f_1(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 故 $f_1(x)$ 在 $[a,b]$ 上有下界 m, 则 m 也是 $f(x)$ 的下界, 从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有下确界. 记 $\mu = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. 下面证明 μ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值.

由下确界定义

$$\exists x_m \in [a,b], m = 1,2,\cdots, s.t. \lim_{m\to\infty} f(x_m) = \mu$$

注意到 $\{x_m\}$ 为有界数列, 因此存在收敛子列 $\{x_{m_k}\}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} x_{m_k} = x_0 \in [a,b]$$

假设 $f(x_0) \neq \mu$, 则 $\exists \mu_1 > \mu, s.t. f(x_0) > \mu_1 > \mu$. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, 故 $\exists N$, 使得 $f_N(x_0) > \mu_1$. 又 f_N 连续, 故 $\exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时有 $f_N(x) > \mu_1$.

再联系 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} = x_0$, 则存在 K, 当 $k > K$ 时 $|x_{m_k} - x_0| < \delta$. 此时便有

$$f(x_{m_k}) \geqslant f_N(x_{m_k}) > \mu_1$$

则

$$\mu = \lim_{k\to\infty} f(x_{m_k}) \geqslant \mu_1 > \mu$$

矛盾. 因此 $f(x_0) = \mu$, 命题得证.

注: 如果把 $[a,b]$ 换成 (a,b), 则只要取 $f_n(x) \equiv x$, 则 $f(x) = x$ 在 (a,b) 上没有最值. 如果把最小值换成最大值, 则可令

$$f_n(x) = \begin{cases} (1-n)x + (n-1), & 1 - \dfrac{1}{n} < x \leqslant 1 \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 - \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 1 \\ x, & 0 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

而 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上无最大值.

5. 解答:

(1) 易知存在收敛子列 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, 设 $x_{n_k} \to x_0 \in [a,b]$ 则有

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_0) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$$

由 Cauchy 准则, 对任给的 $\varepsilon > 0, \exists N_{k_\alpha}, \forall n_{k_1}, n_{k_2} > N_{k_\alpha}$, 有

$$\left|f_{n_{k_1}}(x_0) - f_{n_{k_2}}(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

由 $\{f_n'\}$ 一致收敛, 则存在 $N_{k_\beta}, \forall n_{k_1}, n_{k_2} > N_{k_\beta}$, 有

$$|f'_{n_{k_1}}(x_0) - f'_{n_{k_2}}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

令 $N_{k_\gamma} = \max\{N_{k_\alpha}, N_{k_\beta}\}$, 则当 $n_{k_1}, n_{k_2} > N_{k_\gamma}$ 时, 对 $\forall x \in [a,b]$ 有

$$\begin{aligned}
\left|f_{n_{k_1}}(x) - f_{n_{k_2}}(x)\right| &= \left|f_{n_{k_1}}(x_0) + \int_{x_0}^x f'_{n_{k_1}} - f_{n_{k_2}}(x_0) - \int_{x_0}^x f'_{n_{k_2}}\right| \\
&\leqslant \left|f_{n_{k_1}}(x_0) - f_{n_{k_2}}(x_0)\right| + \int_{x_0}^x \left|f'_{n_{k_1}} - f'_{n_{k_2}}\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}|x - x_0| \leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

由 Cauchy 准则,$\{f_{n_k}\}$ 于 $[a,b]$ 上一致收敛.

(2) 任给 $\varepsilon > 0$, 因为 $f_{n_k} \rightrightarrows f, x \in [a,b]$, 所以 $\exists N_{k_\alpha} \in \mathbb{N}$, 当 $n_k > N_{k_\alpha}$ 时,$\forall x \in [a,b]$ 有

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

由 $\{f_{n_k}\}$ 的一致收敛性及连续性知 f 连续且一致连续, 即 $\exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时有

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

又存在 N_{k_β}, 当 $n_k > N_{k_\beta}$ 时 $|x_{n_k} - x_0| < \delta$, 此时

$$|f(x_{n_k}) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

取 $N_{k_\gamma} = \max\{N_{k_\alpha}, N_{k_\beta}\}$, 则当 $n_k > N_{k_\gamma}$ 时有

$$|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_0)| \leqslant |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| + |f(x_{n_k}) - f(x_0)| < \varepsilon$$

这说明

$$x_0 = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_{n_k}) = f(x_0)$$

(3) 练习题 14.2.4 第 8 题中已经证明. □

6. 解答: 由 Dini 定理知 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 于是对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{Z}_+$ 对 $\forall p\in\mathbb{Z}_+, x\in[a,b]$, 有 $v_{N+1}(x)+v_{N+2}(x)+\cdots+v_{N+p}(x)<\varepsilon$, 而由已知条件知

$$\left|\sum_{n=N+1}^{N+p} u_n(x)\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{N+p} |u_n(x)| \leqslant \sum_{n=N+1}^{N+p} v_n(x) < \varepsilon$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

7. 解答: 先考虑 $x\in(0,\pi)$(端点处结论平凡). 当 $n\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{x}$ 时, 始终有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{|\sin kx|}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{kx}{k} = nx \leqslant \sqrt{\pi}$$

如果 $n>\frac{\sqrt{\pi}}{x}$, 取 $m=\left[\frac{\sqrt{\pi}}{x}\right]$, 记 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}$, 则

$$2\sin\frac{x}{2}[S_n(x)-S_m(x)] = -\sum_{k=m+1}^{n}\frac{[\cos(k+1/2)x-\cos(k-1/2)x]}{k}$$

$$=\frac{\cos(m+1/2)x}{m+1}-\sum_{k=m+1}^{n-1}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\cdot\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{\cos(n+1/2)x}{n}$$

可知

$$|S_n(x)-S_m(x)| \leqslant \frac{2}{(m+1)\left(2\sin\frac{x}{2}\right)} \leqslant 2\frac{x/\sqrt{\pi}}{2\sin\frac{x}{2}} \leqslant 2\frac{\pi/2}{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\pi}$$

综上可知

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{[\sqrt{\pi}/x]}\frac{\sin kx}{k}\right| + \left|\sum_{k=[\sqrt{\pi}/x]+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant 2\sqrt{\pi}$$

由奇偶性与周期性可知原不等式对所有 n 和 x 成立.

注: 事实上有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \mathrm{Si}(\pi) = \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \approx 1.85$$

并且右边的常数不能用更小的常数代替.

8. 解答: 参见第十一章第二组参考题第 15 题.

9. 解答: 考虑

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\binom{n}{1}\frac{x}{n}+\binom{n}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2+\cdots+\binom{n}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^n$$

因而

$$e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{1}{k!} - \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right]x^k \tag{1}$$

$$e^{|x|} - \left(1+\frac{|x|}{n}\right)^n = \sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{1}{k!} - \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right]|x|^k \tag{2}$$

对 (1)(2) 用三角不等式, 题目中的左边不等式就得证. 再考虑

$$\frac{x^2}{2n}\cdot e^{|x|} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{|x|^k}{2n(k-2)!} \tag{3}$$

对比 (2)(3) 式的系数, 要证题目中右边不等式成立, 即要证

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k!} - \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} < \frac{1}{2n(k-2)!}\\ \Longleftarrow &1 - \frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{n^k} < \frac{k(k-1)}{2n}\\ \Longleftarrow &1 - \frac{k(k-1)}{2n} < \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\end{aligned}$$

由 Bernoulli 不等式 (命题 1.3.1), 原不等式得证. □

10. 解答:

(1) 由第十三章第二组参考题第 19 题的结论可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = 0$, 则存在 $N > 0$, 当 $n \geqslant N$ 后有 $|a_n| \leqslant \frac{1}{n}$, 于是

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

这说明收敛半径 $R \geqslant 1$, 所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-1,1)$ 内收敛.

(2) 考虑

$$\begin{aligned}&(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_{n+1}x^n\\ =&\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_{n+1}x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_{n+1}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_{n+1}x^{n+2}\\ =&\sigma_1 + (2\sigma_2 - 2\sigma_1)x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+1)\sigma_{n+1} - 2n\sigma_n + (n-1)\sigma_{n-1}\right]x^n\\ =&a_0 + a_1x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(S_0+\cdots+S_n) - 2(S_0+\cdots+S_{n-1}) + (S_0+\cdots+S_{n-2})\right]x^n\\ =&a_0 + a_1x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[S_n - S_{n-1}\right]x^n = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\end{aligned}$$

(3) 利用公式

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2}$$

以及 (2) 的结论可知

$$\begin{aligned}|S(x)-S|&=\left|(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_{n+1}x^n-(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^nS\right|\\&=(1-x)^2\left|\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\sigma_{n+1}-S)x^n\right|\\&\leqslant(1-x)^2\sum_{n=0}^{N}(n+1)|\sigma_{n+1}-S|+(1-x)^2\sum_{n=N+1}^{\infty}(n+1)x^n|\sigma_{n+1}-S|\end{aligned}$$

上述 N 满足对 $\forall\varepsilon>0,\forall n>N$ 都有

$$|\sigma_{n+1}-S|<\frac{\varepsilon}{2}$$

再由 $(1-x)^2\to0(x\to1^-)$ 即存在 $\delta>0$, 在 $(1-\delta,1)$ 内有

$$(1-x)^2<\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{N}(n+1)|\sigma_{n+1}-S|}$$

于是 $|S(x)-S|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{x\to1^-}S(x)=S$. □

11. 解答: 由题设知, 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1,s.t.$ 当 $n>N_1$ 时 $\left|\dfrac{b_n}{a_n}-A\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 则

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}b_kx^k}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx^k}-A\right|&=\frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-Aa_k)x^k\right|}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx^k}\leqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\left|\frac{b_k}{a_k}-A\right|x^k}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx^k}\\&=\frac{\sum\limits_{k=1}^{N_1}a_k\left|\frac{b_k}{a_k}-A\right|x^k+\sum\limits_{k=N_1+1}^{n}a_k\left|\frac{b_k}{a_k}-A\right|x^k}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx^k}\\&\leqslant\frac{M}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx^k}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\sum\limits_{k=N_1+1}^{n}a_kx^k}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx^k}<\frac{M}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx^k}+\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 1 处发散, 因此存在 $\delta>0,N_2\in\mathbb{Z}_+$, 当 $x\in(1-\delta,1)$ 且 $n>N_2$ 时有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x^k > \frac{2M}{\varepsilon}$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则可得

$$\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k x^k}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^k} - A\right| < \varepsilon$$

命题得证. □

12. 解答: 由 Abel 第二定理 (命题 14.3.2) 显然. □

13. 解答: 考虑 Taylor 公式的积分型余项 (命题 11.4.3)

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \mathrm{d}t$$

注意到

$$\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \xlongequal{t=ux} \frac{1}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(ux)(1-u)^n \mathrm{d}u$$

由于 $f^{(n+2)}$ 非负, 所以 $f^{(n+1)}$ 递增, 于是对 $\forall x \in [0, r)$, 有

$$\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leqslant \frac{R_n(r)}{r^{n+1}}$$

又有 $R_n(r) \leqslant f(r)$, 于是得到

$$R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} f(r) \to 0, \quad n \to \infty$$

所以在 $[0, r)$ 上 $f(x)$ 可展成 Maclaurin 级数. □

14. 解答: 考虑

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x-x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
1 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\
&= a_0 + (a_1 - a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty}(a_{n+2} - a_{n+1} - a_n)x^n
\end{aligned}$$

由此验证

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, a_0 = a_1 = 1$$

另一方面

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x-x^2}&=\frac{2}{\sqrt{5}(2x+\sqrt{5}+1)}+\frac{2}{\sqrt{5}(-2x+\sqrt{5}-1)}\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}x}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x}\right]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]x^n\end{aligned}$$

由此可见

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 是熟知的, 可参看例题 2.6.2 的注.

15. 解答: 考虑等式

$$(1+x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}=(1+x)^{\alpha+\beta}$$

用幂级数表示, 上式成为

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\beta}{n}x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+\beta}{n}x^n$$

比较两端 x^n 系数即得证等式

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}=\binom{\alpha+\beta}{n}$$

令 $\alpha=\beta=n$ 则有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{2n}{n}$$

注: 利用组合学的方法证明参见 Richard A. Brualdi《组合数学》P83.

第十五章 Fourier 级数

§15.1.5 练习题

1. 解答:
(1) 注意到

$$\sin^3 x + \cos^4 x = \sin x \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$$

它是一个三角多项式, 由例题 15.1.1 的结论可知它的 Fourier 级数是它本身.
(2) 在例题 15.1.2 中我们已知

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin nx$$

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

$$x^3 \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2\pi^2}{n} - \frac{12}{n^3}\right) \sin nx$$

因此

$$ax^3+bx^2+cx+d \sim \frac{\pi^2+3d}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n-1}\left(\frac{2\pi^2 a+2c}{n} - \frac{12a}{n^3}\right)\sin nx + \frac{4(-1)^n b}{n^2}\cos nx\right]$$

注: Fourier 变换是线性变换, 即如果 $f_1 \sim g_1, f_2 \sim g_2$ 则 $af_1 + bf_2 \sim ag_1 + bg_2$. □

2. 解答: 由题意要求 $b_{2n} = 0$, 即

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 2nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin 2nx\mathrm{d}x = 0$$

由于 $\sin 2nx$ 在 $[0,\pi]$ 上关于其中点为奇函数, 即要 $f(x)$ 关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 为偶函数, 延拓方式为

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ f(\pi - x), & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \\ 0, & x = 0, \frac{\pi}{2} \\ -f(-x), & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$ □

3. 解答: $f(x)$ 为奇函数, 可展开为正弦级数. 又 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 为偶函数, 由上题结论可知

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}\sin(2n-1)x$$

我们计算

$$b_{2n-1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}c\sin(2n-1)x\mathrm{d}x=\frac{2c}{\pi}\cdot\frac{1}{2n-1},\quad b_{2n}=a_n=0$$

于是

$$S_n=\frac{2c}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

另一方面, 注意到

$$\sin 2nt=2\sin t(\cos t+\cos 3t+\cdots+\cos(2n-1)t)$$

于是有

$$\int_0^x\frac{\sin 2nt}{\sin t}\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)t\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

因此有

$$S_n(x)=\frac{2c}{\pi}\int_0^x\frac{\sin 2nt}{\sin t}\mathrm{d}t$$

4. 解答: 分部积分可知

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}f(x)\mathrm{d}x$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}[f(\pi)-f(-\pi)]+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}f(x)\mathrm{d}x$$

由 Riemann 引理 (例题 10.2.6) 可知

$$\lim_{n\to\infty}na_n=0\Rightarrow a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\exists M>0,\quad nb_n\leqslant\frac{|f(\pi)-f(-\pi)|}{\pi}+M\Rightarrow b_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

如果还有 $f(\pi)=f(-\pi)$, 则可见

$$\lim_{n\to\infty}nb_n=0\Rightarrow b_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$$

注: 推广结论 (命题 15.1.4) 参见徐森林第二册 P248 定理 16.1.5.

5. 解答: 记 $f(x)\leqslant M, x\in(-\pi,\pi)$. 设

$$-\pi=x_0<x_1<\cdots<x_k=\pi$$

f 在 (x_{i-1},x_i) 上单调, $i=1,\cdots,k$. 由积分第二中值定理 (命题 10.2.2) 可知

$$|a_n| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{k}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\cos nx\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{k}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\cos nx\mathrm{d}x\right|$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{k}\left|f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{\xi_i}\cos nx\mathrm{d}x + f(x_i)\int_{\xi_i}^{x_i}\cos nx\mathrm{d}x\right|$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{k}\left|f(x_{i-1})\frac{\sin n\xi_i - \sin nx_{i-1}}{n} + f(x_i)\frac{\sin nx_i - \sin n\xi_i}{n}\right| \leqslant \frac{2kM}{n\pi}$$

故有 $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. 同理可知 $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

注: (1) 这里 $f(x_0)$ 与 $f(x_k)$ 为 $f(-\pi+0)$ 和 $f(\pi-0)$.

(2) 也可借助全变差或 Stieltjes 积分证明, 参见裴礼文 P586 例 5.4.6. □

6. 解答: 设

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

考虑

$$\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\right]\sin x$$

中 $\sin nx$ 的系数. 由积化和差公式, 该项系数只与 $\cos(n-1)x\sin x$ 与 $\cos(n+1)x\sin x$ 有关, 即知 $\sin nx$ 的系数为 $\frac{a_{n-1}-a_{n+1}}{2}$. 再直接计算 $\sin nx$ 的系数

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos(n-1)x - \cos(n+1)x)\mathrm{d}x = \frac{a_{n-1}-a_{n+1}}{2}$$

可见这是一致的. 同理可知 $\cos nx$ 的系数也是一致的. 由此命题得证. □

7. 解答: 在 $[a,b]$ 上的定积分是一种内积运算, 因此本题可以推广到一般的内积形式. 我们用 $\|\cdot\|$ 表示范数 $\langle\,,\rangle$ 表示内积. 我们注意到

$$\begin{aligned}
\left\|f - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right\|^2 &= \left\langle f - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, f - \sum_{l=1}^{n} a_l e_l\right\rangle \\
&= \langle f,f\rangle - \sum_{l=1}^{n} a_l\langle f,e_l\rangle - \sum_{k=1}^{n} a_k\langle e_k,f\rangle + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_k a_l\langle e_k,e_l\rangle \\
&= \langle f,f\rangle - 2\sum_{k=1}^{n} a_k\langle f,e_k\rangle + \sum_{k=1}^{n} a_k a_l\delta_{kl} \\
&= \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k c_k + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k - c_k)^2 \\
&\geqslant \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2
\end{aligned}$$

易见当且仅当 $a_k = c_k, k = 1,2,\cdots,n$ 时 $\left\|f - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right\|^2$ 达到最小值

$$\|f-\sum_{k=1}^{n}a_ke_k\|=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}c_k^2$$

此时也有

$$\sum_{k=1}^{n}c_k^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}c_k^2+\left\|f-\sum_{k=1}^{n}c_ke_k\right\|^2=\|f\|^2$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n^2$ 部分和有界从而收敛.

8. 解答: 设 $G(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$, 则 $G(0)=G(1)=\cdots=0, G(x)=G(x+1)$ 且

$$G(nx)=\int_0^{nx}g(t)\mathrm{d}t=\int_{[nx]}^{nx}g(t)\mathrm{d}t=\int_0^{nx-[nx]}g(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1|g(t)|\mathrm{d}t\overset{def}{=\!=}M$$

我们有

$$a_n=\int_0^1 f(x)g(nx)\mathrm{d}x=f(x)\frac{G(nx)}{n}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{G(nx)}{n}f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{n}\int_0^1 G(nx)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow a_n^2\leqslant\frac{M^2}{n^2}\left(\int_0^1|f'(x)|\mathrm{d}x\right)^2$$

因此 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

□

§15.2.7 练习题

1. 解答: 将 $f(x)$ 延拓为 $(-\pi,\pi)$ 上的偶函数并定义 $f(0)=0$, 则

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}x\cos nx\mathrm{d}x+\int_{\pi/2}^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos nx\mathrm{d}x\right]\\&=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{k-1}}{2k-1}-\dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{1}{(2k-1)^2}, & n=2k-1\\0, & n=2k\\\dfrac{\pi}{2}, & n=0\end{cases}\quad(k\in\mathbb{Z}_+)\end{aligned}$$

于是得到

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

令 $x=0$, 得到

$$\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=0=\frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

由于

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

故

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4}$$

□

2. 解答:

(1) 作偶延拓, 则

$$a_n=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x=\frac{2}{a}\left[\int_0^{a/2}x\cos\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x+\int_{a/2}^{a}(a-x)\cos\frac{n\pi x}{a}\right]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a}{k^2\pi^2}[(-1)^k-1], & n=2k\\ 0, & n=2k-1\\ \dfrac{a}{2}, & n=0\end{cases}\quad(k\in\mathbb{Z}_+)$$

$$f(x)\sim\frac{a}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{a}$$

(2) 作奇延拓, 则

$$b_n=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x=\frac{2}{a}\left[\int_0^{a/2}x\sin\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x+\int_{a/2}^{a}(a-x)\sin\frac{n\pi x}{a}\right]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4a(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1\\ 0, & n=2k\end{cases}\quad(k\in\mathbb{Z}_+)$$

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{a}$$

□

3. 解答: 不难计算得到 (徐森林第三册 P257 例 16.1.4)

$$\cos\alpha x\sim\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\sin\alpha x}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha+n}+\frac{1}{\alpha-n}\right)\cos nx \tag{1}$$

在 (1) 式中令 $x=\pi$ 得

$$\cos\alpha\pi=\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha+n}+\frac{1}{\alpha-n}\right)$$

令 $\alpha = y/\pi$ 得

$$\cos y = \frac{\sin y}{y} + \sum_{n=1}^{\infty} \sin y \left(\frac{1}{y+n\pi} + \frac{1}{y-n\pi} \right)$$

令 $y = x$ 整理即得

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-n\pi} + \frac{1}{x+n\pi} \right) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$$

类似地, 在 (1) 式中令 $x = 0$, $\alpha = y/\pi$, 再令 $y = x$ 整理即得

$$\csc x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x-n\pi} + \frac{1}{x+n\pi} \right) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$$

从 (1) 式中也不难得出

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1 - \pi\alpha \cot \alpha\pi}{2\alpha^2}$$

4. 解答:

(1)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos nx = -\frac{2(-1)^n + 2}{n^2 - 1}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \sin nx = 0$$

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n + 2}{n^2 - 1} \cos nx = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 - 1} \cos 2nx$$

(2)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} ax \cos nx \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} bx \cos nx \mathrm{d}x \right] = \frac{a-b}{n^2\pi} [1 - (-1)^n], a_0 = \frac{b-a}{2}\pi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} ax \sin nx \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} bx \sin nx \mathrm{d}x \right] = \frac{a+b}{n} (-1)^{n+1}$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4}(b-a) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2(a-b)}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + \frac{(-1)^{n+1}}{n} (a+b) \sin nx \right]$$

5. 解答:

(1)

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} e^{-2x} \sin nx \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{n - e^{-2\pi}(-1)^n}{n^2 + 4}$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{n - e^{-2\pi}(-1)^n}{n^2 + 4} \sin nx$$

(2)

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^1 \cos\frac{\pi x}{2}\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{4k-2-2(-1)^{k-1}}{(4k^2-4k)\pi}, & n=2k-1 \\ 0, \quad n=2k \end{cases} \quad (k\in\mathbb{Z}_+),$$

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-2-2(-1)^{n-1}}{(4n^2-4n)\pi}\sin(2n-1)x$$ □

6. 解答:

(1)

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi-x)\cos nx\mathrm{d}x = -\frac{2[1+(-1)^n]}{n^2}, a_0 = \frac{\pi^2}{3}$$

$$f(x)\sim\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}$$

(2)

$$a_n = \frac{4}{\pi}\left[\int_0^{\pi/4}\sin 2x\cos 2nx\mathrm{d}x+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos 2nx\mathrm{d}x\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(-1)^{k-1}(2k-1)-1}{8k^2-8k}+\dfrac{(-1)^k}{4k-2}, & n=2k-1 \\ 0, \quad n=2k \\ \dfrac{\pi+2}{4}, \quad n=0 \end{cases}$$

$$f(x)\sim\frac{\pi+2}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)-1}{8n^2-8n}+\frac{(-1)^n}{4n-2}\right]\cos(2n-1)x$$ □

7. 解答: $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上是奇函数, 则

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{n}, a_n = 0$$

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin nx}{n}$$

对每个 $x\in(-\pi,\pi]$, 可由 Dirichlet 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin nx}{n}$ 点点收敛, 但对 $\forall N$, 取 $x_n = \frac{\pi}{4(n+1)}\in(-\pi,\pi]$ 有

$$\left|\frac{2\sin(n+1)\cdot\dfrac{\pi}{4(n+1)}}{n+1}+\cdots+\frac{2\sin 2n\cdot\dfrac{\pi}{4(n+1)}}{2n}\right|\geqslant 2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\frac{n}{2n}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

由 Cauchy 准则知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin nx}{n}$ 在 $(-\pi,\pi]$ 上非一致收敛. □

8. 解答: 由第十章第一组参考题第 5 题的结论可知, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在连续函数 $g(x)$ 使得有

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}$$

设

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

记右端的前部分和为 $S_n(x)$ 且 $S_0 = \dfrac{a_0}{2}$, 则对 $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_n(x)}{n+1}$$

为三角多项式. 且由 Fejér 定理 (命题 15.2.4) 知 $\sigma_n(x) \rightrightarrows g(x)$, 于是有

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(x) - g(x)|\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}$$

则我们得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sigma_n(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - \sigma_n(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon$$

命题得证. □

9. 解答: 如果右边级数一致收敛, 则易见其和函数 $g(x)$ 连续, 且右边级数就是 $g(x)$ 的 Fourier 级数. 因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的 Fourier 级数相同, 由命题 15.2.3 知 $f(x) = g(x)$. □

10. 解答: 容易计算得到

$$f(x) \sim \frac{a}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin na}{n\pi} \cos nx$$

这里

$$a_0 = \frac{2a}{\pi}, a_n = \frac{2\sin na}{n\pi}, b_n = 0$$

由 Parseval 恒等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2} = \frac{a\pi - a^2}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 na}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{a\pi - a^2}{2}$$

□

15.3.2 参考题

1. 解答:

(1) 由 f 可积知 f 有界, 则据广义的积分第二中值定理 (第十二章第一组参考题第 13 题) 有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x &= f(0^+)\int_0^{\xi}\sin nx\mathrm{d}x + f((2\pi)^-)\int_{\xi}^{2\pi}\sin nx\mathrm{d}x\\ &= f(0^+)\frac{1-\cos n\xi}{n} + f((2\pi)^-)\frac{\cos n\xi - 1}{n}\\ &= \frac{1-\cos n\xi}{n}\left[f(0^+) - f((2\pi)^-)\right] \geqslant 0\end{aligned}$$

(2) 考虑

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}\sin nx = \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}[-f'(x)]\sin nx$$

对 $f'(x)$ 用第 (1) 问的结论即得证. □

2. 解答: 我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f\left(\frac{t}{n}\right)\cos t\mathrm{d}t\\ =&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi} + \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}\right) f\left(\frac{t}{n}\right)\cos t\mathrm{d}t\\ =&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_0^{\pi} f\left[\frac{x+(2k-2)\pi}{n}\right]\cos x\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} f\left[\frac{x+(2k-1)\pi}{n}\right]\cos x\mathrm{d}x\right\}\\ =&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi/2}\left\{f\left[\frac{x+(2k-2)\pi}{n}\right] - f\left[\frac{x+(2k-1)\pi}{n}\right]\right.\\ &\left. - f\left[\frac{(2k-1)\pi - x}{n}\right] + f\left[\frac{2k\pi - x}{n}\right]\right\}\cos x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由 f 的凸性可知

$$\frac{f\left[\frac{x+(2k-2)\pi}{n}\right] - f\left[\frac{x+(2k-1)\pi}{n}\right]}{-\pi} \leqslant \frac{f\left[\frac{(2k-1)\pi - x}{n}\right] - f\left[\frac{2k\pi - x}{n}\right]}{-\pi}$$

于是就有

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \geqslant 0$$

命题得证. □

3. 解答:

(1) F_h 是 f 的变上限积分函数, 由于 f 是连续的, 因此

$$F_h'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

也是连续的. 即 F_h 是连续可微的. 又

$$F_h(x+2\pi) = \int_{x+2\pi-h}^{x+2\pi+h} f(t)\mathrm{d}t = \int_{x-h}^{x+h} f(t+2\pi)\mathrm{d}t = F_h(x)$$

因此 F_h 以 2π 为周期.

(2) 注意到 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上一致连续, 因此

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall |x' - x''| < \delta, |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

我们只要取 $0 < h < \delta/2$, 则有

$$|f(x) - F_h(x)| = \frac{1}{2h}\left|\int_{x-h}^{x+h} f(x) - f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} |f(x) - f(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon$$

(3) 前面已证得 F_h 以 2π 为周期, 连续, 导函数可积且平方可积, 由命题 15.2.8 知 F_h 的 Fourier 级数 P 一致收敛于 F_h. 记 P 的部分和为 P_n, 则对任给的 $\varepsilon > 0$ 对所有 x 有

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant |f(x) - F_h(x)| + |F_h(x) - P_n(x)| < 2\varepsilon$$

由 ε 的任意性即得 Weierstrass 第二定理.

(4) 设 $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

在 $[x-h, x+h]$ 上逐项积分得

$$\begin{aligned}
F_h(x) &= \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2h}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x-h}^{x+h}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2h}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}[\sin n(x+h) - \sin n(x-h)] + \frac{b_n}{n}[\cos n(x-h) - \cos n(x+h)]\right) \\
&= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2nh}\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n \sin nh \cos nx + 2b_n \sin nh \sin nx) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}a_n \cos nx + \frac{\sin nh}{nh}b_n \sin nx\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_0 = a_0, A_n = \frac{\sin nh}{nh}a_n, B_n = \frac{\sin nh}{nh}b_n, n = 1, 2, \cdots$$

注: 其他解法参见徐森林下册 P402 第 729 题. □

4. 解答:

(1)

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\mathrm{d}x \xlongequal{x+t=u} \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(u)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\mathrm{d}u = a_0^2$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{x+t=u} \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos n(u-t)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi} f(u)(\cos nu\cos nt + \sin nu\sin nt)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos nu\mathrm{d}u + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin nu\mathrm{d}u\Big]$$

$$= a_n^2 + b_n^2$$

同理可知

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\Big[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin nu\mathrm{d}u - \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos nt\mathrm{d}u\Big]$$

$$= a_nb_n - b_na_n = 0$$

(2) 由 Bessel 不等式 (命题 15.1.7) 知 $\dfrac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ 收敛, 于是由

$$\left|(a_n^2 + b_n^2)\cos nx\right| \leqslant a_n^2 + b_n^2$$

知级数

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\cos nx$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

(3) 由练习题 15.2.7 第 9 题知其和函数就是 $F(x)$, 因此 $F(x)$ 的 Fourier 级数一致收敛于 $F(x)$. 因此有

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\mathrm{d}t = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)\cos nx$$

令 $x = 0$ 即得 $f(x)$ 的 Parseval 等式

$$F(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

注: 其他解法参见徐森林下册 P404 第 730 题.

5. 解答:

(1) 考虑

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}=\int_0^x\sum_{k=1}^{n}\cos kt\mathrm{d}t=-\frac{x}{2}+\int_0^x\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{x}{2}+\int_0^x\left[\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right]\sin(2n+1)\frac{t}{2}\mathrm{d}t+\int_0^x\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{t}\mathrm{d}t$$

当 $n\to\infty$ 时, 第二项由 Riemann 引理趋于 0, 而第三项

$$\int_0^x\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{t}\mathrm{d}t\xlongequal{u=(2n+1)t/2}\int_0^{(2n+1)x/2}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\to\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}$$

(这是熟知的 Dirichlet 积分 (例题 12.3.6))

这就得到了

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}$$

(2) 在 (1) 式的结果中替换 x 为 $2x$, 则有

$$\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{2n}$$

此时易见

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{2n}=\frac{\pi}{4}$$

6. 解答:

(1) 在第 5 题第 (1) 问中令 $x=2$ 即可;

(2) 第 5 题第 (2) 问已证.

(3)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(\pi-x)}{n}=\frac{x}{2}$$

(4) 对 (3) 式逐项积分即可 (例题 15.1.2 中有证);

(5) 对 (2) 式两边同乘 $\frac{4}{\pi}$ 后逐项积分即可;

(6) 由 (4) 可知

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{(2k)^2}-4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$$

结合 (5) 可知

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{(2k)^2}=\frac{6x^2-6\pi x+\pi^2}{24}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{(2k)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}=\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12}$$ □

7. 解答: 对 (1) 作偶延拓 (2) 作奇延拓, 则都满足下一题 Wirtinger 不等式的条件, 结论显然. □

8. 解答: 将 f 延拓为 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期函数, 周期为 2π, 则 f 有 Fourier 展开

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

其中

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$$

由命题 15.1.2 知 f' 的 Fourier 展开开为

$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx)$$

根据 Parseval 等式就有

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x&=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\\&\leqslant\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2a_n^2+n^2b_n^2\right)=\int_{-\pi}^{\pi}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $a_n=b_n=0,\forall n\geqslant 2$, 即 $f(x)=A\cos x+B\sin x$. □

9. 解答: 由周期性, 我们只考虑在一个周期上的情形. 由题设 f 和 f' 按段连续, 即只有第一类间断点并且按段光滑. 不妨假设在 $[-\pi,\pi]$ 上只有 $x=0$ 一个间断点, 则 $f(0\pm 0)$ 存在. 记

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\begin{cases}\dfrac{\pi-x}{2},x\in(0,\pi]\\\dfrac{-\pi-x}{2},x\in[-\pi,0)\\0,x=0\end{cases}$$

考虑

$$F(x)=\begin{cases} f(x)-\dfrac{f(0^+)-f(0)}{S(0^+)-S(0)}S(x), x\in[0,\pi] \\ f(x)-\dfrac{f(0^-)-f(0)}{S(0^-)-S(0)}S(x), x\in[-\pi,0] \end{cases}$$

易验证 $F(0^+)=F(0^-)=F(0)$, 因此 $F(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续, 按段光滑, 从而 $F(x)$ 的 Fourier 级数一致收敛于 $F(x)$. 又由例题 14.1.7 知 $S(x)$ 在 $[-\pi,0)\cup(0,\pi]$ 上一致收敛, 因此 $f(x)$ 在任何闭区间 $[a,b]\subset[-\pi,0)\cup(0,\pi]$ 内的 Fourier 级数也是一致收敛的.

注: $f(x)=F(x)+kS(x)$, Fourier 变换是线性的以及一致收敛级数线性相加还是一致收敛的 (且作为 Fourier 级数一致收敛到自身). □

10. 解答:

(1) 在第 5 题第 (1) 问中令 $x=1$ 即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\frac{\pi-1}{2}$$

在第 6 题第 (6) 问中令 $x=2$ 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{4n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{2n^2}=\frac{6-6\pi+\pi^2}{6}$$

利用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$ 整理得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}=\frac{\pi-1}{2}$$

(2) 考虑

$$f(x)=\frac{1}{4}x(2\pi-x), x\in[0,2\pi]$$

容易计算它的 Fourier 级数为 (裴礼文 P593 例 5.4.11)

$$\frac{1}{4}x(2\pi-x)=\frac{1}{6}\pi^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$$

逐项积分两次可知

$$\frac{1}{12}\pi^2x^2-\frac{1}{12}\pi x^3+\frac{x^4}{48}=\frac{\pi^4}{90}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^4}$$

令 $x=2\pi$ 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

再令 $x=2$ 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}-\left[\frac{\pi^2}{3}-\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{3}\right]=\frac{\pi^4}{90}-\frac{(\pi-1)^2}{3}$$

整理即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}=\frac{(\pi-1)^2}{6}$$ □

11. 解答: 原题条件等价于函数 f 是以 2π 为周期的连续函数, 不恒等于 0, 且对任何 a, $b,c\in\mathbb{R}$ 有

$$\int_a^{a+2\pi} f(x-b)\cos k(x-c)\mathrm{d}x=0,\quad k=0,1,\cdots,n$$

仅考虑 f 在长度大于 2π 的区间上仅改变有限次符号的情况. 应用反证法和数学归纳法, 由 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$ 及 $f\equiv 0$, 可知 f 一定会改变符号.

设 x_0 是 f 的一个变号零点且 f 在 x_0 的一个左邻域上非零, 这时可取得 $[x_0,x_0+2\pi]$ 上的一个分割:

$$x_0<x_1<\cdots<x_s=x_0+2\pi$$

使 f 在每个 x_i 的一个左邻域上非零, 在每个 $I_i=(x_{i-1},x_i)$ 上不变号, 不恒为零, 且在相邻的两个区间上异号, 同时当然有 $f(x_i)=0, i=1,2,\cdots,p$. 由 f 的连续性和周期性知 p 一定是偶数. 下面证明一定有

$$p\geqslant 2n+2 \tag{1}$$

当 $n=1$ 时, 若 $p=2$, 不妨设 f 在 I_1 上非负, 在 I_2 上非正, 令 $y_0=\dfrac{x_0+x_1}{2}$ 及

$$g(x)=\cos(x-y_0)-\cos(x_0-y_0)$$

则有 $g(x)$ 在 I_1 上恒正, 在 I_2 上恒负, 于是

$$0=\int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1} f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_0+2\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x>0$$

矛盾. 因此 $p>2$, 即 $p\geqslant 4$.

当 $n>1$ 时, 假设命题对小于 n 的情况都有 (1) 式成立. 令 $y_0=\dfrac{x_0+x_1}{2}$ 及

$$f_1(x)=f(x)[\cos(x-y_0)-\cos(x_0-y_0)]$$

则有 f_1 在 (x_0,x_2) 及 $I_2,I_3,\cdots,I_p$ 上都不变号, 不恒为零, 且在相邻的两个区间上异号.

应用题目条件, 对任何 $a,b,c\in\mathbb{R}$ 有

$$\int_a^{a+2\pi} f_1(x)\cos k(x-c)\mathrm{d}x=0,\quad k=0,1,\cdots,n-1$$

因此对 f_1, 由归纳假设, 对应地有 $p_1=p-2\geqslant 2n$, 即 $p\geqslant 2n+2$. □

12. 解答:

证法一: 不妨设 $f(x)$ 单调递减趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$ 收敛. 则对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 时有

$$\left|\int_N^{+\infty} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

再对 $\int_0^N f(x)\sin nx\mathrm{d}x$ 用 Riemann 引理可知

$$\left|\int_0^N f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow\left|\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_0^N f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|+\left|\int_N^{+\infty} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

证法二: 利用广义积分中值第二定理有

$$\left|\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|=|f(0)|\left|\int_0^{\xi}\sin nx\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2|f(0)|}{n}\to 0$$

证法三: 参见第十二章第一组参考提第 10 题的解答. □

13. 解答: 由

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2e^{-n}\sin nx\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^n}$$

可知 $f(x)$ 的部分和序列 (也即 $f(x)$ 的傅里叶级数) 一致收敛于 $f(x)$, 因而 $f(x)$ 连续, 从而平方可积, 成立 Parseval 等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{e^{2n}}>\frac{1}{e^2}$$

设 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}\{|f(x)|\}$, 则有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M^2\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{e^2}\Rightarrow M>\sqrt{\frac{1}{2e^2}}>\frac{2}{\pi e}$$

命题得证. □

14. 解答: 由于 $\varepsilon_n\to 0$, 因此

$\exists n_1, \varepsilon_{n_1} < 1$, 取 $b_{n_1} = \varepsilon_{n_1} + 1$

$\exists n_2, \varepsilon_{n_2} < \dfrac{1}{2^2}$, 取 $b_{n_2} = \varepsilon_{n_2} + \dfrac{1}{2^2}$

$\vdots$

$\exists n_k, \varepsilon_{n_k} < \dfrac{1}{k^2}$, 取 $b_{n_k} = \varepsilon_{n_k} + \dfrac{1}{k^2}$

$\vdots$

对于 $n \neq n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots$, 都取 $b_n = 0$. 则 $b_{n_k} < \dfrac{2}{k^2}$, 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n \sin nx| = \sum_{k=1}^{\infty} |b_{n_k} \sin n_k x| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2} < +\infty$$

知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 一致收敛于一个连续函数 $f(x)$. b_n 就是 $f(x)$ 的 Fourier 系数 (a_n 取 0) 且满足题目要求. □

15. 解答: 直接计算 f' 的 Fourier 系数

$$\begin{aligned}
a_0' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\mathrm{d}x = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{\pi} = c \\
a_n' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\mathrm{d}f(x) \\
&= \frac{f(\pi)(-1)^n - f(-\pi)(-1)^n}{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \\
&= nb_n + (-1)^n c \\
b_n' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\mathrm{d}f(x) \\
&= -\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = -na_n
\end{aligned}$$

又有

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n-1}[f(\pi) - f(-\pi)]}{n} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

由 Riemann 引理显然有

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1} nb_n = c$$ □

16. 解答: 由逐项积分定理

$$\int_0^x \left[\varphi(t) - \frac{c}{2}\right]\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t [(nb_n + (-1)^n c)\cos nt - na_n \sin nt]\mathrm{d}t$$

$$\int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{c}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n \sin nx + a_n \cos nx + (-1)^n c\frac{\sin nx}{n}\right]$$

考虑 (下面用到第 5 题的结论)

$$\frac{c}{2}x = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi - x}{2}\right)c = \frac{\pi}{2}c - c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

代入可得

$$\begin{aligned}\int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t &= \frac{\pi}{2}c + \sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n \sin nx + a_n \cos nx + c\left[(-1)^n - 1\right]\frac{\sin nx}{n}\right]\\ &= \frac{\pi}{2}c + \sum_{n=1}^{\infty}(b_n \sin nx + a_n \cos nx) - 2c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(b_n \sin nx + a_n \cos nx)\end{aligned}$$

记 $f(x) = \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n \sin nx + a_n \cos nx)$ 是其和函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数 (当然也是处处收敛的) 且在 $\varphi(x)$ 的连续点上有 $f'(x) = \varphi(x)$. □

17. 解答: 易验证

$$c = (-1)^{n-1}n \cdot \frac{(-1)^n n}{n^2 - 1} = -1$$

且

$$-\frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n n^2}{n^2-1} + (-1)^{n+1}\right]\cos nx = -\frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}\cos nx$$

显然在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 必是其和函数的 Fourier 级数. 由上一题可知存在 $f(x)$

$$f(x) \sim \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n \sin nx}{n^2 - 1}$$

对于二阶常系数线性微分方程

$$f'' + f = -\sin x$$

对应特征方程为 $r^2 + 1 = 0$, 有两解 $r_1 = i, r_2 = -i$. 对应齐次线性微分方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

设特解

$$\widetilde{y} = x(A\cos x + B\sin x)$$

代入验证知

$$\tilde{y} = \frac{1}{2} x \cos x$$

于是原方程通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} x \cos x$$

令 $x = 0$ 知 $C_1 = f(0) = 0$. 令 $x = \dfrac{\pi}{2}$, 得

$$C_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sin \dfrac{n\pi}{2}}{n^2 - 1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)}{4k^2 - 4k} = \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{4k} - \frac{(-1)^{k-1}}{4(k-1)} \right] = \frac{1}{4}$$

因此

$$f(x) = \frac{1}{4} \sin x + \frac{1}{2} x \cos x \qquad \square$$

18. 解答: 假设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 能够构成完备正交系的基, 由线性代数的知识可知任意 $n+1$ 个函数是线性相关的, 但在可积和平方可积函数空间中是不可能的, 比如 $1, x, x^2, \cdots, x^{n+1}$ 显然线性无关. $\square$

19. 解答:

(1) 考虑到

$$(\cos\theta)^{2n} = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \mathrm{C}_{2n}^{k} e^{i2(n-k)\theta} = \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{2n}^{k} \cos 2(n-k)\theta$$

有

$$\begin{aligned} V_n(x) &= \frac{(2n)!!}{2^{2n}\pi(2n-1)!!} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{2n}^{n-k} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos k(t-x) \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n!)^2}{(n+k)!(n-k)!\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n!)^2}{(n+k)!(n-k)!} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \end{aligned}$$

其中 a_k, b_k 是 f 的 Fourier 系数, 于是 V_n 是 n 次三角多项式.

(2) 考虑到

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos \frac{t-x}{2} \right)^{2n} \mathrm{d}t = \frac{2\pi(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

有

$$\begin{aligned} V_n(x) - f(x) &= \frac{(2n)!!}{2\pi(2n-1)!!} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - f(x)] \left(\cos \frac{t-x}{2} \right)^{2n} \mathrm{d}t \\ &= \frac{(2n)!!}{2\pi(2n-1)!!} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+u) - f(x)] \left(\cos \frac{u}{2} \right)^{2n} \mathrm{d}u \end{aligned}$$

由 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续, 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta \in (0, \pi)$, 使得对任何 $x', x'' \in \mathbb{R}$

且 $|x'-x''|<\delta$ 有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 另设 $|f(x)|\leqslant 2M, x\in\mathbb{R}$, 于是有

$$
\begin{aligned}
|V_n(x)-f(x)| &= \left|\frac{(2n)!!}{2\pi(2n-1)!!}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{-\delta}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)[f(x+u)-f(x)]\left(\cos\frac{u}{2}\right)^{2n}\mathrm{d}u\right| \\
&\leqslant \frac{(2n)!!}{2\pi(2n-1)!!}\left[\varepsilon\int_{-\delta}^{\delta}\left(\cos\frac{u}{2}\right)^{2n}\mathrm{d}u+4M\int_{\delta}^{\pi}\left(\cos\frac{u}{2}\right)^{2n}\mathrm{d}u\right] \\
&< \varepsilon+\frac{2M(2n)!!}{\pi(2n-1)!!}\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{2n}
\end{aligned}
$$

而

$$
\frac{2M(2n)!!}{\pi(2n-1)!!}\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{2n}\to 0(n\to\infty)
$$

因此存在 N, 当 $n>N$ 时有

$$
|V_n(x)-f(x)|<2\varepsilon, \forall x\in\mathbb{R}
$$

即 $\{V_n\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

20. 解答: 当 $x=0$ 时结论平凡. 考虑当 $x\in(0,\pi]$ 时

$$
\begin{aligned}
S_n'(x) &= -\sin x-\sin 2x-\cdots-\sin nx \\
&= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\cos\frac{x}{2}\right)=-\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\frac{nx}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_n'(x)+S_{n+1}'(x) &= -\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\left(\sin\frac{nx}{2}+\sin\frac{n+2}{2}x\right)}{2\sin\frac{x}{2}} \\
&= -\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=-\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\right)x\cdot\cot\frac{x}{2}\leqslant 0
\end{aligned}
$$

即 $S_n(x)+S_{n+1}(x)$ 单调递减.

(1) 当 $n=2p+1$ 时

$$
\begin{aligned}
2S_{2p+1}(x)+\frac{\cos(2p+2)x}{2p+2} &= S_{2p+1}(x)+S_{2p+2}(x)\geqslant S_{2p+1}(\pi)+S_{2p+2}(\pi) \\
&= -2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2p+1}\right)+\frac{1}{2p+2}
\end{aligned}
$$

$$
2S_{2p+1}\geqslant -2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2p+1}\right)+\frac{1-\cos(2p+2)x}{2p+2}\geqslant -2
$$

因此有 $S_n(x)\geqslant -1$.

(2) 当 $n=2p$ 时

$$
\begin{aligned}
2S_{2p}+\frac{\cos(2p+1)x}{2p+1} &= S_{2p}(x)+S_{2p+1}(x)\geqslant S_{2p}(\pi)+S_{2p+1}(\pi)\\
&=-2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{2p}\right)-\frac{1}{2p+1}
\end{aligned}
$$

$$
2S_{2p}\geqslant -2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2p-1}\right)+\left(\frac{1}{2p}-\frac{1}{2p+1}\right)+\left(\frac{1}{2p}-\frac{\cos(2p+1)x}{2p+1}\right)\geqslant -2
$$

因此也有 $S_n(x)\geqslant -1$.

另外易知 $S_n(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 内闭一致收敛于其和函数 $-\ln 2-\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$(例题 16.2.5), 而在 0 和 2π 处级数为正, 因此

$$
\lim_{n\to\infty}\min_{0\leqslant x\leqslant\pi}S_n(x)=\min_{0\leqslant x\leqslant\pi}\left(-\ln 2-\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right)=-\ln 2
$$

注: 这里只讨论 $[0,\pi]$ 上的情形是因为 $S_n(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上为偶函数且在 $(-\infty,+\infty)$ 上呈周期变化. □

第十六章 无穷级数的应用

§16.1.3 练习题

1. 解答: 对每个 n, 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x$ 收敛与 $|S_n(x)| \leqslant F(x)$ 知 $\int_{-\infty}^{+\infty} S_n(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 再由 S_n 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭一致收敛于 S 知 $\int_{-\infty}^{+\infty} S(x)\mathrm{d}x$ 也收敛.
$\forall\varepsilon > 0, \exists A > 0$, 使得

$$\left|\left(\int_{-\infty}^{-A} + \int_{A}^{+\infty}\right) S_n(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left|\left(\int_{-\infty}^{-A} + \int_{A}^{+\infty}\right) S(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$\exists N, \forall n > N$, 有

$$\left|\int_{-A}^{A}[S_n(x) - S(x)]\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{-A}^{A}|S_n(x) - S(x)|\mathrm{d}x < 2A\cdot\frac{\varepsilon}{6A} = \frac{\varepsilon}{3}$$

于是当 $n > N$ 后就有

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}[S_n(x) - S(x)]\mathrm{d}x\right| &\leqslant \left|\int_{-A}^{A}[S_n(x) - S(x)]\mathrm{d}x\right| + \left|\left(\int_{-\infty}^{-A} + \int_{A}^{+\infty}\right) S_n(x)\mathrm{d}x\right| \\ &\quad + \left|\left(\int_{-\infty}^{-A} + \int_{A}^{+\infty}\right) S(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} S_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x)\mathrm{d}x$$

命题得证. □

2. 解答: 记 $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, 由题设可知 S_n 内闭一致收敛于 S, 而对每个 n 和 $x > 0$

$$|e^{-x}S_n(x)| \leqslant S_n(x) \leqslant S(x)$$

显然 $S(x)$ 连续, 广义可积, 因此由上题的结论可知

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-x}S(x)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x}S_n(x)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k\int_0^{+\infty} e^{-x}x^k\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k\Gamma(k+1) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k k! = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!\end{aligned}$$

□

注: 更详细的解析可参看徐森林下册 P314 第 665 题.

3. 解答:

(1)
$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t = \lim_{x\to 1^-}\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t = \lim_{x\to 1^-} -\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n}\mathrm{d}t$$
$$= \lim_{x\to 1^-} -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$$

(2) 由练习题 10.4.6 第 7 题的结论可知
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}\ln x\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{2n}\ln x\mathrm{d}x = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{8}$$

(3) 由练习题 10.4.6 第 7 题的结论可知
$$\int_0^1 \ln x\ln(1-x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\ln x\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{n}\ln x\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

(4)
$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x - e^{-x}}\mathrm{d}x \xlongequal{t=e^x} \int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2-1}\mathrm{d}t \xlongequal{x=1/t} \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x \xlongequal{(2)} \frac{\pi^2}{8}$$

注: 换序条件 (一致收敛或内闭一致收敛性) 都是容易验证的. □

4. 解答: 首先有
$$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x\ln x)^n}{n!}\mathrm{d}x$$

由于 x^x 在 $[0,1]$ 上的最小值在 $x = e^{-1}$ 处取到, 故
$$\left|(-1)^n\frac{(x\ln x)^n}{n!}\right| \leqslant \frac{1}{en!}$$

从而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x\ln x)^n}{n!}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 可逐项积分. 利用练习题 10.4.6 第 7 题的结论则有
$$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (-1)^n\frac{(x\ln x)^n}{n!}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}n^{-n}$$

注: 类似地我们还可以得到
$$\int_0^1 x^{tx}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-t)^{n-1}}{n^n}$$
等等结论. □

5. 解答: 令 $t=x^2/2$, 则

$$\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{[(2n)!!]^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2t)^n}{[(2n)!!]^2}\mathrm{d}t$$

我们可以验证积分内幂级数的收敛半径为 $+\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{[(2n)!!]^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt[n]{(2^nn!)^2}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{(n!)^2}}\xlongequal{\text{stirling}}0$$

因此可逐项积分, 则有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2t)^n}{[(2n)!!]^2}\mathrm{d}t&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty}e^{-t}\frac{(2t)^n}{[(2n)!!]^2}\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{[(2n)!!]^2}\Gamma(n+1)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^nn!}{(2^nn!)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)^n}{n!}=e^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

得证. □

§16.2.3 练习题

1. 解答: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2B-A.$ □

2. 解答: 设 $P_0(x)=P_1(x)=e^x, P_{n+1}(x)=(xP_n(x))', n\geqslant 1$, 注意到

$$P_0(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

$$P_1(x)=P_0'(x)=0+1+\frac{2}{2!}x+\cdots+\frac{n}{n!}x^{n-1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n-1}$$

$$P_2(x)=(xP_1(x))'=0+1+\frac{2^2}{2!}x+\cdots+\frac{n^2}{n!}x^{n-1}+\cdots+=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$P_m(x)=(P_{m-1}(x)e^x)'=0+1+\frac{2^m}{2!}x+\cdots+\frac{n^m}{n!}x^{n-1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^m}{n!}x^{n-1}$$

令 $x=1$ 可知

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P(n)}{n!}=\sum_{k=0}^{m}a_k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^k}{n!}=\sum_{k=0}^{m}a_kP_k(1)$$ □

3. 解答: 类似上题可知 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)^3}{n!}=\left\{x\left[x(xe^{-x})'\right]'\right\}'\Big|_{x=1}=-e^{-1}.$ □

4. 解答: 注意到

$$\arctan x-\arctan y=\arctan\frac{x-y}{1+xy}$$

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\arctan\frac{1}{2n-1}-\arctan\frac{1}{2n+1}\right]=\frac{\pi}{4};$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\arctan\frac{1}{n-1}-\arctan\frac{1}{n+1}\right]=\frac{3}{4}\pi.$ □

5. 解答: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{a^{2^n}+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2^n}{a^{2^n}-1}-\frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}}-1}\right]=\frac{1}{a-1}.$ □

6. 解答: 考虑幂级数

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{x^{4n+1}}{4n+1}+\frac{x^{4n+3}}{4n+3}\right]$$

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[x^{4n}+x^{4n+2}\right]=\frac{1+x^2}{1+x^4}$$

$$S(x)=\int_0^x\frac{1+t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t=\frac{\arctan(1+\sqrt{2}x)-\arctan(1-\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}}$$

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\cdots=S(1)=\frac{\arctan(1+\sqrt{2})-\arctan(1-\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$ □

7. 解答:

$$1-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{23}+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{8n-1}+\frac{1}{8n+1}\right]=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{1-64n^2}$$

由练习题 15.2.7 知

$$x\cot x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^2}{x^2-n^2\pi^2}$$

令 $x=\dfrac{\pi}{8}$ 可得

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{1-64n^2}=\frac{\pi}{8}\cot\frac{\pi}{8}=\frac{1+\sqrt{2}}{8}\pi$$ □

8. 解答: 考虑幂级数

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}$$

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{3n}=\frac{1}{1+x^3}\Rightarrow S(x)=\frac{1}{6}\ln\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

于是

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots=S(1)=\frac{\ln 2}{3}+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

9. 解答:

$$\begin{aligned}
S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k(k+1)}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{k}-\frac{a_k}{k+1}\right)=\left(a_1-\frac{a_1}{2}\right)+\left(\frac{a_2}{2}-\frac{a_2}{3}\right)+\cdots\\
&\quad+\left(\frac{a_{n-1}}{n-1}-\frac{a_{n-1}}{n}\right)+\left(\frac{a_n}{n}-\frac{a_n}{n+1}\right)\\
&=a_1+\frac{1}{2}(a_2-a_1)+\frac{1}{3}(a_3-a_2)+\cdots+\frac{1}{n}(a_n-a_{n-1})-\frac{a_n}{n+1}\\
&=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}-\frac{a_n}{n+1}
\end{aligned}$$

因此 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi^2}{6}$.

10. 解答: 考虑

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1}+\frac{x^{4n+3}}{4n+3}-\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right)$$

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(x^{4n}+x^{4n+2}-x^{2n+1})=\frac{1}{1-x^4}+\frac{x^2}{1-x^4}-\frac{x}{1-x^2}=\frac{1}{1+x}$$

$$S(x)=\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t=\ln(1+x)$$

于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{2n+2}\right)=S(1)=\ln 2$$

11. 解答: 考虑

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{5n+1}-\frac{1}{5n-1}\right]=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{1-25n^2}$$

由练习题 15.2.7 知

$$x\cot x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^2}{x^2-n^2\pi^2}$$

令 $x=\frac{\pi}{5}$ 可得

$$\frac{\pi}{5}\cot\frac{\pi}{5}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{1-25n^2}$$

因此

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{5n+1}-\frac{1}{5n-1}\right]=\frac{\pi}{5}\cot\frac{\pi}{5}\qquad\square$$

12. 解答: 我们观察到

$$f^{(6)}(x)=f(x), f^{(i)}(0)=0, i=0,1,2,4,5, f^{(3)}(0)=1$$

由常微分方程的知识可知

$$\begin{aligned}f(x)=&C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\\&+C_4e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+C_5e^{x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+C_6e^{x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\end{aligned}$$

依次求导代入初值条件后得到

$$\begin{cases}C_1+C_2+C_4+C_6=0\\C_1-C_2+\frac{\sqrt{3}}{2}C_3-\frac{\sqrt{1}}{2}C_4+\frac{\sqrt{3}}{2}C_5+\frac{1}{2}C_6=0\\C_1+C_2-\frac{\sqrt{3}}{2}C_3-\frac{1}{2}C_4+\frac{\sqrt{3}}{2}C_5-\frac{1}{2}C_6=1\\C_1-C_2+C_4-C_6=0\\C_1+C_2+\frac{\sqrt{3}}{2}C_3-\frac{1}{2}C_4-\frac{\sqrt{3}}{2}C_5-\frac{1}{2}C_6=0\\C_1-C_2-\frac{\sqrt{3}}{2}C_3-\frac{1}{2}C_4-\frac{\sqrt{3}}{2}C_5+\frac{1}{2}C_6=0\end{cases}$$

解得

$$C_1=C_2=-C_4=-C_6=\frac{1}{6}, C_3=-C_5=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

因此

$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{1}{6}e^{x}+\frac{1}{6}e^{-x}+\frac{\sqrt{3}}{6}e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\\&-\frac{1}{6}e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)-\frac{\sqrt{3}}{6}e^{x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)-\frac{1}{6}e^{x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\end{aligned}$$

注: 事实上上面这种方法计算量颇大, 是通过数学软件计算得到的, 下面再提供两种解法. 其中第一种方法计算量也十分大, 需要数学软件, 第二种则是可手算的纯代数方法.

方法一: 我们观察到

$$f(x)=\frac{x^3}{3!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots,\quad f'(x)=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots$$
$$f''(x)=x+\frac{x^7}{7!}+\cdots,\quad f'''(x)=1+\frac{x^6}{6!}+\cdots$$
$$f''''(x)=\frac{x^5}{5!}+\frac{x^{11}}{11!}\cdots,\quad f'''''(x)=\frac{x^4}{4!}+\frac{x^{10}}{10!}\cdots$$

全部加到一起可知

$$f+f'+f''+f'''+f''''+f'''''=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots=e^x$$

令 $g=f+f'''$, 则

$$g+g'+g''=e^x$$

且

$$g(0)=f(0)+f'''(0)=1, g'(0)=f'(0)+f''''(0)=0, g''(0)=f''(0)+f'''''(0)=0$$

由常微分方程的知识可知

$$g(x)=C_1e^{-x/2}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}+C_2e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+\frac{e^x}{3}$$

代入初值条件可得

$$\begin{cases}C_2+\dfrac{1}{3}=1\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}C_1-\dfrac{1}{2}C_2+\dfrac{1}{3}=0\end{cases}$$

解得 $C_1=0,C_2=\dfrac{2}{3}$. 因此

$$f+f'''=g=\frac{2}{3}e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+\frac{e^x}{3}$$

再进行下去计算量很大, 需要借助数学软件, 这里就不再展示了. 但是这种方法折射了出一类微分方程的解法, 其思想是将一个合数阶的微分方程分拆分成因子阶的微分方程来计算 $(6=3\times2)$

方法二: 我们记 ω 为 6 次单位根, 即 $\omega^6=1$, 则

$$f(x)=C_1e^x+C_2e^{\omega x}+C_3e^{\omega^2x}+C_4e^{\omega^3x}+C_5e^{\omega^4x}+C_6e^{\omega^5}x$$

这个式子经过 Euler 公式展开后会得到复系数, 这不是原方程的实系数解. 但是回顾高阶微分方程通解公式的计算方法, 我们只需要确定所有实系数 $C_i(i=1,2,3,4,5,6)$, 然

后改写基本解组就可以得到原微分方程的实系数解.

通过直接对 $f(x)$ 求导代入初值条件后我们可以得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \omega^5 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \omega^8 & \omega^{10} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 & \omega^{12} & \omega^{15} \\ 1 & \omega^4 & \omega^8 & \omega^{12} & \omega^{16} & \omega^{20} \\ 1 & \omega^5 & \omega^{10} & \omega^{15} & \omega^{20} & \omega^{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其系数矩阵的行列式是一个 6 阶 Vandermonder 行列式

$$V_6(1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5) = \prod_{0\leqslant i<j\leqslant 5} (\omega^j - \omega^i)$$

记 $\Delta_{3,j}(1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5)$ 是 $V_6(1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5)$ 将第三行和第 j 列划去后的行列式. 则由 Cramer 法则知, 将 $V_6(1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5)$ 的第 j 列换成 $(0,0,1,0,0,0)'$ 后的行列式 Laplace 展开后就是 $\Delta_{3,j}(1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5)$, 则

$$C_j = \frac{\Delta_{3,j}(1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5)}{V_6(1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5)}$$

利用朱尧辰《高等代数范例选解》P40 例 1.4.1 的结论可知

$$\Delta_{3,j}(1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5) = \sigma_3(1,\cdots,\omega^{j-2},\omega^j,\cdots,\omega^5)V_5(1,\cdots,\omega^{j-2},\omega^j,\cdots,\omega^5)(-1)^{3+j}$$

(其中 $\sigma_3(1,\cdots,\omega^{j-2},\omega^j,\cdots,\omega^5)$ 表示 $1,\cdots,\omega^{j-2},\omega^j,\cdots,\omega^5$ 形成的初等对称多项式)

于是可约分得

$$C_1 = \frac{\sigma_3(\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5)}{\prod\limits_{i=1}^{5}(\omega^i - 1)}, C_2 = \frac{\sigma_3(1,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5)}{\prod\limits_{i=2}^{5}(\omega^i - \omega)(\omega - 1)}, \cdots\cdots$$

代入 $\omega^i = e^{i\frac{k\pi}{3}}(k=0,1,2,3,4,5)$ 可计算得到

$$C_1 = C_2 = -C_4 = -C_6 = \frac{1}{6}, C_3 = -C_5 = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

用 $e^{ax}\sin bx$ 和 $e^{ax}\cos bx$ 改写 $a \pm bi$ 对应的基本解组后就得到了与原先一致的结果. □

13. 解答: 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \cdot \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} x^{2n} \xlongequal{def} f(x)$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\cdot x^{2n-1} \xlongequal{\text{Wallis}} 4\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi/2}(x\cos t)^{2n-1}\mathrm{d}t\\
&= 4\int_0^{\pi/2}\sum_{n=1}^{\infty}(x\cos t)^{2n-1}\mathrm{d}t = 4\int_0^{\pi/2}\frac{x\cos t}{1-(x\cos t)^2}\mathrm{d}t\\
&= 4\int_0^{\pi/2}\frac{x\mathrm{d}\sin t}{x^2\sin^2 t - x^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}
$$

$$
f(x) = \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\left[\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]^2
$$

□

14. 解答: 记 $a_n = \dfrac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$, 则

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow a_{n+1} = a_n\cdot\frac{x(1-x^n)}{1-x^{n+2}}\\
&\Rightarrow a_{n+1}(1-x^{n+2}) = a_n(1-x^{n+1}+x-1)\\
&\Rightarrow a_n = \frac{1}{1-x}[a_{n+1}(1-x^{n+2}) - a_n(1-x^{n+1})]\\
&\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{1-x}[a_{n+1}(1-x^{n+2}) - a_1(1-x^2)] = \frac{x^2(1-x^n)}{1-x^{n+1}}
\end{aligned}
$$

因此当 $|x|<1$ 时, $f(x)=x^2$; 当 $|x|>1$ 时, $f(x)=x$. □

15. 解答: 记级数通项为 $a_n(x)$, 部分和为 $S_n(x)$. 注意到

$$
a_n(x) = \frac{1}{x}\left[\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_2+x)\cdots(a_n+x)} - \frac{a_1a_2\cdots a_{n+1}}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}\right]
$$

裂项可知

$$
S_n(x) = \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{1}{x}\left[\frac{a_1a_2}{a_2+x} - \frac{a_1a_2\cdots a_{n+1}}{(a_2+x)(a_3+x)\cdots(a_{n+1}+x)}\right]
$$

又注意到

$$
0 < \frac{a_2a_3\cdots a_{n+1}}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)} = \frac{1}{(1+x/a_2)\cdots(1+x/a_{n+1})} < \frac{1}{1+x\sum\limits_{k=2}^{n}(1/a_k)} \to 0
$$

因此

$$
S(x) = \lim_{n\to\infty}S_n(x) = \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{1}{x}\cdot\frac{a_1a_2}{a_2+x} = \frac{a_1}{x}
$$

□

16. 解答: 记 $a_n = \dfrac{x^{2^{n-1}}}{(x+1)\cdots(x^{2^{n-1}}+1)}$, 注意到

$$a_n = a_{n-1}x^{2^{n-2}} - a_n x^{2^{n-1}}$$

于是有

$$\sum_{k=1}^{n} a_n = a_1 + a_1 x - a_n x^{2^{n-1}} = \frac{x+x^2}{1+x} - \frac{x^{2^n}(x-1)}{x^{2^n}-1} \to x-(x-1) = 1 \qquad \square$$

§16.3.6 练习题

1. 解答: 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $P(x)$ 对所有 $x \in [a,b]$ 成立 $|f(x)-P(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. 又多项式 P 显然在 $[a,b]$ 上一致连续, 因此存在 $\delta > 0, \forall |x'-x''| < \delta, x', x'' \in [a,b]$, 成立 $|P(x')-P(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}$. 于是有

$$|f(x')-f(x'')| \leqslant |f(x')-P(x')| + |P(x')-P(x'')| + |P(x'')-f(x'')| < \varepsilon$$

这说明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续, 从而也有 $f(x) \in C[a,b]$.

注: 本题说明了 Weierstrass 多项式逼近定理的充要性. $\square$

2. 解答:

(1) 显然存在多项式 $P_1(x)$ 使得在 $[a,b]$ 上恒有 $f(x)-P_1(x) > 0$. 设 $f(x)-P_1(x)$ 的最小值为 $a_1 > 0$, 由 Weierstrass 多项式逼近定理可取 $P_2(x)$ 使得对所有 $x \in [a,b]$ 成立

$$|f(x)-(P_1(x)+P_2(x))| = |P_2(x)-(f(x)-P_1(x))| < \frac{a_1}{2}$$

此时 $P_2(x)$ 是非负的. 再设 $f(x)-(P_1(x)+P_2(x))$ 的最小值为 a_2, 令 $\delta_3 = \min\left\{\frac{a_1}{2^2}, a_2\right\}$, 则存在 $P_3(x)$ 使得对所有 $x \in [a,b]$ 成立

$$|f(x)-(P_1(x)+P_2(x)+P_3(x))| = |P_3(x)-[f(x)-(P_1(x)+P_1(x))]| < \delta_3$$

依此类推, 我们取 $\delta_n = \min\left\{\frac{a_1}{2^{n-1}}, a_{n-1}\right\}$, 则有

$$\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n} P_k(x)\right| < \delta_n \leqslant \frac{a_1}{2^{n-1}} \to 0 (n \to \infty)$$

此时除了 $P_1(x)$ 可能为负, 其他项皆非负, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$.

(2) 由第 (1) 问直接可以推出.

(3) 先指出题目叙述有误. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = C$, 若所有 $x \in [a,b], n \geqslant 1$ 都有 $|P_n(x)| \leqslant a_n$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |P_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n = C$$

取 $f(x) = C + 1$, 那么有

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} P(x) \right| \geqslant 1 \not\to 0$$

即不可能存在满足题设又一致收敛于 $f(x)$ 的多项式级数. 因此若要结论成立, 必然得存在 P_N 它不受 $|P_N| \leqslant a_N$ 的限制. 不妨假设就是 P_1(否则 P_N 前面的项都取 0). 假如某个 a_n 为 0, 则只能取 $P_n = 0$, 相当于跳过了这一项, 我们不妨假设恒有 $a_n > 0$. 由于数列 $\{a_n\}$ 给定, 取 $y_n = \dfrac{\min\{a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}\}}{2} > 0$, 则有

$$y_{n+1} + y_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{a_{n+1}}{2} = a_{n+1}$$

由 Weierstrass 多项式逼近定理, 可取 P_1 使得 $|f - P_1| \leqslant y_1$. 再取 P_2 使得 $|P_2 - (f - P_1)| \leqslant y_2$, 则

$$|P_2| \leqslant |P_2 - (f - P_1)| + |f - P_1| \leqslant y_2 + y_1 \leqslant a_2$$

依次类推, 可取 P_n 使得 $\left| P_n - \left(f - \sum\limits_{i=1}^{n-1} P_i \right) \right| \leqslant y_n$, 而

$$\begin{aligned} |P_n| &\leqslant \left| P_n - \left(f - \sum_{i=1}^{n-1} P_i \right) \right| + \left| f - \sum_{i=1}^{n-1} P_i \right| \\ &= \left| P_n - \left(f - \sum_{i=1}^{n-1} P_i \right) \right| + \left| P_{n-1} - \left(f - \sum_{i=1}^{n-2} P_i \right) \right| \leqslant y_n + y_{n-1} \leqslant a_n \end{aligned}$$

可以看出 $\sum P_n$ 收敛且有

$$\left| f - \sum_{i=1}^{n-1} P_i \right| \leqslant a_n \to 0$$

即 $\sum P_n \rightrightarrows f.$.

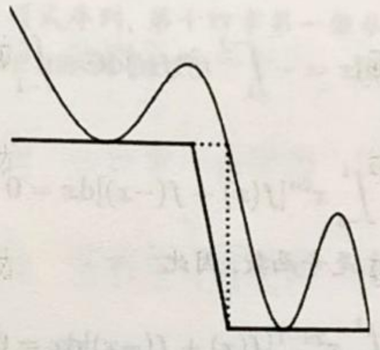
3. 解答: 任给 $\varepsilon > 0$, 由 f 可积可设 $|f(x)| \leqslant M$ 且存在划分

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

使得

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$$

这里 $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i]$, 并记 Δx_i 上的最大值和最小值为 M_i 和 m_i, 则振幅 $\omega_i = M_i - m_i$. 我们先取阶梯函数 p_1, 其在每段 Δx_i 上的取值为 m_i, 这样就有 $p_1 \leqslant f$ 恒成立. 但还需要在分割点处做修改, 使得阶梯函数变为连续函数. 如下图所示, 在每个分割点 x_i 处将较低的一段函数往较高的一段函数挪动 $\dfrac{\varepsilon}{nM}$ 长度, 这样改造出来的连续函数我们记为 p_2, 并且显然有 $p_2 \leqslant f$ 恒成立.



同理用 M_i 作出阶梯函数 P_1, 再挪动 $\dfrac{\varepsilon}{nM}$ 长度后得到连续函数 P_2 满足 $P_2 \geqslant f$.
如此取出的 p_2 和 P_2 将满足 (考虑所有区间上多出来的上下 $2n$ 块小三角形的面积)

$$\int_a^b (P_2 - p_2) = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (P_2 - p_2) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta_x i + 2n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{nM} \cdot 2M < 3\varepsilon$$

由 Weierstrass 多项式逼近定理的加强形式 (徐森林下册 P298 第 655 题) 知存在单调递增多项式序列 $\{p_n\}$ 一致收敛于 p_2 与单调递减多项式序列 $\{P_n\}$ 一致收敛于 P_2. 也就是说, 对上述给定的 ε, 存在 p 和 P 满足 $p \leqslant f \leqslant P$ 且 $|p - p_2| < \varepsilon, |P - P_2| < \varepsilon$, 从而有

$$\int_a^b (P - p) \leqslant \int_a^b |P - P'| + \int_a^b |P' - p'| + \int_a^b |p' - p| < [2(b-a) + 3]\varepsilon$$

(单调性是为了保持 $p \leqslant f \leqslant P$ 的性质)
由 ε 的任意性, 命题得证. □

4. 解答: 由题设知, 对任一多项式 $g(x)$, 有 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$. 根据 Weierstrass 多项式逼近定理, 可知对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在多项式 $P(x)$ 使得 $|f(x) - P(x)| < \varepsilon, x \in [a, b]$. 故

$$\begin{aligned}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)P(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left[f^2(x) - f(x)P(x)\right] \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_a^b |f(x)||f(x) - P(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由 ε 的任意性可知 $f(x) \equiv 0, x \in [a, b]$.
若将 $n \geqslant 0$ 改作 $n \geqslant n_0$, 则

$$\int_a^b (x^{n_0}f(x))^2\mathrm{d}x=\int_a^b[(x^{n_0}f(x))^2-x^{2n_0}f(x)P(x)]\mathrm{d}x<\varepsilon\int_a^b|x^{2n_0}f(x)|\mathrm{d}x$$

这说明 $x^{n_0}f(x)\equiv 0$, 即 $f(x)\equiv 0$. □

5. 解答:

(1) 换元不难得到

$$\int_{-1}^1 x^{2n}f(-x)\mathrm{d}x=-\int_1^{-1}t^{2n}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^1 t^{2n}f(t)\mathrm{d}t=0$$

从而

$$\int_{-1}^1 x^{2n}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x=0$$

又因为 $x^{2n-1}[f(x)+f(-x)]$ 是奇函数, 因此

$$\int_{-1}^1 x^{2n-1}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x=0$$

这说明对所有 n 成立

$$\int_{-1}^1 x^n[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x=0$$

由上一题结论知 $f(x)=-f(-x)$, 即 $f(x)$ 是奇函数.

(2) 同 (1) 我们可得对所有 n 成立

$$\int_{-1}^1 x^n[f(x)-f(-x)]\mathrm{d}x=0$$

因此 $f(x)=f(-x)$, 即 $f(x)$ 是偶函数. □

6. 解答:

必要性: 注意到 $P_n(x)$ 是奇次多项式, 故 $P_n(0)=0$. 从而有 $f(0)=\lim\limits_{n\to\infty}P_n(0)=0$.

充分性: 假定 $f(0)=0$, 令 $f(x)=-f(-x),x\in[-1,0]$. 则 $f\in C[-1,1]$. 由 Weierstrass 多项式逼近定理知存在多项式列 $\{P_n(x)\}$ 使得 $P_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 现作多项式列

$$Q_n(x)=\frac{P_n(x)-P_n(-x)}{2},x\in[-1,1]$$

则每个 $Q_n(x)$ 都是奇次多项式, 且有

$$\lim_{n\to\infty}Q_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{P_n(x)-P_n(-x)}{2}=\frac{f(x)-f(-x)}{2}=f(x)$$

显然这是一致收敛的. □

7. 解答: 对任给的 $\varepsilon>0$, 由第十章第一组参考题第 5 题第 (3) 问可知存在 $g\in C[a,b]$ 使得 $\int_a^b|f-g|<\varepsilon$. 又由 Weierstrass 多项式逼近定理知存在多项式 p 使得 $|g-p|<\varepsilon$, 且因 f 可积从而有界, 如此我们有

$$\begin{aligned}\int_a^b f^2 &= \int_a^b [f(f-g+g-p)+fp] = \int_a^b f(f-g+g-p)\\ &\leqslant M\left[\int_a^b |f-g| + \int_a^b |g-p|\right] \leqslant 2M(b-a)\varepsilon\end{aligned}$$

由 ε 的任意性知 $\int_a^b f^2 = 0$. 由练习题 10.2.4 第 1 题的注可知在连续点处 $f=0$. □

8. 解答: 多项式级数也是多项式序列, 第十四章第一组参考题第 10 题的直接推论.
注: 也可参看徐森林第三册 P168 例 14.3.3. □

16.5.2 参考题

1. 解答:

(1)
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n)(2n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots\right)\\ &= \frac{\ln 2}{2}-\frac{1-\ln 2}{2} = \ln 2-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(2) 考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)(2n+1)(2n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n)(2n+1)} = \frac{3}{4}-\ln 2$$

(3)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n-1)(3n)(3n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n}-\frac{1}{3n-1}\right)+\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n}-\frac{1}{3n+1}\right)$$

设

$$S(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{3n}}{3n}-\frac{x^{3n-1}}{3n-1}\right)+\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{3n}}{3n}-\frac{x^{3n+1}}{3n+1}\right)$$

则有

$$\begin{aligned}S'(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(x^{3n-1}-x^{3n-2})+\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}(x^{3n-1}-x^{3n})\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{1-x^3}-\frac{x}{1-x^3}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{1-x^3}-\frac{x^3}{1-x^3}\right) = \frac{x^2-3x}{6x^2+6x+6}\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n-1)(3n)(3n+1)} = S(1) = \int_0^1 S'(x)\mathrm{d}x = \frac{9+\sqrt{3}\pi-9\ln 9}{54}$$ □

2. 解答: 考虑

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{\ln k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k-1)}{2k-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln 2k}{2k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln k}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln 2k}{2k}$$

而

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln 2k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\ln 2}{k}+\frac{\ln k}{k}\right)\Rightarrow S_{2n}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\ln k}{k}-\ln 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

又

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\ln k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(k+n)}{k+n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(1+k/n)}{1+k/n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln n}{k+n}$$

所以

$$S_{2n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(1+k/n)}{1+k/n}+\ln n\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\ln 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

而我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(1+k/n)}{1+k/n}=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\ln^2 2}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln 2$$

由练习题 10.3.3 第 11 题知

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}-\ln 2\right)$$

极限存在. 因此

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_{2n}&=\frac{\ln^2 2}{2}+\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln n}{n}\cdot n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}-\ln 2\right)+\ln 2\left(\ln n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\right]\\&=\frac{\ln^2 2}{2}-\gamma\ln 2\end{aligned}$$

显然 S_n 收敛, 因此

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\frac{\ln^2 2}{2}-\gamma\ln 2$$

□

注: 也可参看《超越普里瓦洛夫》——数项级数卷第 38 题.

3. 解答: 考虑

$$\frac{1}{m^2-n^2}=\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m-n}\right),\qquad \sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{\infty}\left(\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m-n}\right)=-\frac{1}{m}-\frac{1}{2m}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{\infty}\frac{1}{m^2-n^2}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m}\left(-\frac{3}{2m}\right)=-\frac{3}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=-\frac{\pi^2}{8}$$

□

4. 解答: 记 $S=\{x=a^b|a,b\in\mathbb{N},a\geqslant 2,b\geqslant 2\}$, 则

$$\sum_q\frac{1}{q-1}=\sum_{k\geqslant 2}\sum_{a\in\mathbb{N}\backslash S}\frac{1}{a^k-1}=\sum_{k\geqslant 2}\sum_{a\in\mathbb{N}\backslash S}\sum_{i\geqslant 1}a^{-ik}$$

由于 $\sum\limits_{a\in\mathbb{N}\backslash S}\sum\limits_{i\geqslant 1}a^i$ 遍历所有大于 1 的正整数, 故

$$\sum_q\frac{1}{q-1}=\sum_{k\geqslant 2}\sum_{n\geqslant 2}n^{-k}=\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(n-1)}=1$$

注: 本题是 Goldbach-Euler 定理, Goldbach 起初的证明并不严谨. □

5. 解答: 由题设可知

$$a_n(a_n+a_{n-2})=a_{n-1}(a_{n+1}+a_{n-1})$$

$$a_n^2-a_{n-1}a_{n+1}=a_{n-1}^2-a_{n-2}a_n=\cdots=a_2^2-a_1a_3=4$$

又注意到

$$\operatorname{arccot}\frac{a_{n+1}}{a_n}-\operatorname{arccot}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\operatorname{arccot}\frac{1+\dfrac{a_{n+1}}{a_{n-1}}}{\dfrac{a_n}{a_{n-1}}-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}}=\operatorname{arccot}a_n^2$$

所以有

$$\sum_{k=1}^n\operatorname{arccot}a_k^2=\operatorname{arccot}\frac{a_{n+1}}{a_n}-\operatorname{arccot}\frac{a_2}{a_1}+\operatorname{arccot}a_1^2=\operatorname{arccot}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

用特征根方程的方法易求数列通项, 且可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=2+\sqrt{3}$$

故

$$\sum_{n=1}^\infty\operatorname{arccot}a_n^2=\operatorname{arccot}(2+\sqrt{3})=\frac{\pi}{12}$$

注: 这里省略了求通项的过程, 实际上, 对于形如 $a_{n+2}=pa_n+qa_{n+1}$ 的递推数列, 都会得到前后项之比的极限是该递推数列较大的一个特征根.($x^2=4x-1\Rightarrow x=2\pm\sqrt{3}$) □

6. 解答: 注意到

$$\frac{(n!)^2\cdot 2^{n+1}}{(2n+1)!}=\frac{(n!)^2\cdot 2^{n+1}}{(2n+1)!\cdot(2n)!!}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}\int_0^{\pi/2}(\cos x)^{2n+1}\mathrm{d}x$$

$$\sum_{n=0}^\infty\frac{(n!)^2\cdot 2^{n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{2^{n-1}}\int_0^{\pi/2}(\cos x)^{2n+1}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}(2\cos x)\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{\cos^2 x}{2}\right)^n\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{4\cos x}{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x = 4\arctan(\sin x)\Big|_0^{\pi/2} = \pi$$

命题得证. □

7. 解答: 对任给的 $\varepsilon > 0$, 由 Weierstrass 多项式逼近定理, 存在多项式 $P(x)$ 使得对所有 $x \in [0,1]$ 有 $|f(x)-P(x)| < \varepsilon$. 又由于 $\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x$ 极限存在, 故有界, 设 $\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x \leqslant M$. 于是有

$$\left|\int_0^1 f(x)g_n(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 P(x)g_n(x)\right| \leqslant \left|\int_0^1 |f(x)-P(x)|g_n(x)\mathrm{d}x\right| < M\varepsilon$$

另一方面, 由题设条件可知

$$\int_0^1 P(x)g_n(x)\mathrm{d}x$$

极限存在. 因此 $\int_0^1 f(x)g_n(x)\mathrm{d}x$ 的极限也存在, 并与上式极限相同. □

8. 解答: 由 Weierstrass 多项式逼近定理, 存在多项式序列 $\{P_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $g(x)$. 现在设 $|f(x)| \leqslant M(a \leqslant x \leqslant b)$, 则由

$$|f(x)P_n(x) - f(x)g(x)| \leqslant M|P_n(x) - g(x)|$$

可知, 函数列 $\{f(x)P_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)g(x)$. 因为对任一幂函数 x^m, 易知 $f(x)x^m$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 (反复分部积分), 所以 $f(x)P_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数, 由练习题 14.2.4 第 8 题知 $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也有原函数. □

9. 解答: 设 $F'(x) = f(x)$, 我们有

$$(F[g(x)])' = f[g(x)]g'(x) \Rightarrow f[g(x)] = \frac{(F[g(x)])'}{g'(x)}$$

由 $g'(x)$ 连续以及 $g'(x) > 0$ 可知 $1/g'(x)$ 连续. $(F[g(x)])'$ 有原函数 $F[g(x)]$, 由 $f[g(x)]$ 及 $g'(x)$ 有界可知 $(F[g(x)])'$ 有界, 由上题结论知 $f[g(x)]$ 有原函数. □

10. 解答: 由 $\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$ 而 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ 收敛可知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上广义可积. 在 0 以外 $f(x)$ 都连续, 所以事实上只要验证 $f(x)$ 的变上限积分 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 满足 $F'(0) = 0$ 即可. 考虑当 $x \neq 0$ 时

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}}\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t = \cos\frac{1}{x}\cdot x^{3/2} - \frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{t}\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

易验证

$$F'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}\cdot x^{1/2} - \lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\int_0^x \sqrt{t}\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t}{x} = 0$$

故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有原函数, $g(x)$ 连续是显然的. 考虑

$$f\cdot g=\begin{cases}\sin^2\dfrac{1}{x},0<x\leqslant 1\\ 0,\ x=0\end{cases}$$

注意到

$$\sin^2\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)$$

由类似的办法可知 $\int_0^x\cos\dfrac{2}{t}\mathrm{d}t$ 在 0 处的导数为 0, 因此若 $\sin^2\dfrac{1}{x}$ 存在原函数 $H(x)$, 则将有 $H'(0)=\dfrac{1}{2}\neq f\cdot g(0)$, 矛盾. 所以 $f\cdot g$ 在 $[0,1]$ 上不存在原函数. □

11. 解答: 设多项式级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)\rightrightarrows f,x\in(a,b)$, 显然 f 在 (a,b) 上连续. 由例题 14.1.3 知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $x=a$ 处的右极限和在 $x=b$ 处的左极限存在, 又由例题 5.4.5 知 f 在 (a,b) 上一致连续. □

12. 解答: 作代换 $x=1/t$, 则 $f(x)=f(1/t)\overset{def}{=\!=}\varphi(t),t\in(0,1]$. 补充定义 $\varphi(0)=A$, 则 $\varphi(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 由 Weierstrass 多项式逼近定理, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在多项式 P 使得

$$|\varphi(t)-P(t)|<\varepsilon$$

即

$$\left|f(x)-P\left(\frac{1}{x}\right)\right|<\varepsilon$$

成立. □

13. 解答: 作代换 $t=e^{-x}$, 则 $f(x)=f(-\ln t)\overset{def}{=\!=}\varphi(t),t\in(0,1]$. 补充定义 $\varphi(0)=A$, 则 $\varphi(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 由 Weierstrass 多项式逼近定理, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在多项式 P 使得

$$|\varphi(t)-P(t)|<\varepsilon$$

即

$$\left|f(x)-P\left(e^{-x}\right)\right|<\varepsilon$$

成立. □

14. 解答: 任取 $x\in(0,1)$, 取得数列 $\{x_k\}$, 由题目要求, $\{x_k\}$ 不可能从某一项开始都是 9, 但可能某一项开始起都是 0.

若有 k_0 使 $x_{k_0}>0$, 且对任何 $i>k_0$, 有 $x_i=0$ 即 $x=\sum\limits_{i=1}^{k_0}\dfrac{x_i}{10^i}$, 对 $m>K$, 取

$$x'=x-\frac{1}{10^m}=\sum_{i=1}^{k_0-1}\frac{x_i}{10^i}+\frac{x_{k_0}-1}{10^{k_0}}+\sum_{i=k_0+1}^{m}\frac{9}{10^i},\quad x''=x+\frac{1}{10^m}=\sum_{i=1}^{k_0}\frac{x_i}{10^i}+\frac{1}{10^m}$$

且对 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{u_k}{2^k}$, 当 $u_{k_0}=1$, 有 $u_j=0, j>k_0$; $u_{k_0}=0$, 有 $u_j=1, j>k_0$ 的取值, 因此一定有

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k_0-1}\frac{u_i}{2^i}+\frac{1}{2^{k_0}}$$

另当 $v_{k_0}=1$ 时有 $v_j=0, k_0<j\leqslant m', v_{m'+1}=1$; 当 $v_{k_0}=0$ 时有 $v_j=1, k_0<j\leqslant m'$, $v_{m'+1}=0$.

(i) 对 $y=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{y_i}{10^i}\in(x',x)$, 有 $y_j=x_j, 1\leqslant j<k_0$, $y_{k_0}=x_{k_0}-1$, 同时存在 $m'\geqslant m$ 使 $y_j=9, k_0<j\leqslant m'$ 且 $y_{m'+1}<9$, 有

$$\frac{1}{10^{m'}}\leqslant\left|\frac{10-y_{m'}}{10^{m'}}-\sum_{i=m'+1}^{\infty}\frac{y_i}{10^i}\right|=|x-y|\leqslant\frac{1}{10^{m'-1}}$$

设 $f(y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{v_k}{2^k}$, 有 $u_j=v_j, 1\leqslant j<k_0$, 于是

$$f(y)=\sum_{i=1}^{k_0-1}\frac{v_i}{2^i}+\frac{1}{2^{k_0}}+\frac{1}{2^{m'+1}}+\sum_{i=m'+2}^{\infty}\frac{v_i}{2^i}\text{ 或 }\sum_{i=1}^{k_0-1}\frac{v_i}{2^i}+\frac{1}{2^{k_0}}-\frac{1}{2^{m'}}+\sum_{i=m'+2}^{\infty}\frac{v_i}{2^i}$$

故

$$\frac{1}{2^{m'+1}}\leqslant|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{1}{2^{m'}}+\frac{1}{2^{m'+1}}$$

同时

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\geqslant\frac{10^{m'-1}}{2^{m'+1}}$$

(ii) 对 $z=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{z_i}{10^i}\in(x,x'')$, 存在 $m''\geqslant m$ 使得 $z_j=x_j, 1\leqslant j\leqslant m''$, 且 $z_{m''+1}>0$, 于是有

$$\frac{1}{10^{m''+1}}<|x-z|<\frac{1}{10^{m''}}$$

设 $f(z)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{w_i}{2^i}$, 有 $u_j=w_j, 1\leqslant j\leqslant m''$, 且当 $w_{m''}=0$ 时有 $w_{m''+1}=1$; 当 $w_{m''}=1$ 时有 $w_{m''+1}=0$, 则

$$f(z)=\sum_{i=1}^{k_0-1}\frac{w_i}{2^i}+\frac{1}{2^{k_0}}+\frac{1}{2^{m''+1}}+\sum_{i=m''+2}^{\infty}\frac{w_i}{2^i}\text{ 或 }\sum_{i=1}^{k_0-1}\frac{w_i}{2^i}+\frac{1}{2^{k_0}}-\frac{1}{2^{m''}}+\sum_{i=m''+2}^{\infty}\frac{w_i}{2^i}$$

于是

$$\frac{1}{2^{m''+1}}\leqslant|f(x)-f(z)|\leqslant\frac{1}{2^{m''}}$$

同时

$$\frac{|f(x)-f(z)|}{|x-z|} \geqslant \frac{10^{m''+1}}{2^{m''+1}}$$

综上, 由连续和可微的定义, 可知 f 在 $(0,1)$ 中处处连续, 但处处不可微. □

15. 解答: 由题设可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 有优级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(1)$, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛于 $S(x)$.

证明逆否命题: S 的连续点集 A 等于所有 u_n 连续点集 B 之交.

显然, 对任何 $x_0 \in B$, 所有 $u_n(x_0)$ 都连续, 由一致收敛性可知 S 在 $x = x_0$ 处连续, 即 $x_0 \in A$, $B \subset A$.

而对任何 $x_0 \in A$, $S(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0, \forall |x_0 - x| < \delta$(不妨设 $x > x_0$), 有

$$S(x) - S(x_0) < \varepsilon$$

由单调性, 对每个 n 有

$$u_n(x) - u_n(x_0) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}(u_n(x) - u_n(x_0)) = S(x) - S(x_0) < \varepsilon$$

对 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 可推出另一边的不等式. 即

$$|u_n(x) - u_n(x_0)| < \varepsilon$$

故每个 $u_n(x)$ 都在 $x = x_0$ 处连续, 即 $x \in B, A \subset B$.

综上可知, S 的连续点集 A 等于所有 u_n 连续点集 B 之交. 原命题得证. □

16. 解答: 显然对任意的 $x < y, x, y \in (0,1)$ 有 $u_n(x) \leqslant u_n(y)$, 因此 $f(x) \leqslant f(y)$. 又根据 $f(0)$ 和 $f(1)$ 的定义可知, f 在 $[0,1]$ 上单调. 另一方面, 易知 $u_n(x)$ 以 x_n 为间断点, 由上题结论可知 $f(x)$ 以所有 $[0,1]$ 上的有理数为间断点. □

17. 解答: 设 $x_0 \in (0,1)\backslash\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $(0,1)$ 中的无理数. 取正数 δ 使得 $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (0,1)$. 考虑对 $\forall h \in (-\delta, \delta)$ 有

$$\frac{F(x_0+h) - F(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x_0+h-r_n) - f(x_0-r_n)}{h2^n}$$

由例题 6.1.5 知

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, & \text{当} x \neq 0 \\ 0, & \text{当} x = 0 \end{cases}$$

对每个 n, 显然 $f(x_0+h-r_n), f(x_0-r_n) \in (-3,3)$, 于是

$$\left|\frac{f(x_0+h-r_n) - f(x_0-r_n)}{h}\right| = |f'(\xi)| \leqslant 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

从而有

$$\left|\frac{f(x_0+h-r_n)-f(x_0-r_n)}{h2^n}\right| \leqslant \frac{7}{2^n}$$

可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(x_0+h-r_n)-f(x_0-r_n)}{h2^n}$$

在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(0,1)$ 上一致收敛. 故可知

$$F'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'(x_0-r_n)}{2^n}$$

即

$$F'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'(x-r_n)}{2^n}$$

当 $x=x_0$ 为 $(0,1)$ 中的有理数时, 则存在 l, $x_0=r_l$, 且有

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(x-r_n)}{2^n}=\frac{f(x-r_l)}{2^l}+\sum_{n\neq l}\frac{f(x-r_n)}{2^n}$$

由于 $x=0$ 是 f' 的第二类间断点, 故 r_l 是 F' 的第二类间断点. 因此每个 r_n 是 F' 的第二类间断点, 而在其他点上连续.

□

第十七章　高维空间中的点集与基本定理

17.1.3 思考题

1. 解答: 先证明 (i) 任意个开集的并是开集;(2) 有限个开集的交是开集.

(1) 设 $\{G_\alpha\},\alpha\in I$ 是一族开集, 令 $G=\bigcup\limits_{\alpha\in I}G_\alpha$. 任取 $\boldsymbol{x}\in G$(若 $G=\varnothing$ 则不证自明), 则有某个 $\alpha_0\in I$, 使 $\boldsymbol{x}\in G_{\alpha_0}$, 从而 $\boldsymbol{x}$ 是 G_{α_0} 的内点, 更是 G 的内点. 故 G 为开集.

(2) 设 $G_1,G_2,\cdots,G_p$ 是开集, 令 $G=\bigcap\limits_{k=1}^{p}G_k$. 任取 $\boldsymbol{x}\in G$, 则对每个 $k=1,2,\cdots,p$, 有 $\boldsymbol{x}\in G_k$. 于是有 $\boldsymbol{x}$ 邻域 (α_k,β_k) 使

$$\boldsymbol{x}\in(\alpha_k,\beta_k)\subset G_k,\quad k=1,2,\cdots,p$$

令 $(\alpha,\beta)=\bigcup\limits_{k=1}^{p}(\alpha_k,\beta_k)$, 那么它是 $\boldsymbol{x}$ 的非空邻域, 且整个含于 G 内, 故 $\boldsymbol{x}$ 为 G 的内点, 故 G 是开集.

往证本题: 设 $\{F_\alpha\},\alpha\in I$ 是一族闭集, 则 $\{(F_\alpha)^c\},\alpha\in I$ 是一族开集. 由命题 17.1.2 可以得到

$$\left(\bigcap_\alpha F_\alpha\right)^c=\bigcup_\alpha(F_\alpha)^c,\quad\left(\bigcup_\alpha F_\alpha\right)^c=\bigcap_\alpha(F_\alpha)^c$$

由已证得得结论知 $\bigcup\limits_\alpha(F_\alpha)^c$ 是开集, 故 $\bigcap\limits_\alpha F_\alpha$ 是闭集. 同理, 当 I 是有限指标集时可得 $\bigcup\limits_\alpha F_\alpha$ 是闭集. □

2. 解答: (2)⇒(1) 显然. 下证 (1) ⇒ (2): 设 $\boldsymbol{\xi}$ 为 S(定义 (1) 中) 的聚点, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists\boldsymbol{x}\in O_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})\cap S$. 取 $\varepsilon_1=1$, 则 $\exists\boldsymbol{x}_1\in O_{\varepsilon_1}(\boldsymbol{\xi})\cap S$; 取 $\varepsilon_2=\min\left\{\frac{1}{2},|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x}_1|\right\}$, 则 $\exists\boldsymbol{x}_2\in O_{\varepsilon_2}(\boldsymbol{\xi})\cap S$, 显然 $\boldsymbol{x}_2\neq\boldsymbol{x}_1$. 取 $\varepsilon_n=\min\left\{\frac{1}{n},|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x}_{n-1}|\right\}$, 则 $\exists\boldsymbol{x}_n\in O_{\varepsilon_n}(\boldsymbol{\xi})\cap S$, 且 $\boldsymbol{x}_n$ 与 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_{n-1}$ 互异的点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$, 且满足

$$|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x}_n|<\varepsilon_n\leqslant\frac{1}{n}$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{\xi}$, 证毕. □

3. 解答: 不能通过. 因为可以取 δ' 充分小, 使得 $O_{\delta'}(\boldsymbol{x})$ 与 $O_{\delta-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}(\boldsymbol{x}_{n_0})$ 无交. 若要使用原始定义, 在取出 $\boldsymbol{x}$ 任意小的邻域 $O_\delta(\boldsymbol{x})$ 后, 取 $\boldsymbol{x}_{n_0}\in O_\delta(\boldsymbol{x})$, 再使用 $\boldsymbol{x}_{n_0}$ 是聚点的定义即可通过. □

4. 解答: 令 $E_n=\left\{\left(-1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 为开集族, 但 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n=[-1,1]$. □

§17.1.4 练习题

1. 解答: 由定义可知 $\overline{S}=S\cup S^d$. 一方面, 设 $\boldsymbol{x}\in\partial S$. 若 $\boldsymbol{x}\in S^d$, 则 $\boldsymbol{x}\in S\cup S^d$. 若 $\boldsymbol{x}\notin$ S^d, 则 $\exists O_\delta(\boldsymbol{x})\backslash\{\boldsymbol{x}\}$, 其中无 S 中的点. 又因为 $\boldsymbol{x}\in\partial S, O_\delta(\boldsymbol{x})\cap S=\varnothing$, 所以有 $\boldsymbol{x}\in S$, 从而 $\boldsymbol{x}\in S\cup S^d$, 即 $S\cup\partial S\subset S\cup S^d$. 另一方面, 设 $\boldsymbol{y}\in S^d$. 若 $\boldsymbol{x}\in S$, 则 $\boldsymbol{y}\in S\cup\partial S$. 若 $\boldsymbol{y}\notin S$, 则 $\boldsymbol{y}$ 的任一去心邻域内有 S 中的点, 也有 $\overline{S}$ 中的点, 故 $\boldsymbol{y}\in\partial S$, 从而 $\boldsymbol{y}\in S\cup\partial S$, 即 $S\cup S^d\subset S\cup\partial S$. 综上可知, $\overline{S}=S\cup S^d=S\cup\partial S$. □

2. 解答: 设 $\boldsymbol{y}\in\partial S$, 则 $\boldsymbol{y}\in\overline{S}$. 因为 $\boldsymbol{y}\notin\mathrm{int}S$, 所以 $\boldsymbol{y}\in\overline{S}-\mathrm{int}S$. 即 $\partial S\subset\overline{S}-\mathrm{int}S$. 又设 $\boldsymbol{x}\in\overline{S}-\mathrm{int}S$, 则 $\boldsymbol{x}$ 为外点或边界点. 因为 $\overline{S}$ 不含 S 的外点, 所以 $\boldsymbol{x}\in\partial S$. 即 $\overline{S}-\mathrm{int}S\subset$ ∂S. 综上可知, $\partial S=\overline{S}-\mathrm{int}S$. □

3. 解答: 若 $\overline{A}\cap(\mathrm{int}B)\neq\varnothing$, 由第 1 题的结论, 且因 $A\cup(\mathrm{int}B)\subset A\cap B=\varnothing$, 故必有 ∂A $\cap(\mathrm{int}B)\neq\varnothing$. 设 $\boldsymbol{x}\in\partial A\cap(\mathrm{int}B)$, 则 $\exists O_\delta(\boldsymbol{x})\subset\mathrm{int}B$, 且 $O_\delta(\boldsymbol{x})$ 中有 A 中的点, 与 $A\cap B$ $=\varnothing$ 矛盾. 故 $\overline{A}\cap(\mathrm{int}B)=\varnothing$. □

4. 解答: $\Rightarrow$: 因为 $(S^d)^d=S^d\subset S^d$, 故 S^d 是闭集, 从而 S 是闭集. 又因为 $S=S^d$ 中的点都为聚点, 所以 S 无孤立点. $\Leftarrow$: 由 S 闭可知 $S=\overline{S}=S\cup S^d$, 则有 $S^d\subset S$. 又因 S 无孤立点, 所以 $S\subset S^d$, 故 $S=S^d$. □

5. 解答: 考虑 $\overline{S}=S\cup S^d$. 如果 $\boldsymbol{x}\in S$, 则显然 $d(\boldsymbol{x},S)=0$. 如果 $\boldsymbol{x}\in S^d$, 则存在 $\{\boldsymbol{x}_n\}\to$ $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_n\in S$, 从而 $d(\boldsymbol{x},S)=0$. 综上可知 $\overline{S}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n|d(\boldsymbol{x},S)=0\}$. □

6. 解答: $\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\overline{S}$, 设 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b}(1-t),t\in[0,1]$. 因为 $\overline{S}$ 是闭集, 故可取 $\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n\in S$ 且 $\boldsymbol{a}_n\to\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_n\to\boldsymbol{b}(n\to\infty)$. 则因 S 是凸集, 故 $\boldsymbol{c_n}=\boldsymbol{a}_nt+\boldsymbol{b}_n(1-t)\in S$. 令 $n\to\infty$ 可知 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b}(1-t)\in S^d\subset\overline{S}$.

注: 该命题反之不成立. 凸集还有下述性质:

(1) 凸集的交集是凸集;

(2) 凸集的并集不一定是凸集;

(3) 凸集的内点集是凸集, 逆命题不成立. □

7. 解答: 先设 $\boldsymbol{x}\in S\cap\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)$, 则 $\boldsymbol{x}\in S$ 且存在 $\alpha_0\in I$ 使 $\boldsymbol{x}\in A_{\alpha_0}$. 于是

$$\boldsymbol{x}\in S\cap A_{\alpha_0}\subset\bigcup_{\alpha\in I}(S\cap A_\alpha)$$

即有 $S\cap\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)\subset\bigcup\limits_{\alpha\in I}(S\cap A_\alpha)$.

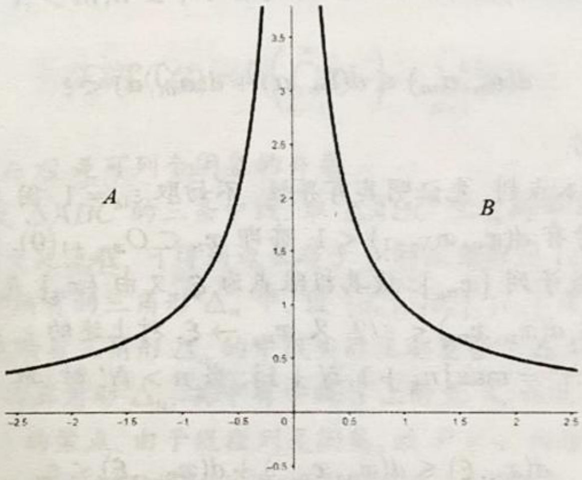
反之, 设 $\boldsymbol{x}\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}(S\cap A_\alpha)$, 则有 $\alpha_0\in I$ 使 $\boldsymbol{x}\in S\cap A_{\alpha_0}$, 此即 $\boldsymbol{x}\in S,\boldsymbol{x}\in A_{\alpha_0}$, 当然更有 $\boldsymbol{x}\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$, 因此 $\boldsymbol{x}\in S\cap\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)$. 即有 $\bigcup\limits_{\alpha\in I}(S\cap A_\alpha)\subset S\cap\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)$. 故两集合相互包含, 命题得证. □

§17.2.3 练习题

1. 解答: 否则存在 $\{\boldsymbol{x}_n\} \subset A, \{\boldsymbol{y}_n\} \subset B$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} |\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_n| = 0$. 不妨设 A 是有界的, 则 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 有收敛子列 $\{\boldsymbol{x}_{n_k}\} \to \boldsymbol{x} \in A$. 这样就有

$$d(\boldsymbol{x}, B) = \lim_{k\to\infty} |\boldsymbol{x}_{n_k} - \boldsymbol{y}_{n_k}| = \lim_{n\to\infty} |\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_n| = 0$$

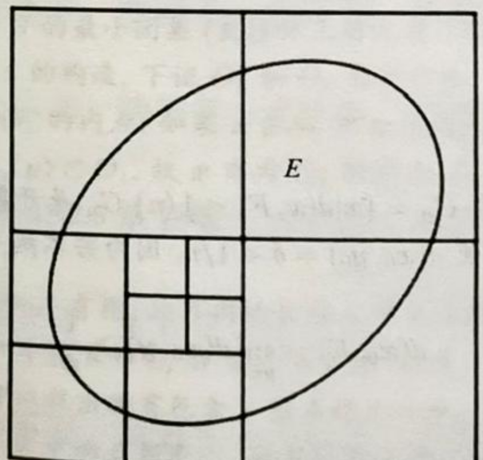
而 B 是闭集, 故 $\boldsymbol{x} \in B$, 从而 $\boldsymbol{x} \in A \cap B$ 与 A 和 B 无交的条件矛盾. 故 $d(A, B) > 0$.
当 A, B 均是无界闭集时结论不一定, 例如取 $A = \{(x, y) : x > 0, y \geqslant 1/x\}, B = \{(x, y) : x < 0, y \leqslant -1/x\}$. 如图所示



显然 $d(A, B) = 0$. □

2. 解答: 由第 1 题的结论可知 $d(S_1, S_2) > 0$, 然后再用例题 17.2.4 的第二步即证. □

3. 解答: 设 E 为有界无限点集, 则存在一个闭矩形 $D_1 \supset E$.



如图所示, 把 D_1 分成四个相同的小正方形, 则在其中至少有一小闭正方形含有 E 中无

限多个点, 把它记为 D_2. 再对 D_2 用相同方法分成四个小正方形, 其中至少有一个小闭正方形含有 E 的无穷多个点. 如此进行下去, 得到一个闭正方形序列

$$D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset \cdots$$

显然 D_n 的边长趋于 0. 由闭矩形套定理可知存在唯一的一点 $M_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$. 且对任给的 $\varepsilon > 0$, 可使 n 充分大后有 $D_n \subset O_\varepsilon(M_0)$. 由 D_n 的取法可知 $O_\varepsilon(M_0)$ 内有 E 的无限多个点, 故 M_0 是 E 的聚点. □

4. 解答:

$\Rightarrow$: 如果 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 是收敛点列, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n, m > N$ 后有 $\boldsymbol{a}_n \subset O_{\varepsilon/2}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{a}_m \subset O_{\varepsilon/2}(\boldsymbol{a})$, 于是

$$d(\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_m) \leqslant d(\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}) + d(\boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}) < \varepsilon$$

故 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 是基本点列.

$\Leftarrow$: 如果 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 是基本点列, 先证明其有界性. 不妨取 $\varepsilon_0 = 1$, 因 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 是基本点列, 故存在 N_0, 当 $n > N_0$ 时有 $d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_{N_0+1}) < 1$, 亦即 $\boldsymbol{x}_n \subset O_{\boldsymbol{x}_{N_0}+1}(\boldsymbol{0})$. 故 $\{x_n\}$ 有界. 由凝聚定理, $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 存在收敛子列 $\{\boldsymbol{x}_{n_k}\}$, 设其极限点为 $\boldsymbol{\xi}$. 又由 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 是基本点列, 任给 $\varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n, m > N$ 后 $d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_m) < \varepsilon/2$. 又 $\boldsymbol{x}_{n_k} \to \boldsymbol{\xi}$, 对上述的 ε, 存在 K, 当 $k > K$ 后有 $d(\boldsymbol{x}_{n_k}, \boldsymbol{\xi}) < \varepsilon/2$. 取 $N' = \max\{n_k + 1, N + 1\}$, 当 $n > N'$ 时, 取 $k_0 > K$ 使得 $n_{k_0} > N'$, 则有

$$d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{\xi}) \leqslant d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_{n_{k_0}}) + d(\boldsymbol{x}_{n_{k_0}}, \boldsymbol{\xi}) < \varepsilon$$

这说明 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 收敛于 $\boldsymbol{\xi}$. □

5. 解答: 例题 17.2.3 已经给出答案. □

§17.3.2 参考题

第一组参考题

1. 解答: 设 F 是闭集. 令 $G_n = \{\boldsymbol{x} | d(\boldsymbol{x}, F) < 1/n\}$,$G_n$ 是开集: 任意 $\boldsymbol{x}_0 \in G_n, d(\boldsymbol{x}_0, F) < 1/n$, 所以存在 $\boldsymbol{y}_0 \in F$, 使 $d(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \delta < 1/n$. 因为若不然, 任意 $\boldsymbol{y} \in F, d(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}) \geqslant 1/n$ 则

$$d(\boldsymbol{x}_0, F) = \inf_{\boldsymbol{y} \in F} d(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}) \geqslant \frac{1}{n}$$

矛盾.

令 $\varepsilon = 1/n - \delta > 0$, 任意 $\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon), d(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}) < \varepsilon$.

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_0)\leqslant d(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x})+d(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)<\varepsilon+\delta=\frac{1}{n}$$

于是 $d(\boldsymbol{x},F)=\inf\limits_{y\in F}d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqslant d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_0)<1/n$, 得 $\boldsymbol{x}\in G_n$. 则 $U(\boldsymbol{x}_0,\varepsilon)\subset G_n$, 故 G_n 是开集. 设 $\boldsymbol{x}\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$, 对任意 $n,\boldsymbol{x}\in G_n$, $d(\boldsymbol{x},F)<1/n$. 令 $n\to\infty$, 得 $d(\boldsymbol{x},F)=0$. 由于 F 是闭集, 存在 $\boldsymbol{y}_n\in F$, 使 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_n)\to 0$, 得 $\boldsymbol{x}\in F'\subset F$, 即有 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n\subset F$.

又显然 $G_n\supset F,n=1,2,\cdots$, 所以 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n\supset F$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n=F$, F 是可列个开集的交集.

若 G 是开集, 则 $\complement G$ 是闭集, 所以有开集 G_n, 使 $\complement G=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$, 所以

$$G=\complement(\complement G)=\complement\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\complement G_n$$

而 $\complement G_n$ 是闭集, 因而 G 是可列个闭集的并集. □

2. 解答: 设 a,b,c 是 ΔABC 的三条中线. 取 ΔABC 三边的中点, 连接这些中点得到一个小三角形 Δ_1. 重复此流程, 可得到边长趋于 0 的三角形列 $\{\Delta_n\}$. 由闭集套定理, 存在唯一的一点 P 处于所有的三角形 Δ_n 中. 设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 是三角形 Δ_n 的三条中线, 根据上述取法, 可见所有三角形 Δ_n 的中线实际上都重合于 ΔABC 的中线. 而对 $\forall\varepsilon>0$, 可以取半径小于 ε 的三角形 Δ_n, 其中有中线 a 上的点 A, 并且 $P\in\Delta_n$, 从而 $d(A,P)<\varepsilon$. 这说明 P 是 $\{a_n\}$ 的聚点. 由于线段列是闭集, 故 $P\in a$. 同理可知 $P\in b,c$. 故 ΔABC 的三条中线 a,b,c 交于一点 P. □

3. 解答: 设 $(x,y)\in E^d$, 则存在点列 $(x_n,f(x_n))\to(x,f(x))$. 因为 f 连续, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)=y$, 这说明 $(x,y)\in E$, 即 $E^d\subset E$, 故 E 是闭集. □

4. 解答: 设开集 $E\subset S$, 任取 $\boldsymbol{x}\in E$, 则存在球邻域 $O_\delta(\boldsymbol{x})\subset E\subset S$, 这表明 $\boldsymbol{x}$ 是 S 的内点, 因此 $\boldsymbol{x}\in\mathrm{int}S$, 所以 $E\subset\mathrm{int}S$. 即 $\mathrm{int}S$ 是包含于 S 的最大开集.

注: 类似可证 $\overline{S}$ 是包含 S 的最小闭集.(史济怀上册定理 13.11) □

5. 解答: 利用例题 17.2.4 的构造, 下证 O_1 和 O_2 都是开集. 设 $\boldsymbol{x}\in O_1$. 如果 $\boldsymbol{x}\in S_1$, 则 $O_{d_x/3}\subset O_1$, 从而 $\boldsymbol{x}$ 是 O_1 的内点; 如果 $\boldsymbol{x}\notin S_1$ 但 $\boldsymbol{x}\in O_{d_{y}/3}(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}\in S_1$. 设 $d=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$, 那么 $O_{d_{y}/3-d}(\boldsymbol{x})\subset O_{d_{y}/3}(\boldsymbol{y})\subset O_1$, 故 $\boldsymbol{x}$ 亦为 O_1 的内点. 综上可知 O_1 是开集, O_2 同理.

注: 其他方法参见练习题 18.2.5 第 7 题. □

6. 解答:

(1) 对任给的 $\delta>0$, 由于 S 有界, 故可用棱长为 a 的正方体包含 S. 把这个闭方体的棱长 M 等分, 切分成 M^n 个棱长为 a/M 的小正方体. 这里 M 要足够大使得每个小正方体的对角线长小于 δ. 可以找出所有包含 x 的点的正方体, 这些正方体覆盖住了 S. 再在每个小正方体中取一个 S 中的点为中心, 作半径为 δ 的开球, 则小正方体含于该开球. 可见 S 被这些以 S 中的点为中心, 半径为 δ 的有限个开球所覆盖.

(2) 可由 (3) 得到, 这里提供不一样的方法:

如果 $F \in \{G_\alpha\}$, 则结论是平凡的. 如果 $F \notin \{G_\alpha\}$, 令

$$\delta(\{G_\alpha\}, \boldsymbol{x}) = \sup_{G \in \{G_\alpha\}} \left(\inf_{\boldsymbol{y} \in F \setminus G} d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \right)$$

注意到 $\delta(\{G_\alpha\}, \boldsymbol{x})$ 是取值在 F 上的连续正值函数. 由于 F 是紧集, 故 $\delta(\{G_\alpha\}, \boldsymbol{x})$ 在 F 上可以取到最小值. 则

$$\delta(\{G_\alpha\}) = \min_{\boldsymbol{x} \in F} \{\delta(\{G_\alpha\}, \boldsymbol{x})\} > 0$$

注: 此 δ 又称开覆盖 $\{G_\alpha\}$ 的 Lebesgue 数. 这个方法适用于一般的紧度量空间 (F, d).

(3)$\Leftarrow$: $\forall \boldsymbol{q} \in F$, 存在某个下标 α_q 使得 $\boldsymbol{q} \in G_{\alpha_q}$. 因 G_{α_q} 是开集, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $O_\varepsilon(\boldsymbol{q}) \subset G_{\alpha_q}$. 考虑半径缩小一半的开球族 $\left\{O_{\varepsilon_q/2}(\boldsymbol{q}) : \boldsymbol{q} \in F\right\}$, 它构成 F 的开覆盖. 由 F 是紧集, 则该覆盖存在有限子覆盖 $\left\{O_{\varepsilon_{q_i}/2}(\boldsymbol{q}_i) : i = 1, \cdots, n\right\}$. 令 δ 为这有限个 $\varepsilon_{q_i}/2$ 中最小者. 任意 $\boldsymbol{p} \in F$, 存在某个 $\boldsymbol{q}_i$ 到 $\boldsymbol{p}$ 的距离小于 $\varepsilon_{q_i}/2$, 于是

$$O_\delta(\boldsymbol{p}) \subset O_{\varepsilon_{q_i}/2}(\boldsymbol{p}) \subset O_{\varepsilon_{q_i}}(\boldsymbol{q}_i) \subset G_{\alpha_{q_i}}$$

$\Rightarrow$: 若 $\exists \delta > 0, \forall \boldsymbol{p} \in F, \exists G \in \{G_\alpha\}, O_\delta(\boldsymbol{p}) \subset G$, 因 F 有界, 由 (1) 可知可以用有限多个 $O_\delta(\boldsymbol{p}_1), O_\delta(\boldsymbol{p}_2), \cdots, O_\delta(\boldsymbol{p}_m)$ 包含住 F, 从而存在有限多个 $G_1, G_2, \cdots, G_m$ 使得

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{m} O_\delta(\boldsymbol{p}_i) \subset \bigcup_{i=1}^{m} G_i$$

命题得证. □

第二组参考题

1. 解答:

必要性: 若 $D = A \cup B$, 其中 A, B 是两个非空的不交开集. 由于 A 和 B 都是开集, 故 A 的每点都不是 B 的凝聚点且 B 的凝聚点都不是 A 的凝聚点, 即

$$A \cap B^d = A^d \cap B = \varnothing$$

因此 D 不连通, 矛盾.

充分性: 如果 D 不连通, 那么存在不相交的非空集 A 和 B 使得 $D = A \cup B$, 且 A 不含 B 的凝聚点, B 也不含 A 的凝聚点. 任取 $\boldsymbol{a} \in A$, 自然有 $\boldsymbol{a} \in D$. 由于 D 是开集, 存在 $\delta_1 > 0$ 使得 $O_{\delta_1}(\boldsymbol{a}) \subset D$. 又因 $\boldsymbol{a}$ 不是 B 的凝聚点, 存在 $\delta_2 > 0$ 使得 $O_{\delta_2}(\boldsymbol{a})$ 中无 B 的点,

两个球中较小的一个必然全在 A 中, 所以 A 是开集. 同理, B 是开集.

注: 这条性质对于一般的拓扑空间也是适用的. 事实上, 对于一般的拓扑空间 X, 下列各条等价, 证明参见张德学 P106 命题 3.26.

(i)X 连通;

(ii)X 不能写成两个非空的不交闭集的并;

(iii)X 的既开又闭集只有 $\varnothing$ 与 D;

(iv)X 到离散空间的连续映射是常值映射;

(v)X 到两个点的离散空间的连续映射是常值映射. □

2. 解答:

必要性: 任取不同的两点 $a,b\in D$, 不妨设 $a<b$, 如果能证明 $[a,b]\subset D$, 则 D 必然是区间. 假如有一点 $c\in(a,b)$, 但 $c\notin D$, 作集合

$$A=\{x\in D:x<c\},\quad B=|x\in D:x>c\}$$

这时 A,B 都非空, 并且 $D=A\cup B$, 显然此时如果 A 中有凝聚点, 则必然 $\leqslant c$, 所以 B 中没有 A 的凝聚点, 同样 A 也没有 B 的凝聚点. 这说明 D 不是连通集, 产生矛盾.

充分性: 设 D 是数轴上的任一区间, 作分解 $D=A\cup B$, 其中 A,B 是两个不相交的非空集. 由于 A,B 非空, 可设存在 $a\in A,b\in B$. 不妨设 $a<b$, 于是 $[a,b]\subset D$, 用区间中点 $(a+b)/2$ 将这区间对分, 如果这中点属于 A, 那么取 $a_1=(a+b)/2,b_1=b$; 否则令 $a_1=a$, $b_1=(a+b)/2$. 按照作对分区间套的方法, 可作出闭区间套 $[a_k,b_k]$, 其中 $a_k\in A$, $b_k\in B$ $(k\in\mathbb{N}_+)$. 设这些区间的公共点为 c, 因此有 $a_k\to c$, $b_k\to c(k\to\infty)$. 显然, 如果 $c\in A$, 那么 $c\notin B$, 从而 $c\in B^d$, 这表明 $A\cap B^d=\varnothing$. 类似地, 当 $c\in B$ 时, $A^d\cap B\neq\varnothing$, 所以 D 是连通的.

注: 其他方法可参看张德学 P107 推论 3.11. □

3. 解答: 简便起见, 若 A 和 B 是不相交的非空子集且满足 $A^d\cap B=\varnothing, A\cap B^d=\varnothing$, 则称 A 和 B 是隔离的. 下面先证明几个引理:

引理 1(熊金城定理 4.1.3): 设 Y 是拓扑空间 X 的子集, 且 $A,B\subset Y$, 则 A 和 B 是 Y 中的隔离子集当且仅当它们是拓扑空间 X 中的隔离子集.

证: 集合 A 与 B 在 Y 中的闭包之交等于集合 A 和集合 B 在 X 中的闭包, 以及集合 Y 这三个集合之交, 也就等于集合 A 与集合 B 在 X 中的闭包之交; 同理, 集合 B 与集合 A 在 Y 中的闭包之交等于集合 B 与集合 A 在 X 中的闭包之交. 根据隔离子集的定义可见定理的第一个论断成立. 定理的第二个论断则根据第一个论断明显地推出.

引理 2(熊金城定理 4.1.4): 若 Y 是拓扑空间 X 中的连通子集, 存在 X 中不相交的非空子集 A 和 B, 它们互相不包含另一方的凝聚点, 且 $Y\subset A\cup B$, 则或者 $Y\subset A$, 或者 $Y\subset B$.

证: 由题设知

$$\begin{aligned}&((A\cap Y)\cap\overline{B\cap Y})\cup((B\cap Y)\cap\overline{A\cap Y})\\ \subset&(A\cap Y\cap\overline{B})\cup(B\cap Y\cap\overline{A})\\ =&Y\cap((A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A}))=\varnothing\end{aligned}$$

这说明 $A\cap Y$ 和 $B\cup Y$ 是不交的非空子集且互相不包含另一方的凝聚点. 然而

$$(A\cap Y)\cup(B\cap Y)=(A\cup B)\cap Y=Y$$

由引理 1, 集合 $A\cap Y$ 和 $B\cap Y$ 中必有一个是空集. 如果 $A\cap Y=\varnothing$, 据上式可知 $Y\subset B$. 如果 $B\cap Y=\varnothing$, 则同理可知 $Y\subset A$.

往证本题: 设 S_1 和 S_2 是相交连通集, 且 $S_1\cup S_2=A\cup B$, 其中 A 和 B 是不相交的非空子集满足 $A^d\cap B=\varnothing, A\cap B^d=\varnothing$. 任取 $\boldsymbol{x}\in S_1\cap S_2$, 不失一般性, 设 $\boldsymbol{x}\in A$. 因为 S_1 连通, 由引理 2 知 $S_1\subset A$ 或 $S_1\subset B$. 而因为 $\boldsymbol{x}\in S_1\cap A$, 所以 $S_1\subset A$. 同理知 $S_2\subset A$, 于是 $S_1\cup S_2\subset A$, 这说明 $B=\varnothing$. 由引理 1 知 $S_1\cup S_2$ 是连通的.

注: 也有简洁证明, 需利用第 1 题注中提及的连通性等价定义 (v), 参见张德学 P108 引理 3.6.

□

4. 解答: 先给出两个引理, 其证明过程可参阅熊金城 4.1 节.

引理 1(熊金城定理 4.1.7): 设 Y 是拓扑空间 X 的一个子集. 如果对于任何 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in Y$ 存在 X 中的一个连通子集 $Y_{\boldsymbol{xy}}$ 使得 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in Y_{\boldsymbol{xy}}\subset Y$, 则 Y 是 X 中的一个连通子集.

证: 如果 $Y=\varnothing$, 显然 Y 连通. 下设 $Y\neq\varnothing$. 任意选取 $\boldsymbol{a}\in Y$, 容易验证 $Y=\bigcup\limits_{y\in Y}Y_{ay}$. 由上一题的结论可知 Y 是连通的.

引理 2(熊金城定理 4.1.6): 设 $\{Y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是拓扑空间 X 的连通子集构成的一个子集族. 如果 $\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma\neq\varnothing$, 则 $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma\neq\varnothing$ 是 X 的一个连通子集.

现证本题: 由题设 $\mathbb{R}^2$ 中所有至少有一个坐标是有理数的点构成的集合为 $A=(\mathbb{Q}\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times\mathbb{Q})$. 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)\in A, \boldsymbol{y}=(y_1,y_2)\in A$, 其中 x_1,y_2 是有理数. 由于 $\{x_1\}\times\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}\times\{y_1\}$ 均连通, 由引理 2 知 $\{\{x_1\}\times\mathbb{R}\}\cup\{\mathbb{R}\times\{y_2\}\}$ 连通. 若 y_2 不是有理数, 则 y_1 是有理数, 此时 $\{\{x_1\}\times\mathbb{R}\}\cup\{\mathbb{R}\times\{0\}\}\cup\{\{y_1\}\times\mathbb{R}\}$ 是连通的. 因此, 有 A 的连通子集 $A_{\boldsymbol{xy}}$ 满足 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A_{\boldsymbol{xy}}\subset A$. 由引理 1 知 A 是连通的.

不难看出 A 集合也是道路连通的. 事实上, 对于任意两点 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2)(不失一般性可假设 $x_1,y_2\in\mathbb{Q}$), 可以构造一条连接这两点的道路: (i) 先从 (x_1,y_1) 出发沿着集合 $\{(x_1,y):y\in\mathbb{R}\}$ 走到 $(x_1,0)$ 处; (ii) 从 $(x_1,0)$ 沿着 x 轴走到原点; (iii) 从原点沿着 y 轴走到 $(0,y_2)$; (iv) 从 $(0,y_2)$ 沿着 $\{(x,y_2):x\in\mathbb{R}\}$ 走到点 (x_2,y_2).

□

.5. 解答: 考虑

$$S = \{(0,0)\} \cup \{(x, \sin(1/x)) | x \in (0,1]\}$$

由于 $Y = \{(x, \sin(1/x)) | x \in (0,1]\}$ 同胚于 $(0,1]$, 故 Y 连通. 又因为

$$Y \subseteq S \subseteq \overline{Y} = Y \cup (\{0\} \times [-1,1])$$

所以 S 是 $\mathbb{R}^2$ 的连通子集.

但 S 不是道路连通集, 为此我们说明 S 中不存在从 $(1, \sin 1)$ 到 $(0,0)$ 的道路即可. 下面用反证法证明比这略强一些的结论, 即 S 的闭包 $\overline{S} = S \cup (\{0\} \times [-1,1])$ 里面也不存在从 $(1, \sin 1)$ 到 $(0,0)$ 的道路. 假设 $\alpha : [0,1] \to \overline{S}$ 连续并且 $\alpha(0) = (1, \sin 1), \alpha(1) = (0,0)$. 由于 $\alpha^{\leftarrow}(\{0\} \times [-1,1])$ 是 $[0,1]$ 的非空闭子集, 因此有最小元, 设为 a. 由 a 的定义, 任给 $t \in [0,a), \alpha(t) \in Y$. 把 α 的定义域限制在 $[0,a]$ 上得到一连续映射 $\gamma = \alpha|[0,a] : [0,a] \longrightarrow \overline{S}$. 由 $[0,a]$ 的连通性不难验证 $\gamma^{\rightarrow}([0,a]) = Y \cup \{\alpha(a)\}$, 因此 $Y \cup \{\alpha(a)\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的紧子集, 从而是闭子集, 与 $\overline{Y \cup \{\alpha(a)\}} = Y \cup (\{0\} \times [-1,1])$ 矛盾.

注: 这个例子中的集合 S 又叫作拓扑学家的正弦曲线. □

6. 解答:

(1) 设 $\boldsymbol{a} \in (K+C)^d$, 则存在 $\boldsymbol{k_n} \in K, \boldsymbol{c_n} \in C$ 使得 $\boldsymbol{k_n} + \boldsymbol{c_n} \to \boldsymbol{a}$. 由于 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, 即有界闭集, 故存在子列 $\{\boldsymbol{k_{n_j}}\} \to \boldsymbol{k_0} \in K$. 则对应的 $\{\boldsymbol{c_{n_j}}\}$ 极限也存在, 且 C 为闭集故 $\{\boldsymbol{c_{n_j}}\} \to \boldsymbol{c_0} \in C$. 这说明 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{k_0} + \boldsymbol{c_0} \in K + C$. 故 $(K+C)^d \subset K + C$, $K + C$ 是闭集.

(2) 由第三章第二组参考题第九题的结论知 $\{\alpha m\}$ 的小数部分在 $[0,1]$ 上稠密. 即 $\forall x \in [0,1]$, 存在 $\{\alpha m_k\} \to x (k \to \infty)$. 而任何一个实数可以拆分成整数加小数, 故存在 $k \in K, c_n \in C$ 使得 $k + c_n \to x$. 即 $\overline{K+C} = \mathbb{R}$. 但是显然 $K + C = \mathbb{Z} \cup (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \neq \mathbb{R}$. □

第十八章 多元函数的极限与连续

§18.1.4 思考题

1. 解答:

必要性: 既然极限 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})=A$, 因此 $\forall\varepsilon>0$, 有 $\delta>0$, 使得当 $\boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{a})\backslash\{\boldsymbol{a}\}$ 使成立 $f(\boldsymbol{x})\in O_\varepsilon(A)$. 如果点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 满足定理条件, 则对上述 $\delta>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 时, 成立 $\boldsymbol{x}_n\in O_\delta(\boldsymbol{a})\backslash\{\boldsymbol{a}\}$, 因此也就有 $f(\boldsymbol{x}_n)\in O_\varepsilon(A)$.

充分性: 这时对每个点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$, 只要它满足条件 $\{\boldsymbol{x}_n\}\neq\boldsymbol{a},\forall n\in\mathbb{N}_+$, $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{a}$, 点列 $\{f(\boldsymbol{x}_n)\}$ 就一定收敛于 A. 用反证法: 如果结论 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})=A$ 不真, 则由对偶法则知存在 $\varepsilon_0>0$, 对于每一个 $\delta>0$, 存在 $\boldsymbol{x}$ 同时满足条件 $\boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{a})\backslash\{\boldsymbol{a}\}$ 和 $f(\boldsymbol{x})\in(O_{\varepsilon_0}(A))^c$. 取 $\delta_n=1/n$, 将上述 $\boldsymbol{x}$ 记为 $\boldsymbol{x}_n$, 并对于每一个 $n\in\mathbb{N}_+$ 都这样做, 就得到点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$, 它满足条件

$$\boldsymbol{x}_n\in O_{1/n}(\boldsymbol{a})\backslash\{\boldsymbol{a}\},\quad f(\boldsymbol{x}_n)\subset(O_{\varepsilon_0}(A))^c$$

容易看出这个点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 满足定理中对它的全部要求, 且数列 $\{f(\boldsymbol{x}_n)\}$ 不会收敛于 A, 与定理的条件矛盾. □

2. 解答:

必要性: 由函数 f 在 $\boldsymbol{a}$ 有极限知, 存在 A, 使 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})=A$. 因此, 对于每个给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $x\in O_\delta\boldsymbol{a}\backslash\{\boldsymbol{a}\}$, 成立 $f(\boldsymbol{x})\in O_{\varepsilon/2}(A)$. 于是当 $x_1,x_2\in O_\delta\backslash\{\boldsymbol{a}\}$ 时就有

$$d(f(\boldsymbol{x}_1),f(\boldsymbol{x}_2))\leqslant d(f(\boldsymbol{x}_1),A)+d(A,f(\boldsymbol{x}_2))<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

充分性: 由 Heine 归结原理, 只要证明, 凡满足要求 $\boldsymbol{x}_n\neq\boldsymbol{a},\forall n\in\mathbb{N}_+$, $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n=a$ 的点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$, 它对应的 $\{f(\boldsymbol{x}_n)\}$ 必定收敛.

对给定的 $\varepsilon>0$, 根据命题的条件, 有 $\delta>0$, 当 $\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''\in O_\delta(\boldsymbol{a})\backslash\{\boldsymbol{a}\}$ 时, 成立

$$d(f(\boldsymbol{x}'),f(\boldsymbol{x}''))<\varepsilon$$

由于 $\boldsymbol{x}_n\neq\boldsymbol{a},\forall n\in\mathbb{N}_+$, $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{a}$, 所以对上述 $\delta>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 时成立 $\boldsymbol{x}_n\in O_\delta(\boldsymbol{a})$. 因此当 $n,m>N$ 时, 就有 $\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{x}_m\in O_\delta(\boldsymbol{a})\backslash\{\boldsymbol{a}\}$, 并成立

$$d(f(\boldsymbol{x}_n),f(\boldsymbol{x}_m))<\varepsilon$$

这就说明点列 $\{f(\boldsymbol{x}_n)\}$ 是基本数列. 由点列的 Cauchy 收敛准则可见 $\{f(\boldsymbol{x}_n)\}$ 收敛. □

§18.1.6 练习题

1. 解答:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \dfrac{\sin xy}{x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \dfrac{\sin xy}{xy} \cdot y = a;$

(2) 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\ln(x^2+y^2) = \lim_{r\to 0}(r\cos\theta + r\sin\theta)\ln r^2$$

因为

$$|r\cos\theta + r\sin\theta||\ln r^2| \leqslant 4|r\ln r| \to 0(r\to 0)$$

故原极限为 0.

(3) 当 $x \neq 0$ 时

$$|f(x,y)| = \left|\frac{\ln(1+xy)}{x}\right| \leqslant |y|$$

而 $x=0$ 时 $f(x,y)=y$, 故始终有

$$|f(x,y)| \leqslant |y| \to 0(y\to 0)$$

即原极限为 0.

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,0)} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = \lim\limits_{(x,y)\to(\infty,0)} \exp\left[\dfrac{x}{x+y}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right] = \exp[1\cdot e] = 1;$

(5) 注意到

$$x^2 - xy + y^2 \geqslant \frac{x^2+y^2}{2}$$

故

$$\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x+y}{x^2+y^2}\right| = 2\,|r\cos\theta + r\sin\theta| \leqslant 4|r| \to 0(r\to 0)$$

故原极限为 0. □

2. 解答: 当 (x,y) 沿着 $x^3+y^3=x^4$ 趋于 $(0,0)$ 时有

$$f(x,y) = \frac{x^2(\sqrt[3]{x^4-x^3})^2}{x^4} = (\sqrt[3]{x-1})^2 \to 1(x\to 0)$$

但当 (x,y) 沿 $x=0$ 趋于 $(0,0)$ 时有 $f(x,y)=0$. 故原极限不存在. □

3. 解答:

(1) 累次极限均为 0. 当 (x,y) 沿着 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 时 $f(x,y)=1$, 当 (x,y) 沿着 $y=0$ 趋于 $(0,0)$ 时 $f(x,y)=0$, 故重极限不存在;

(2) 累次极限均不存在. 但

$$|f(x,y)| \leqslant |x|+|y| \to 0(x,y\to 0)$$

故重极限为 0.

(3)$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 不存在, $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$. 再取 $y=mx$ 有

$$f(x,y)=\frac{m}{1+m^2}+mx\sin\frac{1}{x}\to\frac{m}{1+m^2}(x\to 0)$$

故重极限不存在. □

4. 解答: 当 $x\neq y$ 时存在 ξ 介于 x 和 y 之间使得

$$g(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(\xi)$$

当 $(x,y)\to(t,t)$ 时有 $\xi\to t$, 故

$$\lim_{(x,y)\to(t,t)} g(x,y)=\lim_{\xi\to t} f'(\xi)=f'(t)$$ □

5. 解答:

唯一性定理: 若极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ 存在, 则它只有一个极限.

证: 设 A,B 都是二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(a,b)$ 处的极限, 则对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $(x,y)\in U^o(P_0;\delta)\cap D$ 时

$$|f(x,y)-A|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f(x,y)-B|<\frac{\varepsilon}{2}$$

从而

$$|A-B|\leqslant|f(x,y)-A|+|f(x,y)-B|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性, 故 $A=B$.

局部有界性定理: 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A$, 则存在点 $P_0(a,b)$ 的某空心邻域 $U^o(P_0;\delta)$, 使 $f(x,y)$ 在 $U^o(P_0;\delta)\cap D$ 上有界.

证: 设 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x)=A$, 则对 $\varepsilon=1$, 存在 $\delta>0$, 对 $(x,y)\in U^o(P_0;\delta)\cap D$ 有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon=1$$

即

$$A-1<f(x,y)<A+1$$

局部保号性定理: 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A>0$(或 <0), 则对任意正数 $r(0<r<|A|)$, 存在 $P_0(a,b)$ 的某空心邻域 $U^o(P_0;\delta)$, 使得对一切点 $P(x,y)\in U^o(P_0;\delta)\cap D$, 恒有 $f(x,y)>r>0$(或 $f(x,y)<-r<0$).

证: 设 $A>0$, 取 $\varepsilon=A-r$, 由函数极限的定义可知: 存在相应的 $\delta>0$, 对一切 $(x,y)\in$

$U^o(P_0;\delta)\cap D$ 时

$$f(x,y) > A-(A-\varepsilon) = r > 0$$

对于 $A<0$ 的情况可类似证明. □

6. 解答: 因为 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y) = A$, 从而对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1>0$, 使得当 $|y-y_0|<\delta_1$ 时

$$|\varphi(y)-A| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

又因为 $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x) = 0$, 从而对上述的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_2>0$ 使得当 $|x-x_0|<\delta_2$ 时

$$|\psi(x)-0| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

由 (1)(2) 两式, 对任给的 $\varepsilon>0$, 只须取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 当 $|x-x_1|<\delta, |y-y_0|<\delta$ 时, 就有

$$\begin{aligned}|f(x,y)-A| &= |f(x,y)-\varphi(y)+\varphi(y)-A|\\ &\leqslant |f(x,y)-\varphi(y)|+|\varphi(y)-A|\\ &\leqslant |\psi(x)|+|\varphi(y)-A| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$. □

7. 解答: 累次极限存在且相同参见命题 18.1.2. 设累次极限为 A, 下证重极限也为 A. 由累次极限 $\lim\limits_{y\to y_0} h(y) = A$ 可知 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta_1>0$, 当 $0<|y-y_0|<\delta_1$ 时

$$|h(y)-A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

又由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = h(y)$ 是一致的, 故存在 $\delta_2>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时对所有 $y\in U^o(y_0;\delta_1)$ 有

$$|f(x,y)-h(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

也就是对任意的 $(x,y)\in([x_0-\delta_2,x_0+\delta_2]\times[y_0-\delta_1,y_0+\delta_1])\backslash(\{x=x_0\}\cup\{y=y_0\})$ 有

$$|f(x,y)-A| < |f(x,y)-h(y)|+|h(y)-A| < \varepsilon$$

即 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$. □

§18.2.5 练习题

1. 解答: 由于 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 连续, 故由 Cantor 定理 $f(x,y)$ 也是一致连续的. 即

对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|x-x'|<\delta$ 及 $|y-y'|<\delta$ 时有

$$|f(x,y)-f(x',y')|<\varepsilon$$

设 $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$. 则对上述的 δ, 存在 N, 当 $n>N$ 后对任意 $x\in[a,b]$ 有

$$|\varphi_n(x)-\varphi(x)|<\delta$$

故当 $n>N$ 后对所有 $x\in[a,b]$ 有

$$|f(x,\varphi_n(x))-f(x,\varphi(x))|<\varepsilon$$

即 $f(x,\varphi_n(x))\rightrightarrows f(x,\varphi(x)), x\in[a,b]$. □

2. 解答: 注意到对任意的 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, 有

$$\begin{aligned}|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| &= \left|\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)+(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\right| \\ &\leqslant \frac{|x_1-x_2||x_1+x_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}+\frac{|y_1-y_2||y_1+y_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}} \\ &\leqslant |x_1-x_2|\frac{|x_1|+|x_2|}{\sqrt{x_1^2}+\sqrt{x_2^2}}+|y_1-y_2|\frac{|y_1|+|y_2|}{\sqrt{y_1^2}+\sqrt{y_2^2}} \\ &\leqslant |x_1-x_2|+|y_1-y_2|\end{aligned}$$

因此 $\forall\varepsilon>0$, 当 $|x_1-x_2|<\dfrac{\varepsilon}{2}, |y_1-y_2|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 时就有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$$

即 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上一致连续. □

3. 解答: 反证存在 $\boldsymbol{x}_0\in\overline{E}$, 使得 $f(\boldsymbol{x}_0)\notin\overline{f(E)}$, 那么自然有 $\boldsymbol{x}_0\notin E$(否则 $f(\boldsymbol{x}_0)\in f(E)\subset\overline{f(E)}$ 矛盾). 故 $\boldsymbol{x}_0\in E^d$, 从而存在 E 中的点列 $\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}_0$. 由 f 连续可知 $f(\boldsymbol{x}_n)\to f(\boldsymbol{x}_0)$. 又 $\overline{f(E)}$ 是闭集, 故 $f(\boldsymbol{x}_0)\in\overline{f(E)}$, 矛盾. 命题得证. □

4. 解答: 答案是否定的. 由于对 $\mathbb{R}$ 中每个开集 V, 可以找到 $(a,b)\subset V$, 而 (a,b) 与 $(0,1)$ 之间显然存在双射, 故如果能设法构造一个将 $(0,1)$ 映射成 $\mathbb{R}$ 的非连续映射 f, 则 $f(V)\supset f((a,b))=\mathbb{R}$ 为开集, 就是反例. 下面来构造这个 f(需要抽象代数和集合论的知识): 定义 $x\sim y$, 如果 $x-y\in\mathbb{Q}$, 易证这是一个 $\mathbb{R}$ 上的等价关系. 对 $x\in\mathbb{R}$, $[x]=\{x+q|q\in\mathbb{Q}\}$ 是 x 的等价类, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 就是 $\{[x]|x\in\mathbb{R}\}$. 由于 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}$ 的正规子群, 根据 Lagrange 定理 (GTM73 定理 4.6)

$$|\mathbb{R}|=|\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}||\mathbb{Q}|$$

如果故 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 可数, 则 $\mathbb{R}$ 可数, 矛盾. 因此 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 不可数, 从而必有 $|\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}|>|\mathbb{Q}|$.

我们有引理: 当 A, B 都是无限集时,$|A||B| = \max\{|A|, |B|\}$. 这很容易证明, 注意到

$$\max\{|A|, |B|\} \leqslant |A||B| \leqslant |\max\{|A|, |B|\}|^2 = |\max\{|A|, |B|\}|$$

(最有一个等号可参见张德学 P32 定理 1.9(3))
由引理可知

$$|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}||\mathbb{Q}| = |\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}|$$

所以存在 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 间的双射 h, 最后令

$$f : (0,1) \to \mathbb{R} : x \mapsto h([x])$$

则 f 将任何 $\mathbb{R}$ 中的开集映为 $\mathbb{R}$(开集), 但显然 f 不连续 ($\mathbb{R}$ 的原像可以是闭集).
注: (1)$\mathbb{R}$ 上的连续函数也未必是开映射, 例如常值函数将任意开集映成单点集 (闭集).
(2)$\mathbb{R}$ 中不连续的开映射是不能不依赖选择公理具体构造出来的.
(3) 介于本题严重超纲, 怀疑题目本意未限定拓扑为欧式拓扑, 则我们可以举

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in (0, +\infty) \\ 1, x \in (-\infty, 0] \end{cases}$$

它将每个开集映射为离散拓扑 $\{0,1\}$ 中的开集, 且显然不连续. □

5. 解答: 如果令 $r = \sqrt{x^2+y^2} > |x| + |y|$, 则由题设可知 $\lim\limits_{r\to+\infty} f(x,y)$ 存在, 设为 a.
由极限存在的定义, 取 $\varepsilon_0 = 1$, 则存在 $R_1 > 0$ 使得当 $r > R_1$ 时有

$$|f(x,y) - a| < 1, \quad a - 1 < f(x,y) < a + 1$$

于是当 $r > R_1$ 时有 $|f(x,y)| < \max\{|a-1|, |a+1|\}$. 又当 $r \leqslant R_1$ 时

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2+y^2} \leqslant R_1\right\}$$

是紧集, 而 f 在 $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ 上连续, 故 f 可在 D_1 上取得最小值 m 最大值 M. 从而

$$|f(x,y)| \leqslant \max\{|a-1|, |a+1|, |M|, |m|\}$$

即 f 有界. 又由极限定义, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $R_2 > 0$, 当 $r > R_2$ 时 $|f(x,y) - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, 即

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < f(x,y) < a + \frac{\varepsilon}{2}$$

于是对 $\forall (x', y'), (x'', y'')$ 满足 $\sqrt{x'^2 + y'^2} > R_2, \sqrt{x''^2 + y''^2} > R_2$, 有

$$|f(x',y') - f(x'',y'')| \leqslant |f(x',y') - a| + |a - f(x'',y'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

又因 f 在紧集 $D_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\sqrt{x^2+y^2}\leqslant R_1+1\right\}$ 上连续, 也一致连续. 对上述 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1>0$, 当 $(x',y'),(x'',y'')\in D$, 且 $d((x',y'),(x'',y''))<\delta_1$ 时有

$$|f(x',y')-f(x'',y'')|<\varepsilon$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,1\}$, 则当 $d((x',y'),(x'',y''))<\delta$ 时要么都在 D_2 中, 要么都在 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\sqrt{x^2+y^2}>R_2\}$ 中, 故始终有

$$|f(x',y')-f(x'',y'')|<\varepsilon$$

即 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上一致连续.

注: 反之不成立. 即 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上一致连续不能推出 $\lim\limits_{r\to+\infty}f(x,y)$ 存在. □

6. 解答: 第 10 题的特例. □

7. 解答: 令

$$\rho(\boldsymbol{x})=\frac{d(\boldsymbol{x},S_1)}{d(\boldsymbol{x},S_1)+d(\boldsymbol{x},S_2)}$$

由例题 18.2.7 易知 $\rho(\boldsymbol{x})$ 连续. 对任意的 $\boldsymbol{x}\in S_1$ 可知 $\rho(\boldsymbol{x})=0$; 对任意的 $\boldsymbol{x}\in S_2$ 可知 $\rho(\boldsymbol{x})=1$. 令

$$O_1=f^{\leftarrow}[0,1/3),\quad O_2=f^{\leftarrow}(2/3,1]$$

由于 f 连续, 故 O_1,O_2 是包含 A,B 的不交非空开集.

注: (1) 这个方法可以用来证明度量空间正规.

(2)Urysohn 引理断言, 对任意正规空间, 存在连续映射 $f:X\longrightarrow[0,1]$ 使得 $f^{\rightarrow}(A)=\{0\},f^{\rightarrow}(B)=\{1\}$. 本题的构造只是一个特例. □

8. 解答: 由题设可知 $f_n(\boldsymbol{x})\geqslant f(\boldsymbol{x})=0,\boldsymbol{x}\in D$. 由于 D 是紧集, 故 $f_n(\boldsymbol{x})$ 在 D 上存在最大值 $f_n(\boldsymbol{x}_n)$. 则题设有

$$f_{n+1}(\boldsymbol{x}_{n+1})\leqslant f_n(\boldsymbol{x}_{n+1})\leqslant f_n(\boldsymbol{x}_n)$$

故 $\{f_n(\boldsymbol{x}_n)\}$ 关于 n 单调递减且非负, 从而必有极限. 设

$$\lim_{n\to\infty}f_n(\boldsymbol{x}_n)=a$$

即 $\{f_n(\boldsymbol{x}_n)\}$ 单调递减趋于 a, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\boldsymbol{x}\in D}|f_n(\boldsymbol{x})-a|=\lim_{n\to\infty}(f_n(\boldsymbol{x}_n)-a)=0$$

即 $f_n(\boldsymbol{x})\rightrightarrows a$. 但由题设 $f_n(\boldsymbol{x})$ 在 D 上点态收敛于 0, 故 $a=0$, 即 $f_n(\boldsymbol{x})\rightrightarrows 0,\boldsymbol{x}\in D$. □

9. 解答: 只要验证 $\omega_f(\boldsymbol{a})$ 满足例题 18.2.8 的两条性质即可.

(1) 固定点 $\boldsymbol{a}\in E$, 当 f 有界时, 显然 $\sup\limits_{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}|\leqslant\delta}\{|f(\boldsymbol{a})-f(\boldsymbol{x})|\}$ 是关于 δ 的单调增加的有界函数, 故必然存在极限 $\omega_f(\boldsymbol{a})$.

(2) 若 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{a}$ 点连续, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $\boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{a})$ 时, $|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})|<\varepsilon$, 此时有

$$\omega_f(\boldsymbol{a},\delta)\leqslant\varepsilon$$

于是

$$\omega_f(\boldsymbol{a})=\lim_{\delta\to0^+}\omega_f(\boldsymbol{a},\delta)=0$$

反之, 若 $\lim\limits_{\delta\to0^+}\omega_f(\boldsymbol{a},\delta)=0$, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_0>0$, 当 $\delta\leqslant\delta_0$ 时

$$|f(\boldsymbol{a})-f(\boldsymbol{x})|\leqslant\omega_f(\boldsymbol{a},\delta)=\sup_{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}|\leqslant\delta}\{|f(\boldsymbol{a})-f(\boldsymbol{x})|\}<\varepsilon$$

即 $f(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{a}$ 处连续. □

10. 解答: 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, $f:K\to\mathbb{R}^n$ 为连续映射. 设 $\{\boldsymbol{y_k}\}\subset f(K)$, 对每个 $\boldsymbol{y_k}$, 任取一个满足 $f(\boldsymbol{x_k})=\boldsymbol{y_k}$ 的点 $\boldsymbol{x_k}\in K$, 则 $\{\boldsymbol{x_k}\}$ 为紧集 K 的点列, 必存在子列满足

$$\lim_{i\to\infty}\boldsymbol{x_{k_i}}=\boldsymbol{a}\in K$$

由 f 的连续性知

$$\lim_{i\to\infty}\boldsymbol{y_{k_i}}=\lim_{i\to\infty}f(\boldsymbol{x_{k_i}})=f(\boldsymbol{a})$$

即 $f(\boldsymbol{a})$ 是 $\{\boldsymbol{y_k}\}$ 的聚点, 且 $\boldsymbol{a}\in K$, 所以 $f(\boldsymbol{a})\in f(K)$. 因此 $f(K)$ 是紧集. □

§18.3.2 参考题

第一组参考题

1. 解答: 取 $y_n\nearrow d$, 由 Heine 归结定理, 只需证明 $f(x,y_n)\rightrightarrows f(x,d)$. 记 $F_n(x)=f(x,y_n)$, 则 $F_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 关于 n 单调增加, 且 $f(x,d)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 令 $g_n(x)=F(x)-F_n(x)$, 则 $g_n(x)$ 非负连续且单调递减趋于 0. 任给 $\varepsilon>0$, 我们要证明存在 N, 使得当 $n>N$ 时有

$$0\leqslant g_n(x)<\varepsilon,\quad\forall x\in[a,b]$$

即要证 n 充分大后 $A_n=\{x\in[a,b]|g_n(x)\geqslant\varepsilon\}=\varnothing$. 因为 g_n 关于 n 递减, 因此

$$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset A_{n+1}\supset\cdots$$

为此我们只要证明某一个 A_n 是空集即可.

反证法: 假设 A_n 均非空集, 取 $x_n \in A_n$, 则 $\{x_n\}$ 为 $[a,b]$ 中的有界点列, 从而存在收敛子列 $\{x_{n_i}\}$, 设此子列收敛到 $x_0 \in [a,b]$. 则有

$$A_k \supset A_{n_k} \supset \{x_{n_k}, x_{n_{k+1}}, \cdots\}$$

而 g_k 在 x_0 处连续, 我们有

$$g_k(x_0) = \lim_{k \leqslant i \to \infty} g_k(x_{n_i}) \geqslant \varepsilon$$

上式对任意 $k \geqslant 1$ 均成立, 这和 $g_n(x_0) \to 0 (n \to \infty)$ 相矛盾.

至此可知 $g_n(x) \rightrightarrows 0$, 从而命题成立.

注: 本题实际上是函数列形式 Dini 第一定理.Dini 定理有以下两种 (注意它们的区别):

第一 Dini 定理: 设 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 是一有界闭区间, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是一连续函数, 若

(1) 函数列 $\{f_n\}$ 是单调的, 即 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leqslant f_{n+1}$ 或 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \geqslant f_{n+1}$.

(2) 函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛于一连续函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

则函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f.(与 §14.1 中函数项级数形式 Dini 定理 (裴礼文 P504 例 5.2.27) 类似, 函数列形式 Dini 定理证明可以参阅邹应下册 P95 定理 12.1.5)

第二 Dini 定理: 设 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 是一有界闭区间, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是一连续函数, 若

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ 在 $[a,b]$ 上单调.

(2) 函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛于一连续函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

则函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f.(证明参见第十四章第二组参考题第 3 题) □

2. 解答: 设 $\psi(\xi) = \max\limits_{a \leqslant y \leqslant \xi} f(\xi, y)$. 由题设知 $f(\xi, y)$ 是关于 ξ 的连续函数, 故对每个 $\xi_0 \in [y, x]$, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|\xi - \xi_0| < \delta$ 时有

$$f(\xi_0, y) - \varepsilon < f(\xi, y) < f(\xi_0, y) + \varepsilon \tag{1}$$

此时考虑 $y = a + k(\xi - a), k \in [0,1]$, 则

$$\psi(\xi) = \max_{a \leqslant y \leqslant \xi} f(\xi, y) = \max_{0 \leqslant k \leqslant 1} f(\xi, a + k(\xi - a))$$

而 (1) 式化为

$$f(\xi_0, a + k(\xi_0 - a)) - \varepsilon < f(\xi, a + k(\xi - a)) < f(\xi_0, a + k(\xi_0 - a)) + \varepsilon \tag{2}$$

在 (2) 式右半边对 k 取 max, 则有

$$f(\xi_0, a + k(\xi_0 - a)) - \varepsilon < f(\xi, a + k(\xi - a)) < \psi(\xi_0) + \varepsilon \tag{3}$$

在 (3) 式中间 k 取 max, 则有

$$f(\xi_0, a+k(\xi_0-a))-\varepsilon<\psi(\xi)<\psi(\xi_0)+\varepsilon \tag{4}$$

最后对 (4) 式左半边对 k 取 max, 则有

$$\psi(\xi_0)-\varepsilon<\psi(\xi)<\psi(\xi_0)+\varepsilon \tag{5}$$

(5) 式说明了 $\psi(\xi)$ 的连续性. 同理可证 $\varphi(x)=\max\limits_{a\leqslant\xi\leqslant x}\psi(\xi)$ 的连续性. □

3. 解答:
必要性: 若 f 连续, 由练习题 18.2.5 第 10 题可知 $f(D)$ 是紧集. 记

$$E=\{(\boldsymbol{x},y)\in\mathbb{R}^{n+1}|y=f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in D\}$$

则必有 $E\subset D\times f(D)$, D 和 $f(D)$ 都是紧集, 故都有界, 从而 E 有界.
取 $(\boldsymbol{x},y)\in E^d$, 则存在点列 $(\boldsymbol{x}_n,f(\boldsymbol{x}_n))\to(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x}))$. 由 f 连续可得

$$\lim_{n\to\infty}f(\boldsymbol{x}_n)=f(\boldsymbol{x})=y$$

这说明 $(\boldsymbol{x},y)\in E$, 即 $E^d\subset E$, 故 E 是闭集. 结合 E 有界, 知 E 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的紧集.
充分性: 如果 E 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的紧集, 作映射

$$g:D\to E:\boldsymbol{x}\mapsto(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x}))$$

$$p:E\to D:(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x}))\mapsto\boldsymbol{x}$$

设 S 是 E 内的闭集, 则因为 E 是紧集所以 S 是紧集, 又映射 p 显然连续 (开集的原像是开集), 由练习题 18.2.5 第 10 题的结论可知 $p(S)$ 是紧集, 也是有界闭集, 因此 $g^{-1}(F)=p(F)$ 为闭集, 从而 g 连续 (闭集的原像是闭集), 则 f 也连续 (否则 g 不连续, 矛盾).
注: (1) 本题的背景是泛函分析中的闭图像定理.
(2) 也可用其他方法证明, 参见徐森林《实变函数习题精选》P80 第 90 题. □

4. 解答: 记

$$a_{ij}=\int_a^b f_i(x)f_j(x)\mathrm{d}x$$

必要性: 若 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 线性相关, 则存在不全为 0 的 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 使得

$$g(x)\equiv\sum_{i=1}^n c_if_i(x)\equiv 0, x\in[0,1]$$

由此我们有

$$\int_a^b g(x)f_j(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b f_i(x)f_j(x)\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{i=1}^n a_{ij}c_i = 0 \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

即关于 $c_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的方程组有非零解, 故系数矩阵的行列式

$$\det(a_{ij}) = 0 \tag{2}$$

充分性: 若 (2) 式成立, 则存在不全为 0 的 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 使得 (1) 式成立, 于是有

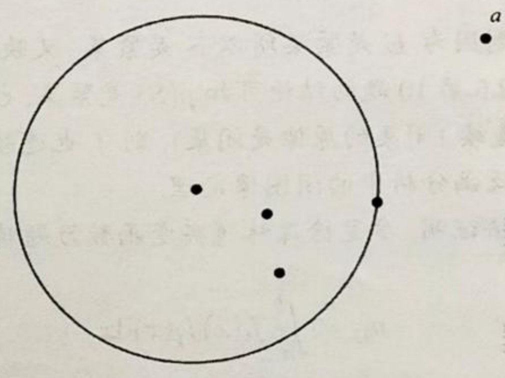
$$\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\sum_{j=1}^n c_j f_j(x)\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{j=1}^n c_j \int_a^b g(x)f_j(x)\mathrm{d}x = 0$$

由练习题 10.2.4 的注可知

$$g(x) \equiv \sum_{i=1}^n c_i f_i(x) \equiv 0, x \in [0,1]$$

即 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 线性相关. □

5. 解答: 任取一个点 $\boldsymbol{p}_n$ 作为圆心, 以 $d = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{|\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{p}_i|\}$ 为半径作圆盘 $O_d(\boldsymbol{p}_n)$, 则圆盘 $O_d(\boldsymbol{p}_n)$ 覆盖了 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_k$, 这说明能覆盖所有点的最小圆盘半径 $r \leqslant d$.



我们断言能覆盖所有点的最小圆盘的圆心 $\boldsymbol{a}$ 一定在圆盘 $O_d(\boldsymbol{p}_n)$ 内. 否则 $\boldsymbol{a}$ 点与 $\boldsymbol{p}_n$ 的距离会大于 d, 这与 $r \leqslant d$ 矛盾. 圆盘 $O_d(\boldsymbol{p}_n)$ 是一个闭区域, 而 r 是关于 $\boldsymbol{a}$ 的连续函数, 所以一定能在圆盘 $O_d(\boldsymbol{p}_n)$ 内取到 r 的最小值.

注: (1) 本题结论可以直接推广到 $\mathbb{R}^n$ 中.

(2)r 是关于 $\boldsymbol{a}$ 的连续函数, 这是显然的, 因为距离函数连续, 而 $r = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}_i)$ 是

k 个距离函数取 max, 也是连续的.

(3) 本题的背景是最小圆覆盖问题, 它最早由英国数学家 Sylvester 提出. □

6. 解答: 引理 (Rayleigh 商定理): 对任意实对称矩阵 $\boldsymbol{C}$, 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{C}$ 的 n 个特征值, 记 $\lambda_{\min}$ 和 $\lambda_{\max}$ 是其中的最小最大特征值, 则有

$$\lambda_{\min} \leqslant \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}} \leqslant \lambda_{\max}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

证: $\forall \boldsymbol{x} \in E$, $\boldsymbol{C}$ 是实对阵矩阵. 由线性代数的知识知存在正交线性替换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$ 使得

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

又

$$\lambda_{\min}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \lambda_{\min}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}) = \lambda_{\min}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y} = \lambda_{\min}y_1^2 + \lambda_{\min}y_2^2 + \cdots + \lambda_{\min}y_n^2$$
$$\lambda_{\max}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \lambda_{\max}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}) = \lambda_{\max}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y} = \lambda_{\max}y_1^2 + \lambda_{\max}y_2^2 + \cdots + \lambda_{\max}y_n^2$$

由 $\lambda_{\min} \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_{\max}, i = 1, 2, \cdots, n$ 可知

$$\lambda_{\min}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \leqslant \lambda_{\max}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

$$\lambda_{\min} \leqslant \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}} \leqslant \lambda_{\max}$$

往证本题: 由于 $\boldsymbol{B}$ 正定, 故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{L}$ 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}$, 则

$$G(\boldsymbol{x}) = \left(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right) = \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}}$$

记 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, $\lambda_{\max}$ 为 $(\boldsymbol{L}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{L})^{-1}$ 的最大特征值, 则由引理得

$$G(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}} \leqslant \lambda_{\max}$$

$G(\boldsymbol{x})$ 在 E 上的最大值是可以取到的, 下面来求出最大值点.

由于任意 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{N}\boldsymbol{M}$ 有相同非零特征值, 故 $\lambda_{\max}$ 事实上也是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$ 的最大特征值.

设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$ 的特征值为 $\lambda_{\max} = \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$. 现在把 $(\boldsymbol{L}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{L})^{-1}$ 对角化, 取正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \xlongequal{def} \Lambda$$

令 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Z}$, 则

$$G(\boldsymbol{x})=\frac{\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\Lambda\boldsymbol{Z}}{\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i z_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^2}$$

取 $z_1\neq 0, z_2=z_3=\cdots=z_n=0$, 则 $G(\boldsymbol{x})=\lambda_1=\lambda_{\max}$. 此时有

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}z_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

记 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是 λ_i 的特征向量. 容易验证

$$\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}z_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}(z_1\boldsymbol{\alpha}_1)$$

$$=\boldsymbol{L}^{-1}\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1\cdot z_1=\lambda_1\boldsymbol{L}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}z_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\lambda_1\boldsymbol{X}$$

所以 $\boldsymbol{X}$ 是矩阵 $\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{L}^{-1}$ 的特征向量.

注: 也可以将 Rayleigh 商视作有界闭集上的多元连续函数性质以及条件极值来说明, 可参看李炯生 7.6 节. □

第二组参考题

1. 解答: 由题设可知 T^{n_0} 是一个压缩映射, 由命题 18.2.5 知 T^{n_0} 存在唯一不动点 $\boldsymbol{x}^*$, 即

$$T^{n_0}(\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{x}^*$$

那么有

$$T(T^{n_0}\boldsymbol{x}^*)=T^{n_0}(T\boldsymbol{x}^*)=T^{n_0}(\boldsymbol{x}^*)$$

这说明 $T^{n_0}(\boldsymbol{x}^*)$ 是 T 的唯一不动点. □

2. 解答: 设 $g(\boldsymbol{x})=|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}|$, 则 g 在紧集 Ω 上连续 (由题设知 f 一致连续从而连续从

而 g 连续), 从而 g 在 Ω 上取得到最小值 a. 假设 $g(\boldsymbol{\xi}) = |f(\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{\xi}| = a > 0$. 由题设可知 $f(\boldsymbol{\xi}) \in \Omega$, 则我们有

$$|g(f(\boldsymbol{\xi}))| = |f(f(\boldsymbol{\xi})) - f(\boldsymbol{\xi})| < |f(\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{\xi}| = a$$

与 a 是最小值矛盾. 所以 $a = 0$, 即存在不动点 $\boldsymbol{x}^*$ 使得 $f(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{x}^*$.

注: 题目的条件不可以改动.

(i) 若去掉有界集的条件, 则可取反例

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax}, x \in (-\infty, 1) \\ x + \dfrac{1}{4x}, x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

其中 a 是满足 $ae^a = \dfrac{3}{4}$ 的解, 其近似值为 0.47. 此时 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 可导, 且 $0 < f'(x) < 1$, 则

$$|f(x) - f(y)| = f'(\xi)|x - y| < |x - y|$$

但是 $y = x$ 是 $f(x)$ 的渐近线, 因此不动点不能够取到. 并且 f 将 $\mathbb{R}$ 映到 $(0, +\infty) \subset \mathbb{R}$, 而 $\mathbb{R}$ 是开闭集, 满足题设.

(ii) 若去掉闭集条件, 则可取反例 $f(x) = \sin x, x \in (0, \pi/2)$, 它将 $(0, \pi/2)$ 映到 $(0, 1) \subset (0, \pi/2)$ 且此时满足

$$|\sin x - \sin y| = \cos\xi |x - y| < |x - y|$$

但 $\sin x = x$ 的解显然只有 $x = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \pi/2)$ 上不存在不动点.

注: 满足本题条件的映射 f 称为严格非扩张映射. □

3. 解答: 显然 X 连通等价于 X 没有非平凡的既开又闭集.

充分性: 若 X 不连通, 则存在非不交空开集 A, B 使得 $X = A \cup B$, 于是 $A = X \backslash B$ 是非平凡既开又闭集, 矛盾. 故 X 连通.

必要性: 若 X 存在非平凡既开又闭集 A, 则 A 和 $X \backslash A$ 是非空不交开集且有 $X = A \cup (X \backslash A)$, 与 X 连通矛盾. 故 X 不存在非平凡既开又闭集.

现证本题: 设 f 连续, X 连通, 考虑 $f(X)$ 的每个非平凡既开又闭集的原像是既开又闭集, 如果 $f(X)$ 不连通则会导致 X 不连通的矛盾, 故 $f(X)$ 连通. □

4. 解答: 只证第 (1) 问, 第 (2) 问类似. 我们证明如下断言等价 (有界性可见第 5 题):

(i) $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处上半连续;

(ii) $\varlimsup\limits_{\Omega \ni \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{x}_0)$;

(iii) $\forall \boldsymbol{x}_n : \boldsymbol{x}_n \in E, \boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}_0$, 必有 $\varlimsup\limits_{n \to \infty} f(\boldsymbol{x}_n) \leqslant f(\boldsymbol{x}_0)$.

(i)⇒ (ii): 明显, 因 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|\boldsymbol{x}| \in \Omega$ 时有

$$f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{x}_0) + \varepsilon$$

对上式取极限即得 (ii).

(ii)$\Rightarrow$ (iii): 由

$$\overline{\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}} f(\boldsymbol{x}) = \max\left\{\lim_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}_n)\,|\boldsymbol{x}_n \in \Omega, \boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}_0\,(\boldsymbol{x}_n \neq \boldsymbol{x}_0)\right\}$$

直接可得.

(iii)$\Rightarrow$ (i) 反证 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处不上半连续, 则

$$\exists\varepsilon_0 > 0, \forall\delta_n = \frac{1}{n} > 0, \exists \boldsymbol{x}_n \in \Omega, 0 < |\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_0| < \delta_n = \frac{1}{n}$$

使得 $f(\boldsymbol{x}_n) \geqslant f(\boldsymbol{x}_0) + \varepsilon_0$, 这与 (iii) 矛盾. □

注: 若 $f(\boldsymbol{x})$ 既上半连续又下半连续, 则 $f(\boldsymbol{x})$ 连续.

5. 解答: 只证上半连续函数有上界且能达到最大值, 下半连续情形类似. 先证有上界: 若 $f(\boldsymbol{x})$ 无界, 则存在 $\boldsymbol{x}_n \in \Omega$ 使得 $f(\boldsymbol{x}_n) > n(n = 1, 2, \cdots)$. 由凝聚定理, 在 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 中存在收敛得子序列 $\{\boldsymbol{x}_{n_k}\}$, 使 $\boldsymbol{x}_{n_k} \to \boldsymbol{x}_0$(当 $k \to +\infty$). 因 Ω 是紧集, 故 $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$. 但 $f(\boldsymbol{x}_{n_k}) > n_k$, 当 $k \to +\infty$ 时 $f(\boldsymbol{x}_{n_k}) \to +\infty$, 所以 $\overline{\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}} f(\boldsymbol{x}) = +\infty$. 但 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上上半连续, 由第 4 题知 $\overline{\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}} f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{x}_0)$, 故 $f(\boldsymbol{x}_0) = +\infty$, 矛盾.

再反证 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上达不到上确界 M, 则 $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega, f(\boldsymbol{x}) < M$, $M - f(\boldsymbol{x}) > 0$, 所以可知 $\dfrac{1}{M - f(\boldsymbol{x})}$ 在 Ω 上上半连续 (用定义显然), 从而有上界, 即存在 $M' > 0$, 使 $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega$ 有

$$\frac{1}{M - f(\boldsymbol{x})} < M' \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) < M - \frac{1}{M'}$$

这与 M 是上确界矛盾. □

6. 解答: 我们证明 $f(\boldsymbol{x})$ 下半连续. 否则存在 $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$, $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}_0, \exists N, \forall n > N$ 有 $f(\boldsymbol{x}_n) \leqslant f(\boldsymbol{x}_0) - \varepsilon$. 从而有

$$\varepsilon \leqslant \sup_k f_k(\boldsymbol{x}_0) - \sup_k f_k(\boldsymbol{x}_n) \leqslant \sup_k (f_k(\boldsymbol{x}_0) - f_k(\boldsymbol{x}_n))$$

令 $n \to \infty$ 得 $\varepsilon \leqslant 0$, 矛盾. 所以 $f(\boldsymbol{x})$ 下半连续, 再由上一题结论可知 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上可达最小值. □

7. 解答:

(1) 由序列 $\{\boldsymbol{f}_n\}$ 的构造可知, 若 $m \leqslant n$, 则对于每个 $t \in [0, 1]$, 能以找到边长为 $1/2^m$ 的小三角形同时含有 $\boldsymbol{f}_m(t)$ 和 $\boldsymbol{f}_n(t)$, 因此在 $[0, 1]$ 上成立

$$|\boldsymbol{f}_m(t) - \boldsymbol{f}_n(t)| \leqslant 1/2^m$$

于是连续映射序列 $\boldsymbol{f}_n$ 在 $[0, 1]$ 上收敛于一个连续映射 $\boldsymbol{f} : [0, 1] \to \Delta$, 且 $\boldsymbol{f}$ 满足

$$|\boldsymbol{f}_m(t)-\boldsymbol{f}(t)|\leqslant 1/2^m,\quad t\in[0,1]$$

并且 $\{\boldsymbol{f}_n\}$ 的收敛性还是一致的.

(2) 首先说明 Δ 上的每一点都是 $\boldsymbol{f}$ 的像集的聚点 (即该点的任何邻域中都包含 $\boldsymbol{f}$ 的像集的中的无限多个点). 从 $\{\boldsymbol{f}_n\}$ 的构造可知: $\boldsymbol{f}_n$ 的像到 Δ 上任一点的距离不超过 $1/2^n$. 对于 Δ 上任一点 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{a}$ 的邻域 U, 取 N 充分大, 使得 $O_{1/2^{N-1}}(\boldsymbol{a})\subset U$, 并且取 $t_0\in[0,1]$ 使得

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{f}_N(t_0)|\leqslant 1/2^N$$

因此

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{f}(t_0)|\leqslant|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{f}_N(t_0)|+|\boldsymbol{f}_N(t_0)-\boldsymbol{f}(t_0)|\leqslant 1/2^N+1/2^N=1/2^{N-1}$$

所以 $\boldsymbol{f}(t_0)\in O_{1/2^{N-1}}(\boldsymbol{a})\subset U$, 这说明 $\boldsymbol{a}$ 是 $\boldsymbol{f}$ 像集的聚点.

显然 $\boldsymbol{f}([0,1])\subset\Delta$, 而 $\boldsymbol{f}$ 是连续映射, 所以 $\boldsymbol{f}([0,1])$ 为有界闭集, 从而 $\boldsymbol{f}([0,1])$ 包含它的所有聚点, 于是 $\boldsymbol{f}([0,1])=\Delta$. □

8. 解答:

(1) 由例题 18.2.7 易知 $g_k(\boldsymbol{x})$ 连续. 注意到

$$g_k(A_k)=-\frac{2^{k-1}}{3^k},g_k(B_k)=\frac{2^{k-1}}{3^k},g(D-(A_k\cup B_k))\in\left(-\frac{2^{k-1}}{3^k},\frac{2^{k-1}}{3^k}\right)$$

迭代可得

$$|\varphi_k(\boldsymbol{x})|\leqslant\frac{2^{k-1}}{3^k}M,\forall\boldsymbol{x}\in D,\quad|g_k(\boldsymbol{x})|\leqslant\frac{2^{k-1}}{3^k}M,\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$$

显然 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}g_k(\boldsymbol{x})\rightrightarrows g(\boldsymbol{x})$(因为 $g_k(\boldsymbol{x})$ 连续所以 $g(\boldsymbol{x})$ 也连续), 且 $g(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in D$.

(2) 构造同胚映射

$$h:(-1,1)\to(-\infty,+\infty):x\mapsto\tan 2\pi x$$

则 $h^{-1}\circ f$ 有界, 取它的扩张 g', 并注意到

$$h^{-1}\circ f((-\infty,1]\cup[1,+\infty))=\varnothing$$

此时 $g'=\sum\limits_{k=1}^{\infty}g'_n$ 有 $g'_k(\boldsymbol{x})<\dfrac{2^{k-1}}{3^k}$, 从而有

$$g'(\boldsymbol{x})=\sum_{k=1}^{\infty}g_k(\boldsymbol{x})<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{3^k}=1$$

故可取 $g = h \circ g'$, 它满足 $h \circ (h^{-1} \circ f) = f, \boldsymbol{x} \in D$.

□

9. 解答: 考虑在 $\mathbb{R}$ 上, 令 $f(x) = \sin 1/x$ 在开集 $(0,1)$ 上连续, 但是它不可能有全空间上的连续扩张 $f^*(x)$, 否则 $f^*(x)$ 必然在 0 处间断, 与 $f^*(x)$ 连续矛盾. 但是如果开集上的 $f(x)$ 一致连续, 则是可以做到的, 因为只要在开区间端点上补充定义就可以让 $f(x)$ 在闭集上连续, 再用上一题的 Tietze 扩张定理即可.

注: 一般度量空间上一致连续函数的延拓定理依然成立, 并且还可以使延拓后的函数在全空间上一致连续, 详情参见徐森林第二册 P37 定理 7.4.6 与徐森林上册 P300 第 315 题.

□

10. 解答: 我们证明更一般的命题: $\mathbb{R}^n$ 的稠子集上的一致连续函数可惟一扩张到全空间. 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 的稠子集 E 上的一致连续函数, 分以下证明此命题:

(1) 由 E 是稠子集可知对 $\forall \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, 存在 $\boldsymbol{x}_n \in E$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}_0$. 我们证明 $\{f(\boldsymbol{x}_n)\}$ 收敛. 事实上由于 f 的一致连续性, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对于任意的 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in E$, 当 $|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| < \delta$ 时, 有 $|f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_2)| < \varepsilon$. 由 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 的收敛性, 对于这个 $\delta > 0$, 存在 N, 当 $n, m > N$ 时有 $|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_m| < \delta$, 从而有 $|f(\boldsymbol{x}_n) - f(\boldsymbol{x}_m)| < \varepsilon$, 得证.

(2) 另设 $\boldsymbol{x}'_n \in E$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}'_n = \boldsymbol{x}_0$, 我们证明 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}_n)$. 假设不然, 则令 $\boldsymbol{y}_{2n} = \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_{2n-1} = \boldsymbol{x}'_n$, 则有 $\boldsymbol{y}_n \in E$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{x}_0$, 但 $\{f(\boldsymbol{y}_n)\}$ 发散, 与 (i) 矛盾.

(3) 现在定义 $f^*(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}_n), \forall x \in E$, 其中 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中任意一个收敛于 $\boldsymbol{x}$ 的序列, 可见这样的函数是唯一的. 下面验证 f^* 是 f 的连续扩张.

(i) 对 $\forall \boldsymbol{x} \in E$, 令 $\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$ 可得 $f^*(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}_n) = f(\boldsymbol{x})$. 即 $f^*(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in E$.

(ii) $\forall \boldsymbol{x}_0 \in E$, 可以找到有界集 $F \subset \mathbb{R}^n$ 包含 $\boldsymbol{x}_0$, 我们证明在 $f^*(\boldsymbol{x})$ 在 F 上一致连续即可由 $\boldsymbol{x}_0$ 的任意性知 $f^*(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上处处连续. 实际上, 由已知 f 在 E 上一致连续可知对任给的 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, 对于任意的 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in E$, 当 $|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| < \delta_1$ 时有

$$|f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_2)| < \varepsilon/3$$

取 $\delta = \delta_1/3$, 可以证明这时对于任意的 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in F$, 当 $|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| < \delta$ 时, 有

$$|f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_2)| < \varepsilon$$

这是因为对任意的 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in F$, 存在 $\boldsymbol{x}'_n, \boldsymbol{x}''_n \in E$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}'_n = \boldsymbol{x}_1, \lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}''_n = \boldsymbol{x}_2$. 由 (1) 知 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}'_n)$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}''_n)$ 存在, 极限就是 $f^*(\boldsymbol{x}_1)$ 和 $f^*(\boldsymbol{x}_2)$, 可取充分大的 n_0 使得

$$|\boldsymbol{x}'_{n_0} - \boldsymbol{x}_1| < \delta_1/3, \quad |\boldsymbol{x}''_{n_0} - \boldsymbol{x}_2| < \delta_1/3$$

则有

$$|f^*(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}'_{n_0})| < \varepsilon/3, \quad |f^*(\boldsymbol{x}_2) - f(\boldsymbol{x}''_{n_0})| < \varepsilon/3$$

此时有

$$|\boldsymbol{x}'_{n_0}-\boldsymbol{x}''_{n_0}|\leqslant|\boldsymbol{x}'_{n_0}-\boldsymbol{x}_1|+|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|+|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}''_{n_0}|<\delta_1/3+\delta_1/3+\delta_1/3=\delta_1$$

由 f 的一致连续性可知

$$|f(\boldsymbol{x}'_{n_0})-f(\boldsymbol{x}''_{n_0})|<\varepsilon/3$$

从而

$$|f^*(\boldsymbol{x}_1)-f^*(\boldsymbol{x}_2)|\leqslant|f^*(\boldsymbol{x}_1)-f(\boldsymbol{x}'_{n_0})|+|f(\boldsymbol{x}'_{n_0})-f(\boldsymbol{x}''_{n_0})|+|f(\boldsymbol{x}''_{n_0})-f^*(\boldsymbol{x}_2)|<\varepsilon$$

综上可知, f^* 是 f 的连续扩张. 有理点集是 $\mathbb{R}^n$ 上的稠子集, 因此命题得证. □

第十九章 偏导数与全微分

§19.2.3 思考题

1. 解答: 前半问: 因为当 y 取定 y_0 后 $f(x,y_0)$ 是关于 x 的一元函数, 可导必连续. 后半问: $f(x,y_1)$ 未必在 x_0 处连续, 还需要 $f(x,y)$ 关于 y 也连续. □

2. 解答:

(1) 考虑

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(r)(r\to 0)$$

令 $\Delta y=0$ 可得

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

令 $\Delta x=0$ 可得

$$B=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

(2) 显然当 $\Delta x,\Delta y\to 0$ 时 $\Delta z\to 0$, 即 f 在 (x_0,y_0) 处连续. □

3. 解答:

(1) 取 $f(x,y)=\begin{cases} xy, x^2+y^2\neq 0\\ 1, x^2+y^2=0\end{cases}$.

(2) 取 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, 显然在 $(0,0)$ 处连续, 但是

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

显然 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ 不存在, 同理 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ 也不存在.

(3) 取

$$f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

可求得

$$f_x(x,y)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

由于

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$$

而
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$
不存在 (考虑趋近路线 $y=x$). 因此 $f_x(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续. 同理 $f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处也不连续. □

4. 解答: 考虑
$$\begin{aligned}&f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\=&f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)+f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)\\=&f_y(x_0+\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y+f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)\end{aligned}$$
由于 f_y 在 (x_0,y_0) 连续, 可设
$$f_y(x_0+\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y=f_y(x_0,y_0)\Delta y+\alpha\Delta y(\alpha\to 0,\Delta x\to 0,\Delta y\to 0)$$
由有限增量公式及 $f_x(x_0,y_0)$ 存在知
$$f(x_0+\Delta x,y_0)=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f(x_0,y_0)+\beta\Delta x(\beta\to 0)$$
于是我们有
$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)\Delta y+f_x(x_0,y_0)\Delta x+\alpha\Delta y+\beta\Delta x$$
即 f 在 (x_0,y_0) 处可微. □

5. 解答: 对任意固定的 $y_0\in(c,d)$, 取 $\{(x,y_0)|x\in(a,b)\}$ 内的任意两点 $\boldsymbol{X_1},\boldsymbol{X_2}$, 则线段 $\overline{\boldsymbol{X_1X_2}}$ 是闭集. 由全微分恒为 0 知 $f_y\equiv 0$, 则对任意 $\boldsymbol{x}_0\in\overline{\boldsymbol{X_1X_2}}$, 存在邻域 $O_\delta(\boldsymbol{x}_0)$ 使得 $f(x,y)\equiv F(x)$. 由有限覆盖定理, 存在有限个邻域 $O_{\delta_i}(\boldsymbol{x_i})$ 使得 $f(x,y)\equiv F_i(x),x\in O_{\delta_i}(\boldsymbol{x_i})i=1,2,\cdots,n$. 这说明在线段 $\overline{\boldsymbol{X_1X_2}}$ 上 $f(x,y)$ 只与 x 有关, 由 $\boldsymbol{X_1},\boldsymbol{X_2}$ 的任意性知在 $\{(x,y_0)|x\in(a,b)\}$ 上 $f(x,y)$ 只与 x 有关. 然后垂直移动 y_0, 则可说明在 D 内 $f(x,y)$ 只与 x 有关. 同理可知在 D 内 $f(x,y)$ 只与 y 有关, 故只能有 $f(x,y)\equiv C,(x,y)\in D$.

注: 本题也可以直接用练习题 19.2.4 第 7 题的结论, 由于 D 是开矩形, 折线的构造方法就是水平和垂直线段的拼接. □

§19.2.4 练习题

1. 解答:

(1) 考察

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{|x-y|}\cdot\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 0\cdot 1 = 0 = f(0,0)$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

(2) 考察

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x|}\sin(\Delta x)^2}{(\Delta x)^3}$$

取 $\Delta x > 0$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)^2}{(\Delta x)^{5/2}}$$

不存在. 故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微. □

2. 解答:

(1)

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = 0$$

(2) 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时

$$f_x = y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^2y\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^2}$$

易见 f_x 在 $(0,0)$ 处重极限不存在 (第一项重极限为 0, 第二项考虑路径 $y=x$), 因此 f_x 在 $(0,0)$ 处不连续. 同理可知 f_y 在 $(0,0)$ 处不连续.

(3) 考察当 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Delta f - f_x(0,0)\Delta x - f_y(0,0)\Delta y}{\rho}\right| &= \left|\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right| \\ &\leqslant \frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{2\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{2}\to 0\end{aligned}$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微. □

3. 解答: 记 $|f_x|\leqslant M,|f_y|\leqslant M$, 则对 $\forall(x_0,y_0,z_0)\in D$ 有

$$
\begin{aligned}
&|f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)|\\
\leqslant&|f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)|\\
&+|f(x_0,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)|\\
&+|f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0).|\\
\leqslant&|f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)\Delta x|+|f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y,z_0+\Delta z)\Delta y|\\
&+|f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)|\\
\leqslant&M|\Delta x|+M|\Delta y|+|f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)|
\end{aligned}
$$

当 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ 时, 结合题设可知

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)\to f(x_0,y_0,z_0)$$

即 $f(x,y,z)$ 在 D 上连续. □

4. 解答: $\mathrm{d}u=u_x(1,2)\mathrm{d}x+u_y(1,2)\mathrm{d}y=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x+\dfrac{2}{3}\mathrm{d}y.$ □

5. 解答:

$$
\begin{aligned}
\Delta V&=V_D(D_0,H_0)\Delta D+V_H(D_0,H_0)\Delta H\\
&\leqslant\frac{1}{2}\pi DH(D_0,H_0)|\Delta D|+\frac{1}{4}\pi D^2(D_0,H_0)|\Delta H|\\
&\leqslant\frac{1}{2}\pi\cdot 10.44\cdot 18.36\cdot 0.02+\frac{1}{4}\pi\cdot 10.44^2\cdot 0.01\approx 6.88
\end{aligned}
$$

而 $V=\dfrac{1}{4}\pi D_0^2H_0\approx 1571.68$, 则相对误差 $\Delta V/V\approx 0.004$. □

6. 解答: 记 $|f_y|\leqslant L$, 则

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=|f_y(x,y_1+\theta(y_2-y_1))||y_1-y_2|\leqslant L|y_1-y_2|$$

即 $f(x,y)$ 对 y 满足一致 Lipschitz 条件. □

7. 解答: 取 D 内任意两点 $\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0)$, $\boldsymbol{X}=(x,y)$, 由区域的 (道路) 连通性, 则有位于 D 内的连续折线连接 $\boldsymbol{X}_0$ 和 $\boldsymbol{X}$. 设折线的折点为 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_{n-1},\boldsymbol{X}_n=\boldsymbol{X}$:

$$\overline{\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{X}_1},\overline{\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_2},\cdots,\overline{\boldsymbol{X}_{n-1}\boldsymbol{X}_n}\subset D$$

对于线段 $\overline{\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{X}_1}$ $(\boldsymbol{X}_1=(x_1,y_1))$, 应用中值公式可知

$$
\begin{aligned}
&f(\boldsymbol{X}_1)-f(\boldsymbol{X}_0)=f(x_1,y_1)-f(x_0,y_0)\\
=&f_x(x_0+\theta(x_1-x_0),y_0+\theta(y_1-y_0))(x-x_0)\\
&+f_y(x_0+\theta(x_1-x_0),y_0+\theta(y_1-y_0))(y-y_0)=0
\end{aligned}
$$

即 $f(\boldsymbol{X}_1)=f(\boldsymbol{X}_0)$. 类似可知 $f(\boldsymbol{X}_1)=f(\boldsymbol{X}_2)=\cdots=f(\boldsymbol{X}_n)$, 从而可知 $f(x,y)$ 在 D 上为常值函数.

注: (1) 若直接从 $f_y=0$ 得到 $f(x,y)$ 只与 x 有关, 从 $f_x=0$ 得到 $f(x,y)$ 只与 y 有关, 推出 f 只能是常数, 这是错误的 (尽管很诱人). 实际上, 由 $f_y(x_0,y_0)=0$ 只能说明存在 (x_0,y_0) 的一个邻域, 在其内 $f(x,y)$ 只与 x 有关, 而不能推广到整个区域 D, 有反例

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases},\quad D=\mathbb{R}^2\backslash\{(x,y):x\geqslant 0,y=0\}$$

在 D 内 $f_y=0$ 但 $f(x,y)$ 与 y 有关.

(2) 更严谨细致的证明过程参见陈纪修推论 12.3.1. □

8. 解答: 由上题结论, 只要证明 $u_x=u_y=v_x=v_y=0$. 事实上, 由于 $u^2+v^2=C$, 分别对 x 和 y 求偏导可得

$$uu_x+vv_x=0,uu_y+vv_y=0$$

$$\Rightarrow uu_x=-vv_x,uu_y=-vv_y$$

由题设 $u_x=v_y,u_y=-v_x$ 可知

$$uv_y=-vv_x,uv_x=vv_y$$

$$\Rightarrow (u^2+v^2)v_y=u(uv_y)+v(vv_y)=0,(u^2+v^2)v_x=u(uv_x)+v(vv_x)=0$$

因此 $v_x=v_y=0$. 同理可证 $u_x=u_y=0$. □

9. 解答: 考虑

$$|f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)|\leqslant|f(\Delta x,\Delta y)-f(0,\Delta y)|+|f(0,\Delta y)-f(0,0)|$$

由于 $f(x,0)$ 在 $x=0$ 处连续, 故当 $\Delta x\to 0$ 时有

$$|f(\Delta x,\Delta y)-f(0,\Delta y)|\to 0$$

记 $|f_y|\leqslant M$, 则当 $\Delta y\to 0$ 时有

$$|f(0,\Delta y)-f(0,0)|=|f_y(0,\theta\Delta y)\Delta y|\leqslant M\Delta y\to 0$$

由此看出

$$|f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)|\to 0$$

即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续. □

§19.3.4 练习题

1. 解答: $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial t}=se^x+\cos y+1.$ □

2. 解答: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial s},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial u}{\partial s}\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{1}{z},\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{\partial u}{\partial t}\cdot\dfrac{y}{z^2}.$ □

3. 解答: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial s}\cdot\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial \psi}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial s}\cdot\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial \psi}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial y}.$ □

4. 解答: $\dfrac{\partial u}{\partial s}=e^x\sin y\cdot 2t+e^x\cos y\cdot 2s,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}=e^x\sin y\cdot 2s+e^x\cos y.$ □

5. 解答: 令 $t=ax^2+by^2+cz^2$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial t}\cdot 2ax,\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial t}\cdot 2by,\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial t}\cdot 2cz$$

所以

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial f}{\partial t}(2ax\mathrm{d}x+2by\mathrm{d}y+2cz\mathrm{d}z)$$ □

6. 解答: 由于

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{z}}\cdot\frac{1}{z}\cdot x^{\frac{1}{z}-1}\bigg|_{(1,1,1)}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^{\frac{1}{z}}\cdot\left(-\frac{1}{z}\right)y^{-\frac{1}{z}-1}\bigg|_{(1,1,1)}=-1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^{1/z}\cdot\ln\frac{1}{z}\bigg|_{(1,1,1)}=0$$

所以 $\mathrm{d}f(1,1,1)=\mathrm{d}x-\mathrm{d}y.$ □

7. 解答: 令 $s=xy,t=yz$, 则

$$x\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial s}\cdot xy,z\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial t}\cdot yz,y\cdot\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial s}\cdot xy+\frac{\partial F}{\partial t}\cdot yz$$

显然命题得证. □

8. 解答: 令 $t=xy$, 则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial t}\cdot xy-\dfrac{\partial z}{\partial t}\cdot xy=0.$ □

9. 解答: 令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\sin\theta=\frac{x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}}{r}=0$$

即 $F(x,y)$ 在极坐标系下只是 θ 的函数. □

10. 解答: 由题设 $F(x,y)=h(\theta)$, 则由 $\theta=\arctan\dfrac{y}{x}$ 知 $F(x,y)=\varphi(v)$, 其中 $v=\dfrac{y}{x}$. 则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\varphi'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right),\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\varphi'\cdot\frac{1}{x},\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\varphi''\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+\varphi'\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow\varphi\cdot\left(-\frac{y}{x^3}\varphi''-\frac{1}{x^2}\varphi'\right)=F\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$$

由本章参考题第 3 题的结论可知

$$F\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{y}{x^3}\varphi'^2$$

$$\Rightarrow\varphi\cdot\left(-\frac{y}{x^3}\varphi''-\frac{1}{x^2}\varphi'\right)=-\frac{y}{x^3}\varphi'^2$$

再代入 $v=\dfrac{y}{x}$ 可得

$$\varphi(-v\varphi''-\varphi')=-v\varphi'^2\Rightarrow v(\varphi\varphi''-\varphi'^2)=-\varphi\varphi'\Rightarrow\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)'=-\frac{1}{v}\frac{\varphi'}{\varphi}$$

令 $\psi=\dfrac{\varphi'}{\varphi}$, 则

$$\psi'=-\frac{1}{v}\psi\Rightarrow\psi=\frac{C_1}{v}\Rightarrow\frac{\varphi'}{\varphi}=\frac{C_1}{v}\Rightarrow\varphi=C_2v^{C_1}\Rightarrow F(x,y)=C_2\left(\frac{y}{x}\right)^{C_1}$$

注: 若 $F(r\cos\theta,r\sin\theta)=h(r)$, 则 $F(x,y)=C_1e^{C_2(x^2+y^2)}$, 参见裴礼文 P676 6.2.26. □

11. 解答: 计算得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\varphi''(x+at)+a^2\psi(x-at),\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+at)+\psi''(x-at)$$

易见成立题设等式 (弦振动方程). □

12. 解答:

(1) 由题意可知

$$f_u^2=g_v^2,\quad f_v^2=g_u^2,\quad f_ug_u+f_vg_v=g_vg_u+(-g_u)g_v=0$$

$$f_{uu}+f_{vv}=(g_v)_u+(-g_u)_v=0,\quad g_{uu}+g_{vv}=(-f_v)_u+(f_u)_v=0$$

$$\begin{aligned}
w_u=&w_xf_u+w_yg_u\\
w_{uu}=&(w_{xx}f_u+w_{xy}g_u)f_u+w_xf_{uu}+(w_{yx}f_u+w_{yy}g_u)g_u+w_yg_{uu}\\
w_{vv}=&(w_{xx}f_v+w_{xy}g_v)f_v+w_xf_{vv}+(w_{yx}f_v+w_{yy}g_v)g_v\\
w_{uu}+w_{vv}=&w_{xx}(f_u^2+f_v^2)+2w_{xy}(f_ug_u+f_vg_v)+w_{yy}(g_u^2+g_v^2)\\
&+w_x(f_{uu}+f_{vv})+w_y(g_{uu}+g_{vv})=(w_{xx}+w_{yy})(f_u^2+f_v^2)=0
\end{aligned}$$

(2) 令 $w = xy$ 即可. □

13. 解答:

必要性: 令 $t = ax + by$, 则 $b\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial t} \cdot ab = a\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

充分性: 令 $t = ax + by, s = -bx + ay$, 则有

$$\begin{cases} x = \dfrac{at - bs}{a^2 + b^2} \\ y = \dfrac{bt + as}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

因此 z 是关于 t 和 s 的函数, 又因为

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{-b}{a^2 + b^2} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} = 0$$

所以 z 是仅关于 t 的函数. □

14. 解答: 对 $F(u_x, u_y)$ 分别对 x, y 求偏导有

$$\begin{cases} F_s\left(u_x, u_y\right) \cdot u_{xx} + F_t\left(u_x, u_y\right) u_{yx} = 0 \\ F_s\left(u_x, u_y\right) \cdot u_{xy} + F_t\left(u_x, u_y\right) u_{yy} = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{yx} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_s \\ F_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

因 $\begin{pmatrix} F_s \\ F_t \end{pmatrix}$ 是非零解, 故系数矩阵的行列式为 0, 即

$$\begin{vmatrix} u_{xx} & u_{yx} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{vmatrix} = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0$$

得证. □

15. 解答: 令 $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$ 则 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan\dfrac{y}{x}, u = f(\rho)$, 且有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{\partial t}{\partial \rho} \cdot \frac{y^2}{\left(x^2 + y^2\right)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{\partial t}{\partial \rho} \cdot \frac{x^2}{\left(x^2 + y^2\right)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

相加即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2} = 0 = f''(\rho) + f'(\rho) \cdot \frac{1}{\rho}$$

解微分方程得 $f = C_1 \ln\rho + C_2$, 因此 $u(x, y) = C_1 \ln\sqrt{x^2 + y^2} + C_2$. □

§19.4.2 练习题

1. 解答: 由题设可知

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}\frac{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}|}{|\boldsymbol{h}|}=0$$

即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微, 那么由命题 19.4.1 可知

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}\frac{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}|}{|\boldsymbol{h}|}=0$$

令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$, 由不等式

$$|\boldsymbol{B}\boldsymbol{h}|\leqslant|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}|+|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}|$$

即知当 $\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}$ 时有

$$\frac{|\boldsymbol{B}\boldsymbol{h}|}{|\boldsymbol{h}|}\to 0$$

对于固定的 $\boldsymbol{h}$, 取 $t\to 0$ 则有

$$\frac{|\boldsymbol{B}(t\boldsymbol{h}|)}{|t\boldsymbol{h}|}\to 0$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 是线性的, 上式左端与 t 无关, 因此对所有 $\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n$ 都有 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{h}=\boldsymbol{0}$, 从而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 即有 $\boldsymbol{A}=J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$, 得证. □

2. 解答: 由向量值函数的运算法则可知

$$(|\boldsymbol{f}(t)|^2)'=(\boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{f}(t))'=2\boldsymbol{f}'(t)\cdot\boldsymbol{f}(t)$$

易见 $|\boldsymbol{f}(t)|$ 为常值当且仅当 $\boldsymbol{f}'(t)\boldsymbol{f}(t)=0$.

注: (1) 几何意义即: 如果向量值函数 $\boldsymbol{f}(t)$ 的长度不变, 那么 $\boldsymbol{f}(t)$ 与 $\boldsymbol{f}'(t)$ 垂直.

(2) 类似的还有: 如果向量值函数 $\boldsymbol{f}(t)$ 的方向不变, 那么 $\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{f}'(t)=0$, 参见陈维桓《微分几何初步》P7 定理 2.

(3) 向量值函数的运算法则参见陈维桓《微分几何初步》P7 定理 1. □

3. 解答: 记 $\boldsymbol{f}:(x,y)\to(u,v)$. 若存在 $\boldsymbol{a}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 使 $\det J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\neq 0$, 则存在 $\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^2$ 使得 $\boldsymbol{h}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$. 由 $\boldsymbol{f}$ 连续可微可知, 当实数 $t\to 0$ 时有

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})=J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})(t\boldsymbol{h})+o(t\boldsymbol{h})=o(t\boldsymbol{h})$$

由此可知, 当 $|t|$ 充分小时有

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\|\leqslant\frac{\sqrt{C}\|\boldsymbol{h}\|}{2}|t|$$

而题设不等式等价于

$$\sqrt{(u_1-u_2)^2+(v_1-v_2)^2}\geqslant\sqrt{C}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

即有

$$\sqrt{C}\|t\boldsymbol{h}\|\leqslant\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\|\leqslant\frac{\sqrt{C}\|\boldsymbol{h}\|}{2}|t|$$

可得 $C=0$, 矛盾.

注: (1) 本题容易推广到 n 维情形.

(2) 其他证法较复杂, 参见裴礼文 P743 练习题 6.4.23. □

.5.2 参考题

1. 解答: 直接计算可得

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|=\left|\frac{(x^2-2t)}{8\sqrt{\pi}t^{5/2}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right|=\left|\left(\frac{x^2}{8t}-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}t^{3/2}}\right|e^{-\frac{x^2}{4t}}$$
$$\leqslant\left(\frac{x^2}{8t}+\frac{1}{4}\right)\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{\pi}t^{3/2}}$$

因为当 $y>0$ 时由 $y<e^y$, 所以

$$\frac{x^2}{8t}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}\leqslant e^{\frac{x^2}{8t}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}=e^{-\frac{x^2}{8t}}$$

而

$$e^{-\frac{x^2}{4t}}\leqslant e^{-\frac{x^2}{8t}}$$

取 $\lambda=\dfrac{1}{8},C=\dfrac{5}{4}$, 则有

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|\leqslant Ct^{-3/2}e^{-\lambda\frac{x^2}{t}}$$

注: 本题中的 $u(x,t)$ 满足热传导方程 (例题 19.1.2), 利用这个性质可以使求二阶偏导变得更便利. □

2. 解答:

(1)

$$\left|\frac{\partial\Gamma}{\partial z}\right|=\frac{1}{4\pi}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-3/2}\cdot(z-\zeta)$$
$$\leqslant\frac{1}{4\pi}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-3/2+1/2}$$
$$=\frac{1}{4\pi}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-1}$$

(2)

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2\Gamma}{\partial y\partial z}\right| &= \frac{3}{4\pi}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-5/2}\cdot(y-\eta)(z-\zeta)\\ &\leqslant \frac{3}{4\pi}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-5/2}\cdot\frac{(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{2}\\ &\leqslant \frac{3}{8\pi}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-3/2}\end{aligned}$$

(3)

$$\left|\frac{\partial^3\Gamma}{\partial x\partial y\partial z}\right| = \frac{15}{4\pi}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-7/2}\cdot(x-\xi)(y-\eta)(z-\zeta)$$

利用

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$$

令 $a^3=(x-\xi)^2, b^3=(y-\eta)^2, c^3=(z-\zeta)^2$ 可有

$$(x-\xi)(y-\eta)(z-\zeta) \leqslant \left[\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{3}\right]^{3/2}$$

因此

$$\left|\frac{\partial^3\Gamma}{\partial x\partial y\partial z}\right| \leqslant \frac{15}{4\pi}\cdot 3^{-2/3}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-2}$$

得证. □

3. 解答:

充分性: 若 $u(x,y)=f(x)g(y)$, 则有

$$u_x=f'g,\quad u_y=fg',\quad u_{xy}=f'g'$$

显然有

$$uu_{xy}=fgf'g'=u_xu_y$$

必要性: 若 $uu_{xy}=fgf'g'=u_xu_y$, 则

$$0=uu_{xy}-u_xu_y=u^2\frac{u_{yx}u-u_yu_x}{u^2}=u^2\left(\frac{u_y}{u}\right)'_x$$

$$\left(\frac{u_y}{u}\right)'_x=0 \Rightarrow \frac{u_y}{u}=h(y) \Rightarrow (\ln|u|)'_y=h(y) \Rightarrow \ln|u|=\int h(y)\mathrm{d}y+c(x)$$

$$\Rightarrow u=\left[\pm e^{c(x)}\right]\cdot e^{\int h(y)\mathrm{d}y} \equiv f(x)g(y)$$ □

证毕.

4. 解答:

(i) 命题 19.3.1 的证明:

必要性: 由齐次函数的定义有

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$$

两边对 t 求导得

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)=nt^{n-1}f(x,y)$$

令 $t=1$ 得

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=nf(x,y)$$

充分性: 令

$$\varphi(t)=\frac{f(tx,ty)}{t^n}$$

则有

$$\begin{aligned}\varphi'(t)&=\frac{xf_x(tx,ty)t^n+yf_y(tx,ty)t^n-nt^{n-1}f(tx,ty)}{t^{2n}}\\&=\frac{nt^{n-1}f(tx,ty)-nt^{n-1}f(tx,ty)}{t^{2n}}=0\end{aligned}$$

得到 $\varphi(t)$ 为常值. 即

$$\varphi(t)=\frac{f(tx,ty)}{t^n}=\varphi(t)=\varphi(1)=f(x,y)$$

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$$

注: 推广结论参见徐森林上册 P350 第 376 题.

(ii) 命题 19.3.2 的证明: 由齐次函数的定义有

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$$

两边对 t 求导得

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)=nt^{n-1}f(x,y)$$

再对 t 求导并令 $x=1$ 即得

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)=n(n-1)f(x,y)$$

注: 推广结论参见徐森林上册 P350 第 378 题.

(iii) 命题 19.3.3 的证明: 由齐次函数的定义有

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$$

两边对 x 和 y 分别求导得

$$tf_x(tx,ty)=t^nf_x(x,y)\Rightarrow f_x(tx,ty)=t^{n-1}f_x(x,y)$$
$$tf_y(tx,ty)=t^nf_y(x,y)\Rightarrow f_y(tx,ty)=t^{n-1}f_y(x,y)$$

即 $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 都是 $(n-1)$ 次齐次函数.

注: 推广结论参见徐森林上册 P350 第 377 题.

(iv) 命题 19.3.4 的证明: 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则由齐次函数定义有

$$|f(x,y)|=|f(r\cos\theta,r\sin\theta)|=|r^nf(\cos\theta,\sin\theta)|=(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}|f(\cos\theta,\sin\theta)|$$

显然 $f(\cos\theta,\sin\theta)$ 定义在 S^1 上, 这是一个闭集, 而由题设知 $f(x,y)$ 在 S^1 上连续, 因此存在 $C>0$ 使得 $|f(\cos\theta,\sin\theta)|\leqslant C$. 即

$$|f(x,y)|\leqslant C(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}$$

得证. □

5. 解答: 由 u 的定义可知

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n-1}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_{i-1}&x_i&x_{i+1}&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{k-1}&x_2^{k-1}&\cdots&x_{i-1}^{k-1}&x_i^{k-1}&x_{i+1}^{k-1}&\cdots&x_n^{k-1}\\0&0&\cdots&0&kx_i^{k-1}&0&\cdots&0\\x_1^{k+1}&x_2^{k+1}&\cdots&x_{i-1}^{k+1}&x_i^{k+1}&x_{i+1}^{k+1}&\cdots&x_n^{k+1}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_{i-1}^{n-1}&x_i^{n-1}&x_{i+1}^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

(1) 根据上式得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n-1}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{k-1}&x_2^{k-1}&\cdots&x_n^{k-1}\\kx_1^{k-1}&kx_2^{k-1}&\cdots&kx_n^{k-1}\\x_1^{k+1}&x_2^{k+1}&\cdots&x_n^{k+1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n-1}k\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{k-1}&x_2^{k-1}&\cdots&x_n^{k-1}\\x_1^{k-1}&x_2^{k-1}&\cdots&x_n^{k-1}\\x_1^{k+1}&x_2^{k+1}&\cdots&x_n^{k+1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=0$$

(2)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \cdots & x_i^{k-1} & \cdots & x_n^{k-1}\\ 0 & 0 & \cdots & kx_i^k & \cdots & 0\\ x_1^{k+1} & x_2^{k+1} & \cdots & x_i^{k+1} & \cdots & x_n^{k+1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_i^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1} k\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \cdots & x_i^{k-1} & \cdots & x_n^{k-1}\\ x_1^{k} & x_2^{k} & \cdots & x_i^{k} & \cdots & x_n^{k}\\ x_1^{k+1} & x_2^{k+2} & \cdots & x_i^{k+1} & \cdots & x_n^{k+1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_i^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1} ku=\frac{(n-1)n}{2}u$$

注: 其他方法参见徐森林上册 P357 第 384 题. □

6. 解答:

(1) 考虑

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}},\quad \left(\frac{\partial F}{\partial x_1},\frac{\partial F}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)=\left(\frac{\partial F}{\partial y_1},\frac{\partial F}{\partial y_2},\cdots,\frac{\partial F}{\partial y_n}\right)\frac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$$

则有

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}}=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}\right)^{\mathrm{T}}=\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{y}}\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{y}}\right)^{\mathrm{T}}$$

即

$$(1)\ \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2$$

(2) 考虑

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{x}^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{y}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}=\frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{y}\partial \boldsymbol{x}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}=\frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{y}^2}\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^2$$

$$\left[\frac{\partial(F_{x_1},F_{x_2},\cdots,F_{x_n})}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\right]^{\mathrm{T}}=\left[\frac{\partial(F_{x_1},F_{x_2},\cdots,F_{x_n})}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}\boldsymbol{A}\right]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\frac{\partial(F_{y_1},F_{y_2},\cdots,F_{y_n})}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}\boldsymbol{A}$$

记 $\boldsymbol{B}=\dfrac{\partial(F_{x_1},F_{x_2},\cdots,F_{x_n})}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$, $\boldsymbol{C}=\dfrac{\partial(F_{y_1},F_{y_2},\cdots,F_{y_n})}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}$, 由线性代数的知识可知

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{C})\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}$$

注: 另证:

(1) 考虑

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial x_j},\quad \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x_j}=\delta_{ik}$$

(其中 δ_{ik} 是 kronecker 符号)

$$\Rightarrow\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^2=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)^2=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)^2$$

(2) 考虑

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\frac{\partial f}{\partial y_j},\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}=\sum_{j=1}^{n}a_{jj}\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\frac{\partial^2 f}{\partial y_j\partial y_k}$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}=\sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n}a_{ji}a_{kj}\frac{\partial^2 f}{\partial y_j\partial y_k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2}$$

得证. □

7. 解答: (1)(2) 问是第 (3) 问的特例, 直接计算即可, 我们直接推第 (3) 问. 考虑

$$\det J_n=\frac{\partial\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)}{\partial\left(r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1}\right)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial r} & \dfrac{\partial x_2}{\partial r} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial r}\\ \dfrac{\partial x_1}{\partial\theta_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial\theta_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial\theta_1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial x_1}{\partial\theta_{n-1}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial\theta_{n-1}} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial\theta_{n-1}}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\cos\theta_1 & \sin\theta_1\cos\theta_2 & \cdots & \cdots & \prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\theta_k\\ -r\sin\theta_1 & r\cos\theta_1\cos\theta_2 & \cdots & \prod\limits_{j=1}^{n-2}\sin\theta_j\cos\theta_1\cos\theta_{n-1} & r\cos\theta_1\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\theta_k\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \cdots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & r\prod\limits_{k=1}^{n-3}\sin\theta_k\prod\limits_{k=n-2}^{n-1}\cos\theta_k & r\prod\limits_{k=1,k\neq n-2}^{n-1}\sin\theta_{n-2}\\ 0 & \cdots & \cdots & -r\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\theta_k & \prod\limits_{k=1}^{n-2}\sin\theta_k\cos\theta_{n-1}\end{vmatrix}$$

(进行恒等变换, 提出公因式, 运用倍加性质)

$$
= r^{n-1}\begin{vmatrix}
\cos\theta_1 & \sin\theta_1\cos\theta_2 & \cdots & \cdots & \prod\limits_{k=1}^{n}\sin\theta_k \\
0 & (\cos\theta_1)^{-1}\cos\theta_2 & \cdots & \prod\limits_{j=1}^{n-2}\sin\theta_j & \prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\theta_k \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & r\prod\limits_{k=1}^{n-3}\sin\theta_k\prod\limits_{k=n-2}^{n-1}\cos\theta_k & r\prod\limits_{k=1,k\neq n-2}^{n-1}\sin\theta_{n-2} \\
0 & \cdots & \cdots & -r\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\theta_k & \prod\limits_{k=1}^{n-2}\sin\theta_k\cos\theta_{n-1}
\end{vmatrix}
$$

对行列式按第一列展开, 就得到递归公式

$$
\det J_n = r\prod_{k=1}^{n-2}\sin\theta_k \det J_{n-1}
$$

则容易归纳得到

$$
\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(r,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{n-1})} = r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}
$$

注: (1) 菲赫金哥尔茨《微积分学教程》第三卷 P329 12 末用归纳十分巧妙地计算出了本题的结果. 不同的方法也可参看徐森林下册 P123 第 501 题.

(2) 本题结果是计算 n 维球体积的有力工具.

下面可以来计算 n 维球 $B_n: x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant R^2$ 的体积:

利用本题结论, 进行 n 维球面坐标变换后 B_n 对应区域为

$$
D_n=\{(r,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-2},\varphi_{n-1})\,|0\leqslant r\leqslant R, 0\leqslant\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-2}\leqslant\pi, 0\leqslant\varphi_{n-1}\leqslant 2\pi\}
$$

从而有

$$
\begin{aligned}
V_n &= \int_{B_n}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \\
&= \int_{D_n} r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin^2\varphi_{n-3}\sin\varphi_{n-2}\mathrm{d}r \\
&= \int_0^R r^{n-1}\mathrm{d}r\int_0^\pi\sin^{n-2}\varphi_1\mathrm{d}\varphi_1\cdots\int_0^\pi\sin^2\varphi_{n-3}\mathrm{d}\varphi_{n-3}\int_0^\pi\sin\varphi_{n-2}\mathrm{d}\varphi_{n-2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_{n-1}
\end{aligned}
$$

由于当 k 为正整数时有

$$
\int_0^\pi\sin^{k-1}\varphi\mathrm{d}\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{k-1}\varphi\mathrm{d}\varphi
$$

由 Wallis 公式就可得到

$$V_n=\begin{cases}\dfrac{R^{2m}}{m!}\pi^m, & n=2m\\ \dfrac{2R^{2m+1}}{(2m+1)!!}(2\pi)^m, & n=2m+1\end{cases}$$

或利用 Γ 函数统一表示为

$$V_n=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)}R^n$$

□

8. 解答:

(1) 考虑

$$\begin{aligned}\delta=\frac{\Delta f(x;h)}{f}&\approx\frac{\mathrm{d}(f_1\cdot f_2\cdots f_n)h}{f}\\&=\frac{(\mathrm{d}f_1)\cdot f_2\cdots f_n\cdot h}{f}+\frac{f_1\cdot(\mathrm{d}f_2)\cdots f_n\cdot h}{f}+\cdots+\frac{f_1\cdot f_2\cdots(\mathrm{d}f_n)\cdot h}{f}\\&=\frac{\mathrm{d}f_1\cdot h}{f_1}+\frac{\mathrm{d}f_2\cdot h}{f_2}+\cdots+\frac{\mathrm{d}f_n\cdot h}{f_n}\approx\sum_{i=1}^n\delta_i\end{aligned}$$

(2) 考虑

$$\delta\approx\frac{\mathrm{d}f}{f}\cdot h=\mathrm{d}\ln f\cdot h=\mathrm{d}\sum_{i=1}^n\ln f_i\cdot h=\frac{\mathrm{d}f_1\cdot h}{f_1}+\frac{\mathrm{d}f_2\cdot h}{f_2}+\cdots+\frac{\mathrm{d}f_n\cdot h}{f_n}\approx\sum_{i=1}^n\delta_i$$

再考虑

$$\ln\frac{f_1f_2\cdots f_n}{g_1g_2\cdots g_n}\xlongequal{def}\ln u=\sum_{i=1}^n\ln f_i-\sum_{i=1}^n\ln g_i$$

$$\delta(u;h)\approx\frac{\mathrm{d}u}{u}\cdot h=\mathrm{d}\ln u\cdot h=\mathrm{d}\left[\sum_{i=1}^n\ln f_i-\sum_{i=1}^n\ln g_i\right]\cdot h=\left[\sum_{i=1}^n\frac{\mathrm{d}f_i\cdot h}{f_i}-\sum_{i=1}^n\frac{\mathrm{d}g_i\cdot h}{g_i}\right]$$

又因为 g_i 与 $-g_i$ 的相对误差是相同的, 即

$$\left|\frac{\Delta(-g_i)}{-g_i}\right|=\left|\frac{\Delta g_i}{g_i}\right|$$

因此

$$\delta u\approx\sum_{i=1}^n\delta f_i+\sum_{i=1}^n\delta g_i$$

□

证毕.

9. 解答: 先证明一个引理 (Perron 定理), 矩阵方法的证明可参见许以超《线性代数与矩阵论》定理 13.1.6, 泛函方法的证明可在张恭庆《泛函分析讲义》上找到 (习题 1.5.5).

引理: 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, 若 $a_{ij}\geqslant 0, i,j=1,2,\cdots,n$, 则 $\boldsymbol{A}$ 有非负特征值 $\lambda\geqslant 0$ 且有 (每个分量非负的) 实特征向量 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^{\mathrm{T}}$.

证: 在 $\mathbb{R}^n$ 中定义点集 (这是个单形)

$$S=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n,\sum_{i=1}^{n}x_i=1\right\}$$

则 S 为凸紧集. 若存在 $\boldsymbol{x}_0\in S$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 0, $\boldsymbol{x}_0$ 为对应的特征向量. 否则, 在 S 上定义映射

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\frac{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})_i}$$

则 $\boldsymbol{f}(S)\subset S$, 由 Brouwer 不动点定理 (谢惠民下册 P329, 证明一般形式的 Brouwer 不动点定理需要拓扑工具, 如同调群) 即得到所要的特征值和特征向量.

往证本题: 由引理 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有非负特征值 $\lambda\geqslant 0$ 且有 (每个分量非负的) 实特征向量 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^{\mathrm{T}}$. 即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$$

令 $y(t)=\alpha_1x_1(t)+\alpha_2x_2(t)+\cdots+\alpha_nx_n(t)$, 则有

$$y'(t)=\alpha_1x_1'(t)+\alpha_2x_2'(t)+\cdots+\alpha_nx_n'(t)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1'(t)\\x_2'(t)\\\vdots\\x_n'(t)\end{pmatrix}$$

$$=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{pmatrix}=\lambda(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{pmatrix}=\lambda y(t)$$

解微分方程 $y'(t)=\lambda y(t)$ 得 $y(t)=Ce^{\lambda t}$. 令 $t\to+\infty$, 由 $y(t)$ 的定义知 $y(t)\to 0$. 而当 $\lambda>0$ 时 $y(t)\to\infty$, 故只能 $\lambda=0$, 则 $y(t)=C\to 0\Rightarrow C=0\Rightarrow y(t)\equiv 0$. 又先前取出的 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 不全为 0, 因此 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 必定是线性相关的. □

10. 解答: 不失一般性, 设 $j=1$. 设 A_i 是 $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 中的第 $(1,i)$ 个元素的代数余子式. 记 $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$, $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\det(\partial_1\boldsymbol{f},\partial_2\boldsymbol{f},\cdots,\partial_n\boldsymbol{f})$, 再记 $\widehat{\partial_i\boldsymbol{g}}$ 表示去掉该列, 则 $A_i=(-1)^{i+1}\det\left(\partial_1\boldsymbol{g},\cdots,\widehat{\partial_i\boldsymbol{g}},\cdots,\partial_n\boldsymbol{g}\right)$, 其中

$$\partial_i\boldsymbol{f}=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\ \frac{\partial f_2}{\partial x_i}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_i}\right)^{\mathrm{T}},\quad \partial_i\boldsymbol{g}=\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_i}\ \frac{\partial f_3}{\partial x_i}\ \cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_i}\right)^{\mathrm{T}}$$

定义 $a_{ij}=(-1)^{i+j}\det\left(\partial_i\partial_j\boldsymbol{g},\partial_1\boldsymbol{g},\cdots,\widehat{\partial_j\boldsymbol{g}},\cdots,\widehat{\partial_i\boldsymbol{g}},\cdots,\partial_n\boldsymbol{g}\right)$, 由于 $\boldsymbol{f}$ 是 C^2 映射, 即二

阶偏导数可换序，自然有 $a_{ij}=a_{ji}$，于是我们有

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\left(\sum_{j<i}\det\left(\partial_1\boldsymbol{g},\cdots,\partial_i\partial_j\boldsymbol{g},\cdots,\widehat{\partial_i\boldsymbol{g}},\cdots,\partial_n\boldsymbol{g}\right)\right.\\
&\quad\left.+\sum_{j>i}\det\left(\partial_1\boldsymbol{g}\cdots,\widehat{\partial_i\boldsymbol{g}},\cdots,\partial_i\partial_j\boldsymbol{g},\cdots,\partial_n\boldsymbol{g}\right)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\left(\sum_{j<i}(-1)^{j-1}\det\left(\partial_i\partial_j\boldsymbol{g},\partial_1\boldsymbol{g}\cdots,\widehat{\partial_j\boldsymbol{g}},\cdots,\partial_j\boldsymbol{g},\cdots,\partial_n\boldsymbol{g}\right)\right.\\
&\quad\left.+\sum_{j>i}(-1)^{j-2}\det\left(\partial_i\partial_j\boldsymbol{g},\partial_1\boldsymbol{g}\cdots,\widehat{\partial_i\boldsymbol{g}},\cdots,\widehat{\partial_j\boldsymbol{g}},\cdots,\partial_n\boldsymbol{g}\right)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j<i}(-1)^{i+j}\det\left(\partial_i\partial_j\boldsymbol{g},\partial_1\boldsymbol{g}\cdots,\widehat{\partial_j\boldsymbol{g}},\cdots,\widehat{\partial_i\boldsymbol{g}},\cdots,\partial_n\boldsymbol{g}\right)\\
&\quad-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}(-1)^{i+j}\det\left(\partial_i\partial_j\boldsymbol{g},\partial_1\boldsymbol{g}\cdots,\widehat{\partial_i\boldsymbol{g}},\cdots,\widehat{\partial_j\boldsymbol{g}}\cdots,\partial_n\boldsymbol{g}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j<i}a_{ij}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}a_{ji}=0
\end{aligned}
$$

注：依借第二十六章场论的知识，再给出一个纯分析方法的证明：

任取 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$，定义 $\mathbb{R}^n$ 中的向量场

$$\boldsymbol{P}=(A_{1j}(\boldsymbol{x}),A_{2j}(\boldsymbol{x}),\cdots,A_{nj}(\boldsymbol{x}))$$

任取 $r>0$，由散度定理 (26.5) 有

$$\int_{\partial B_r}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int_{B_r}\operatorname{div}\boldsymbol{P}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{B_r}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

故

$$\frac{1}{\omega_n r^n}\int_{\partial B_r}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\frac{1}{\omega_n r^n}\int_{B_r}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

而 $\boldsymbol{f}\in C^2$，故 $\dfrac{\partial A_{ij}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\in C$，由积分中值定理有

$$\lim_{r\to0^+}\frac{1}{\omega_n r^n}\int_{\partial B_r}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}dS=\lim_{r\to0^+}\frac{1}{\omega_n r^n}\int_{B_r}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{0})}{\partial x_i}$$

另一方面有

$$\lim_{r\to0^+}\frac{1}{\omega_n r^n}\int_{\partial B_r}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\lim_{r\to0^+}\frac{1}{\omega_n r^n}\int_{\partial B_r}\boldsymbol{P}\cdot\frac{\boldsymbol{x}}{r}\mathrm{d}S=\lim_{r\to0^+}\frac{1}{\omega_n r^{n+1}}\int_{\partial B_r}\sum_{i=1}^{n}x_iA_{ij}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega_n r^{n+1}}\int_{\partial B_r}\sum_{i=1}^{n}x_iA_{ij}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S\\
=&\frac{1}{\omega_n r^{n+1}}\int_{\partial B_r}\sum_{i=1}^{n}x_i\left[A_{ij}(\boldsymbol{x})-A_{ij}(\mathbf{0})\right]\mathrm{d}S+\frac{1}{\omega_n r^{n+1}}\int_{\partial B_r}\sum_{i=1}^{n}x_iA_{ij}(\mathbf{0})\mathrm{d}S\\
=&\frac{1}{\omega_n r^{n+1}}\int_{\partial B_r}\sum_{i=1}^{n}x_i\left[A_{ij}(\boldsymbol{x})-A_{ij}(\mathbf{0})\right]\mathrm{d}S
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\omega_n r^{n+1}}\int_{\partial B_r}\sum_{i=1}^{n}x_iA_{ij}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S\right| &\leqslant\frac{1}{\omega_n r^{n+1}}\int_{\partial B_r}\sum_{i=1}^{n}|x_i|\left|A_j(\boldsymbol{x})-A_{ij}(\mathbf{0})\right|\mathrm{d}S\\
&\leqslant\frac{1}{\omega_n r^{n+1}}\int_{\partial B_r}\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{i=1}^{n}\left|A_{ij}(\boldsymbol{x})-A_{ij}(\mathbf{0})\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}S\\
&=\frac{1}{\omega_n r^{n+1}}\int_{\partial B_r}r\left[\sum_{i=1}^{n}\left|A_{ij}(\boldsymbol{x})-A_{ij}(\mathbf{0})\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}S\\
&=\frac{1}{\omega_n r^{n}}\int_{\partial B_r}\left[\sum_{i=1}^{n}\left|A_{ij}(\boldsymbol{x})-A_{ij}(\mathbf{0})\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}S\\
&\to\left[\sum_{i=1}^{n}\left|A_{ij}(\mathbf{0})-A_{ij}(\mathbf{0})\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}=0(r\to0^+)
\end{aligned}
$$

故

$$
\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{0})}{\partial x_i}=\lim_{r\to0^+}\frac{1}{\omega_n r^n}\int_{\partial B_r}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0
$$

对于 $\forall\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$, 我们定义 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}_0)$, 则 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\in C^2$, 且

$$
\frac{\partial g_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}=\frac{\partial f_j\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}_0\right)}{\partial x_i}
$$

记此时的代数余子式为 B_{ij}, 则

$$
\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial B_{ij}(\mathbf{0})}{\partial x_i}=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}\left(\boldsymbol{x}_0\right)}{\partial x_i}=0
$$

由 $\boldsymbol{x}_0$ 的任意性, 命题得证. □

第二十章 隐函数存在定理与隐函数求导

§20.1.3 思考题

1. 解答: 不矛盾. 隐函数存在定理仅是充分条件, 非必要条件. □

2. 解答: 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3xyz$, 易验证它满足命题 20.1.1 的三个条件, 则隐函数 $z(x,y)$ 可唯一确定.

(1)

$$z_x(1,1)=-\frac{F_x}{F_z}\bigg|_{(1,1)}=-\frac{2x-3yz}{2z-3xy}\bigg|_{(1,1)}=-1$$

(2)

$$y_x(1,1)=-\frac{F_x}{F_y}\bigg|_{(1,1)}=-\frac{2x-3yz}{2y-3xz}\bigg|_{(1,1)}=-1$$

□

§20.1.4 练习题

1. 解答:

(1) 令 $F(x,y)=\ln(x^2+y^2)-\arctan\dfrac{y}{x}$, 计算得

$$y'=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{2x+y}{x-2y},\ y''=\frac{1}{F_y^3}\left(2F_xF_yF_{xy}-F_x^2F_{yy}-F_y^2F_{xx}\right)=\frac{10(x^2+y^2)}{(x-2y)^3}$$

(2) 两边取对数得到 $y\ln x=x\ln y$, 对 x 求导得到

$$y'\ln x+\frac{y}{x}=\ln y+x\cdot\frac{y'}{y}$$

解得

$$y'=\frac{\ln y-y/x}{\ln x-x/y}=\frac{y^2(\ln x-1)}{x^2(\ln y-1)}$$

再令 $F(x,y)=x^y-y^x$, 计算得

$$\begin{aligned}y''&=\frac{1}{F_y^3}\left(2F_xF_yF_{xy}-F_x^2F_{yy}-F_y^2F_{xx}\right)\\&=-\frac{2y^2(\ln x-1)}{x^3(\ln y-1)}+\frac{y^2}{x^3(\ln y-1)}+\frac{2y^3(\ln x-1)^2}{x^4(\ln y-1)^2}-\frac{y^3(\ln x-1)^2}{x^4(\ln y-1)^3}\end{aligned}$$

(3) 令 $F(x,y)=xy-2^x\ln 2+2^y$, 计算得

$$y'=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{2^x(\ln 2)^2-y}{x+2^y\ln 2}$$

$$
\begin{aligned}
y'' &= \frac{1}{F_y^3}\left(2F_xF_yF_{xy} - F_x^2F_{yy} - F_y^2F_{xx}\right) \\
&= \frac{1}{x+2^y\ln 2}\left[2^x\ln^3 2 - \frac{2^x\ln^2 2 - y}{x+2^y\ln 2}\cdot\left(2+2^y\ln^2 2\right)\right]
\end{aligned}
$$

注: 本类题均有两种通用解法: (i) 方程两边求导解方程; (2) 直接利用求导公式. □

2. 解答:

(1) 两边对 x 求导得 $3y^2\cdot y' + y' - 2x = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{2x}{1+3y^2} \Rightarrow y'(0) = 0$;

(2) 两边对 x 求导得 $x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}}\cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -(x/y)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow y'(1) = \sqrt{3}$;

(3) 两边对 x 求导得 $\cos x - 2\sin y\cdot y' = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{\cos x}{2\sin y} \Rightarrow y'(\pi/2) = 0$; 再求导得

$$
-\sin x - 2\cos y\cdot y' - 2\sin y\cdot y'' = 0 \Rightarrow y'' = \frac{1}{2\sin y}(-\sin x - 2\cos y\cdot y')
$$

得 $y''(\pi/2) = 1/2$. □

3. 解答:

(1) 两边对 x 求偏导得

$$
1 + \frac{\partial z}{\partial x} = -e^{-(x+y+z)}\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -1
$$

同理可知 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -1$, 从而 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 0$.

(2) 两边对 x 求偏导得

$$
0 = 3x^2 + 3z^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - 3yz - 3xy\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = (3x^2 - 3yz) + (3z^2 - 3xy)\frac{\partial z}{\partial x}
$$

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x^2 - yz}{z^2 - xy} \Rightarrow \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,2)} = -\dfrac{1}{3}$, 对偶地, 有 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1,2)} = -\dfrac{1}{3}$;

(3) 令

$$
F(x,y,z) = \sqrt{x^2-y^2}\tan\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}} - z
$$

则可计算得

$$
\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{xz}{x^2-y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{yz}{x^2-y^2}
$$

(在化简过程中注意用题设等式 $\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}} = \tan\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$ 代换)

注: 更详细的过程参见《吉米多维奇学习指引》第三册 P44 习题 3386.

(4) 两边对 x 求偏导得

$$
\frac{z - xz_x}{z^2} = \frac{z_x}{z} \Rightarrow z_x = \frac{z}{x+z}
$$

两边对 y 求偏导得

$$-\frac{xz_y}{z^2}=\frac{z_y}{z}-\frac{1}{y}\Rightarrow z_y=\frac{z^2}{y(x+z)}$$

从而

$$\mathrm{d}z=\frac{z}{x+z}\mathrm{d}x+\frac{z^2}{y(x+z)}\mathrm{d}y$$

(5) 两边对 x 求偏导得

$$y+yz_x+z_xx+z=0\Rightarrow z_x=-\frac{y+z}{x+y} \tag{1}$$

再对 x 求偏导得

$$yz_{xx}+z_{xx}x+z_x+z_x=0\Rightarrow z_{xx}=-\frac{2z_x}{x+y}=2\frac{y+z}{(x+y)^2}$$

对偶地, 有

$$z_y=-\frac{x+z}{x+y},\quad z_{yy}=2\frac{x+z}{(x+y)^2}$$

对 (1) 式两边求 y 的偏导有

$$1+z_x+yz_{xy}+z_{xy}x+z_y=0\Rightarrow z_{xy}=-\frac{1+z_x+z_y}{x+y}=\frac{2z}{x+y}$$ □

4. 解答:

(1) 记 $u=x+y+z,v=x^2+y^2+z^2$. 原式两边对 x 求偏导得

$$f_u\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)+f_v\left(2x+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$$

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{2xf_v+f_u}{2zf_v+f_u}$, 对偶地, 有 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2yf_v+f_u}{2zf_v+f_u}$, 因此

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2xf_v+f_u}{2zf_v+f_u}\mathrm{d}x-\frac{2yf_v+f_u}{2zf_v+f_u}\mathrm{d}z$$

(2) 记 $u=x,v=x+y,w=x+y+z$. 原式两边对 x 求偏导得

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}+1\right)f_w+f_v+f_u=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_u+f_v+f_w}{f_w}$$

原式两边对 y 求偏导得

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}+1\right)f_w+f_v=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f_v+f_w}{f_w}$$

(3) 令 $u=x+y,v=y+z,w=z+x$, 原式两边对 x 求偏导得

$$f_u + f_v z_x + f_w(z_x + 1) = 0$$

解得 $z_x = -\dfrac{f_u + f_w}{f_v + f_w}$. 再对 x 求偏导即得

$$\begin{aligned} z_{xx} &= -\frac{(f_u + f_w)_x(f_v + f_w) + (f_v + f_w)_x(f_u + f_w)}{(f_v + f_w)^2} \\ &= -\frac{[f_{uu} + f_{ww}(z_x + 1)](f_v + f_w) + [(f_{vv}z_x + f_{ww}(z_x + 1)](f_u + f_w)}{(f_v + f_w)^2} \end{aligned}$$

原式两边对 y 求偏导得

$$f_u + f_v(1 + z_y) + f_w z_y = 0$$

解得 $z_y = -\dfrac{f_u + f_v}{f_v + f_w}$. 再对 y 和 x 分别求偏导得

$$\begin{aligned} z_{yy} &= -\frac{(f_u + f_v)_y(f_v + f_w) + (f_v + f_w)_y(f_u + f_v)}{(f_v + f_w)^2} \\ &= -\frac{[f_{uu} + f_{vv}(1 + z_y)](f_v + f_w) + [f_{vv}(1 + z_y) + f_{ww}z_y](f_u + f_v)}{(f_v + f_w)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{yx} = z_{xy} &= -\frac{(f_u + f_v)_x(f_v + f_w) + (f_v + f_w)_x(f_u + f_v)}{(f_v + f_w)^2} \\ &= -\frac{(f_{uu} + f_{vv}z_x)(f_v + f_w) + [f_{vv}z_x + f_{ww}(z_x + 1)](f_u + f_v)}{(f_v + f_w)^2} \end{aligned}$$

最后代入 z_x, z_y 的值即得结论. □

5. 解答:

(1) 令 $u = xy, v = z - 2x$. 在原方程两边对 x 和 y 分别求偏导得

$$\begin{cases} F_u y + F_v(z_x - 2) = 0 \\ F_u x + F_v z_y = 0 \end{cases}$$

由 $\begin{pmatrix} F_u \\ F_v \end{pmatrix}$ 非零可知系数矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} y & z_x - 2 \\ x & z_y \end{vmatrix} = 0$$

即 $xz_x - yz_y = 2x$.

(2) 由于

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = f'\left(\frac{z}{y}\right)\frac{\partial z}{\partial x}$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{f'\left(\frac{z}{y}\right)-2z}$$

同法可求得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2-y^2+z^2-zf'\left(\frac{z}{y}\right)}{2yz-yf'\left(\frac{z}{y}\right)}$$

于是

$$\begin{aligned}&\left(x^2-y^2-z^2\right)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}\\=&\frac{2xy\left(y^2+z^2-x^2\right)+2xy\left(x^2-y^2+z^2-zf'\right)}{y\left(2z-f'\right)}\\=&\frac{2xyz\left(2z-f'\right)}{y\left(2z-f'\right)}=2xz\end{aligned}$$

本题获证.

(3) 令 $t=\frac{x}{z},u=\frac{y}{z}$, 则

$$\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{1}{z}-\frac{xz_x}{z^2}\quad(1)\qquad\frac{\partial t}{\partial y}=-\frac{x}{z^2}\cdot z_y\quad(2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}-\frac{yz_y}{z^2}\quad(3)\qquad\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{z^2}\cdot z_x\quad(4)$$

又 $t=\varphi(u)$, 得

$$\frac{\partial t}{\partial x}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\quad(5)\qquad\frac{\partial t}{\partial y}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y}\quad(6)$$

(1)(4)(5) 导出

$$\varphi'(u)=\frac{z-xz_x}{z^2}\bigg/\frac{-yz_x}{z^2}=\frac{xz_x-z}{yz_x}\tag{7}$$

(2)(3)(6) 导出

$$\varphi'(u)=\frac{-xz_y}{z^2}\bigg/\frac{z-yz_y}{z^2}=\frac{xz_y}{yz_y-z}\tag{8}$$

联立 (7)(8) 化简得

$$z=yz_y+xz_x\tag{9}$$

在 (9) 式两边分别对 x 和 y 求偏导得

$$\begin{cases}z_x=yz_{xy}+z_x+xz_{xx}\\z_y=z_y+yz_{yy}+xz_{xy}\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}z_{xx}&z_{xy}\\z_{xy}&z_{yy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

该方程组有非零解, 因此系数矩阵的行列式为 0, 即 $z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=0$, 得证.

(4) 在原方程两边分别对 x,y,z 求偏导得

$$\frac{2x}{a^2+u}-Au_x=0,\quad \frac{2y}{b^2+u}-Au_y=0,\quad \frac{2z}{c^2+u}-Au_z=0$$

其中

$$A=\frac{x^2}{(a^2+u)^2}+\frac{y^2}{(b^2+u)^2}+\frac{z^2}{(c^2+u)^2}$$

可发现

$$u_x^2+u_y^2+u_z^2=\frac{4}{A},\quad xu_x+yu_y+zu_z=\frac{2}{A}$$

命题显然得证. □

20.2.2 思考题

1. 解答: 条件应为:

(i)F,G,H 对各变元有连续偏导数;

(ii)$F=G=H=0$ 有解 $\boldsymbol{p}_0(x_0,y_0,z_0,u_0)$;

(iii) $\left.\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}\right|_{\boldsymbol{p}_0}\neq 0$. □

2. 解答: 计算得

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r^2$$

因此在 $r\neq 0$ 的点的附近可存在反函数. 但这并不是充要条件, 当 $r=0$ 时, 也可以存在反函数. 例如 $y=x$, 此时 $r=\sqrt{2}x,\theta=\dfrac{\pi}{4}$, 在 $(r_0,\theta_0)=\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 附近存在反函数 $x=\dfrac{r}{\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{r}{\sqrt{2}}$.

注: 直观解释就是在极坐标系中如果一个距离 r 只对应一个角度 θ, 则可确立反函数, 否则不可以. 这相当于复变函数论中的单值函数与多值函数. □

20.2.5 练习题

1. 解答: 令 $F=e^v+u^3-x,G=e^u-v^3-y$, 则 $J=\begin{vmatrix}3u^2 & e^v\\ e^u & -3v^2\end{vmatrix}=9u^2v^2-e^{u+v}$, 而

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=\begin{vmatrix}-1 & e^v\\ 0 & -3v^2\end{vmatrix}=3v^2,\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=\begin{vmatrix}0 & e^v\\ -1 & -3v^2\end{vmatrix}=e^v$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-J^{-1}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{3v^2}{9u^2v^2-e^{u+v}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-J^{-1}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{e^v}{9u^2v^2-e^{u+v}}$$ □

2. 解答: 对 z 求偏导数得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial z}+\dfrac{\partial y}{\partial z}+1=0\\ 2x\dfrac{\partial x}{\partial z}+2y\dfrac{\partial y}{\partial z}+2z=0\end{cases}$$

联立求解得

$$\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{y-z}{x-y},\quad \frac{\partial y}{\partial z}=\frac{z-x}{x-y}$$

从而 $\left.\dfrac{\partial x}{\partial z}\right|_{(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0)}=\dfrac{1}{2},\left.\dfrac{\partial y}{\partial z}\right|_{(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0)}=\dfrac{1}{2}.$ □

3. 解答: 对 x 求偏导数得

$$\begin{cases}x^2+y^2\dfrac{\partial y}{\partial x}+z^2\dfrac{\partial z}{\partial x}=yz+xz\dfrac{\partial y}{\partial x}+xy\dfrac{\partial z}{\partial x}\\ 1+\dfrac{\partial y}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\end{cases}$$

联立求解得

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{z-x}{y-z},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x-y}{y-z}$$

上面两式对 x 求偏导数并代入上面两式化简得

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{(z-y)^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{(y-z)^3}$$ □

4. 解答: 令 $F=u\cos\dfrac{v}{u}-x,G=\sin\dfrac{v}{u}-y$, 则

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\cos\dfrac{v}{u}+\dfrac{v}{u}\sin\dfrac{v}{u} & -\sin\dfrac{v}{u}\\ -\dfrac{v}{u^2}\cos\dfrac{v}{u} & \dfrac{1}{u}\cos\dfrac{v}{u}\end{vmatrix}=\frac{1}{u}\cos^2\frac{v}{u}$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=\begin{vmatrix}-1 & -\sin\dfrac{v}{u}\\ 0 & \dfrac{1}{u}\cos\dfrac{v}{u}\end{vmatrix}=-\frac{1}{u}\cos\frac{v}{u},\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=\begin{vmatrix}0 & -\sin\dfrac{v}{u}\\ -1 & \dfrac{1}{u}\cos\dfrac{v}{u}\end{vmatrix}=-\sin\frac{v}{u}$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=\begin{vmatrix}\cos\dfrac{v}{u}+\dfrac{v}{u}\sin\dfrac{v}{u} & -1\\ -\dfrac{v}{u^2}\cos\dfrac{v}{u} & 0\end{vmatrix}=-\frac{v}{u^2}\cos\frac{v}{u}$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=\begin{vmatrix}\cos\dfrac{v}{u}+\dfrac{v}{u}\sin\dfrac{v}{u} & 0\\ -\dfrac{v}{u^2}\cos\dfrac{v}{u} & -1\end{vmatrix}=-\cos\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}$$

则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-J^{-1}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=\frac{1}{\cos(v/u)},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-J^{-1}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{u\sin(v/u)}{\cos^2(v/u)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-J^{-1}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{v}{u\cos(v/u)},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-J^{-1}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{u}{\cos(v/u)}-\frac{v\sin(v/u)}{\cos^2(v/u)}$$

注: 本题疑似遗漏一个 u 导致结果略显复杂, 可对比吉米多维奇第五册 3415 题. □

5. 解答: 微分得

$$\mathrm{d}u=f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y+f_z\mathrm{d}z=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)f \tag{1}$$

$$0=g_x\mathrm{d}x+g_y\mathrm{d}y+g_z\mathrm{d}z=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)g \tag{2}$$

$$0=h_x\mathrm{d}x+h_y\mathrm{d}y+h_z\mathrm{d}z=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)h \tag{3}$$

令 $\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}=I_1,\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(z,x)}=I_2,\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)}=I_3$, 由 (2)(3) 解得

$$\mathrm{d}y=\frac{I_2}{I_1}\mathrm{d}x,\quad \mathrm{d}z=\frac{I_3}{I_1}\mathrm{d}x$$

将 $\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 代入 (1) 得

$$\mathrm{d}u=f_x\mathrm{d}x+f_y\cdot\frac{I_2}{I_1}\mathrm{d}x+f_z\cdot\frac{I_3}{I_1}\mathrm{d}x=\frac{1}{I_1}\left(I_1f_x+I_2f_y+I_3f_z\right)\mathrm{d}x=\frac{I}{I_1}\mathrm{d}x$$

其中 $I=\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,y,z)}$, 于是

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{I}{I_1}$$

对 (1)(2)(3) 式再求一次微分, 得

$$\mathrm{d}^2u=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2f+f_y\mathrm{d}^2y+f_z\mathrm{d}^2z \tag{4}$$

$$0=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g+g_y\mathrm{d}^2y+g_z\mathrm{d}^2z \qquad (5)$$

$$0=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h+h_y\mathrm{d}^2y+h_z\mathrm{d}^2z \qquad (6)$$

于是

$$\mathrm{d}^2y=\frac{1}{I_1}\left[g_z\cdot\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h-h_z\cdot\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\partial z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g\right]$$

$$\mathrm{d}^2z=\frac{1}{I_1}\left[h_y\cdot\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g-g_y\cdot\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\partial z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h\right]$$

令 $\dfrac{\partial(h,f)}{\partial(y,z)}=I_4, \dfrac{\partial(f,z)}{\partial(y,z)}=I_5$, 并将 d^2y 及 d^2z 代入 (4), 即得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2u=\frac{1}{I_1}\Bigg[&I_1\cdot\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f\\&+I_4\cdot\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g\\&+I_5\cdot\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h\Bigg]\end{aligned}$$

再以 $\mathrm{d}y=\dfrac{I_2}{I_1}\mathrm{d}x$ 及 $\mathrm{d}z=\dfrac{I_3}{I_1}\mathrm{d}x$ 代入上式, 即得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{I_1^3}\Bigg[&I_1\cdot\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f\\&+I_4\cdot\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g\\&+I_5\cdot\left(I_2\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h\Bigg]\end{aligned}$$

□

6. 解答: 计算可知

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=\cos v\mathrm{d}u-u\sin v\mathrm{d}v\\ \mathrm{d}y=\sin v\mathrm{d}u+u\cos v\mathrm{d}v\end{cases}$$

联立求解, 得

$$\mathrm{d}u=\cos v\mathrm{d}x+\sin v\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}v=\frac{1}{u}(-\sin v\mathrm{d}x+\cos v\mathrm{d}y)$$

$$u\mathrm{d}v=-\sin y\mathrm{d}x+\cos v\mathrm{d}y$$

再对上式微分一次, 得

$$ud^2v + dudv = -\cos v dv dx - \sin v dv dy = -dudv$$

于是

$$\begin{aligned} d^2z = d^2v &= -\frac{2}{u}dudv \\ &= -\frac{2}{u^2}(\cos v dx + \sin v dy)(-\sin v dx + \cos v dy) \\ &= \frac{2}{u^2}\left(\sin v \cos v dx^2 - \cos 2v dx dy - \sin v \cos v dy^2\right) \end{aligned}$$

从而有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2\sin v \cos v}{u^2} = \frac{\sin 2v}{u^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\cos 2v}{u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\sin 2v}{u^2}$$

注: 本题也可消去 u, v, 由 $z = v = \arctan\dfrac{y}{x}$ 获解. □

7. 解答: 计算得

$$\begin{cases} dx|_{(u,v)=(0,0)} = e^{u+v}(du + dv)\Big|_{(u,v)=(0,0)} = du + dv \\ dy|_{(u,v)=(0,0)} = e^{u-v}(du - dv)\Big|_{(u,v)=(0,0)} = du - dv \end{cases}$$

可解出

$$\begin{cases} du|_{(u,v)=(0,0)} = \dfrac{dx + dy}{2} \\ dv|_{(u,v)=(0,0)} = \dfrac{dx - dy}{2} \end{cases}$$

从而当 $(u, v) = (0, 0)$ 时

$$\begin{aligned} dz &= udv + vdu = 0 \\ d^2z &= ud^2v + 2dudv + vd^2u = 2dudv \\ &= 2\left(\frac{dx + dy}{2}\right)\left(\frac{dx - dy}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(dx^2 - dy^2\right) \end{aligned}$$ □

8. 解答: g 对 x 求偏导得

$$g_1 \cdot 2x + g_2 \cdot e^y \cos x + g_3 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{g_3}(g_1 \cdot 2x + g^2 \cdot e^y \cos x)$$

于是有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = f_x + f_y \cos x - -\frac{f_z}{g_3}(g_1 \cdot 2x + g^2 \cdot e^y \cos x)$$ □

§20.3.3　练习题

1. 解答: 由

$$dx = \frac{\partial x}{\partial y}dy + \frac{\partial x}{\partial z}dz \Rightarrow dz = \frac{1}{\partial x/\partial z}dx - \frac{\partial x/\partial y}{\partial x/\partial z}dy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\partial x/\partial z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial x/\partial y}{\partial x/\partial z}$$

代入原方程得

$$(x-y)\cdot\frac{1}{\partial x/\partial z} - y\cdot\frac{\partial x/\partial y}{\partial x/\partial z} = 0$$

即

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{x-y}{y}$$

□

2. 解答: 由 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 两边微分, 得

$$dr = \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r}dx + \frac{y}{r}dy \Longleftrightarrow rdr = xdx + ydy$$

由 $\varphi = \arctan\dfrac{y}{x}$ 两边微分, 得

$$d\varphi = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \frac{x}{r^2}dy - \frac{y}{r^2}dx \Longleftrightarrow r^2 d\varphi = xdy - ydx$$

于是

$$\begin{aligned} xrdr - yr^2 d\varphi &= \left(x^2dx + xydy\right) - \left(xydy - y^2dx\right) \\ &= \left(x^2+y^2\right)dx = r^2 dx \end{aligned}$$

即

$$dx = \frac{x}{r}dr - yd\varphi \tag{1}$$

同理可得

$$dy = \frac{y}{r}dr + xd\varphi \tag{2}$$

由 (1)(2) 可得

$$\begin{aligned} xd^2y - yd^2x =& x\left(\frac{y}{r}d^2r - \frac{y}{r^2}dr^2 + \frac{1}{r}drdy + dxd\varphi + xd^2\varphi\right) \\ &- y\left(\frac{x}{r}d^2r - \frac{x}{r^2}dr^2 + \frac{1}{r}dxdr - dyd\varphi - yd^2\varphi\right) \\ =& dr/r(xdy - ydx) + (xdx+ydy)d\varphi + \left(x^2+y^2\right)d^2\varphi \\ =& \frac{dr}{r}\left(r^2d\varphi\right) + (rdr)d\varphi + r^2d^2\varphi \\ =& 2rdrd\varphi + r^2d^2\varphi \end{aligned}$$

于是

$$w = x\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - y\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + r^2\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)$$ □

3. 解答: 易知

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1, \frac{\partial \eta}{\partial y} = -1$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta}$$

代入原方程得

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0$$

即

$$z = \varphi(\xi) = \varphi(x+y)$$

其中 φ 为任意的函数. □

4. 解答: 易见

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v = \frac{\partial z}{\partial u}\left(\mathrm{d}y + e^{-x}\mathrm{d}z - ze^{-x}\mathrm{d}x\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\left(\mathrm{d}x + e^{-y}\mathrm{d}z - ze^{-z}\mathrm{d}y\right)$$

于是

$$\left(1 - e^{-x}\frac{\partial z}{\partial u} - e^{-z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial z}{\partial v} - ze^{-x}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial z}{\partial u} - ze^{-y}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\mathrm{d}y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial v} - ze^{-x}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(1 - e^{-x}\frac{\partial z}{\partial u} - e^{-y}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial u} - ze^{-y}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\left(1 - e^{-x}\frac{\partial z}{\partial u} - e^{-y}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1}$$

代入原式化简整理得

$$F = \frac{e^{x+y} - z^2}{1 - e^{-x}\dfrac{\partial z}{\partial u} - e^{-y}\dfrac{\partial z}{\partial v}}$$ □

5. 解答: 计算可知

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}w = e^z(1+z)\mathrm{d}z &= \frac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial w}{\partial v}\mathrm{d}v \\
&= \frac{\partial w}{\partial u}\left(e^z\mathrm{d}x + xe^z\mathrm{d}z\right) + \frac{\partial w}{\partial v}\left(e^x\mathrm{d}y + ye^z\mathrm{d}z\right) \\
&\Rightarrow \left(1 + z - x\frac{\partial w}{\partial u} - y\frac{\partial w}{\partial v}\right)\mathrm{d}z = \frac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}x + \frac{\partial w}{\partial v}\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial w}{\partial u}}{1+z-x\dfrac{\partial w}{\partial u}-y\dfrac{\partial w}{\partial v}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\dfrac{\partial w}{\partial v}}{1+z-x\dfrac{\partial w}{\partial u}-y\dfrac{\partial w}{\partial v}}$$

代入原方程得

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial v}$$

□

6. 解答: 计算可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}w=\frac{z\mathrm{d}u-u\mathrm{d}z}{z^2}&=\frac{\partial w}{\partial\xi}\mathrm{d}\xi+\frac{\partial w}{\partial\eta}\mathrm{d}\eta+\frac{\partial w}{\partial\zeta}\mathrm{d}\zeta\\&=\frac{\partial w}{\partial\xi}\left(\frac{z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z}{z^2}\right)+\frac{\partial w}{\partial\eta}\left(\frac{z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z}{z^2}\right)+\frac{\partial w}{\partial\zeta}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

两边同乘 z^2, 整理得

$$z\mathrm{d}u=z\frac{\partial w}{\partial\xi}\mathrm{d}x+z\frac{\partial w}{\partial\eta}\mathrm{d}y+\left(u-x\frac{\partial w}{\partial\xi}-y\frac{\partial w}{\partial\eta}+z^2\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right)\mathrm{d}z$$

将由上式确定的 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$ 代入原方程, 得

$$x\frac{\partial v}{\partial\xi}+y\frac{\partial w}{\partial\eta}+\left(u-x\frac{\partial w}{\partial\xi}-y\frac{\partial w}{\partial\eta}+z^2\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right)=u+\frac{xy}{z}$$

即

$$\frac{\partial w}{\partial\zeta}=\frac{xy}{z^3}=\frac{\xi\eta}{\zeta}$$

□

7. 解答: 将球坐标变换视作两个变换

$$(x,y,z)=(R\cos\varphi,R\sin\varphi,z),\quad (R,\varphi,z)=(r\sin\theta,\varphi,r\cos\theta)$$

的复合. 由第一个变换有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2u}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\\=&\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\right)+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\right)+\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(-R\frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi+R\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi\right)+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\\=&\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\cos^2\varphi+2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\sin^2\varphi+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\right)\\&+\frac{1}{R}\left(R\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\sin^2\varphi-2R\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\sin\varphi\cos\varphi+R\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\cos^2\varphi-\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\right)+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\\=&\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\end{aligned}$$

再由第二个变换有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]\\
=&\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial R}\sin\theta+r^2\frac{\partial u}{\partial z}\cos\theta\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial R}r\cos\theta+\sin\theta\frac{\partial u}{\partial z}r(-\sin\theta)\right)+\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]\\
=&\frac{1}{r^2}\left(2r\frac{\partial u}{\partial R}\sin\theta+2r\frac{\partial u}{\partial z}\cos\theta+r^2\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}\sin^2\theta+2r^2\frac{\partial^2 u}{\partial R\partial z}\sin\theta\cos\theta+r^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos^2\theta\right)\\
&+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[r\frac{\partial u}{\partial R}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)-2r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u}{\partial z}+r\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}\cdot r\cos\theta-\frac{\partial^2 u}{\partial R\partial z}r\sin\theta\right)\right.\\
&\left.-r\sin^2\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial R\partial z}r\cos\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(-r\sin\theta)\right)\right]+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\\
=&\frac{2\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial R}+\frac{2\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}\sin^2\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial R\partial z}\sin 2\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos^2\theta+\frac{\cos^2\theta}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial R}\\
&-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial R}-\frac{2}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}\cos^2\theta-\frac{\partial^2 u}{\partial R\partial z}2\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\sin^2\theta+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\\
=&\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\\
=&\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

从而

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]=0$$

注: 其他证法参见徐森林上册 P366 第 393 题. □

8. 解答: 计算得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\\
\frac{\partial z}{\partial y}&=2\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial uzv}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}
\end{aligned}
$$

代入原方程, 整理化简得

$$3\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}=0$$ □

9. 解答: 由 $z=w-(x+y)$ 不难验证

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}-1,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial v}-1$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}$$

注意到

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\
&=-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}
\end{aligned} \tag{1}$$

而

$$\begin{aligned}
\frac{y}{x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=\left(\frac{v}{u}-1\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-1\right)\\
&=\left(\frac{v}{u}-\mathbf{1}\right)\left[-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right]=\left(\frac{v}{u}-1\right)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}
\end{aligned} \tag{2}$$

将上述结果代入原方程, 即得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\left(\frac{v}{u}-1\right)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$$

将 (1)(2) 式代入本题即获证. □

10. 解答: 由

$$u=x+\frac{y^2}{x},\quad v=y+\frac{x^2}{y}$$

可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1-\frac{y^2}{x^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2x}{y},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=1-\frac{x^2}{y^2}$$

则

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}1-y^2/x^2 & 2y/x\\ 2x/y & 1-x^2/y^2\end{vmatrix}=-\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}-2$$

直接代入验证可知 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=-\dfrac{uv}{xy}$. □

11. 解答: 直接计算可知

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial u}{\partial z}\\
=&\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial z}\\
=&0
\end{aligned}$$

□

12. 解答: 直接计算可知

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{y},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}$$

于是

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} y & x \\ 1/y & -x/y^2 \end{vmatrix}=-\frac{2x}{y},\quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right]^{-1}=-\frac{y}{2x}$$

□

13. 解答: 由 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 得 $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{r},\dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{r},\dfrac{\partial r}{\partial z}=\dfrac{z}{r}$, 所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{r^2-x\cdot 2r\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^4}=\frac{r^2-2x^2}{r^4},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{r^2-2y^2}{r^4},\quad \frac{\partial w}{\partial z}=\frac{r^2-2z^2}{r^4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{2xy}{r^4}=\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{2xz}{r^4}=\frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{\partial w}{\partial y}=-\frac{2yz}{r^4}=\frac{\partial v}{\partial z}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}&=\begin{vmatrix} \dfrac{r^2-2x^2}{r^4} & -\dfrac{2xy}{r^4} & -\dfrac{2xz}{r^4} \\ -\dfrac{2xy}{r^4} & \dfrac{r^2-2y^2}{r^4} & -\dfrac{2yz}{r^4} \\ -\dfrac{2xz}{r^4} & -\dfrac{2yz}{r^4} & \dfrac{r^2-2z^2}{r^4}\end{vmatrix}\\
&=\frac{1}{r^{12}}\begin{vmatrix} r^2-2x^2 & -2xy & -2xz \\ -2xy & r^2-2y^2 & -2yz \\ -2xz & -2yz & r^2-2z^2\end{vmatrix}\\
&=\frac{1}{r^6}\left|\boldsymbol{E}_3-\frac{2}{r^2}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}[x\ \ y\ \ z]\right|\\
&=\frac{1}{r^6}\left|\boldsymbol{E}_3-\frac{2}{r^2}[x\ \ y\ \ z]\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right|\\
&=\frac{1}{r^6}\left(1-\frac{2}{r^2}(x^2+y^2+z^2)\right)=-\frac{1}{r^6}\end{aligned}$$

注: 这里我们应用了线性代数经典结论 $|\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{BA}|$. □

§20.5.2 参考题

第一组参考题

1. 解答: 令

$$F(x,t)=f\left(x,\int_0^t \sin x\mathrm{d}x\right)=f(x,1-\cos t)$$

由题意知

(1)$F(x,t)$ 在 $(0,\pi/2)$ 的邻域内有对 x 和 t 的连续偏导数;

(2)$F(0,\pi/2)=f(0,1)=0$;

(3)$F_t(0,\pi/2)=f_y\sin t(0,\pi/2)=f_y(0,1)\neq 0$.

满足隐函数存在定理的条件, 从而在 $(0,\pi/2)$ 附近可以确定隐函数 $t=\varphi(x)$, 且是惟一确定的, 故由 $f(0,1)=0$ 知当 $x=0$ 时 $t=\pi/2$, 于是

$$\varphi'(0)=t_x(0)=-\frac{F_x}{F_t}\bigg|_{x=0}=-\frac{f_x}{f_y\sin t}\bigg|_{x=0}=-\frac{f_x(0,1)}{f_y(0,1)}$$

□

2. 解答: 令 $F(x,y)=y-x-\sin\dfrac{y}{2}$, 则

$$F_y=1-\frac{\cos y}{2}\geqslant\frac{1}{2}>0$$

由命题 20.4.1 可知存在 $(-\infty,+\infty)$ 上隐函数解 $y=y(x)$, 且有

$$y'(x)=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{1}{1-1/2\cos y(x)}$$

由 $y(x)$ 可导可知 $y'(x)$ 可导, 而 $y''(x)$ 又只与 $y(x)$ 和 $y'(x)$ 有关, 容易归纳得到 $y(x)$ 无穷次可微. □

3. 解答: 令 $F(x,y)=x-y-\varphi(y)$, 则由题意知

(1) $F(0,0)=\varphi(0)=0$;

(2) 当 $-\infty<x<+\infty,-a<y<a$ 时, $F(x,y)$ 对 x 和 y 有连续偏导数;

(3) $F_y(0,0)=-1-\varphi'(0)<0$, 即 $F_y(0,0)\neq 0$.

满足隐函数存在定理的条件, 从而在 $(0,0)$ 附近 (即存在 $\delta>0$, 当 $-\delta<x<\delta$ 时) 可以确定唯一可微隐函数 $y=y(x)$ 满足方程 $x=y+\varphi(y)$ 且 $y(0)=0$. □

4. 解答: 注意到当 $x>0$ 及 $y\geqslant 0$ 时有 $F(x,y)>0$, 而当 $x>0,y\to-\infty$ 时 $F(x,y)\to-\infty$, 因此对任意的 $x_0>0$, 存在 y_0 使得 $F(x_0,y_0)=0$.

又注意到 $F_y(x_0,y_0)=-e^{-y_0}(y_0-3)y_0^2$, 而易证 $F(x,0)$ 与 $F(x,3)$ 皆为正, 可知 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$. 则满足隐函数存在定理的所有条件, 由隐函数存在定理, 命题显然获证. □

5. 解答: 由于 $|f_x|<M|f_y|$, 必有 $|f_y|>0$ 恒成立. 而 f_y 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 故 f_y 恒正或恒负 (否则由介值定理矛盾), 不妨设 $f_y>0$. 则已满足隐函数存在定理所有条件, 可确定某个

邻域 $U(x_0)$ 上的隐函数 $y=y(x)$ 满足 $f(x,y(x))=0$. 同时由

$$\begin{aligned}0&=f(x,y(x))-f(x_0,y(x_0))\\&=f(x,y(x))-f(x,y(x_0))+f(x,y_0)-f(x_0,y_0)\\&=f_y(x,\theta)(y(x)-y(x_0))+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\end{aligned}$$

(其中 θ 介于 $y(x)$ 和 $y(x_0)$ 之间, 最后一行是在 $x\to x_0$ 时) 从中可解得

$$\frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0}=-\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x,\theta)}+o(1)\to-\left.\frac{f_x}{f_y}\right|_{(x_0,y_0)}\quad(x\to x_0)$$

这说明 $y(x)$ 在 x_0 处可微. 事实上, 此处的 $(x_0,y(x_0))$ 是任意的, 因此在邻域 $U(x_0)$ 上 $y(x)$ 都是可微的. 下证 $y(x)$ 可以被延拓到 $\mathbb{R}$ 上. 假设存在 $\beta>x_0$, $y(x)$ 只能在 $[x_0,\beta)$ 上定义, 则由 $|y'(x)|=|f_x/f_y|<M$ 可知 $y(x)$ 在 $[x_0,\beta)$ 上连续 (导函数有界推一致连续推连续), 则 $y(\beta^-)$ 存在, 只要在 β 处补充定义就可延拓 $y(x)$ 至 $[x_0,\beta]$ 上, 与假设矛盾. 因此 $y(x)$ 可从 x_0 处向右一直延拓, 同理可证向左也可以一直延拓, 即 $y(x)$ 可被延拓至 $\mathbb{R}$ 上.

注: (1) 如果去掉 $|f_x|<M|f_y|$ 的条件, 削弱为 $f_y\neq0$, 则只能确定隐函数局部存在, 而不一定能延拓至整体, 可以考虑反例 $f(x,y)=e^y+x^2-1=0$ 满足 $f_y\neq0, f(0,0)=0$ 但在 $x\geqslant1$ 时显然无解.

(2)$f(x_0,y_0)$ 用于确定隐函数的局部存在性, 反例考虑 $f(x,y)=x^2+y^2+1=0$.

(3) 解的延拓是常微分方程中常见的问题, 此处我们只假设 $y(x)$ 仅能在 $[x_0,\beta)$ 上定义, 而不考虑 $[x_0,\beta]$, 这是因为饱和解 (不能再延拓的区间) 一定是开区间, 可参见王高雄 P91. □

6. 解答:

(1) 由于 Jacobi 矩阵秩为 1, 至少有一元非零, 不妨设 $u_x(x_0,y_0)$ 非零, 则此时对 u 用隐函数存在定理, 在 (x_0,y_0) 的邻域 U 上可以确定 $x=x(u,y)$, 并且有 $x_y=-\dfrac{u_y}{u_x}$. 又由于 Jacobi 矩阵秩为 1, 即行列式为 0, 从而 $v_xu_y-u_xv_y=0$, 进而可知

$$g_y(x(u,y),y)=v_xx_y+v_y=-v_x\cdot\frac{u_y}{u_x}+v_y=-\frac{v_xu_y-u_xv_y}{u_x}=0$$

令 $F(f(x,y),g(x,y))=g_y(x(u,v),y)$ 即可.

(2) 对 $F(f(x,y),g(x,y))$ 分别求偏导, 可得

$$F_uu_x+F_vv_x=F_uf_u+F_vv_y=0$$

或写成

$$\begin{pmatrix}u_x&v_x\\u_y&v_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_u\\F_v\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$$

而 $F_u^2+F_v^2\neq 0$, 即该方程组有非零解, 则系数矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix}u_x & v_x\\ u_y & v_y\end{vmatrix}=\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{\mathrm{T}}=\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|=0$$

证毕. □

7. 解答: 显然当 $s=0$ 时 $C\subset E$. 当 $|s|$ 充分小时, 构造隐函数组

$$\begin{cases}F(x,y,s,t)=x-s^2-\dfrac{f'(t)}{\varphi'(t)}s-f(t)=0\\ G(x,y,s,t)=y-2s-\varphi(t)=0\end{cases}$$

取一点 $\boldsymbol{P}_0(x_0,y_0,0,t_0)$, 其中 $t_0\in(-1,1), x=f(t_0), y=\varphi(t_0)$. 由题设条件可知

(1)F 和 G 对各变元有连续偏导数;

(2)$F(\boldsymbol{P}_0)=G(\boldsymbol{P}_0)=0$;(3)$\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(s,t)}\right|_{\boldsymbol{P}_0}=-f'(t_0)\neq 0$.

满足隐函数组存在定理的所有条件, 则在 $\boldsymbol{P}_0$ 的邻域内可以确定唯一连续解 $t=t(x,y)$, 又 z 只与 t 有关, 从而得到连续的 $z=z(x,y)$. 注意到 x_0,y_0,t_0 的任意性, 即当 $|s|$ 充分小时这些点组成一张连续曲面. □

8. 解答: 题设条件满足隐函数存在定理, 可以确定唯一 $y=y(x), x\in D$. 下面反证满足题设条件的点有无限个, 注意到 D 是有界闭区域, 故可从中选取一列点 $(x_n,y_n)\in D$ 收敛于 $(x_0,y_0)\in D$, 这些点满足

$$f(x_n,y_n)=g(x_n,y_n)=0$$

当然也有

$$f(x_0,y_0)=\lim_{n\to\infty}f(x_n,y_n)=0,\quad g(x_0,y_0)=\lim_{n\to\infty}g(x_n,y_n)=0$$

再由隐函数定理, 可知在 (x_0,y_0) 的邻域 U 上存在惟一隐函数解 $y_0(x)$ 满足 $y_0=y_0(x_0)$. 但是当 $n\to\infty$ 时, $(x_n,y_n)\in U$, 即在 U 内还有其他隐函数解, 与惟一性矛盾. 命题获证. □

9. 解答:

(1) 由隐函数存在定理可知

$$\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z}=(-1)^3\cdot\frac{f_y}{f_z}\cdot\frac{f_x}{f_y}\cdot\frac{f_z}{f_x}=-1$$

注: 几何意义是曲面的切平面与各坐标轴的相交直线斜率乘积为 -1.

(2) 设 $\dfrac{P\cdot V}{T}=R$, 则 $f(P,V,T)=P\cdot V-RT=0$.

易验证

$$P_V \cdot V_T \cdot T_P = (-1)^3 \cdot \frac{P}{-R} \cdot \frac{V}{P} \cdot \frac{-R}{V} = -1$$

(3) 用 n 元形式的隐函数存在定理, 可知当 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ 时有

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial x_1} = (-1)^n \cdot \frac{f_{x_2}}{f_{x_1}} \cdot \frac{f_{x_3}}{f_{x_2}} \cdots \frac{f_{x_1}}{f_{x_n}} = (-1)^n$$

□

10. 解答: 记 $S = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$, 先证 $\boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2 \backslash S)$ 为开集:

由于 $\mathbb{R}^2$ 是开集, S 是闭集, 故 $\mathbb{R}^2 \backslash S$ 是开集. 由题设知 $\det J\boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2 \backslash S) \neq 0$, 由局部逆映射存在定理 (命题 20.2.3) 可知 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 连续, 从而 $\boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2 \backslash S)$ 为开集.

再证 $\boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2)$ 为闭集: 设 $\boldsymbol{y} \in \overline{\boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2)}$, 则 $\exists \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)\}$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{y}$. 取 $B_r(\boldsymbol{y}) \supset \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)\}$, 则 $\overline{B_r(\boldsymbol{y})}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集, 又由题设 $\{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^2 | \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) \leqslant M\}$ 是有界集, 从而 $\overline{B_r(\boldsymbol{y})}$ 是有界闭集 (紧集). 由于 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 连续, 从练习题 18.2.5 第 10 题可知 $\boldsymbol{f}^{-1}(B_r(\boldsymbol{y}))$ 是紧集. 再由 $\boldsymbol{f}$ 连续知 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}^{-1}(B_r(\boldsymbol{y})))$ 还是紧集 (闭集), 则由 $\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)\} \subset \boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}^{-1}(B_r(\boldsymbol{y})))$ 可知

$$\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}^{-1}(B_r(\boldsymbol{y}))) \subset \boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2)$$

这就说明了 $\boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2)$ 为闭集. 下面注意到

$$\boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2 \backslash S) \cup (\mathbb{R}^2 \backslash \boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2)) = \mathbb{R}^2 \backslash \boldsymbol{f}(S)$$

且

$$\boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2 \backslash S) \cap (\mathbb{R}^2 \backslash \boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2)) = \varnothing$$

而 $\mathbb{R}^2$ 挖去 $\boldsymbol{f}(S)$ 这有限个点是连通的, 由连通性的定义可知 $\boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2 \backslash S)$ 和 $\mathbb{R}^2 \backslash \boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2)$ 中必有一个是空集, 显然前者非空, 故 $\mathbb{R}^2 \backslash \boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2) = \varnothing$, 即 $\boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$. □

11. 解答: 由于 $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是 C^1 映射且 $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ 可逆, 故存在 $\delta > 0$, 对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, 当 $|\boldsymbol{x}| \leqslant \delta$ 时有 (下面都使用矩阵范数)

$$\left\| [J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)]^{-1} J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{E}_n \right\| \leqslant \frac{1}{2}$$

现在任取 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 满足 $|\boldsymbol{x}| \leqslant \delta/2$. 定义映射

$$\boldsymbol{g}: \overline{B(\boldsymbol{0}, \delta/2)} \to \mathbb{R}^n$$

$$\boldsymbol{z} \mapsto \boldsymbol{z} - [J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)]^{-1} [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) - J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{x}]$$

直接计算 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})$ 的 Jacobi 矩阵知

$$J\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{E}_n - [J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)]^{-1} J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z})$$

注意到 $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}| \leqslant |\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{z}| \leqslant \delta$, 故有

$$\|J\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})\| \leqslant \frac{1}{2}$$

于是, 对任意的 $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2 \in \overline{B(\mathbf{0}, \delta/2)}$, 由拟微分平均值定理 (命题 19.4.2) 知存在 $\theta \in (0,1)$ 使得

$$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}_1)-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}_2)| \leqslant \|J\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}_1+\theta(\boldsymbol{z}_2-\boldsymbol{z}_1))\| \cdot |\boldsymbol{z}_1-\boldsymbol{z}_2| \leqslant \frac{1}{2}|\boldsymbol{z}_1-\boldsymbol{z}_2|$$

这说明 $\boldsymbol{g}$ 是一个压缩映射. 并且

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})| &= \left\|\boldsymbol{z}-[J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)]^{-1}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{x}]\right\| \\
&= \left\|[J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)]^{-1}\{J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z})-[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)]\}\right\| \\
&\leqslant \left\|[J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)]^{-1}[J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\theta_1(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}))](\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z})\right\| \\
&\leqslant \left\|\boldsymbol{E}_n-[J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)]^{-1}J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\theta_1(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}))\right\| \cdot |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}| \leqslant \delta/2
\end{aligned}$$

从而 $\boldsymbol{g}$ 是闭球 $\overline{B(\mathbf{0}, \delta/2)}$ 上的压缩映射, 由压缩映像原理 (命题 18.2.5), $\boldsymbol{g}$ 在 $\overline{B(\mathbf{0}, \delta/2)}$ 内存在惟一不动点 $\boldsymbol{z}$, 即有

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$$

又在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域内 $\boldsymbol{f}$ 可逆, 且 $J\boldsymbol{f}^{-1}=(J\boldsymbol{f})^{-1}$, 在上式两边作用 $\boldsymbol{f}^{-1}$, 并对 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 用无穷小增量公式 (命题 19.4.1) 可得到

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z} &= \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)+J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{x}) \\
&= \boldsymbol{x}_0+J\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{x}+o(J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}=[J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)]^{-1}J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{x}+o(J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}+o(J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{x})=o(\boldsymbol{x})$$

得 $\boldsymbol{z}=o(\boldsymbol{x})$. □

第二组参考题

1. 解答: 不失一般性, 设 $\boldsymbol{x}_0=\mathbf{0}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=0, J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{E}_n=(\delta_{ij})$(否则可作仿射变换). 这里 δ_{ij} 为 Kronecker 符号. 选取充分小的 a, 使得开方体

$$C^n(a)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \middle| \|\boldsymbol{x}\|=\max_{1\leqslant j\leqslant n}|x_j|<a\right\}\subset U$$

且当 $\boldsymbol{x} \in C^n(a)$ 时 $\det J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq 0$ 且 $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{E}_n$ 中的元素满足

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{f}_i}{\partial \boldsymbol{x}_j} - \delta_{ij}\right| \leqslant \frac{1}{2n}$$

令 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}$, 则当 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in C^n(a)$ 时由 Lagrange 中值定理有

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_2)\| &= \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{|g_i(\boldsymbol{x}_1) - g_i(\boldsymbol{x}_2)|\} \\
&= \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left\{\left|\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{\xi}^j)((\boldsymbol{x}_1)_j - (\boldsymbol{x}_2)_j)\right|\right\} \\
&\leqslant n \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left\{\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{\xi}^j)\right|\right\} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{|(\boldsymbol{x}_1)_j - (\boldsymbol{x}_2)_j|\} \\
&\leqslant n \cdot \frac{1}{2n}\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\| = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|
\end{aligned}$$

且有

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)\| &= \|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1) + \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\| \\
&\geqslant \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\| - \|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_2)\| \\
&\geqslant \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\| - \frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\| = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|
\end{aligned}$$

下面分几步进行:

(1) 如果 $\boldsymbol{y} \in C^n(a/2)$, 则必存在一点 $\boldsymbol{x} \in C^n(a)$, 使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$, 为此, 设

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_k), \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

易见

$$\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k-1}\| = \|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{k-1}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{k-2})\| \leqslant \frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}_{k-1} - \boldsymbol{x}_{k-2}\|$$

这说明 $\boldsymbol{g}$ 是一个压缩映射, 由压缩映像原理知 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛. 设极限为 $\boldsymbol{x}$, 由

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}_k\| &= \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_0\| \\
&\leqslant \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k-1}\| + \|\boldsymbol{x}_{k-1} - \boldsymbol{x}_{k-2}\| + \cdots + \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\| \\
&\leqslant \left(\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-2}} + \cdots + 1\right)\|\boldsymbol{y}\| < 2\|\boldsymbol{y}\| < 2 \cdot \frac{a}{2} = a
\end{aligned}$$

两边取极限知 $\|\boldsymbol{x}\| \leqslant \|2\boldsymbol{y}\| < a$, 即 $\boldsymbol{x}$ 位于 $C^n(a)$ 内. 且

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= \lim_{k \to +\infty} \boldsymbol{x}_{k+1} = \lim_{k \to +\infty} [\boldsymbol{y} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_k)] = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \\
&= \boldsymbol{y} - [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}] = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}
\end{aligned}$$

(2) 注意 (1) 中选取的 $\boldsymbol{x}$ 具有唯一性, 故 $\boldsymbol{f}^{-1}: C^n(a/2) \to C^n(a)$ 存在. 另一方面由

$$\|\boldsymbol{y}'-\boldsymbol{y}''\|=\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')\|\geqslant\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''\|=\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}')-\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}'')\right\|$$

可知 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 在 $C^n(a/2)$ 上一致连续, 从而连续, 则 $\boldsymbol{f}^{-1}(C^n(a/2))$ 为开集, 从而 $C^n(a)\cap \boldsymbol{f}^{-1}(C^n(a/2))$ 也是开集. 这就证明了

$$\boldsymbol{f}:C^n(a)\cap\boldsymbol{f}^{-1}\left(C^n\left(\frac{a}{2}\right)\right)\to C^n\left(\frac{a}{2}\right)$$

是同胚映射, 它将 $\mathbf{0}$ 的一个开邻域映成 $\boldsymbol{f}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ 的一个开邻域.

(3) 我们证明 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 可微, 从而 $J\boldsymbol{f}^{-1}$ 存在.

由题设 $\boldsymbol{f}$ 是 C^k 映射, 则 $\boldsymbol{f}$ 在 $C^n(a)\cap\boldsymbol{f}^{-1}(C^n(a/2))$ 的任一点 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微, 那么由无穷小增量公式 (命题 19.4.1) 有

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+o(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$$

记 $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 作用于上式两边得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{A}[o(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)]=\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}_0)+\boldsymbol{A}[o(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)]$$

注意到

$$\frac{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\|}=\frac{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\|}\leqslant 2$$

我们有

$$\lim_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{y}_0}\frac{\boldsymbol{A}[o(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)]}{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\|}=\lim_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{y}_0}\boldsymbol{A}\frac{[o(\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}_0))]}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}\cdot\frac{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\|}=\mathbf{0}$$

从而

$$\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}_0)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))+o(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)$$

由练习题 19.4.2 第 1 题知 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 可微.

(4) 由数学归纳法证明 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 是 C^k 映射. 记 C^∞ 映射 $\boldsymbol{h}$ 为矩阵求逆, 注意到

$$J\boldsymbol{f}^{-1}=\boldsymbol{h}\circ J\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{f}^{-1}$$

因为 $\boldsymbol{f}$ 是 C^k 映射, 从而 $J\boldsymbol{f}$ 是 C^{k-1} 映射. 现在假设 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 是 C^{l-1} 映射, 则经过复合后 $J(\boldsymbol{f}^{-1})$ 是 C^{l-1} 映射, 即 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 是 C^l 映射. 由 (3) 知 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 是 C^1 映射, 则根据数学归纳法命题得证.

综上, $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 都是 C^k 映射, 即 $\boldsymbol{f}$ 是 C^k 微分同胚.

注: 事实上这里的 $W=C^n(a)\cap\boldsymbol{f}^{-1}(C^n(a/2)), V=C^n(a/2)$ 都是 C^k 微分流形. 与第 3 题对应, 本题是逆映射存在定理的映射语言版本. □

2. 解答: 由例题 19.4.1 知存在 $z=x+\theta(y-x)$ 使得

$$(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\cdot[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]=(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\cdot J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\cdot(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$$

由题设条件与 Cauchy 不等式知

$$|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|\geqslant(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\cdot[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]\geqslant\alpha|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2$$

即有

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|\geqslant\alpha|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|$$

并注意到

$$\det J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})=\frac{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|}\geqslant\alpha>0$$

由局部逆映射存在定理知 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 是 C^1 映射, 即 $\boldsymbol{f}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的微分同胚. □

3. 解答:(白正国定理 1.1.5) 设 U,V 分别为 $\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n$ 中的开子集, 映射 $\boldsymbol{f}:U\times V\to\mathbb{R}^n$ 是 C^k 的, 若对于 $\boldsymbol{x}_0\in U,\boldsymbol{y}_0\in V$, 映射 $\boldsymbol{y}\mapsto\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y})$ 在 $\boldsymbol{y}_0$ 的微分 $D_2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 非奇异, 则存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 $U_0\subset U$ 及惟一确定的 C^k 映射 $\boldsymbol{g}:U_0\to\mathbb{R}^n$ 使得 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{y}_0$, 且对于一切 $\boldsymbol{x}\in U_0$, 有

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y})$$

证: 考虑映射

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}:U\times V&\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\\(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})&\mapsto(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\end{aligned}$$

则

$$D\boldsymbol{F}(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O}\\ D_1\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) & D_2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\end{pmatrix}$$

其中 $D_1\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 是映射 $\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_0)$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 点的微分. 因为 $D_2\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 非奇异, 故 $D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 非奇异. 由逆映射存在定理, 映射 $\boldsymbol{F}$ 在 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 充分小的邻域 $U_0\times V_0$ 中存在惟一的逆映射. 设

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n&\to\mathbb{R}^n\\(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})&\mapsto\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

令

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\pi}\circ\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)),\quad\boldsymbol{x}_0\in U$$

则 $\boldsymbol{g}$ 即为所求映射.

注: 也可参看徐森林第二册定理 8.5.2. □

4. 解答: 计算得

$$\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{a})=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

取初始点 $\boldsymbol{x}_0=(1,1)^{\mathrm{T}}$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}\dfrac{u+v+1}{2}\\ \dfrac{v-u+1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}\dfrac{u+v+1}{2}\\ \dfrac{v-u+1}{2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\dfrac{uv+u}{2}\\ \dfrac{(v+1)^2-u^2}{2}\end{bmatrix}\right\}\\ &=\begin{bmatrix}\dfrac{u^2-v^2-uv+3u+2v+1}{4}\\ \dfrac{u^2-v^2+uv+u+2v+1}{4}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

逆映射的一次微分近似为

$$\boldsymbol{T}^{-1}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}u\\ v-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{u+v+1}{2}\\ \dfrac{v-u+1}{2}\end{bmatrix}$$

它就是取初始点 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{a}$ 时 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 的一次迭代解 $(x_1,y_1)^{\mathrm{T}}$; 二次迭代解 $(x_2,y_2)^{\mathrm{T}}$ 收敛速度显著且精确. □

5. 解答: 不失一般性, 可以假设

$$\left.\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}\right|_0\neq 0$$

定义 $\boldsymbol{F}:U\times\mathbb{R}^{n-m}\to\mathbb{R}^n$ 为

$$\boldsymbol{F}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{f}(x_1,x_2,\cdots,x_m)+(0,0,\cdots,0,x_{m+1}+x_{m+2}+\cdots,x_n)$$

则 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$, 且

$$\left.\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\right|_0=\det\begin{pmatrix}J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) & \boldsymbol{O}\\ & \boldsymbol{E}_{n-m}\end{pmatrix}=\left.\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}\right|_0\neq 0$$

由第 1 题的结论, 存在 $\boldsymbol{F}$ 的局部逆映射 $\boldsymbol{h}$, 它是 C^k 微分同胚, 将 $\mathbb{R}^n$ 中 $\boldsymbol{0}$ 的一个开邻域 V 映成另一个开邻域 W, 使得 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$ 及

$$\boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{f}(x_1,x_2,\cdots,x_m)=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{F}(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,0,\cdots,0))=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,0,\cdots,0)$$

命题得证. □

6. 解答: 不失一般性, 可以假设

$$\left.\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}\right|_0\neq 0$$

定义 $\boldsymbol{F}:U\to\mathbb{R}^m$ 为

$$\boldsymbol{F}(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(f_1(\boldsymbol{y}),f_2(\boldsymbol{y}),\cdots,f_n(\boldsymbol{y}),y_{n+1},y_{n+2},\cdots,y_m)$$

再令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}:\mathbb{R}^m&\to\mathbb{R}^n\\(x_1,x_2,\cdots,x_m)&\mapsto(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{F}(\mathbf{0})=\mathbf{0},\boldsymbol{f}=\boldsymbol{\pi}\circ\boldsymbol{F}$, 且

$$\left.\frac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}\right|_{\mathbf{0}}=\det\begin{pmatrix}J_{\boldsymbol{y}}&\boldsymbol{f}(\mathbf{0})\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}_{m-n}\end{pmatrix}=\left.\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}\right|_{\mathbf{0}}\neq 0$$

由第 1 题的结论, 存在 $\boldsymbol{F}$ 的局部逆映射 φ, 它是 C^k 微分同胚, 将 $\mathbb{R}^n$ 中 $\mathbf{0}$ 的一个开邻域 V 映成另一个开邻域 W, 使得 $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ 及

$$\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{\varphi}(x_1,x_2,\cdots,x_m)=\boldsymbol{\pi}\circ\boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{\varphi}(x_1,x_2,\cdots,x_m)=\boldsymbol{\pi}(x_1,x_2,\cdots,x_m)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

命题得证.

注: 以上两个命题称为秩定理, 是在以后学习的几何学 (如黎曼几何) 的基本定理, 其几何意义可参看 Rudin《数学分析原理》P207-P210. □

第二十一章 偏导数的应用

§21.1.4 练习题

1. 解答: 曲线切向量 $\boldsymbol{i}=(1,2t,3t^2)$, 平面法向量 $\boldsymbol{j}=(1,2,1)$, 由题意有

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0\Rightarrow t_1=-1,t_2=-1/3$$

所求点为 $(-1,1,-1)$ 与 $(-1/3,1/9,-1/27)$. □

2. 解答: 取直角坐标系如下: 赤道平面为 Oxy 平面, 球心为坐标原点, x 轴正向过 0° 子午线, z 轴正向过北极, 并取 $Oxyz$ 坐标系为右手系.

下面我们先确定斜驶线和子午线在直角坐标系中的方程. 为此, 假定讨论地球上的点的经度为 $\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$, 纬度为 $\psi(-\pi/2\leqslant\psi\leqslant\pi/2)$, 则它在上述坐标系下的坐标为

$$\begin{cases}x=R\cos\psi\cos\varphi\\ y=R\cos\psi\sin\varphi\\ z=R\sin\psi\end{cases}$$

其中 R 为地球半径. 对

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)=\mathrm{e}^{k\varphi}$$

两端微分, 得

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\psi}{2}\right)}=k\mathrm{e}^{k\varphi}\mathrm{d}\varphi=k\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)\mathrm{d}\varphi$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\psi}=\left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)k\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)\right]^{-1}=\left[k\sin\left(\frac{\pi}{2}+\psi\right)\right]^{-1}=\frac{1}{k\cos\psi}$$

今将斜驶线来说, 在 (φ_0,ψ_0) 点, 有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\psi}=-R\sin\psi_0\cos\varphi_0-R\cos\psi_0\sin\varphi_0\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\psi}=-R\left(\sin\psi_0\cos\varphi_0+\frac{\sin\varphi_0}{k}\right)$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\psi}=-R\sin\psi_0\sin\varphi_0+R\cos\psi_0\cos\varphi_0\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\psi}=-R\left(\sin\psi_0\sin\varphi_0-\frac{\cos\varphi_0}{k}\right)$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\psi}=R\cos\psi_0$$

于是可取斜驶切向量

$$\boldsymbol{v}_1=\left\{\sin\psi_0\cos\varphi_0+\frac{\sin\varphi_0}{k},\sin\psi_0\sin\varphi_0-\frac{\cos\varphi_0}{k},-\cos\psi_0\right\}$$

当 φ 为常数时即得子午线, 故其参数方程为

$$\begin{cases} x = R\cos\psi\cos\varphi_0 \\ y = R\cos\psi\sin\varphi_0 \\ z = R\sin\psi \end{cases}$$

于是, 子午线在点 (φ_0, ψ_0) 的切向量为

$$\boldsymbol{v}_2 = \{\sin\psi_0\cos\varphi_0, \sin\psi_0\sin\varphi_0, -\cos\psi_0\}$$

直接计算得

$$\cos(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \frac{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|} = \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)^{-1/2}$$

即斜驶线与子午线相交成定角. □

3. 解答: 令

$$\begin{cases} F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6 \\ G(x, y, z) = x + y + z \end{cases}$$

它们在 $(1, -2, 1)$ 处的偏导数和 Jacobi 行列式之值分别为

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -4, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1$$

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} = -6, \quad \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} = 0, \quad \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = 6$$

所以曲线在 $(1, -2, 1)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-1}{-6} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{6}$$

法平面方程为

$$-6(x-1) + 0(y+2) + 6(z-1) = 0$$

即

$$x - z = 0$$ □

4. 解答: 计算可得

$$\boldsymbol{n} = \left\{-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, -1\right\}_{(1,1,\pi/4)} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right\}$$

于是切面方程为

$$-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)-(z-\pi/4)=0 \Leftrightarrow z=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(x-y)$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\pi/4}{2}$$

□

5. 解答: 在曲面上任取一点 $\boldsymbol{P}_0(x_0,y_0,z_0)$, 则曲面在该点的切平面方程为

$$y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+x_0y_0(z-z_0)=0$$

它与各坐标平面的交点为 $\boldsymbol{A}(3x_0,0,0),\boldsymbol{B}(0,3y_0,0),\boldsymbol{C}(0,0,3z_0)$. 注意到各坐标轴的垂直关系, 即知以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{O}$ 各点为顶点的四面体体积为

$$\begin{aligned}V_{\boldsymbol{ABCO}}&=\frac{1}{3}\boldsymbol{OC}\cdot\frac{1}{2}\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OB}\\&=\frac{1}{6}\cdot 3z_0\cdot 3x_0\cdot 3y_0=\frac{9}{2}x_0y_0z_0=\frac{9}{2}a\end{aligned}$$

为常数, 本题获证.

□

§21.2.3 练习题

1. 解答: 外法线方向为 $\left\{\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2}\right\}$, 单位化后为

$$\boldsymbol{n}=\left\{\frac{x}{a^2\Delta},\frac{y}{b^2\Delta},\frac{z}{c^2\Delta}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(x,y,z)}=\frac{x}{a^2\Delta}2x+\frac{y}{b^2\Delta}2y+\frac{z}{c^2\Delta}2z=\frac{2}{\Delta}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=\frac{2}{\Delta}$$

其中 $\Delta=\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}$.

□

2. 解答:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}(uv)=&\frac{\partial}{\partial x}(uv)\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}(uv)\cos\beta+\frac{\partial}{\partial z}(uv)\cos\gamma\\=&u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)+v\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)\\=&u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}+v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\end{aligned}$$

□

3. 解答: $\nabla f(u)=(f'(u)u_x, f'(u)u_y, f'(u)u_z)=f'(u)(u_x,u_y,u_z)=f'(u)\nabla u.$ $\square$

4. 解答: 考虑

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_i}(\boldsymbol{P}_0)=f_x(\boldsymbol{P}_0)\cos\frac{2\pi i}{n}+f_y(\boldsymbol{P}_0)\sin\frac{2\pi i}{n}$$

利用第六章第二组参考题第 1 题的结论可知

$$\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{2\pi i}{n}=\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{2\pi i}{n}=0$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_i}(\boldsymbol{P}_0)=0$$

$\square$

5. 解答: 利用例题 21.3.2 的方法, 取 $\boldsymbol{l}=(0,\pm1,0)$ 即为函数 u 增加最快的方向. $\square$

6. 解答: 我们逐步验证:

(i) 考虑

$$|f(x,y)|=\left|x-y+\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right|\leqslant|x|+|y|+|y/2|\to 0\quad (x,y)\to(0,0)$$

故

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$$

即 $f(x,y)$ 在原点连续.

(ii) 对任意 $\boldsymbol{l}=(a,b)\neq(0,0)$($\boldsymbol{l}=(0,0)$ 时结论平凡), 考虑

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(\boldsymbol{0}+t\boldsymbol{l})-f(\boldsymbol{0})}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{ta-tb+\dfrac{t^3ab^2}{t^2a^2+t^2b^2}}{t}=a-b+\frac{ab^2}{a^2+b^2}$$

即 $f(x,y)$ 在原点沿任何方向的方向导数都存在.

(iii) 计算得

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=1$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=1$$

考虑

$$\begin{aligned}A&=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta f-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\\&=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x-\Delta y+\dfrac{\Delta x(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}-\Delta x-\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\end{aligned}$$

取路径 $\Delta y=\Delta x$, 则

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{3}{4\Delta x}$$

易见 A 不存在, 即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微. □

§21.3.4 练习题

1. 解答: 注意到

$$\lim_{h\to 0}\frac{[u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)]-[u(x_0,y_0)-u(x_0-h,y_0)]}{h^2}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{u_x(x_0,y_0)-u_x(x_0-h,y_0)}{h}=\lim_{h\to 0}u_{xx}(x_0-h,y_0)=u_{xx}(x_0,y_0)$$

同理有

$$\lim_{h\to 0}\frac{[u(x_0,y_0+h)-u(x_0,y_0)]-[u(x_0,y_0)-u(x_0,y_0-h)]}{h^2}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{u_y(x_0,y_0)-u_y(x_0,y_0-h)}{h}=\lim_{h\to 0}u_{yy}(x_0,y_0-h)=u_{yy}(x_0,y_0)$$

显然命题得证. □

2. 解答:

(1) 令 $f_x=2x-4y=0, f_y=-4x+10y=0$ 得驻点 $(0,0)$. $A=f_{xx}(0,0)=2>0, B=f_{xy}(0,0)=-4, C=f_{yy}(0,0)=10, \Delta=AC-B^2>0$, 故 $(0,0)$ 是驻点且是极小值点.

(2) 由于 $f(x)=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0$, 故 $(0,0)$ 是极小值点. 但 $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在, 所以 $(0,0)$ 不是驻点.

(3) 令 $f_x=2x+2y=0, f_y=2x=0$ 得驻点 $(0,0)$. $A=f_{xx}(0,0)=2>0, B=f_{xy}=2, f_{yy}=0, \Delta=AC-B^2<0$, 故 $(0,0)$ 是驻点且但不是极值点. □

3. 解答:

(1) 令 $u_x=2x(y-1)^2=0, u_y=2x^2(y-1)=0$ 得驻点区域 $S=\{y=1\}\cup\{x=0\}$. 显然在 S 上有 $u(x,y)=0$, 而在 S 之外 $u(x,y)>0$, 故所有极小值点的集合为 S, 极小值为 0.

(2) 令 $u_x=x(6y-4x^2)=0, u_y=3x^2-4y=0$ 得惟一驻点 $(0,0)$. 再注意到

$$u(x,y)=-(x^2-2y)(x^2-y)$$

在 $(0,0)$ 的附近满足 $y=2/3x^2$ 时有 $u(x,y)>0$, 满足 $y=2x^2$ 时有 $u(x,y)<0$, 这说明 $(0,0)$ 不是极值点, 则 $u(x,y)$ 无极值点.

(3) 令 $u_x = -(1+e^y)\sin x = 0, u_y = e^y(\cos x - 1 - y) = 0$ 得驻点 $(k\pi, (-1)^k - 1)(k \in \mathbb{Z})$.
再考虑

$$A = u_{xx} = -(1+e^y)\cos x,\quad B = u_{xy} = -e^y \sin x,\quad C = u_{yy} = e^y(\cos x - 2 - y)$$

在 k 为偶数时, 在 $(2k\pi, 0)$ 处有 $A < 0, \Delta = AC - B^2 > 0$, 可知 $(2k\pi, 0)$ 是极大值点且极大值为 2; 而当 k 为奇数时, 在 $((2k+1)\pi, -2)$ 处有 $A > 0, \Delta = AC - B^2 < 0$, 可知 $((2k+1)\pi, -2)$ 不是极值点. 因此 $u(x,y)$ 无极小值. □

4. 解答: 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \sin y \sin(2x+y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin x \sin(x+2y) = 0 \end{cases}$$

在 D 上有 6 个解 $\boldsymbol{P}_1(0,0), \boldsymbol{P}_2(0,\pi), \boldsymbol{P}_3(\pi,0), \boldsymbol{P}_4(\pi,\pi), \boldsymbol{P}_5(\pi/3,\pi/3), \boldsymbol{P}_6(2\pi/3, 2\pi/3)$.
首先易见 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4$ 是 D 的边界点, 故不能是极值点. 再考虑

$$A = f_{xx} = 2\sin y\cos(2x+y),\quad B = f_{xy} = \sin 2(x+y),\quad C = f_{yy} = 2\sin x\cos(x+2y)$$

在 P_5 处有 $A < 0, \Delta = AC - B^2 > 0$, 故 $f(x,y)$ 在 $\boldsymbol{P}_5$ 处取极大值 $3\sqrt{3}/8$; 在 $\boldsymbol{P}_6$ 处有 $A > 0, \Delta = AC - B^2 > 0$, 故 $f(x,y)$ 在 $\boldsymbol{P}_6$ 处取极小值 $-3\sqrt{3}/8$. □

5. 解答: 令 $f_x = 3x^2 - 8x + 2y = 0, f_y = 2x - 2y = 0$ 得驻点 $(0,0)$ 与 $(2,2)$. 考虑

$$A = f_{xx} = 6x - 8,\quad B = f_{xy} = 2,\quad C = f_{yy} = -2$$

在 $(0,0)$ 处 $A < 0, \Delta = AC - B^2 > 0$, 故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处取极大值; 在 $(2,2)$ 处 $A > 0$, $\Delta = AC - B^2 < 0$, 故 $f(x,y)$ 在 $(2,2)$ 处不取极值. 因此 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有惟一极大值点 $(0,0)$, 极大值为 $f(0,0) = 0$. 但是注意到 $f(5,0) > 0$, 因此 $(0,0)$ 非最大值点. □

§21.4.4 练习题

1. 解答: 令

$$\begin{aligned} &L = x^4 + y^4 + z^4 + \lambda(xyz - 1) \\ &L_x = 4x^3 + \lambda yz = 0 \\ &L_y = 4y^3 + \lambda xz = 0 \\ &L_z = 4z^3 + \lambda xy = 0 \\ &xyz = 1 \end{aligned}$$

解得驻点 $\boldsymbol{P}_1(1,1,1),\boldsymbol{P}_2(-1,-1,1),\boldsymbol{P}_3(-1,1,-1),\boldsymbol{P}_4(1,-1,-1)$ 且 $\lambda=-4$. 考虑对称性, 只需要检验其中一个点, 比如说 $\boldsymbol{P}_1$, 可计算得到

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P}_1)=\begin{pmatrix}12 & -4 & -4\\ -4 & 12 & -4\\ -4 & -4 & 12\end{pmatrix}=16\boldsymbol{E}-4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,\cdots,1)$. 由 $\boldsymbol{\alpha}$ 是一维列向量可知 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 $3,0,0$, 从而 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P}_1)$ 的特征值为 $4,16,16$, 即 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P}_1)$ 正定. 所以 $\boldsymbol{P}_1$ 为极小值点, 极小值为 $f(\boldsymbol{P}_1)=3$.
注: 其他方法参见裴礼文 P690 例 6.3.11. □

2. 解答: 令

$$\begin{aligned}&L=x-2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)\\&L_x=1+2\lambda x=0\\&L_y=-2+\lambda y=0\\&L_z=2+2\lambda z=0\\&x^2+y^2+z^2=1\end{aligned}$$

解得驻点 $\boldsymbol{P}_1(1/3,-2/3,2/3),\boldsymbol{P}_2(-1/3,2/3,-2/3)$. 由于约束条件是有界闭集, 条件最值一定存在, 且出现在 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$ 中, 显然 $u(\boldsymbol{P}_1)=3$ 为极大值, $u(\boldsymbol{P}_2)=-3$ 为极小值. □

3. 解答: 令

$$\begin{aligned}&L=\cos^2x+\cos^2y+\lambda(x-y-\pi/4)\\&L_x=-\sin 2x+\lambda=0\\&L_y=-\sin 2y-\lambda=0\\&x-y=\pi/4\end{aligned}$$

解得驻点 $\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2},-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}\right)(k\in\mathbb{Z})$. 由于约束条件是有界闭集, 条件最值一定取到. 观察到当 k 为偶数时 z 取得极大值 $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, k 为奇数时 z 取得极小值 $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. □

4. 解答: 令 $u=\ln f(x,y,z)=l\ln x+m\ln y+n\ln z$, 令

$$\begin{aligned}&L=l\ln x+m\ln y+n\ln z-\lambda(ax+by+cz-k)\\&L_x=\frac{l}{x}-a\lambda=0\\&L_y=\frac{m}{y}-b\lambda=0\\&L_z=\frac{n}{z}-c\lambda=0\\&ax+by+cz=k\end{aligned}$$

(在 L_x,L_y,L_z 中解出 x,y,z 代入最后一式解出 λ 再回代)

解得驻点 $\boldsymbol{P}=\left(\frac{l}{a}\cdot\frac{l+m+n}{k},\frac{m}{b}\cdot\frac{l+m+n}{k},\frac{n}{c}\cdot\frac{l+m+n}{k}\right)$. 注意到 $x,y,z>0$, 约束条件的每块区域边界都含有 $x=0$ 或 $y=0$ 或 $z=0$, 则当趋于边界时一定有 $u\to-\infty$, 因此 $\boldsymbol{P}$ 是 u 的极大值点, 由单调性 $\boldsymbol{P}$ 也是 f 的极大值点, 极大值为 $f(\boldsymbol{P})$. □

5. **解答**: 令

$$L=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)+\mu(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)$$

$$L_x=2\left(\frac{1}{a^2}-\lambda\right)x+\mu\cos\alpha=0 \tag{1}$$

$$L_y=2\left(\frac{1}{b^2}-\lambda\right)y+\mu\cos\beta=0 \tag{2}$$

$$L_z=2\left(\frac{1}{c^2}-\lambda\right)z+\mu\cos y=0 \tag{3}$$

$$x^2+y^2+z^2=1 \tag{4}$$

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos y=0 \tag{5}$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2 y=1 \tag{6}$$

将 $x\cdot(1)+y\cdot(2)+z\cdot(3)$ 代入 (4)(5) 后可以得到

$$\lambda=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=u(x,y,z) \tag{7}$$

将 $\cos\alpha\cdot(1)+\cos\beta\cdot(2)+\cos\gamma\cdot(3)$ 代入 (5)(6) 后可以得到

$$\mu=-2\left(\frac{x\cos\alpha}{a^2}+\frac{y\cos\beta}{b^2}+\frac{z\cos\gamma}{c^2}\right) \tag{8}$$

将 (8) 代入 (1)(2)(3) 得

$$\begin{cases}\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}-\lambda\right)x-\frac{\cos\alpha\cos\beta}{b^2}y-\frac{\cos\alpha\cos\gamma}{c^2}z=0\\ -\frac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2}x+\left(\frac{\sin^2\beta}{b^2}-\lambda\right)y-\frac{\cos\beta\cos\gamma}{c^2}z=0\\ -\frac{\cos\alpha\cos\gamma}{a^2}x-\frac{\cos\beta\cos\gamma}{b^2}y+\left(\frac{\sin^2\gamma}{c^2}-\lambda\right)z=0\end{cases} \tag{9}$$

要使如上方程组有解, 则系数行列式为 0, 即

$$\begin{vmatrix}\sin^2\alpha-a^2\lambda & -\cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\cos\gamma\\ -\cos\alpha\cos\beta & \sin^2\beta-b^2\lambda & -\cos\beta\cos\gamma\\ -\cos\alpha\cos\gamma & -\cos\beta\cos\gamma & \sin^2\gamma-c^2\lambda\end{vmatrix}=0$$

展开计算可得

$$\lambda\left[\lambda^2-\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c^2}\right)\lambda+\left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2}+\frac{\cos^2\beta}{c^2a^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}\right)\right]=0$$

由 (7) 可知 $\lambda\neq 0$, 且不难验证上式消去 λ 后得到的二次方程有两个不等的实根 $\lambda_1<\lambda_2$. 固定 $\lambda=\lambda_1$, 代入 (9), 可得到关于 (x,y,z) 有一个自由度的一个解系, 再代入方程 (4), 可得对应于 $\lambda=\lambda_1$ 的两个驻点 $\boldsymbol{P}_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $\boldsymbol{P}_2(x_2,y_2,z_2)$. 由 (7) 可知对应的 $u(\boldsymbol{P}_1)=u(\boldsymbol{P}_2)=\lambda_1$. 同理可求得对应于 $\lambda=\lambda_2$ 的两个驻点 $\boldsymbol{P}_3(x_3,y_3,z_3)$ 和 $\boldsymbol{P}_4(x_4,y_4,z_4)$, 且有 $u(\boldsymbol{P}_3)=u(\boldsymbol{P}_4)=\lambda_2$.

$\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_4$ 满足方程组 (1)~(5) 的一切解所对应的点. 类似前面几题的讨论可知函数 u 在 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 处取得极小值 λ_1, 在 $\boldsymbol{P}_3$ 和 $\boldsymbol{P}_4$ 处取得极大值 λ_2. □

6. 解答: 令

$$L=x_1x_2\cdots x_n+\lambda\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}-\frac{1}{a}\right)$$

$$\begin{cases}L_{x_1}=x_2x_3\cdots x_n-\dfrac{\lambda}{x_1^2}=0\\ L_{x_2}=x_1x_3\cdots x_n-\dfrac{\lambda}{x_2^2}=0\\ \qquad\vdots\\ L_{x_n}=x_1x_2\cdots x_{n-1}-\dfrac{\lambda}{x_n^2}=0\\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{1}{a}\end{cases}$$

解得驻点 $\boldsymbol{P}(an,an,\cdots,an)$ 且 $\lambda=(an)^{n+1}$. 计算可知

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P})=\begin{pmatrix}-2(an)^{n-2} & (an)^{n-2} & \cdots & (an)^{n-2}\\ (an)^{n-2} & -2(an)^{n-2} & \cdots & (an)^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (an)^{n-2} & (an)^{n-2} & \cdots & -2(an)^{n-2}\end{pmatrix}=-3(an)^{n-2}+(an)^{n-2}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^{\mathrm{T}}$$

类似第 1 题可知 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P})$ 的特征值是 $-2(an)^{n-2},-3(an)^{n-2},\cdots,-3(an)^{n-2}$. 所有特征值为负, $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P})$ 负定, 所以 $u(\boldsymbol{P})=(an)^n$ 是极大值. □

7. 解答: 从约束条件不难推出 $0<x,y,z<\pi/2$, 令

$$w=\ln u=\ln \operatorname{gin} x+\ln\sin y+\ln\sin z$$

$$L(x,y,z)=w+\lambda\left(x+y+z-\frac{\pi}{2}\right)$$

解方程组

$$\begin{cases} L_x = \cot x + \lambda = 0 \\ L_y = \cot y + \lambda = 0 \\ L_z = \cot z + \lambda = 0 \\ x + y + z = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

解得驻点 $\boldsymbol{P}\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right)$. 又因为趋于边界时 $u \to 0$, 在内部 $u > 0$, 所以最大值在内部取到, 则 $u(\boldsymbol{P}) = 1/8$ 就是极大值. □

8. 解答: 令

$$L = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{a_i} - 1\right)$$

解方程组

$$\begin{cases} L_{x_i} = 2x_i + \dfrac{\lambda}{a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i} = 1 \end{cases}$$

解得驻点 $\boldsymbol{P}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 其中 $x_i = \dfrac{1}{a_i}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$. 由于

$$\mathrm{d}^2 u = \mathrm{d}^2 L = 2\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i^2 > 0$$

故 $u(\boldsymbol{P}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{a_i}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}\right]^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$ 是极小值. □

9. 解答: 先考虑 $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ 内的极值. 令

$$\begin{cases} u_x = 3x^2 - 2yz = 0 \\ u_y = 3y^2 - 2xz = 0 \\ u_z = 3z^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

解得驻点 $\boldsymbol{P} = (0, 0, 0)$, 且 $u(\boldsymbol{P}) = 0$. 再考虑边界 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上的条件最值. 令

$$L = x^3 + y^3 + z^3 - 2xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$\begin{cases} L_x = 3x^2 - 2yz + 2\lambda x = 0 & (1) \\ L_y = 3y^2 - 2xz + 2\lambda y = 0 & (2) \\ L_z = 3z^2 - 2xy + 2\lambda z = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (4) \end{cases}$$

通过 $yL_x = xL_y = zL_y = yL_z = xL_z = zL_x = 0$ 可得出

$$\begin{cases}(x-y)(3xy+2yz+2xz)=0 & (5)\\ (y-z)(3yz+2xz+2xy)=0 & (6)\\ (z-x)(3xz+2xy+2yz)=0 & (7)\end{cases}$$

考虑在 (5) 式中如果 $x=y$, 那么从 (6) 和 (4) 会得到

$$\begin{cases}(x-z)(5xz+2x^2)=0 & (8)\\ 2x^2+z^2=1 & (9)\end{cases}$$

1.1 考虑在 (8) 式中如果 $x=z$, 那么得到 $x=y=z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 此时得可疑值 $u(\boldsymbol{P}_1)=\frac{\sqrt{3}}{9}$.

1.2 如果 $x\neq z$ 且 $5xz+2x^2=0$:

1.2.1 如果 $x=0$, 那么 $x=y=0, z=\pm 1$, 此时可疑值 $u(\boldsymbol{P}_2)=1, u(\boldsymbol{P}_3)=-1$.

1.2.2 如果 $x\neq 0$, 则 $5z+2x=0$, 结合 (9) 可知 $z=\sqrt{\dfrac{2}{27}}, x=y=-\dfrac{5}{2}\sqrt{\dfrac{2}{27}}$, 得到可疑值 $u(\boldsymbol{P}_4)\approx 0.02$.

由对称性, 当 $y=z$ 和 $z=x$ 时我们都可以得到解析解, 且最大的可疑值是 1, 最小的可疑值是 -1. 因此惟一剩下的情况就是

$$\begin{cases}3xy+2yz+2xz=0 & (10)\\ 3yz+2xz+2xy=0 & (11)\\ 3xz+2xy+2yz=0 & (12)\end{cases}$$

两两联立得到 $xy=yz=zx=0$. 结合 (4) 不难求得所有解都是 x,y,z 其中两个为 0, 另一个为 ± 1, 此时可疑值都是 ± 1.

综上所述, u 的最大值是 1, 最小值是 -1. □

注: 本题数据疑似有误, 可对照周民强第三册 P154 例 4.2.3(2).

10. 解答: 先考虑内部, 令

$$\begin{cases}z_x=2x-y=0\\ z_y=2y-x=0\end{cases}$$

解得驻点 $\boldsymbol{P}(0,0)$, $z(\boldsymbol{P})=0$. 再考虑在每条边界线上, 令

$$L=x^2-xy+y^2-\lambda(x+y-1)$$

$$\begin{cases}L_x=2x-y-\lambda=0\\ L_y=2y-x-\lambda=0\\ |x|+|y|=1\end{cases}$$

解得驻点 $\boldsymbol{P}_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\boldsymbol{P}_2\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\boldsymbol{P}_3\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\boldsymbol{P}_4\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, 对应值为

$$z(\boldsymbol{P}_1)=z(\boldsymbol{P}_4)=\frac{1}{4}, z(\boldsymbol{P}_2)=z(\boldsymbol{P}_3)=\frac{3}{4}$$

最后, 考虑四条边界线的交点 (不可微处), 有 $z(0,1)=z(0,-1)=z(1,0)=z(-1,0)=1$. 比较所有点处的值后, 可知最大值是 1, 最小值是 0. □

11. 解答: 考虑函数 $u=\sum_{i=1}^{n}[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2]$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的极值. 令

$$L(x,y,z)=u-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

解方程组

$$\begin{cases} L_x=2\left[(n-\lambda)x-\sum_{i=1}^{n}x_i\right]=0 & (1)\\ L_y=2\left[(n-\lambda)y-\sum_{i=1}^{n}y_i\right]=0 & (2)\\ L_z=2\left[(n-\lambda)z-\sum_{i=1}^{n}z_i\right]=0 & (3)\\ x^2+y^2+z^2=1 & (4)\end{cases}$$

由 (1)(2)(3) 得

$$x=\frac{1}{n-\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad y=\frac{1}{n-\lambda}\sum_{i=1}^{n}y_i,\quad z=\frac{1}{n-\lambda}\sum_{i=1}^{n}z_i$$

代入 (4) 得

$$(n-\lambda)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}z_i\right)^2=N^2$$

其中 N 是确定的正数. 于是得

$$x'=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i, y'=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}y_i, z'=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}z_i$$

$$x''=-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i, y''=-\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{n}y_i, z''=-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}z_i$$

从而

$$\begin{aligned}u(x',y',z')&=\sum_{i=1}^{n}[(x'-x_i)^2+(y'-y_i)^2+(z'-z_i)^2]\\&=n(x'^2+y'^2+z'^2)-2x'\sum_{i=1}^{n}x_i-2y'\sum_{i=1}^{n}y_i-2z'\sum_{i=1}^{n}z_i+\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2+z_i^2)\end{aligned}$$

$$
= n - \frac{2}{N}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)^2\right] + \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)
$$

$$
= n - 2N + \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)
$$

同理可得

$$
u(x'', y'', z'') = n + 2N + \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) > u(x', y', z')
$$

由于函数 u 在闭球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上连续, 故必取得最大值和最小值, 因此 $u(x',y',z')$ 是最小值, $u(x'',y'',z'')$ 是最大值. □

12. 解答: 设曲线上的点为 (x,y), 自然有 $x \geqslant 0$, 则有

$$
d = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{x^3 + x^2 + 2x + 1} \geqslant 1
$$

注: 从几何上来看是显然的. □

13. 解答: 设三角形边长为 a,b,c, 周长为 l 是常值, 考虑在约束条件 $a+b+c=l$ 下 $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ 的条件最值 (这是由 Helen 公式得到的, 其中 $p = l/2$). 令

$$
L = p(p-a)(p-b)(p-c) + \lambda(a+b+c-l)
$$

求解

$$
\begin{cases}
L_a = -p(p-b)(p-c) + \lambda = 0 \\
L_b = -p(p-a)(p-c) + \lambda = 0 \\
L_c = -p(p-a)(p-b) + \lambda = 0
\end{cases}
$$

解得惟一驻点 $(l/3, l/3, l/3)$, 此时 S 取得最大值, 它是等边三角形. □

14. 解答: 考虑在约束条件 $a = \prod_{i=1}^{n} x_i$ 或 $\ln a = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$ 下 $u = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$ 的极值. 令

$$
L = u + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \ln a\right)
$$

解方程组

$$
\begin{cases}
L_{x_i} = -\dfrac{1}{x_i^2} + \dfrac{\lambda}{x_i} = 0 (i = 1, 2, \cdots, n) \\
a = \prod_{i=1}^{n} x_i
\end{cases}
$$

可得 $x_i = \lambda^{-1}$, 则驻点为 $\boldsymbol{P}(a^{1/n}, a^{1/n}, \cdots, a^{1/n})$, $u(\boldsymbol{P}) = na^{-1/n}$. 又因为在趋于边界时至少有一个 $x_i \to 0$, 则 $u > 1/x_i \to +\infty$. 因此, 函数 u 在内部取得最小值 $na^{-1/n}$. □

15. 解答: 设两段为 x 和 y, x 代表正方形周长, y 代表圆的周长, 依题意, 考虑 $S=S_1+S_2=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\frac{y^2}{4\pi}$ 在约束条件 $x+y=a$ 下的极值. 令

$$L=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\frac{y^2}{4\pi}-\lambda(x+y-a)$$

求解

$$\begin{cases} L_x=x/8-\lambda=0 \\ L_y=\dfrac{y}{2\pi}-\lambda=0 \\ x+y=a \end{cases}$$

解得驻点 $\boldsymbol{P}\left(\frac{4a}{\pi+4},\frac{\pi a}{\pi+4}\right)$. 比较边界端点 $(0,a)$ 和 $(a,0)$ 的值易知 $S(\boldsymbol{P})=\frac{a^2}{4(\pi+4)}$ 就是最大值. □

16. 解答: 在椭圆方程两边对 x 求导得

$$6x+(2xy'+2y)+6yy'=0$$

整理得斜率为 $y'=-\frac{3x+y}{x+3y}$, 从而在某点 (x_0,y_0) 处的切线方程为

$$y-y_0=-\frac{3x_0+y_0}{x_0+3y_0}(x-x_0)$$

截距为 $y_0+x_0\frac{3x_0+y_0}{x_0+3y_0}$ 和 $x_0+y_0\frac{x_0+3y_0}{3x_0+y_0}$. 不妨先考虑截距在第一象限的情形. 先考虑在第一象限, 此时问题转化为在约束条件 $3x^2+2xy+3y^2=1, x>0, y>0$ 下

$$S=\frac{1}{2}\left[xy+\frac{xy(x+3y)}{3x+y}+\frac{xy(3x+y)}{x+3y}+xy\right]$$

的最小值. 我们先考虑 xy 的最小值. 令

$$L=xy+\lambda(3x^2+2xy+3y^2-1)$$

$$\begin{cases} L_x=y+6\lambda x+2\lambda y=0 \\ L_y=x+6\lambda y+2\lambda x=0 \\ 3x^2+2xy+3y^2=1 \end{cases}$$

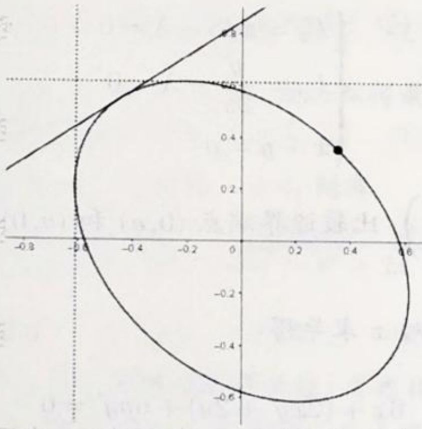
不难解得惟一解 $x=y=2^{-\frac{3}{2}}$, 此时 $xy=1/8$. 比较 $(1/3,4/9)$ 处 $S=4/27>1/8$ 可确定此时 xy 取到最小值.

于是有

$$S \geqslant \frac{1}{2} \cdot 4xy = 2xy \geqslant 1/4$$

等号在 $x = y = 2^{-\frac{3}{2}}$ 时取到.

而当考虑截距处于第二象限时, 观察到截距的绝对值必然都大于 $2^{-\frac{3}{2}}$, 所得三角形面积必然比之前求得的大.



由对称性, 截距在第三第四象限时的情形都是类似的, 我们不再加以讨论.

综上可知最小的三角形是由 $(0,0), (2^{-\frac{1}{2}}, 0), (0, 2^{-\frac{1}{2}})$ 构成的三角形. □

17. 解答: 考虑在约束条件 $(x-y)^2 + z^2 = 1$ 下 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值. 令

$$L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda[(x-y)^2 + z^2 - 1]$$

求解

$$\begin{cases} L_x = 2x + \lambda(2x - 2y) = 0 \\ L_y = 2y + \lambda(2y - 2x) = 0 \\ L_z = 2z + 2\lambda z = 0 \\ (x-y)^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

解得驻点 $\boldsymbol{P}_1(0,0,1), \boldsymbol{P}_2(0,0,-1), \boldsymbol{P}_3(1/2,-1/2,0), \boldsymbol{P}_4(-1/2,1/2,0)$. 对比知 $u(\boldsymbol{P}_3)$ 是其中值最小的, 此时 $\lambda = -1/2$, 检验知

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

半正定. 进一步检验

$$\mathrm{d}^2 L = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)^2 + \mathrm{d}z^2$$

对约束条件求微分得

$$(2x-2y)\mathrm{d}x+(2y-2x)\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z=0\Rightarrow \mathrm{d}z=(y-x)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$$

代入 d^2L 得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2L&=(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)^2+[(y-x)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y]^2\\&=[(x-y)^2+1]\mathrm{d}x^2-[2(x-y)^2-2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+[(x-y)^2+1]\mathrm{d}y^2\end{aligned}$$

在 P_3 处对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$$

正定. 所以 $u(\boldsymbol{P}_3)$ 是极小值也是最小值, 则最短距离是 $\sqrt{u(\boldsymbol{P}_3)}=\sqrt{2}/2$. □

18. 解答: 考虑在约束条件 $x^2-xy+y^2-z^2=1$ 和 $x^2+y^2=1$ 下 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的条件最值. 事实上由约束条件可以得到 $z^2=-xy\geqslant 0$, 从而

$$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{1-xy}\geqslant 1$$

并且在 $(1,0,0)$ 处可以取到等号. 所以最短距离是 1. □

19. 解答: 设外切三角形 ΔABC 三边长为 a,b,c, 各边上三个切点为 D,E,F, 记 $BD=BF=x,AE=AF=y,CD=CE=z$, 则有 $x+y=a,y+z=b,x+z=c$. 并记周长的一半为 p, 则有

$$p=\frac{1}{2}(2x+2y+2z)=x+y+z$$

由 Helen 公式有

$$S=\sqrt{p(p-x-y)(p-y-z)(p-z-x)}=\sqrt{(x+y+z)xyz}$$

又由内切圆的性质有

$$2S=sr=(x+y+z)r$$

于是有

$$\sqrt{(x+y+z)xyz}=(x+y+z)r\Rightarrow xyz=(x+y+z)r^2=Sr$$

$$\Rightarrow S=(x+y+z)r\geqslant 3\sqrt[3]{xyz}\cdot r=3\sqrt[3]{Sr}\cdot r\Rightarrow S\geqslant 3\sqrt{3}r^2$$

等号当且仅当 $x=y=z$ 时取到, 即 ΔABC 为等边三角形. □

20. 解答: 设 a,b,c,d 是给定边长, 一组对角和为 θ. 由著名的 Bretschneider 公式有

$$S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{\theta}{2}$$

(其中 $p=(a+b+c+d)/2$)

显然当 $\theta=\pi$ 时 S 取得最大值. 此时该四边形四顶点共圆.

21. 解答: 设四个顶点是 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),(x_4,y_4)$, 四边形内任意一点是 (x,y), 则

$$d=\sum_{i=1}^{4}[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]$$

$$=[4x^2-2(x_1+x_2+x_3+x_4)x+\sum_{i=1}^{4}x_i^2]+[4y^2-2(y_1+y_2+y_3+y_4)y+\sum_{i=1}^{4}y_i^2]$$

中括号内是开口向上的抛物线, 对称轴分别是 $\sum_{i=1}^{4}x_i/4$ 和 $\sum_{i=1}^{4}y_i/4$, 此时 d 可取最小值.

注: (1) 凸四边形的条件是用来保证所求得的点处于四边形内.

(2) 这个结论容易推广到 n 边形的情形.

22. 解答: 设椭圆为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 内接三角形的三个顶点为 A,B,C(逆时针排列), 则

$$2S=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2-x_1y_3-x_2y_1$$

令

$$L=x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2-x_1y_3-x_2y_1+\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\left(\frac{x_i^2}{a^2}+\frac{y_i^2}{b^2}-1\right)$$

求解

$$\begin{cases}L_{x_1}=y_2-y_3+2\lambda_1x_1/a^2=0\\ L_{x_2}=y_3-y_1+2\lambda_2x_2/a^2=0\\ L_{x_3}=y_1-y_2+2\lambda_3x_3/a^2=0\\ L_{y_1}=x_3-x_2+2\lambda_1y_1/b^2=0\\ L_{y_2}=x_1-x_3+2\lambda_2y_2/b^2=0\\ L_{y_3}=x_2-x_1+2\lambda_3y_3/b^2=0\\ \dfrac{x_i^2}{a^2}+\dfrac{y_i^2}{b^2}=1\end{cases}$$

解得驻点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ 满足 (事实上这等价于原点 O 为 A,B,C 的重心)

$$x_1+x_2+x_3=0,\quad y_1+y_2+y_3=0$$

且此时 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$, 而 S 可取最大值. 下面来求最大值:

设满足上述条件的三点为 $A(a\cos\alpha,b\sin\alpha),B(a\cos\beta,b\sin\beta),C(-a(\cos\alpha+\cos\beta)),$

$-b(\sin\alpha+\sin\beta)$. 由 C 在椭圆上可知

$$(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2=1\Rightarrow\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}\Rightarrow\sin(\alpha-\beta)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

由面积公式

$$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|=\frac{1}{2}|ab(\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta)|=\frac{\sqrt{3}}{4}ab$$

于是

$$S_{\Delta ABC}=3S_{\Delta AOB}=\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$$

再考虑任意一个顶点 (不妨假设是 A) 处的法线与所对的边正交, 事实上只要说明 A 点处切线斜率与所对的边斜率相同即可. 容易计算出 A 点处切线斜率为

$$k_A=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}=-\frac{b^2(x_2+x_3)}{a^2(y_2+y_3)}$$

另一方面

$$k_{BC}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$$

即证

$$\begin{aligned}-\frac{b^2(x_2+x_3)}{a^2(y_2+y_3)}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}&\Leftrightarrow b^2(x_3^2-x_2^2)+a^2(y_3^2-y_2^2)\\&\Leftrightarrow\frac{x_3^2-x_2^2}{a^2}+\frac{y_3^2-y_2^2}{b^2}=0\end{aligned}$$

最后一个等号是显然的, 这是因为 B 和 C 都在椭圆上. 至此结论证毕.

注 (1) 本题还可以继续推广. 事实上, 给定逆时针排列的 n 个点 $A_i(1\leqslant i\leqslant n)$, n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的面积表达式为

$$2S=\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2&y_2\\x_3&y_3\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix}x_n&y_n\\x_1&y_1\end{vmatrix}$$

仿照本题求条件极值的过程可知当

$$x_1+x_2\cdots+x_n=0,\quad y_1+y_2+\cdots+y_n=0$$

时椭圆内接 n 边形的面积最大, 最大值为 $\frac{1}{2}nab\sin\frac{2\pi}{n}$. (需要澄清的是这并不等价于原点是 n 边形的重心, 只有对三角形而言重心坐标才是各点坐标的算数平均值)

(2) 如若本题不使用条件极值, 也可分割内接多边形后使用 Jensen 不等式. □

23. 解答: 考虑在约束条件 $x^2+4y^2=4$ 下求

$$d^2=\frac{|3x+4y-12|^2}{5^2}=\frac{9x^2+24xy-72x+16y^2-96y+144}{25}$$

的最小值. 令

$$L=\frac{9x^2+24xy-72x+16y^2-96y+144}{25}+\lambda(x^2+4y^2-4)$$

求解

$$\begin{cases}L_x=\dfrac{18x+24y-72}{25}+4\lambda x=0\\ L_y=\dfrac{32y+24x-96}{25}+8\lambda y=0\\ x^2+4y^2=4\end{cases}$$

解得驻点 $\left(\pm\dfrac{6}{5},\pm\dfrac{4}{5}\right)$. 显然 d^2 最大值不存在且最小值存在, 故此时 d 能取最小值 $\dfrac{36}{25}$. □

24. 解答: 由对称性, 不妨只考虑截距都处于第一象限. 椭圆在 (x_0,y_0) 处的切线方程为

$$y-y_0=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$$

截距为 $OA=a^2/x_0$ 和 $OB=b^2/y_0$, 即求

$$AB^2=\frac{a^4}{x_0^2}+\frac{b^4}{y_0^2}$$

的最小值. 事实上由

$$a^2b^2=b^2x_0^2+a^2y_0^2\geqslant 2abx_0y_0\Rightarrow x_0y_0\leqslant ab/2$$

可推出

$$AB^2=\frac{a^4y_0^2+b^4x_0^2}{x_0^2y_0^2}\geqslant\frac{2a^2b^2}{x_0y_0}\geqslant\frac{2a^2b^2}{ab/2}=4ab$$

等号当 $x_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a, y_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}b$ 时可以取到. 此时有最小值 $AB=2\sqrt{ab}$. □

25. 解答: 设抛物线上两点为 (a,a^2) 和 (b,b^2), 在 (a,a^2) 处的法线方程为

$$y-a^2=2a(x-a)$$

由题意, 即考虑约束条件

$$2a\cdot\frac{b^2-a^2}{b-a}=2a(a+b)=-1\Rightarrow b=-\frac{2a^2+1}{2a}$$

下, 求

$$d^2=(b-a)^2+(b^2-a^2)^2=\frac{1}{16a^4}+4a^2+\frac{3}{4a^2}+3$$

的最小值. 我们令

$$\frac{\mathrm{d}(d^2)}{\mathrm{d}a}=\frac{(2a^2-1)(4a^2+1)^2}{4a^5}=0$$

即可解出当 $a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时 d 有最小值 $\frac{\sqrt{27}}{2}$. □

26. 解答: 当椭圆面积最小时一定与圆相切, 设切点 (x_0,y_0). 利用椭圆和圆在此交点处斜率相同可得

$$\begin{cases}-\dfrac{x_0-1}{y_0}=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_0}{y_0}\\ 1-(x_0-1)^2=b^2\left(1-\dfrac{x_0^2}{a^2}\right)\end{cases}$$

由第一式解得 $x_0=\frac{a^2}{a^2-b^2}$, 代入第二式得约束条件 $a^2-a^2b^2+b^4=0$. 令

$$L=\pi ab+\lambda(a^2-a^2b^2+b^4)$$

求解

$$\begin{cases}L_a=\pi b+2\lambda(a-ab^2)=0\\ L_b=\pi a+2\lambda(-a^2b+2b^3)=0\quad a^2-a^2b^2+b^4=0\end{cases}$$

得驻点 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, 此时椭圆面积最小为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$. □

27. 解答:

(1) 结论在第二十章 20.1.1 中

$$f''(x)=\frac{1}{F_y^3}(2F_xF_yF_{xy}-F_x^2F_{yy}-F_y^2F_{xx})$$

(2) 由于 $f(x_0)$ 是极值, 故必有

$$f'(x_0)=-\frac{F_x}{F_y}\Big|_{(x_0,y_0)}=0\Rightarrow F_x(x_0,y_0)=0\Rightarrow f''(x_0)=-\frac{F_{xx}(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$$

当 $F_y(x_0,y_0)$ 和 $F_{xx}(x_0,y_0)$ 同号时 $f''(x_0)<0$, 此时可知 $f(x_0)$ 是极大值; 当 $F_y(x_0,y_0)$ 和 $F_{xx}(x_0,y_0)$ 异号时 $f''(x_0)<0$, 此时可知 $f(x_0)$ 是极小值.

(3) 令 $F(x,y)=x^2+xy+y^2-27=0$, 求解

$$\begin{cases}F_x=2x+y=0\\ x^2+xy+y^2=27\end{cases}$$

可得驻点 $(3,-6)$ 和 $(-3,6)$. 再计算 $F_y(x_0,y_0)=2y_0+x_0, F_{xx}(x_0,y_0)=2$, 可知 $F_y(3,-6)$ 和 $F_{xx}(3,-6)$ 异号, $F_y(-3,6)$ 和 $F_{xx}(-3,6)$ 同号, 故 $(3,-6)$ 是极小值点, $(-3,6)$ 是极大值点. □

28. 解答: 当椭圆面积最大的时候一定与 ∂D 相切, 设切点 (x_0,y_0)(由对称性不妨设在第一象限), 类似第 26 题的方法可得

$$\begin{cases} -2x_0=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_0}{y_0} \\ -x_0^2+1=\sqrt{b^2\left(1-\dfrac{x_0^2}{a^2}\right)} \end{cases}$$

解得约束条件 $4a^4-4a^2+b^2=0$. 令

$$L=\pi ab+\lambda(4a^4-4a^2+b^2)$$

求解

$$\begin{cases} L_a=\pi b+\lambda(16a^3-8a)=0 \\ L_b=\pi a+2\lambda b=0 \\ 4a^4-4a^2+b^2=0 \end{cases}$$

解得驻点 $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, 此时椭圆面积最大为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi$. □

§21.6.2 参考题

第一组参考题

1. 解答:

(1) 令 $G(x,y,z)=F\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)$, 因为

$$(G_x,G_y,G_z)=\left(\frac{F_1}{z-c},\frac{F_2}{z-c},-\frac{(x-a)F_1+(y-b)F_2}{(z-c)^2}\right)$$

所以曲面上任意一点 $\boldsymbol{P}_0(x_0,y_0,z_0)$ 的法向量可取为

$$\boldsymbol{n}=\left(F_1(\boldsymbol{P}_0),F_2(\boldsymbol{P}_0),-\frac{(x_0-a)F_1(\boldsymbol{P}_0)+(y_0-b)F_2(\boldsymbol{P}_0)}{z_0-c}\right)$$

由此得到在 (a,b,c) 处的切平面方程为

$$F_1(\boldsymbol{P}_0)(a-x_0)+F_2(\boldsymbol{P}_0)(b-y_0)-\frac{(x_0-a)F_1(\boldsymbol{P}_0)+(y_0-b)F_2(\boldsymbol{P}_0)}{z_0-c}(c-z_0)=0$$

这说明曲面的切平面一定经过 (a,b,c).

(2) 简便起见, 我们记 $x-a=x_1, y-b=x_2, z-c=g(x_1,x_2)$, 则有 $F\left(\dfrac{x_1}{g},\dfrac{x_2}{g}\right)=0$, 记 $u=\dfrac{x_1}{g}, v=\dfrac{x_2}{g}$, 在方程两边分别对 x_1 和 x_2 求偏导得

$$\begin{cases} F_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+F_2\dfrac{\partial v}{\partial x_1}=0 \\ F_1\dfrac{\partial u}{\partial x_2}+F_2\dfrac{\partial v}{\partial x_2}=0 \end{cases}$$

题设 $z(x,y)$ 能被确定隐含了 F_1 和 F_2 不为 0, 从而上述方程组的系数行列式为 0, 即

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v}{\partial x_2} \end{vmatrix}=0 \qquad (1)$$

再计算得

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{1}{g}-\frac{x_1}{g^2}\frac{\partial g}{\partial x_1},\quad \frac{\partial u}{\partial x_2}=-\frac{x_2}{g^2}\frac{\partial g}{\partial x_2},\quad \frac{\partial v}{\partial x_1}=-\frac{x_1}{g^2}\frac{\partial g}{\partial x_1},\quad \frac{\partial v}{\partial x_2}=\frac{1}{g}-\frac{x_2}{g^2}\frac{\partial g}{\partial x_2}$$

代入 (1) 式可得

$$\frac{1}{g^2}-\frac{1}{g^3}\left(x_1\frac{\partial g}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)=0 \Rightarrow x_1\frac{\partial g}{dx_1}+x_2\frac{\partial g}{\partial x_2}=g$$

两边再对 x_1 和 x_2 分别求偏导可得 '

$$\begin{cases} x_1\dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}+x_2\dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2}=0 \\ x_1\dfrac{\partial g}{\partial x_1\partial x_2}+x_2\dfrac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}=0 \end{cases}$$

同理可知系数行列式为 0, 即

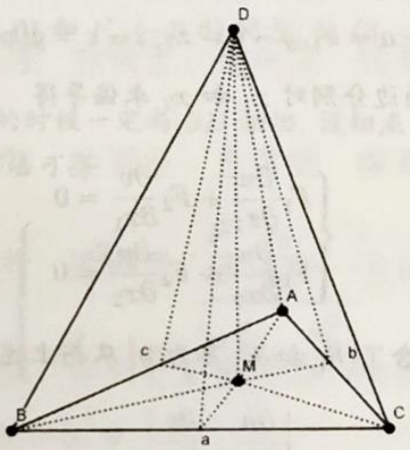
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}-\left(\frac{\partial g}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2=0$$

由于

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

显然命题已经得证. □

2. 解答: 设顶点在三角形中的投影为 $\boldsymbol{M}$, 其到 a,b,c 三边的距离分别是 x,y,z, 则



设三角形面积为 S, 则有限制条件

$$ax+by+cz=2S$$

(由于 a,b,c 确定, 则 S 也是定值) 而目标函数为侧面积

$$S_{侧}=\frac{1}{2}\left(a\sqrt{h^2+x^2}+b\sqrt{h^2+y^2}+c\sqrt{h^2+z^2}\right)$$

令

$$L=\frac{1}{2}\left(a\sqrt{h^2+x^2}+b\sqrt{h^2+y^2}+c\sqrt{h^2+z^2}\right)+\lambda(ax+by+cz-2S)$$

求解

$$\begin{cases}L_x=\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}+a\lambda=0\\ L_y=\dfrac{b}{2}\cdot\dfrac{y}{\sqrt{h^2+y^2}}+b\lambda=0\\ L_z=\dfrac{c}{2}\cdot\dfrac{z}{\sqrt{h^2+z^2}}+c\lambda=0\\ ax+by+cz=2S\end{cases}$$

解得驻点 $\left(\dfrac{2S}{3(a+b+c)},\dfrac{2S}{3(a+b+c)},\dfrac{2S}{3(a+b+c)}\right)$, 此时 $S_{侧}$ 达到最小值, 该棱锥为正三棱锥. □

3. 解答: 直接计算得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2u}{\partial \boldsymbol{l}^2}=&\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{l}}(u_x\cos\alpha+u_y\cos\beta+u_z\cos\gamma)\\ =&u_{xx}\cos^2\alpha+u_{yy}\cos^2\beta+u_{zz}\cos^2\gamma\\ &+2u_{xy}\cos\alpha\cos\beta+2u_{xz}\cos\alpha\cos\gamma+2u_{yz}\cos\beta\cos\gamma\end{aligned}$$ □

4. 解答: 记 $\boldsymbol{l}_1=(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{l}_2=(b_1,b_2,b_3),\boldsymbol{l}_3=(c_1,c_2,c_3)$. 由题意可知

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

是一个正交矩阵. 因此也满足

$$a_i^2+b_i^2+c_i^2=1,\qquad i=1,2,3$$

$$a_ia_j+b_ib_j+c_ic_j=0,\qquad 1\leqslant i\neq j\leqslant 3$$

(1)(2) 计算可知

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}_3}\right)^2=&\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\\&+\left(a_3^2+b_3^2+c_3^2\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\\&+2\left(a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3\right)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\\&+2\left(a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1\right)\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}\\=&\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{l}_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{l}_3^2}=&\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(a_3^2+b_3^2+c_3^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\\&+2\left(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\left(a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\\&+2\left(a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\\=&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\end{aligned}$$

(3) 由第 (1) 问可以得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

类似练习题 19.2.4 第 7 题可知 $f(x,y,z)\equiv C$.

注: 本题容易推广至 n 维情形. □

5. 解答: 只证 (1), (2) 类似.

构造 $F(t)=f(\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))$. 注意到当 $0<t\leqslant 1$ 时对 $\forall \boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{x}_0)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$ 有

$$F'(t)=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\nabla f(\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))=\frac{\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0}{t}\nabla f(\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))<0$$

由 $F(t)$ 在 $t=0$ 处的连续性可知

$$f(\boldsymbol{x})=F(1)<F(0)=f(\boldsymbol{x}_0)$$

所以 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 的一个极大值点. □

6. 解答: 构造 $F(t)=f(\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)), 0\leqslant t\leqslant 1$. 对 $\forall \boldsymbol{x}\in O_{\delta_0}(\boldsymbol{x}_0)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$ 有

$$F'(t)=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\nabla f(\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))$$

$$F''(t)=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{T}}$$

由 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)$ 正定及连续性可知存在 $\delta'\in(0,\delta_0)$ 使得当 $t\in(0,\delta')$ 时有 $F''(t)>0$. 又 $F'(0)=0$, 故当 $t\in(0,\delta')$ 时有 $F'(t)>F'(0)=0$. 取 $\delta=\delta'\delta_0<\delta_0$, 令 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\in O_\delta(\boldsymbol{x}_0)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$, 则有

$$(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0)\nabla f(\boldsymbol{y})=\frac{F'(t)}{t}>0$$

注意 $\boldsymbol{y}$ 的任意性 (即对 $\boldsymbol{y}\in O_\delta(\boldsymbol{x}_0)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$ 都能找到 $t\in(0,\delta')$ 和 $\boldsymbol{x}\in O_{\delta_0}(\boldsymbol{x}_0)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$ 使得 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$) 从而命题得证. □

7. 解答: 考虑函数 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^n x_i^q$ 在条件 $\sum\limits_{i=1}^n a_ix_i=c$ 下的极值. 为此, 设

$$G(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n x^q+\lambda\left(\sum_{i=1}^n a_ix_i-c\right)$$

由题意 $p>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ 知 $q>1,1+\dfrac{1}{q-1}=p$. 求解

$$\begin{cases}G_{x_i}=qx_i^{q-1}+\lambda a_i=0, & i=1,2,\cdots,n\\ G_\lambda=\sum\limits_{i=1}^n a_ix_i-c=0\end{cases}$$

可得

$$0=qx^q+\lambda a_ix_i, q\sum_{i=1}^n x_i^q=-\lambda\sum_{i=1}^n a_ix_i=-\lambda c\Rightarrow\sum_{i=1}^n x_i^q=-\frac{\lambda c}{q}$$

再由 $qx_i^{q-1}=-\lambda a_i$, 得 $x_i=\left(-\dfrac{\lambda a_i}{q}\right)^{\frac{1}{q-1}}$, 又有

$$c=\sum_{i=1}^n a_ix_i=\sum_{i=1}^n\left(-\frac{\lambda}{q}\right)^{\frac{1}{q-1}}a_i^{1+\frac{1}{q-1}}=\left(-\frac{\lambda}{q}\right)^{\frac{1}{q-1}}\sum_{i=1}^n a_i^p$$

解得

$$-\frac{\lambda}{q}=\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p}\right]^{q-1}=\left[c\Big/\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right]^{q-1}$$

因此有

$$x_i=\left(a_i\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p}\right]^{q-1}\right)^{\frac{1}{q-1}}=a_i^{\frac{1}{q-1}}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p}=a_i^{\frac{1}{q-1}}\frac{c}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p}$$

再由

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2}=q(q-1)x_i^{q-2},\quad \frac{\partial^2 G}{\partial x_i\partial x_j}=0,\quad i\neq j,\quad i,j=1,2,\cdots,n$$

知

$$\mathrm{d}^2G(x_1,x_2,\cdots,x_n)=q(q-1)\sum_{i=1}^{n}x^{q-2}\mathrm{d}x_i^2>0$$

故当 $x_i=a_i\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p}=\frac{a_i^{\frac{1}{q-1}}c}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p}$ 时, 函数在 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i=c$ 下有惟一的极小值, 也是最小值, 即

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^q=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant g\left[a_1^{\frac{1}{q-1}}\frac{c}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p},\cdots,a_n^{\frac{1}{q-1}}\frac{c}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p}\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(a_j^{\frac{1}{q-1}}\frac{c}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p}\right)^q=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i\right)^q}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p\right)^q}\sum_{j=1}^{n}a_j^{\frac{q}{q-1}}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right)^q\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1-q}$$

于是就得到

$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^q\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

注: 其他证法参见徐森林上册第 406 题. □

8. 解答: 令

$$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)-\lambda\left(x^2+y^2+z^2-1\right)$$

求解

$$\begin{cases} L_x = 2Ax + 2Fy + 2Ez - 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2Fx + 2By + 2Dz - 2\lambda y = 0 \\ L_z = 2Ex + 2Dy + 2Cz - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

可解得 $f(x,y,z) = \lambda$, 而从前三式中可以看出 λ 是

$$\begin{pmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{pmatrix}$$

的特征值. 又 f 在有界闭集 $\{f(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 上连续, 故最大值和最小值存在, 则恰好是上述矩阵的最大特征值和最小特征值. □

9. 解答:

(1) 令 $F = |\boldsymbol{A}| + \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \left(H_i - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)$, 记 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij} 求解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a_{ij}} = A_{ij} - 2\lambda_i a_{ij} = 0, \quad i,j = 1,2,\cdots,n \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} = s_i - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

解得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} - 2\lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0$$

从而有惟一驻点

$$a_{ij} = \frac{A_{ij}}{2\lambda_i} = \frac{A_{ij} H_i}{|A|}$$

注意到当 $i \neq j$ 时

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \frac{H_j}{|A|} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0$$

即行向量两两正交.

(2) 由第 (1) 题的结论可知在驻点处有

$$|\boldsymbol{A}|^2 = |\boldsymbol{A}| \left| \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \right| = \begin{vmatrix} H_1 & & & \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} H_i$$

(3) 由第 (2) 问, 取 $H_i=\sum_{i=1}^{n} b_{ij}$, 则

$$|\boldsymbol{B}|^2 \leqslant \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}^2\right)$$

(4) 以三维空间为例, 上式中 $|\boldsymbol{B}|$ 代表以三个向量 $\boldsymbol{l}_1=(b_{11},b_{12},b_{13}),\boldsymbol{l}_2=(b_{21},b_{22},b_{23}),\boldsymbol{l}_3=(b_{31},b_{32},b_{33})$ 张成的平行六面体的体积, 而 $\prod_{j=1}^{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_{ij}^2}$ 表示的是由 $\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2,\boldsymbol{l}_3$ 模长构成的长方体的体积, 前者的体积比后者的小.

注: Hadamard 不等式还有许多其他证法, 参见《吉米多维奇学习指引》第三册习题 3674.

事实上还有更一般的命题: 如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 正定, 则有 $|\boldsymbol{A}| \leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

在命题中取 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 正定 (如果 $\boldsymbol{B}$ 有零特征值结论平凡), 则得到 Hadamard 不等式.

下面介绍证明这个命题的几种方法:

证法一: 由 $\boldsymbol{A}$ 正定, 知存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\operatorname{diag}\left\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right\}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

由于 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵, 故

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij}^2=1, j=1,2,\cdots,n$$

从而由 $-\ln x$ 的凸性和 Jensen 不等式可得

$$a_{ii}=\lambda_1 p_{i1}^2+\lambda_2 p_{i2}^2+\cdots+\lambda_n p_{in}^2 \geqslant \lambda_1^{p_{i1}^2}\lambda_2^{p_{i2}^2}\cdots\lambda_n^{p_{in}^2}$$

将 a_{ii} 相乘即证命题.

证法二: 由 $\boldsymbol{A}$ 正定知 $a_{ii}>0, n=1,2,\cdots,n$, 令

$$\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{11}}},\frac{1}{\sqrt{a_{22}}},\cdots,\frac{1}{\sqrt{a_{nn}}}\right)$$

则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 对角线元素均为 1, 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的 n 个特征值, 则

$$|\boldsymbol{B}|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i \leqslant \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}{n}\right)^n=\left(\frac{\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})}{n}\right)^n=1$$

又

$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{P}||\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{P}^{T}\right|=|\boldsymbol{A}|\cdot\frac{1}{a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}}$$

易见 $|\boldsymbol{A}| \leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

证法三: 参见北四高代第五章补充题第 8 题第 (3) 问. □

10. 解答:

(1) 反证结论不成立, 记 D 为单位圆盘, 则必存在 $(x_0, y_0) \in D$ 使得 $u(x_0, y_0) < 0$, 因而 u 在 D 上的最小值必在 D 中的某点取到. 不妨设该点就是 (x_0, y_0), 则由题设条件可知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0, y_0) = u(x_0, y_0) < 0$$

这说明 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0, y_0)$ 中至少有一个为负. 不妨设 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, 这说明单变量函数 $u(x, y_0)$ 在 x_0 处取到严格极大值, 这与 $u(x_0, y_0)$ 是极小值矛盾.

(2) 对充分小的 $\varepsilon > 0$, 构造

$$\varphi(x, y) = u(x, y) - \varepsilon(e^x + e^y)$$

由题设可知它在 ∂D 上取正值, 而且有

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \varphi$$

由 (1) 的结论可知 $\varphi(x, y) \geqslant 0$, 因而

$$u(x, y) = \varphi(x, y) + \varepsilon(e^x + e^y) > 0$$

得证. □

11. 解答: 参见史济怀定理 14.23. □

12. 解答: 参见史济怀定理 14.26. □

第二组参考题

1. 解答: 考虑 f 沿单位向量 $\boldsymbol{l}$ 的变化率. 由 Taylor 公式有

$$f(\boldsymbol{p}_0 + t\boldsymbol{l}) - f(\boldsymbol{P}_0) = \frac{1}{2}\boldsymbol{l}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}t^2 + o(t^2)$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 为 f 在 $\boldsymbol{p}_0$ 处的 Hesse 矩阵. 即要考虑当 t 充分小时使得 $\boldsymbol{l}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}$ 最大时 $\boldsymbol{l}$ 的方向. 由第十八章第一组参考题第 6 题中的 Raylei 商引理可知

$$\frac{\boldsymbol{l}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}} \leqslant \lambda_{\max}$$

其中 $\lambda_{\max}$ 为 $\boldsymbol{Q}$ 的最大特征值. 并且只有当 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}} = \lambda_{\max}\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}$ 时等号成立, 即 f 在 $\boldsymbol{p}_0$ 处的函数值增长最快的方向位于 $\boldsymbol{Q}$ 的最大特征值对应的特征子空间中. 特别的, 当最大特征

值对应的特征子空间为一维空间时, 相应的方向就是 f 增长最快的方向. □

2. 解答: 取 Π 的法向量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{PQ}$ 正交, 则有

$$\boldsymbol{v}\cdot(x(b)-x(a),y(b)-y(a),z(b)-z(a))=0$$

由高维空间的中值定理可知存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\boldsymbol{v}\cdot(x'(\xi),y'(\xi),z'(\xi))=0$$

即 $(x'(\xi),y'(\xi),z'(\xi))$ 和 $\boldsymbol{v}$ 正交, 也即 $(x'(\xi),y'(\xi),z'(\xi))$ 与 Π 平行.

注: 这里使用的是高维 Rolle 定理 (命题 21.5.2) 的推广 (可称为高维 Lagrange 定理, 证明方法与低维完全相仿). □

3. 解答: 令 $\boldsymbol{g}(x)=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}(x)$, 则由题意可知

$$\boldsymbol{g}(a)=\boldsymbol{g}(b)=0$$

由命题 21.5.2 可知存在 $\xi_1\in(a,b)$ 使得 $\boldsymbol{g}'(\xi_1)=0$. 又因为 $\boldsymbol{g}'(a)=0$, 于是又存在 $\xi_2\in(a,\xi_1)$ 使得 $\boldsymbol{g}''(\xi_2)=0$. 往复进行下去最后可以得到 $\xi\in(a,\xi_k)\subset(a,b)$ 使得

$$\boldsymbol{g}^{(k)}(\xi)=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}^{(k)}(\xi)=0$$

即 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{f}^{(k)}(\xi)$ 正交. □

4. 解答: 设三个切点为 $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3),(z_1,z_2,z_3)$, 三个切面方程为

$$A_ix+B_iy+C_iz=\delta_i,i=1,2,3 \tag{2}$$

令 $F(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2-1$, 则

$$F_x=2ax,\quad F_y=2by,\quad F_z=2cz$$

从而曲面的切面方程为

$$2ax_ix+2by_iy+2cz_iz=\sigma_i \tag{2}$$

由于切点在曲面上, 即

$$ax_i^2+by_i^2+cz_i^2=1$$

将切点代入 (1) 可得 $\sigma_i=2$. 对比 (1)(2) 可知切面的法向量为

$$\boldsymbol{n}_i=\frac{1}{\delta_i}\begin{pmatrix}A_i\\B_i\\C_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax_i\\by_i\\cz_i\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_i\\y_i\\z_i\end{pmatrix}=\frac{1}{\delta_i}\begin{pmatrix}A_i/a\\B_i/b\\C_i/c\end{pmatrix} \tag{3}$$

把上式代入曲面方程可得

$$\frac{A_i^2}{a}+\frac{B_i^2}{b}+\frac{C_i^2}{c}=\delta_i^2$$

再设三个切面的交点是 (x_0,y_0,z_0), 则有

$$A_ix_0+B_iy_0+C_iz_0=\delta_i$$

从而

$$\sum_{i=1}^{3}(A_ix_0+B_iy_0+C_iz_0)^2=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{A_i^2}{a}+\frac{B_i^2}{b}+\frac{C_i^2}{c}\right)$$

由于 δ_i 具有任意性, 不妨令

$$\delta_i^2=\frac{1}{(ax_i)^2+(by_i)^2+(cz_i)^2}$$

则从 (3) 式可知

$$A_i^2+B_i^2+C_i^2=1$$

记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{pmatrix}$$

因为三个切面正交, 它们的法向量也正交, 而法向量模长都是 1, 因此实方阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个正交矩阵, 它的列向量也应互相正交且模长为 1. 于是

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2=\sum_{i=1}^{3}(A_ix_0+B_iy_0+C_iz_0)^2=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{A_i^2}{a}+\frac{B_i^2}{b}+\frac{C_i^2}{c}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

命题得证.

注: 本题的二维情形是一个中学解析几何的常见命题:

二次曲线 $ax^2+by^2=1$(当 $a,b>0$ 时就是椭圆) 的两条相互垂直的切线的交点位于圆 $x^2+y^2=1/a+1/b$ 上.

该命题的推广为: 与曲面 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i{}^2=1$ 相切的 n 个两两正交的超平面的交点位于球面 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}1/a_i$ 上. □

5. 解答: 曲面 Σ 在 (x_0,y_0,z_0) 处的法向量为 $(-f_x(x_0,y_0),-f_y(x_0,y_0),1)$, 任取曲面 Σ 上一点 (x_0,y_0), 则法线方程为

$$\frac{x-x_0}{-f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{-f_y(x_0,y_0)}=z-f(x_0,y_0)$$

又与 z 轴相交, 则有

$$\frac{x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y_0}{f_y(x_0,y_0)}$$

由于所取点具有任意性，这说明在曲面 Σ 上有 $xf_y=yf_x$.

令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，则 $z=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$

$$\begin{aligned}z_\theta&=-r\sin\theta f_x(r\cos\theta,r\sin\theta)+r\cos\theta f_y(r\cos\theta,r\sin\theta)\\&=-yf_x+xf_y=0\end{aligned}$$

这说明 $z=f(x,y)$ 只与 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 有关，所以 Σ 是一个旋转曲面. □

6. 解答：令 $F(a)=e^{a-1}+a\ln a-a^2$，则

$$F''(a)=e^{a-1}+\frac{1}{a}-2\geqslant 1+(a-1)+\frac{1}{a}-2\geqslant a+\frac{1}{a}-2\geqslant 0$$

故 $F'(a)$ 单调递增，而 $F'(1)=0$，所以 $F(a)$ 在 $(0,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增，又 $F(1)=0$，故恒有 $F(a)\geqslant 0$，如此我们就有

$$e^{a-1}+a\ln a+e^{b-1}+b\ln b\geqslant a^2+b^2\geqslant 2ab$$

不等式当且仅当 $a=b=1$ 时成立. □

7. 解答：

(1) 因为 $\mathrm{d}u=u_x\mathrm{d}x+v_x\mathrm{d}y,\mathrm{d}v=v_x\mathrm{d}x+v_y\mathrm{d}y$，所以有

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\left(v_x+v_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\left(u_x+u_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\tag{*}$$

记变换前两条曲线在交点处的切线斜率为 $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_1,\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_2$，变换后两条曲线在交点处的切线斜率为 $\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_1,\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_2$，要使交角相同即

$$\frac{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_2-\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_1}{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_1\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_2}=\pm\frac{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_2-\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_1}{1+\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_1\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_2}$$

在上式右端代入 (*) 式及条件 $u_x=v_y,u_y=-v_x$ 后可验证上式成立.

(2) 容易验证 $\eta_x=\xi_y,\eta_y=-\xi_x$，由 (1) 的结论可知此反演变换保角.

(3) 注意到

$$(\xi^2+\eta^2)(x^2+y^2)=1$$

设任一圆的方程为

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

则经过反演变换后方程转化为

$$A\xi+B\eta+C(\xi^2+\eta^2)+1=0$$

当 $C\neq 0$ 时上述方程表示圆, 当 $C=0$ 时上述方程表示直线.

(4)

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\\ -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$$

(5) 将两种情况都代入 (1) 中的交角公式验证, 第一种情况使式子右边取正号 (角度同向), 第一种情况使式子右边取负号 (保持反向).

8. 解答:

(1) 曲面间的夹角即交点处相应法线的夹角. 设反演变换前的曲面方程为

$$F_1(x,y,z)=G_1(x,y,z)=0$$

它们的法向量是 (F_{1x},F_{1y},F_{1z}) 和 (G_{1x},G_{1y},G_{1z}), 反演变换后两个曲面方程为 (反解 x,y,z 的表达式)

$$F_2(\xi,\eta,\zeta)=F_1\left(\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\frac{\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right)=0$$

$$G_2(\xi,\eta,\zeta)=G_1\left(\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\frac{\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right)=0$$

变换前后各偏导数的关系为

$$(F_{2\xi},F_{2\eta},F_{2\zeta})=(F_{1x},F_{1y},F_{1z})\boldsymbol{J},\qquad (G_{2\xi},G_{2\eta},G_{2\zeta})=(G_{1x},G_{1y},G_{1z})\boldsymbol{J}$$

其中

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\dfrac{\eta^2+\zeta^2-\xi^2}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2} & -\dfrac{2\xi\eta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2} & -\dfrac{2\xi\zeta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}\\ -\dfrac{2\eta\xi}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2} & \dfrac{\xi^2+\zeta^2-\eta^2}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2} & -\dfrac{2\eta\zeta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}\\ -\dfrac{2\zeta\xi}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2} & -\dfrac{2\zeta\eta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2} & \dfrac{\xi^2+\eta^2-\zeta^2}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}\end{pmatrix}$$

特别注意到一个性质

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}\boldsymbol{E}_3$$

设变换前曲面夹角 θ_1, 变换后曲面夹角 θ_2, 记 $\boldsymbol{\alpha}=(F_{1x},F_{1y},F_{1z}),\boldsymbol{\beta}=(G_{1x},G_{1y},G_{1z})$, 则有

$$\cos\theta_2 = \frac{(\boldsymbol{\alpha J})\cdot(\boldsymbol{\beta J})^{\mathrm{T}}}{\sqrt{(\boldsymbol{\alpha J})(\boldsymbol{\alpha J})^{\mathrm{T}}}\cdot\sqrt{(\boldsymbol{\beta J})(\boldsymbol{\beta J})^{\mathrm{T}}}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}}{\sqrt{\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}\cdot\sqrt{\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}}}$$

$$= \frac{\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}}{\sqrt{\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}}\cdot\sqrt{\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}}} = \cos\theta_1$$

这就证明了该反演变换保角.

注: 类似可证如此定义的 n 维反演变换都是保角的.

(2) 注意到

$$(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)(x^2+y^2+z^2)=1$$

设任一球面方程为

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$$

则经过反演变换后方程转化为

$$A\xi+B\eta+C\zeta+D(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+1=0$$

当 $D\neq 0$ 时上述方程表示球面, 当 $D=0$ 时上述方程表示平面.

注: 命题可以推广为: n 维球面经过 n 维反演变换后是一个 n 维球面或者是一个 $n-1$ 维超平面.

(3)

$$\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} & -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} & -\dfrac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ -\dfrac{2yx}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \dfrac{x^2+z^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} & -\dfrac{2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ -\dfrac{2zx}{(x^2+y^2+z^2)^2} & -\dfrac{2zy}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \dfrac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^6}\begin{vmatrix} y^2+z^2-x^2 & -2xy & -2xz \\ -2yx & x^2+z^2-y^2 & -2yz \\ -2zx & -2zy & x^2+y^2-z^2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

注: 最后的化简技巧和练习题 20.3.3 第 13 题类似, 还可以得知 n 维反演变换的 Jacobi 行列式为 $-(x^2+y^2+z^2)^{-n}$.

对比第 7 题和第 8 题可知, 在二维情形中, 保角变换 (在复变函数论中称之为共形映射) 和 Cauchy-Riemann 方程等价, 但在三维情形中并找不到类似的关系. 事实上, 从微分几何的角度来解释, 在三维情形中两个曲面之间的变换是保角变换的充要条件是第一基本形式成比例. □

第二十二章 重积分

§22.1.3 思考题

1. 解答: 与一元定积分类似.

前半问: 用 D^* 表示不连续点集, 则由题设 $D^*(f)$ 和 $D^*(g)$ 都是零测集, 从而 $D^*(f)\cup D^*(g)$ 是零测集, 而 $D^*(f\cdot g)\subset D^*(f)\cup D^*(g)$, 所以 $D^*(f\cdot g)$ 是零测集, 由命题 22.1.1 可知 $f\cdot g$ 可积.

后半问: 注意到 $D^*(f)=D^*(1/f)$, 显然 $1/f$ 可积. □

2. 解答: 前半问与练习题 10.1.3 第 6 题类似, 后半问的反例与练习题 10.1.3 第 2 题类似. □

3. 解答: 与练习题 10.1.3 第 4 题类似. □

4. 解答:

(1) 函数 f 在 $[-1,1]^2$ 中的四个点 $(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1)$ 上无定义. 但这 4 个点组成的集合为零面积集. 补充定义 f 在这 4 个点上的值 (取任意实数), f 在 $[-1,1]^2$ 上是有界的, 其不连续点集为上述 4 个点, 它是零面积集, 当然也是零测集, 所以 f 在 $[-1,1]^2$ 上可积.

(2) 函数 f 在抛物线的一段 $l=\{(x,x^2)|0\leqslant x\leqslant 1\}$ 上无定义. 由立体 22.1.1 可知 l 是零面积集, 于是可在 l 上补充定义 (取任意实数), 使 f 在 $[0,1]^2$ 上保持有界, 则 f 在 $[0,1]^2$ 上的不连续点集为 l, 它是零面积集, 当然也是零测集, 所以 f 在 $[0,1]^2$ 上可积. □

§22.1.4 练习题

1. 解答: 注意到

$$\max\{f,g\}=\frac{f+g+|f-g|}{2}$$

由 f 和 g 可知 $\max\{f,g\}$ 也是可积的. □

2. 解答: 由积分中值定理可知

$$\iint\limits_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\rho^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)\iint\limits_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\rho^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\rho^2 f(\xi,\eta)$$

其中点 (ξ,η) 处于圆盘 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\rho^2$ 内. 显然当 $\rho\to 0$ 时 $(\xi,\eta)\to\boldsymbol{p}_0$, 于是根据 f 的连续性可知

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\rho^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\rho\to 0}f(\xi,\eta)=f(\boldsymbol{p}_0)$$ □

3. 解答: 作变换 $x+y=u, y-x=v$ 或 $x=\dfrac{u+v}{2}, y=\dfrac{u-v}{2}$, 则有 $|J|=\dfrac{1}{2}$, 且 u 从 -1 变到 1, v 从 -1 变到 1, 于是

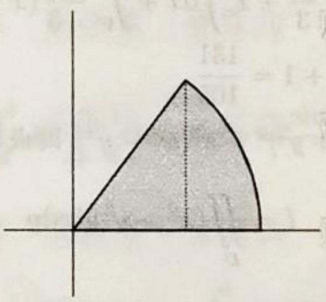
$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u=\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u \qquad \square$$

4. 解答: 作变换 $xy=u, y/x=v$, 则 D 变为 $D'=\{1\leqslant u\leqslant 2, 1\leqslant v\leqslant 4\}$, 且 $|J|=\dfrac{1}{2v}$,

$$\iint\limits_{D} f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{1}^{4}\frac{\mathrm{d}v}{2v}\int_{1}^{2}f(u)\mathrm{d}u=\ln 2\int_{1}^{2}f(u)\mathrm{d}u \qquad \square$$

§22.2.4 练习题

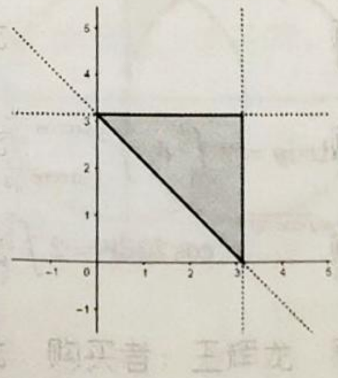
1. 解答: 积分区域如图所示



$$\begin{aligned}I&=\int_{0}^{R/\sqrt{1+R^2}}\mathrm{d}x\int_{0}^{Rx}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{R/\sqrt{1+R^2}}^{R}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_{0}^{R^2/\sqrt{1+R^2}}\mathrm{d}y\int_{y/R}^{R^2/\sqrt{1+R^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{0}^{R^2/\sqrt{1+R^2}}\mathrm{d}y\int_{R/\sqrt{1+R^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}x\end{aligned} \qquad \square$$

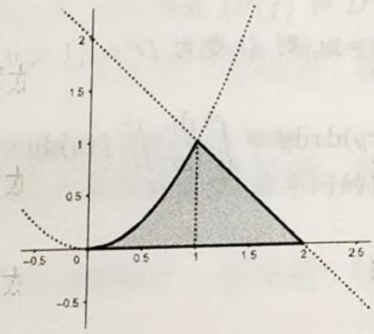
2. 解答: $\displaystyle\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x}^{1}f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{1}\mathrm{d}t\int_{0}^{t}f(t)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}tf(t)\mathrm{d}t$ $\square$

3. 解答: 积分区域如图所示



$$\iint_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi-x}\mathrm{d}y\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x=2$$

4. 解答: 积分区域如图所示

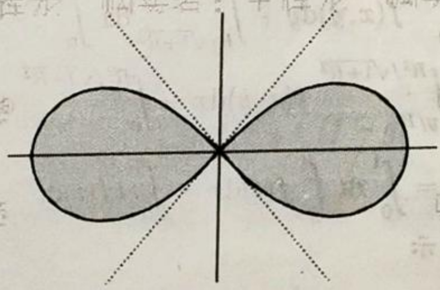


$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\left(\frac{x^6}{3}+x^4\right)\mathrm{d}x+\int_1^2-\frac{4}{3}\left(x^3-3x^2+3x-2\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{26}{105}+1=\frac{131}{105}\end{aligned}$$

5. 解答: 记 D 是双扭线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 围成的区域. 即求

$$I=\iint_D(x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

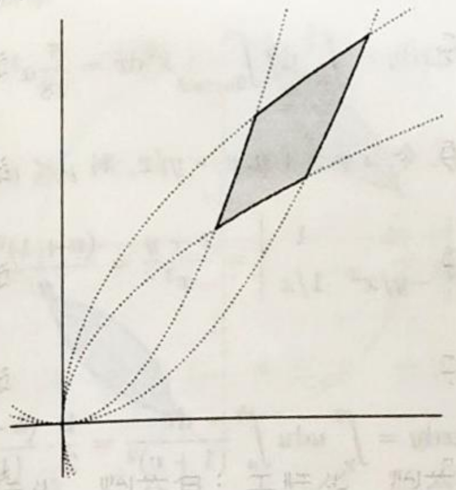
积分区域如图所示



令 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$, 则

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=2\int_0^a\mathrm{d}r\int_{-\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}}r^3\cos2\varphi\mathrm{d}\varphi\\&=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\sqrt{\cos2\varphi}}r^3\cos2\varphi\mathrm{d}r=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^4\cos^3 2\varphi}{4}\mathrm{d}\varphi=\frac{a^4}{3}\end{aligned}$$

6. 解答: 积分区域如图所示



令 $u=x^2/y, v=y^2/x$, 则 $xy=uv$, 区域变为 $D'=\{(u,v)|a\leqslant u\leqslant b, p\leqslant v\leqslant q\}$, 这时

$$|J^{-1}|=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} 2x/y & -x^2/y^2 \\ -y^2/x^2 & 2y/x \end{vmatrix}=3\Rightarrow |J|=\frac{1}{3}$$

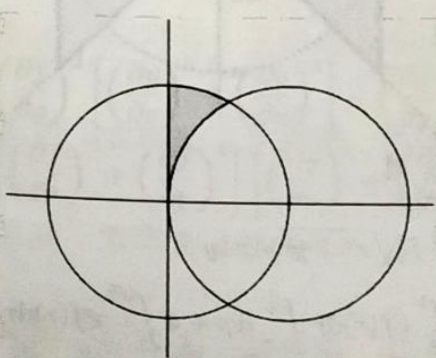
于是

$$\iint\limits_D \frac{x^2\sin xy}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}u\int_p^q\frac{1}{3}u\sin uv\mathrm{d}v=\frac{\sin bp-\sin ap}{3p}-\frac{\sin bq-\sin aq}{3q}\qquad\square$$

7. 解答: 交换积分次序可知

$$\begin{aligned}\int_a^b\mathrm{d}y\int_a^y(y-x)^nf(x)\mathrm{d}x&=\int_a^bf(x)\mathrm{d}x\int_x^b(y-x)^n\mathrm{d}y\\&=\int_a^bf(x)\left[\left.\frac{(y-x)^{n+1}}{n+1}\right|_x^b\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}\int_a^b(b-x)^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}\qquad\square$$

8. 解答: 积分区域如图所示



令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则

$$\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2a\cos\theta}^{a}r^2\mathrm{d}r=\frac{\pi}{18}a^3+\left(\sqrt{3}-\frac{16}{9}\right)a$$

□

9. 解答: 设围成区域为 D. 令 $u=x+y, v=y/x$, 则 $p\leqslant u\leqslant q, a\leqslant v\leqslant b$, 此时

$$\left|J^{-1}\right|=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -y/x^2 & 1/x\end{vmatrix}=\frac{x+y}{x^2}=\frac{(v+1)^2}{u}\Rightarrow|J|=\frac{u}{(1+v)^2}$$

于是

$$S=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_p^q u\mathrm{d}u\int_a^b\frac{\mathrm{d}v}{(1+v)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(b-a)\left(q^2-p^2\right)}{(1+a)(1+b)}$$

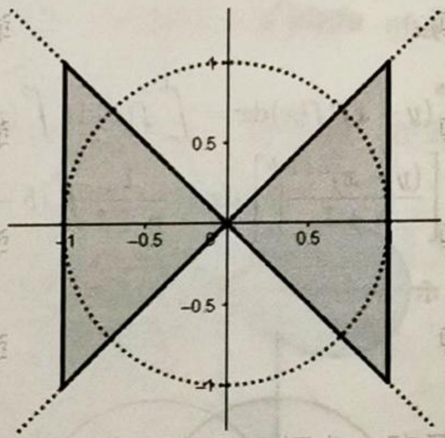
□

10. 解答: 设围成区域为 D. 令 $x=ar\cos^8\varphi, y=br\sin^8\varphi$, 则方程化为 $r=1, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$. 于是

$$\begin{aligned}S&=\iint\limits_{D}8abr\cos^7\varphi\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi=4ab\int_0^1u^7\left(1-u^2\right)^3\mathrm{d}u\\&=4ab\int_0^1\left(u^7-3u^9+3u^{11}-u^{13}\right)\mathrm{d}u=4ab\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{10}+\frac{1}{4}-\frac{1}{14}\right)=\frac{ab}{70}\end{aligned}$$

□

11. 解答: 积分区域如图所示

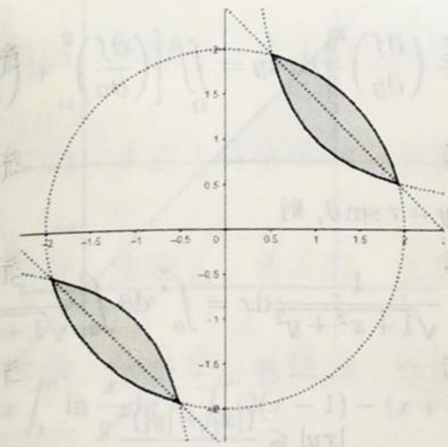


令 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$, 则

$$\begin{aligned}&\int_0^1 f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&2\int_0^1rf(r)\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi+4\int_1^{\sqrt{2}}rf(r)\mathrm{d}r\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\\=&\pi\int_0^1rf(r)\mathrm{d}r+\int_1^{\sqrt{2}}\left(\pi-4\arccos\frac{1}{r}\right)rf(r)\mathrm{d}r\end{aligned}$$

□

12. 解答: 积分区域如图所示



易解得四个交点坐标, 于是有

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{D} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\sqrt{2-\sqrt{3}}}^{\sqrt{2+\sqrt{3}}} \mathrm{d}x \int_{1/x}^{\sqrt{4-x^2}} x\mathrm{d}y + \int_{-\sqrt{2+\sqrt{3}}}^{-\sqrt{2-\sqrt{3}}} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{1/x} x\mathrm{d}y \\
&= \int_{\sqrt{2-\sqrt{3}}}^{\sqrt{2+\sqrt{3}}} (x\sqrt{4-x^2}-1)\mathrm{d}x + \int_{-\sqrt{2+\sqrt{3}}}^{-\sqrt{2-\sqrt{3}}} (x\sqrt{4-x^2}+1)\mathrm{d}x \\
&= \left(\int_{\sqrt{2-\sqrt{3}}}^{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \int_{-\sqrt{2+\sqrt{3}}}^{-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right) x\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x = 0
\end{aligned}
$$

注: 最后一步利用了定积分偶倍奇零的性质. □

13. 解答: 由题设有

$$
\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2
$$

$$
\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2
$$

二式相加可得

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\left[\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\left[\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right] \\
&= \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

另外有

$$
|J| = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2
$$

显然就有

$$\iint\limits_{D}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

得证. □

14. 解答: 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则

$$\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{4-y^2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^2\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pi$$ □

15. 解答: 由于

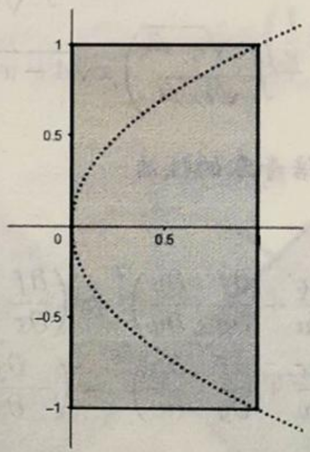
$$|xy|\leqslant\frac{(|x|+|y|)^2}{4}$$

故

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(\sqrt{|xy|}+|xy|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{4}\cdot 2=\frac{3}{2}$$

注: 最后一个等号是根据几何意义计算积分区域面积得到的. □

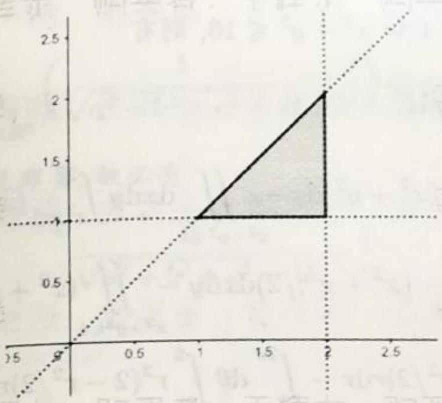
16. 解答: 积分区域如图所示



可将积分区域按 $x=y^2$ 进行分割, 于是

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}(x-y^2)\mathrm{d}y+2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-1}^{-\sqrt{x}}(y^2-x)\mathrm{d}y\\&=\frac{8}{15}+2\cdot\frac{1}{10}=\frac{11}{15}\end{aligned}$$ □

17. 解答: 积分区域如图所示



$$\iint\limits_D \ln\frac{x}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^x\ln\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y=\int_1^2[2(x-1)-(x+1)\ln x]\mathrm{d}x=\frac{11}{4}-4\ln 2 \qquad \square$$

§22.3.5 练习题

1. 解答:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}z\int_0^{1-z-x}(1-y)e^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}y\\
=&\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}\mathrm{d}z\int_0^{1-y-z}(1-y)e^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}x\\
=&\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}(1-y)(1-y-z)e^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}z\\
=&\int_0^1\frac{1}{2}(1-y)[1-e^{-(y-1)^2}]\mathrm{d}y=\frac{1}{4e}
\end{aligned} \qquad \square$$

2. 解答:

$$\int_0^2\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^0\mathrm{d}y\int_0^x f(x,y,z)\mathrm{d}z=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\mathrm{d}\rho\int_0^{\rho\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\mathrm{d}z \qquad \square$$

3. 解答: 旋转曲面方程为 $x^2+y^2=2z$, 由 $z=2$ 和 $z=8$ 截取部分在 Oxy 平面上的投

影分别为圆盘 $x^2+y^2\leqslant 4$ 和 $x^2+y^2\leqslant 16$, 则有

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
=&\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 16}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{8}(x^2+y^2)\mathrm{d}z-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{2}(x^2+y^2)\mathrm{d}z\\
=&\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 16}(x^2+y^2)(8-(x^2+y^2)/2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}(x^2+y^2)(2-(x^2+y^2)/2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4 r^2(8-r^2/2)r\mathrm{d}r-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2(2-r^2/2)r\mathrm{d}r\\
=&\frac{1024}{3}\pi-\frac{16}{3}\pi=336\pi
\end{aligned}$$

□

4. 解答: 积分区域可参考例题 22.3.1(取 $R=2$). 固定 z 时, 记

$$\Omega_1=\{(x,y):x^2+y^2=4-z^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$$
$$\Omega_2=\{(x,y):x^2+y^2=4z-z^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$$

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega}xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_1^2 z\mathrm{d}z\iint\limits_{\Omega_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{\Omega_2}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_1^2 z\mathrm{d}z\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{4-z^2}}r^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r\\
&\quad+\int_0^1 z\mathrm{d}z\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{4z-z^2}}r^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r\\
&=\frac{1}{8}\int_1^2 z(4-z^2)^2\mathrm{d}z+\frac{1}{8}\int_0^1 z(4z-z^2)^2\mathrm{d}z\\
&=\frac{1}{8}\cdot\frac{9}{2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{77}{30}=\frac{53}{60}
\end{aligned}$$

□

5. 解答: 记固定点为 (a,b,c). 由积分中值定理, 有

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r}&=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}\\
&=\frac{1}{\sqrt{(\xi-u)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3
\end{aligned}$$

其中 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2$. 显然函数 r 在球内最小的距离为 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R$, 最大值是 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R$, 并且只在一个点达到最小值, 也只在一个点达到最大值, 因此, 函数 $1/r$ 在球内最大值是 $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R}$, 最小值是 $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R}$, 并且只在一个点达到最小值, 也只在一个点达到最大值. 我们证明 r 的中值不是最大值也不是最小值, 事实上, 例如是最大值, 则

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R}-\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

但在球内被积函数连续且非负, 故必有

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R}=\frac{1}{r}$$

这是不可能的. 因此有

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R}<\frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}}<\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R}$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R<\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}<\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R$$

这说明

$$\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\xi-c)^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\theta R$$

其中 $|\theta|<1$. 于是

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r}=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{R^3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\theta R}$$ □

6. 解答: 球坐标变换后可知 $\varphi\in[0,\pi/2],\theta\in[0,\pi/2]\cup[\pi,3\pi/2]$, 代入曲面方程, 可得

$$\rho^2=a^2\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta$$

于是 $\rho\in[0,a\sin\varphi\sqrt{\cos\theta\sin\theta}]$. 由奇偶性

$$\begin{aligned}I&=\iiint\limits_{\Omega}\frac{xyz}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sin\varphi\sqrt{\cos\theta\sin\theta}}\rho^3\mathrm{d}\rho\\&=\frac{1}{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin^3\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{96}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3(2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{144}a^4\end{aligned}$$ □

7. 解答: 利用四维球坐标变换 (参考例题 22.3.5), 令

$$\begin{aligned}x&=r\cos\psi\\y&=r\sin\psi\cos\varphi\\z&=r\sin\psi\sin\varphi\cos\theta\\u&=r\sin\psi\sin\varphi\sin\theta\end{aligned}$$

此时

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z,u)}{\partial(r,\psi,\varphi,\theta)}\right| = r^3\sin^2\psi\sin\varphi$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}r^3\sin^2\psi\sin\varphi\mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\psi\mathrm{d}\psi\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}r^3\mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi^2}{16}\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}r^2\mathrm{d}r^2 = \frac{\pi^2}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t-\sin^2 t\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{16}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

注: 也可用双极坐标计算, 参见裴礼文 P901 例 7.2.37. □

8. 解答: 作球坐标变换得

$$\begin{aligned}
F(t) &= \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant x^2} f\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\mathrm{d}\psi\int_0^t f\left(r^2\right)r^2\mathrm{d}r = 4\pi\int_0^t f\left(r^2\right)r^2\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

于是 $F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2)$. 令 $t=1$ 得 $F'(1) = 4\pi$. □

9. 解答: 球坐标变换后可知 $\varphi\in[0,\pi/4], \theta\in[0,2\pi), \rho\in[2,4]$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Omega}\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \frac{\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z} \\
&= \frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi\int_2^4\rho^3\sin\varphi\mathrm{d}\rho}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi\int_2^4\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho} \\
&= \frac{\int_2^4\rho^3\mathrm{d}\rho}{\int_2^4\rho^2\mathrm{d}\rho} = \frac{45}{14}
\end{aligned}$$

□

10. 解答: 令 $u=xy, v=y/x, w=z$, 则 $1\leqslant u\leqslant 2, 3\leqslant v\leqslant 4, 0\leqslant w\leqslant x^2+y^2=uv+u/v$.

$$|J^{-1}| = \left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right| = \begin{vmatrix} y & x & 0 \\ -y/x^2 & 1/x & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = \frac{2y}{x} = 2v$$

$$I = \int_1^2\mathrm{d}u\int_3^4\mathrm{d}v\int_0^{uv+u/v}\frac{u^2w}{2v}\mathrm{d}w = \frac{983}{180}+\frac{31}{10}\ln\frac{4}{3}$$

□

11. 解答: 本章第一组参考题第 5 题的特例.

22.4.4 练习题

1. 解答:

(1) 由于被积函数是正的, 并且关于 Ox 轴和 Oy 轴都对称, 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}=4\left(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}\right)\left(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+y^q}\right)$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p\dfrac{1}{1+x^p}=1$, 故积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}$ 当 $p>1$ 时收敛, $p<1$ 时发散, $p=1$ 时显然也发散. 因此

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}=\begin{cases}\text{有限数}, & p>1\\ +\infty, & p\leqslant 1\end{cases},\quad \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^q}=\begin{cases}\text{有限数}, & q>1\\ +\infty, & q\leqslant 1\end{cases}$$

由此可知原积分当且仅当 $p>1,q>1$ 时收敛.

(2) 由对称性及被积函数的对称性

$$\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}=4\int\limits_{\substack{x\geqslant 0;y\geqslant 0\\ x+1\geqslant 1}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^\rho+y^q}=4\iint\limits_{\Omega_1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^\rho+y^q}+4\iint\limits_{\Omega_2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}$$

简记为 $I=I_1+I_2$. 其中

$$\Omega_1=\{(x,y)|x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\geqslant 1,x^p+y^q\leqslant 2\}$$
$$\Omega_2=\{(x,y)|x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\geqslant 1,x^p+y^q\geqslant 2\}$$

令 $\Omega_3=\{(x,y)|x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^p+y^q\geqslant 2\}$, 反证易知当 $x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^p+y^q\geqslant 2$ 时必有 $x+y\geqslant 1$. 故 $\Omega_2=\Omega_3$. 由于 Ω_1 是有界闭集, 故 I_1 不是广义积分, 因此 I_2 和 I_3 敛散性相同, 只需考虑 I_3 的敛散性. 在 I_3 中令 $x=r^{\frac{2}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\theta,\quad y=r^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}}\theta$, 则易知

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=\frac{4}{pq}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta$$

$$\iint\limits_{\Omega_3}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}=\frac{4}{pq}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}\mathrm{d}r$$

当 $p,q>0$ 时

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{q},\frac{1}{p}\right)$$

恒收敛. 而 $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}\mathrm{d}r$ 当 $\dfrac{2}{p}+\dfrac{2}{q}-3<-1$ 时收敛, 当 $\dfrac{2}{p}+\dfrac{2}{q}-3\geqslant -1$ 时发散.

综上可知, 原广义积分只有在 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}<1$ 时收敛.

(3) 记积分为 I. 先设 $p<1$, 令

$$\Omega_n=\{(x,y)|1\leqslant x+y\leqslant 2n\pi,-2n\pi\leqslant x-y\leqslant 2n\pi\}$$
$$\Omega_n'=\left\{(x,y)|1\leqslant x+y\leqslant 2n\pi-\frac{\pi}{4},-2n\pi\leqslant x-y\leqslant 2n\pi\right\}$$
$$\omega_n=\left\{(x,y)|2n\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x+y\leqslant 2n\pi,-2n\pi\leqslant x-y\leqslant 2n\pi\right\}$$

其中 $n=1,2,\cdots$. 显然有

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\Omega_n}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\Omega_n'}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\omega_m}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\Omega_n/\Omega_{n'}}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

令 $u=x+y,v=x-y$, 则 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=-\frac{1}{2}$, 得

$$\iint\limits_{\omega_n}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^\rho}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\int_{2\pi\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\mathrm{d}u\int_{-2n\pi}^{2\pi\pi}\frac{\cos v-\cos u}{u^p}\mathrm{d}v=-n\pi\int_{2n\pi}^{2\pi\pi}\frac{\cos u}{u^p}\mathrm{d}u$$

而

$$\int_{2\pi\pi-\frac{\pi}{4}}^{2\pi\pi}\frac{\cos u}{u^p}\mathrm{d}u\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{2\pi\pi\frac{\pi}{4}}^{2\pi\pi}\frac{\mathrm{d}u}{u^p}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{(2n\pi)^p}, & p>0\\ \dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}, & p\leqslant 0\end{cases}$$

由 $p<1$ 可知

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\omega_n}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\infty$$

矛盾.

又若 $p\geqslant 1$, 令

$$\omega_n'=\left\{(x,y)|2n\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x+y\leqslant 2n\pi,-2\pi n^{[p]+2}\leqslant x-y\leqslant 2\pi n^{[p]+2}\right\}$$

仿上应有

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\omega_n'}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

但令 $u=x+y,v=x-y$ 后有

$$\iint_{\Omega_n'}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi n^{[p]+2}\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\frac{\cos u}{u^p}\mathrm{d}u$$

但

$$\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\frac{\cos u}{u^p}\mathrm{d}u\geqslant\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{(2n\pi)^p}$$

可知

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\omega_n'}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\infty$$

矛盾.

综上可知, 原广义积分始终是发散的. □

2. 解答: 先假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 存在, 则 $\iint\limits_{D_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 一定存在上确界 M.

依定义, 对 $\forall\varepsilon>0,\exists N$ 使得

$$\iint\limits_{D_N}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>M-\varepsilon$$

于是对充分大的 $D_n\supset D_N$ 有

$$M-\varepsilon<\iint\limits_{D_N}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_{D_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant M<M+\varepsilon$$

则 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛且

$$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

反之, 若 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛, 则对任意 $D_n\subset D$, 存在 N 使得 $D_n\subset D_N\subset D$, 从而

$$0\leqslant\iint\limits_{D_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_{D_N}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<+\infty$$

由单调有界原理, $\lim\limits_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 存在且它的值为它的上确界 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. □

3. 解答:

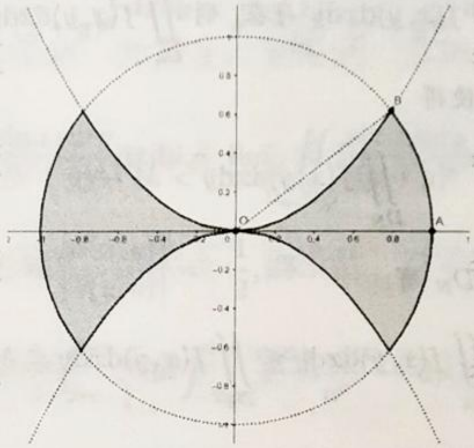
$$\begin{aligned}\iint\limits_{y\geqslant x^2+1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^4+y^2}&=2\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{x^2+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\arctan\frac{y}{x^2}\bigg|_{x^2+1}^{+\infty}\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x^2+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\arctan\frac{x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x\\&=-2\int_0^{+\infty}\arctan\frac{x^2}{x^2+1}\mathrm{d}\frac{1}{x}\end{aligned}$$

$$= -\frac{2}{x}\arctan\frac{x^2}{x^2+1}\bigg|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}}{1+\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$= 4\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2+x^4} = 4\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2x^4+2x^2+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$$

4. 解答:

(1) 积分区域如图所示



由极坐标变换有

$$\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = 4\int_0^{\alpha}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}^{1}\frac{\mathrm{d}r}{r} = 4\int_0^{\alpha}\ln\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

其中 α 是 $\angle AOB$ 的大小. 由于

$$\lim_{\theta\to0^+}\theta^{\frac{1}{2}}\ln\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} = \lim_{\theta\to0^+}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\cos\theta\cdot\frac{\ln\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}}{\left(\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

故积分 $\displaystyle\int_0^{\alpha}\ln\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta$ 收敛, 从而原积分收敛.

(2) 由极坐标变换有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^p} = \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(1+\dfrac{1}{2}\sin2\theta\right)^p}\int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-1}}$$

其中 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(1+\dfrac{1}{2}\sin2\theta\right)^p}$ 为常义积分而

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-1}} = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-p)}, & p<1 \\ +\infty, & p \geqslant 1 \end{cases}$$

由此可知当 $p<1$ 时原积分收敛, 当 $p \geqslant 1$ 时原积分发散.

注: 推广结论可见吉米多维奇第六册第 4182 题.

(3) 由极坐标变换有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1-x^2-y^2)^p} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \frac{r}{(1-r^2)^p}\mathrm{d}r = 2\pi \int_0^1 \frac{r\mathrm{d}r}{(1-r)^p(1+r)^p}$$

由于

$$\lim_{r\to 1^-} (1-r)^p \frac{r}{(1-r)^p(1+r)^p} = 2^{-p}$$

故 $\displaystyle\int_0^1 \frac{r\mathrm{d}r}{(1-r)^p(1+r)^p}$ 当 $p<1$ 时收敛, 当 $p \geqslant 1$ 时发散. 原积分也如此.

注: 推广结论可见吉米多维奇第六册第 4185 题. □

5. 解答: 记内层函数 $F(x) = \displaystyle\int_b^B \frac{\mathrm{d}y}{|f(x)-y|^p}, a \leqslant x \leqslant A$

(1)$p<1$ 时, 对每个固定的 $x \in [a,A]$, 如果 $f(x) \in [b,B]$, 此时 $F(x)$ 是瑕积分, 瑕点为 $f(x)$, 而由于 $p<1$, 故 $F(x)$ 收敛; 又如果 $f(x) \notin [b,B]$, 则 $F(x)$ 是常义积分. 总之 $F(x)$ 点点收敛. 可证 $F(x)$ 在 $[a,A]$ 上连续 (步骤过于冗长, 具体证明参见吉米多维奇第六册第 4186 题), 故可知 $\displaystyle\int_a^A F(x)\mathrm{d}x$ 总是收敛的.

(2)$p \geqslant 1$ 时, 对每个固定的 $x \in [a,A]$, 如果 $f(x) \in [a,b]$, 则因为 $p \geqslant 1$, 此时瑕积分 $F(x)$ 点点发散到正无穷, 则 $\displaystyle\int_a^A F(x)\mathrm{d}x$ 必然发散; 又如果 $f(x) \notin [a,b]$, 则 $F(x)$ 是常义积分. 此时 $|f(x)-y|^{-p}$ 在 $[b,B]$ 上关于 y 连续, 必然有最值, 设 $m \leqslant |f(x)-y|^{-p} \leqslant M, y \in [b,B]$ 则

$$\frac{1}{|f(x)-y|^p} = \frac{1}{|f(x)-y|^{p-0.5}} \cdot \frac{1}{|f(x)-y|^{0.5}} \leqslant \frac{M^{p-0.5}}{|f(x)-y|^{0.5}}$$

由 (1) 的结论及比较判别法就可知 $\displaystyle\int_a^A F(x)\mathrm{d}x$ 是收敛的. □

6. 解答:

(1) 由极坐标变换

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r\ln\frac{1}{r}\mathrm{d}r = -2\pi\int_0^1 r\ln r\mathrm{d}r$$

$$= -2\pi\left(\frac{r^2}{2}\ln r\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{r}{2}\mathrm{d}r\right) = \frac{\pi}{2}$$

(2) 令 $x=u+v, y=u-v$, 则 $|J|=-2$ 且积分区域 D' 为 $u=v, v=0, u+v=\pi$ 所围,

于是

$$\iint\limits_D \ln\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_D \ln\sin 2v\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}v\int_0^{\pi-v}\ln\sin 2v\mathrm{d}u$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\sin 2v\mathrm{d}v = 2\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\mathrm{d}v + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\sin v\mathrm{d}v$$

$$+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\cos v\mathrm{d}v$$

$$=\pi^2\ln 2 - \frac{\pi^2}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\sin v\mathrm{d}v + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2t\ln\sin t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi^2}{2}\ln 2 + 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin v\mathrm{d}v$$

$$=\frac{\pi^2}{2}\ln 2 + 2\pi\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right) = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2$$

注: 最后利用了例题 12.3.4 的结论. □

§22.5.4 练习题

1. 解答:

(1) 由题设可知

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

令 $u = a_1x + b_1y + c_1z, v = a_2x + b_2y + c_2z, w = a_3x + b_3y + c_3z$, 则 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \dfrac{1}{\Delta}$, 区域变为 $-h_1 \leqslant u \leqslant h_1, -h_2 \leqslant v \leqslant h_2, -h_3 \leqslant w \leqslant h_3$, 则所围立体体积为

$$V = \int_{-h_1}^{h_1}\mathrm{d}u\int_{-h_2}^{h_2}\mathrm{d}v\int_{-h_3}^{h_3}\frac{1}{|\Delta|}\mathrm{d}w = \frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}$$

(2) 记曲面围成区域为 Ω, 易知 $z \geqslant 0$ 且由对称性 (关于 yOz, zOx 平面对称) 和球坐标变换可知 (从 $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3z \Rightarrow r = a\sqrt[3]{\cos\varphi}$)

$$V = 4\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\sqrt[3]{\cos\varphi}} r^2\sin\varphi\mathrm{d}r = \frac{1}{3}\pi a^3$$

(3) 记曲面区域为 Ω, 令 $x = ar\sin\varphi\cos\theta, y = br\sin\varphi\sin\theta, z = cr\cos\varphi$, 则有

$$|J| = abcr^2\sin\theta$$

从
$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\Rightarrow r=\sin\varphi$$

由对称性可知
$$V=8\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=8\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sin\varphi}abcr^2\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{16}{9}$$

(4) 记曲面围成区域为 Ω, 球坐标后可从
$$(x^2+y^2)^2+z^4=z\Rightarrow r^3=\frac{\cos\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}$$

易知 $z\geqslant 0$, 由对称性 (关于 yOz, zOx 平面对称) 可知
$$V=4\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\left(\frac{\cos\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}\right)^{1/3}}r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{\pi^2}{6}$$ □

2. 解答:

(1) 由对称性, 只考虑第一卦限. 令 $x=r\cos\theta\sin\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\varphi$ 可得 $r^2=\sin^2\theta\cos2\varphi$, 于是曲面参数方程为
$$\begin{cases}x=\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\sqrt{\cos2\varphi}\\ y=\sin^2\theta\sin\varphi\sqrt{\cos2\varphi}\\ z=\sin\theta\cos\varphi\sqrt{\cos2\varphi}\end{cases}$$ □

计算得
$$E=\cos2\varphi, F=-\sin\theta\cos\theta\cos2\varphi, G=\sin^2\theta\left[\sin^2(2\varphi)+\sin^2\theta\cos^2(2\varphi)\right]/\cos2\varphi$$
$$\Rightarrow\sqrt{EG-F^2}=\sin^2\theta$$

区域为 $D=\{(\theta,\varphi):0<\theta<\pi/2, 0<\varphi<\pi/4\}$, 于是
$$S=8\iint\limits_{D}\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\iint\limits_{D}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi^2}{2}$$

(2) 令 $x=r\cos\theta\sin\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\varphi$ 可得 $r=\cos^3\varphi$, 曲面参数方程为
$$\begin{cases}x=\sin\varphi\cos^3\varphi\cos\theta\\ y=\sin\varphi\cos^3\varphi\sin\theta\\ z=\cos^4\varphi\end{cases}$$

计算得

$$E=\cos^6\varphi+9\sin^2\varphi\cos^4\varphi, F=0, G=\left(\cos^2\varphi+9\sin^2\varphi\right)\sin^2\varphi\cos^{10}\varphi$$

区域为 $D=\{(\theta,\varphi):0<\theta<2\pi,0<\varphi<\pi/2\}$, 于是

$$S=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\cos^2\varphi+9\sin^2\varphi\right)\sin^2\varphi\cos^{10}\varphi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=\frac{313}{560}\pi \quad \square$$

(3) 由于上半旋转面方程为 $z=\sqrt{f^2(x)-y^2}$, 因此

$$z_x=\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}, z_y=\frac{-y}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}\Rightarrow\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{\frac{f^2(x)+f^2(x)f'^2(x)}{f^2(x)-y^2}}$$

于是

$$\begin{aligned}S&=2\int_a^b\mathrm{d}x\int_{-f(x)}^{f(x)}\sqrt{\frac{f^2(x)+f^2(x)f'^2(x)}{f^2(x)-y^2}}\mathrm{d}y\\&=4\int_a^b\mathrm{d}x\int_0^{f(x)}f(x)\sqrt{\frac{1+f'^2(x)}{1-y^2f^{-2}(x)}}\mathrm{d}\left(yf^{-1}(x)\right)\\&=4\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-t^2}}\\&=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f^2(x)}\mathrm{d}x\end{aligned} \quad \square$$

3. 解答: 抛物面壳 Σ 在 xOy 平面内的投影区域为 $D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 2\}$, 而

$$z_x=x, z_y=y\Rightarrow\mathrm{d}S=\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故

$$\begin{aligned}M&=\iint_\Sigma z\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^2\sqrt{1+r^2}r\mathrm{d}r\xlongequal{r^2=t}\pi\int_0^2 t\sqrt{1+t}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^2(1+t-1)(1+t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1+t)\\&=\frac{\pi}{2}\int_1^3\left(u^{\frac{3}{2}}-u^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_1^3=\frac{2}{15}\pi(6\sqrt{3}+1)\end{aligned} \quad \square$$

4. 解答: 以圆盘所在平面建立 xOy 坐标系, 再以细棒所在的一边为 z 轴, 由对称性可知 $F_x=F_y=0$. 在圆盘上任取一点 $(x,y,0)$ 作代表点, 在此处取一任意小的面积元 $\mathrm{d}S$, 则质量为 $\mu\mathrm{d}S$. 在细棒上任取一点 $(0,0,z)$ 为代表点, 在此处取一任意小的长度元 $\mathrm{d}s$, 质

量为 ρds. 根据万有引力公式, 圆盘对细棒的引力的 z 分量为

$$dz = \frac{G\mu dS\rho ds(0-z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

记圆盘所占区域为 A, 细棒所占为 B, 记 $\Omega = A\times B$, 则

$$\begin{aligned}F_z &= \iiint\limits_{\Omega} \frac{G\mu dS\rho ds(0-z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\\ &= -G\mu\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R rdr\int_a^{a+l}\frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}}dz\\ &= 2\pi G\mu\rho\left[\sqrt{R^2+(a+l)^2}-\sqrt{R^2+a^2}-l\right]\end{aligned}$$

□

其中 G 为引力常量.

5. 解答: 记大圆区域为 $S_1 = \{(x,y): x^2+y^2\leqslant a^2\}$, 小圆区域为 $S_2 = \{(x,y): (x-a/2)^2 + y^2 \leqslant a^2/4\}$, $S = S_1 - S_2$, 由题意密度函数 $\mu(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, 则

$$\begin{aligned}M(0) &= \iint\limits_S \mu(x,y)dxdy = \iint\limits_{S_1-S_2}\sqrt{x^2+y^2}dxdy\\ &= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2dr - \int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{a\cos\theta}r^2dr\\ &= \frac{2}{3}a^3 - \frac{4}{9}a^3 = \frac{2}{9}a^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_x(1) &= \iint\limits_S x\mu(x,y)dxdy = \iint\limits_{S_1-S_2}x\sqrt{x^2+y^2}dxdy\\ &= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^3\cos\theta dr - \int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{a\cos\theta}r^3\cos\theta dr\\ &= -\frac{4}{15}a^4\end{aligned}$$

故

$$X_c = \frac{M_x(1)}{M(0)} = -\frac{6}{5}a$$

并且由对称性可知 $Y_c = 0$, 故重心坐标为 $\left(-\frac{6}{5}a, 0\right)$. □

6. 解答: 反证重心 $\boldsymbol{P}_0$ 不在凸形物体 Ω 内部, 记 $\boldsymbol{x}_0 = \overrightarrow{\boldsymbol{OP}_0}$, 则存在一个超平面分离 $\{\boldsymbol{x}_0\}$ 和 Ω, 或者存在 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n$ 使得

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} < \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0, \forall \boldsymbol{x}\in\Omega$$

(这是凸集的可分离性质, 也是 Hahn-Banach 定理的几何形式, 具体详情参见 Brezis 第一章引理 1.3)

不妨设 $M(0)=\int\limits_{\Omega}\rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=1$, 记 $M_{\boldsymbol{x}}(1)=(M_{x_1}(1),M_{x_2}(1),\cdots,M_{x_n}(1))$, 则

$$\boldsymbol{x}_0=\frac{M_{\boldsymbol{x}}(1)}{M(0)}=\int\limits_{\Omega}\boldsymbol{x}\rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

而

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\int\limits_{\Omega}\boldsymbol{x}\rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int\limits_{\Omega}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}<\int\limits_{\Omega}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0\rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0$$

导致矛盾. 因此重心 $\boldsymbol{P}_0$ 一定在凸形物体 Ω 内部. □

7. 解答: 当 $m=1$ 时不等式显然成立. 现在假设 $m=n$ 时不等式成立, 即当 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}=1$ 时成立

$$\iint\limits_{\Omega}u_1\cdots u_n\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\|u_1\|_{p_1}\cdots\|u_n\|_{p_n}$$

则当 $m=n+1$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n+1}\frac{1}{p_i}=1$ 时

$$\iint\limits_{\Omega}u_1\cdots u_{n-1}(u_nu_{n+1})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\|u_1\|_{p_1}\cdots\|u_nu_{n+1}\|_{\frac{1}{p_n^{-1}+p_{n+1}^{-1}}}$$

又由 Hölder 不等式有

$$\iint\limits_{\Omega}|u_nu_{n+1}|^{\frac{1}{p_n^{-1}+p_{n+1}^{-1}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\|u_n^{\frac{1}{p_n^{-1}+p_{n+1}^{-1}}}\|_{\frac{p_n+p_{n+1}}{p_{n+1}}}\|u_{n+1}^{\frac{1}{p_n^{-1}+p_{n+1}^{-1}}}\|_{\frac{p_n+p_{n+1}}{p_n}}$$

$$=\|u_n\|_{p_n}^{\frac{1}{p_n^{-1}+p_{n+1}^{-1}}}\|u_{n+1}\|_{p_{n+1}}^{\frac{1}{p_n^{-1}+p_{n+1}^{-1}}}$$

可推出

$$\|u_nu_{n+1}\|_{\frac{1}{p_n^{-1}+p_{n+1}^{-1}}}\leqslant\|u_n\|_{p_n}\|u_{n+1}\|_{p_{n+1}}$$

于是就得到了

$$\iint\limits_{\Omega}u_1\cdots u_{n+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\|u_1\|_{p_1}\cdots\|u_n\|_{p_{n+1}}$$

由数学归纳法原不等式得证. □

8. 解答:

$$\int_a^b\mathrm{d}x\left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]^2=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_d^c\mathrm{d}y\int_a^b\left[f(x,y)\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\overset{\text{Cauchy}}{\leqslant}\int_c^d\left[\int_a^b f^2(x,y)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\left\{\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y$$

整理即有
$$\left\{\int_a^b dx\left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]^2\right\}^{1/2}\leqslant\int_c^d\mathrm{d}y\left[\int_a^b f^2(x,y)\mathrm{d}x\right]^{1/2}$$
□

原不等式得证.

22.6.2 参考题

第一组参考题

1. 解答: 我们证明 $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 内的有理点和无理点 (x_0,y_0) 处都连续.

此时 $f(x_0,y_0)=0$. 对任给的 $\varepsilon>0$, 不大于 $2/\varepsilon$ 的正整数只有有限个, 故使得 $1/q_x\geqslant\varepsilon/2$

以及 $1/q_y\geqslant\varepsilon/2$ 的有理数 $x=p_x/q_x$ 和 $y=p_y/q_y$ 也只有有限个, 取 (x_0,y_0) 附近充分

小的邻域, 可使得这有限个点都在邻域外, 而在邻域内的任意点 (x,y) 满足 $1/q_x<\varepsilon/2$,

$1/q_y<\varepsilon/2$, 且
$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|=f(x,y)\leqslant\frac{1}{q_x}+\frac{1}{q_y}<\varepsilon$$

这说明 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续, 从而 $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上几乎处处连续, 由 Lebe

sgue 定理可知 $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上可积.

再固定 y_0 为有理数, 由 Dirichlet 函数的可积性可知
$$\varphi(x)=f(x,y_0)=\begin{cases}\dfrac{1}{q_{y_0}}, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}^c\\ 0, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\end{cases}=\frac{D(x)}{q_{y_0}}$$

在 $[0,1]$ 上不可积, 故不存在累次积分 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$. 另一个累次积分同理.

注: 不考虑 (x_0,y_0) 中有一个有理数一个无理数的情况是因为
$$S=\left\{(x,y)\in[0,1]^2: x,y\text{中有一个有理数一个无理数}\right\}$$

是零测集. 事实上, 假定 $x\in\mathbb{Q},y\in\mathbb{Q}^c$, 则对每一个有理数 $x_i\in[0,1],i=1,2,\cdots,n,(x_i,y)$

形成一条长度不超过 1 的线段, 它面积的测度为零, 从而 $S=\bigcup_{i=1}^{n}(x_i,y)$ 作为可数个零测

集的并也是零测集.
□

2. 解答: 因为 Darboux 上和 $=1\neq0=$ Darboux 下和, 故不可积. 下面考虑累次积分.

如果 y 为无理数, 则 $f(x,y)\equiv0$; 如果 $y=p_y/q_y$ 为有理数, 且为既约分数, 则 $q_x=q_y$ 的

既约分数至多有 q_y+1 个. 因此, 至多除 q_y+1 个点 x 外有
$$f(x,y)=f\left(x,\frac{p_y}{q_y}\right)=0$$

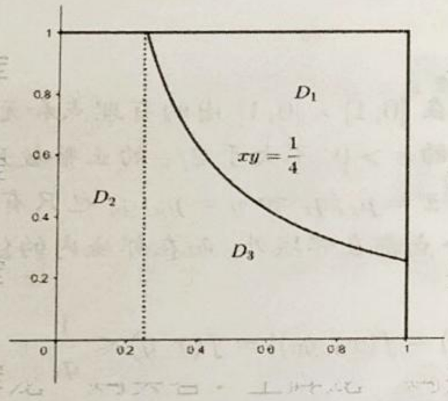
由此知, 无论 y 为无理数还是有理数, 总有 $\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=0$, 从而

$$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1 0\mathrm{d}y=0$$

另一个累次积分同理为 0, 从而两个累次积分相等. □

3. 解答:

(1) 积分区域如图所示



(将小正方形区域分割成三块分类讨论) 计算得

$$\begin{aligned}
I&=\iint\limits_{D_2\cup D_3}\left(\frac{1}{4}-xy\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_1}\left(xy-\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}x\int_0^1\left(\frac{1}{4}-xy\right)\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{4}}^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{4x}}\left(\frac{1}{4}-xy\right)\mathrm{d}y\\
&\quad+\int_{\frac{1}{4}}^1\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{4x}}^1\left(xy-\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}y\\
&=\frac{3}{64}+\frac{1}{16}\ln 2+\frac{1}{16}\left(\frac{3}{4}+\ln 2\right)=\frac{3}{32}+\frac{\ln 2}{8}
\end{aligned}$$

(2) 反证 $|f(x,y)|<1/A$ 恒成立. 注意到

$$1=\iint\limits_D\left(xy-\frac{1}{4}\right)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_D\left|xy-\frac{1}{4}\right||f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y<A\cdot\frac{1}{A}=1$$

矛盾. 可知命题成立. □

4. 解答: 由于积分区域 D 的面积为 200, 由积分中值定理可知存在 $(\xi,\eta)\in D$ 使得

$$I=\frac{200}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta}$$

显然有 $0\leqslant\cos^2\xi+\cos^2\eta\leqslant 2$, 我们证明两边的等号不能成立.

假设 $\cos^2\xi+\cos^2\eta=2$, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}-\frac{1}{102}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I-I=0$$

由于被积函数 $f(x,y)$ 连续非负，所以必有 $f(x,y)\equiv 0$ 即 $\cos^2 x+\cos^2 y\equiv 2,(x,y)\in D$，这显然错误，从而等号不能够取到. 另一边的等号同理可证，即 $0<\cos^2\xi+\cos^2\eta<2$.

于是就有

$$1.96=\frac{200}{102}<I<\frac{200}{100}=2$$

命题得证. □

5. 解答: 作正交变换，将 Oxy 平面旋转到平面 $ax+by+cz=0$ 上，令

$$u=\frac{ax+by+cz}{k}$$

在平面 $u=0$ 内，记 x 轴为 v 轴，y 轴为 w 轴，由正交变换的性质易知 $|J|=1$ 且将区域 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 变为 $u^2+v^2+w^2\leqslant 1$. 于是

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f(ax+by+cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1} f(ku)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\&=\int_{-1}^{1} f(ku)\mathrm{d}u\iint\limits_{v^2+w^2\leqslant 1-u^2}\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\&=\pi\int_{-1}^{1}\left(1-u^2\right)f(ku)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

命题得证. □

6. 解答: 由连续性不妨假定 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant\psi(x)\leqslant m$，令 $D'=\{(x,y):a\leqslant x\leqslant b,0\leqslant y\leqslant m\}$. 定义 $f(x,y)=0,(x,y)\in D'\cap D^c$. 由题设知

$$f(x,y)=\int_{\varphi(x)}^{y} f_t(x,t)\mathrm{d}t=\int_0^y f_t(x,t)\mathrm{d}t$$

从而可得

$$f^2(x,y)=\left(\int_0^y f_t(x,t)\mathrm{d}t\right)^2\leqslant m^2\int_0^m (f_t(x,t))^2\mathrm{d}t$$

注意到上式右端与 y 无关，故又知

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^2(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_a^b\mathrm{d}x\int_0^m f^2(x,y)\mathrm{d}y\leqslant m^2\int_a^b\mathrm{d}x\int_0^m [f_t(x,t)]^2\,\mathrm{d}t\\&=m^2\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}[f_t(x,t)]^2\,\mathrm{d}t=m^2\iint\limits_D [f_y(x,y)]^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

取 $K=m^2$ 即可. □

7. 解答: 便于书写起见, 就写成定积分的形式. 考虑 $\|u+v\|_p$ 的 p 次幂:

$$\begin{aligned}
\left(\int_a^b |u+v|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}\cdot p} &= \int_a^b |u+v||u+v|^{p-1}\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{三角不等式}}{\leqslant} \int_a^b |u||u+v|^{p-1}\mathrm{d}x + \int_a^b |v||u+v|^{p-1}\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \left(\int_a^b |u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |u+v|^{q(p-1)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\int_a^b |v|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |u+v|^{q(p-1)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left[\left(\int_a^b |u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |v|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\int_a^b |u+v|^{qp-q}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant \left[\left(\int_a^b |u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |v|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\int_a^b |u+v|^{p}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{q}}
\end{aligned}$$

(这里 $1/p+1/q=1$) 首尾移项可得

$$\left(\int_a^b |u+v|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}\left(p-\frac{p}{q}\right)} \leqslant \left[\left(\int_a^b |u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |v|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

由于 $p-p/q=1$, 此即

$$\|u+v\|_p \leqslant \|u\|_p + \|v\|_p$$

注: 由 Young 不等式等号成立的条件是 $a^p=b^q$, 可知例题 22.5.7 中 Hölder 不等式等号成立的条件是 $|u|^p/\|u\|_p^p = |v|^q/\|v\|_q^q$. 考虑三角不等式等号成立的条件, 即可知 Minkowski 不等式等号成立的条件是存在 $k \geqslant 0$ 使得 $u=kv$.

注: 当 $0<p<1$ 时不等号反向, 参见周民强《实变函数论》P297 例 6. □

8. 解答: 构造函数

$$g(x,y)=x(1-x)y(1-y)$$

则 g 在 $[0,1]^2$ 的边界上也为零, 且 $\dfrac{\partial^4 g}{\partial x^2 \partial y^2}=4$ 以及

$$\iint\limits_{[0,1]^2} g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x \int_0^1 y(1-y)\mathrm{d}y = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

由 f 在 $[0,1]^2$ 的边界上为零可知 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 在线段 $\{(x,y) \mid x=0, 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 以及 $\{(x,y) \mid x=1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上值为零, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ 在线段 $\{(x,y) \mid 0\leqslant x\leqslant 1, y=0\}$ 以及 $\{(x,y) \mid 0\leqslant x\leqslant 1, y=1\}$ 上值为零, 于是

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{[0,1]^2}\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right)g(x,y)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}g(x,y)\bigg|_0^1 - \int_0^1\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\\
&= -\int_0^1\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\\
&= -\int_0^1\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_0^1 - \int_0^1\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\\
&= \int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\mathrm{d}x = \iint\limits_{[0,1]^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

同理可得

$$
\iint\limits_{[0,1]^2}\frac{\partial^4 g}{\partial x^2\partial y^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{[0,1]^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{[0,1]^2}\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
$$

即有

$$
\iint\limits_{[0,1]^2}\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\iint\limits_{[0,1]^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{[0,1]^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,| &= \frac{1}{4}\left|\iint\limits_{[0,1]^2}\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\\
&\leqslant \frac{1}{4}\iint\limits_{[0,1]^2}\left|\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}g(x\cdot y)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\leqslant \frac{B}{4}\iint\limits_{[0,1]^2}g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{B}{4}\cdot\frac{1}{36} = \frac{B}{144}
\end{aligned}
$$

得证. □

9. 解答: 由 f 在 D 上可积可知 f 在 D 上几乎处处连续. 先证明存在一个连续点 $\boldsymbol{x}_0$ 使 $f(\boldsymbol{x}_0)>0$, 这很容易, 记 f 在 D 上的不连续点集合为 D^*, 反证连续点处都有 $f(\boldsymbol{x})\leqslant 0$, 则

$$
0<\iint\limits_{D}f=\iint\limits_{D^*}f+\iint\limits_{D\setminus D^*}f\leqslant 0+0=0
$$

产生了矛盾. 余下的工作就与练习题 10.2.4 第 1 题注解中所说的相仿了.

注: 也可参见徐森林下册 P10 第 412 题. □

10. 解答: 由连续性可设 $m\leqslant f(\boldsymbol{x})\leqslant M,\boldsymbol{x}\in\Omega$, 则

$$
mV_\Omega\leqslant\iint\limits_{\Omega}\cdots\int f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant MV_\Omega
$$

即

$$m \leqslant \frac{1}{V_\Omega}\iint\limits_{\Omega}\cdots\int f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant M$$

由连续函数的介值性可知, 存在 $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$ 使得

$$\iint\limits_{\Omega}\cdots\int f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = V_\Omega$$

注: (1) 本题连续的条件可以减弱为具有介值性.

(2) 诸如积分第二中值定理之类的一元形式命题也可以仿照推广到高维情形, 推导过程意义不大, 在此略过, 唯独值得注意的是, 在高维情形下与一维不同的是, 积分中值定理可以找出无穷多个这样的 $\boldsymbol{\xi}$. 下面以二元形式为例来证明这个命题.

命题: 设 f 在平面区域 D 上连续, 则存在无穷多个 $(\xi,\eta) \in D$ 使得

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)S_D$$

证: 反证这样的点只有有限多个 (已经证明至少一个), 记它们为 $\boldsymbol{P}_i(x_i,y_i), i=1,2,\cdots,n$, 则存在一个 $\varepsilon > 0$, 使得对每个 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$, 以 $\boldsymbol{P}_i$ 为中心, ε 为半径的闭圆盘

$$B(\boldsymbol{P}_i,\varepsilon) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{P}_i | \leqslant \varepsilon\right\} \subset \mathring{D}$$

且这些圆两两外离. 任取 $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon]$, 也都有

$$B(\boldsymbol{P}_i,\varepsilon_1) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{P}_i | \leqslant \varepsilon_1\right\} \subset \mathring{D}$$

且这些圆两两外离. 在 $D_1 = \mathring{D} - \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(\boldsymbol{P}_i,\varepsilon_1)$ 内, $f(x,y) \not\equiv C$, 进一步来证明 $f(x,y) > c$ 或 $f(x,y) < c$ 在 D_1 内恒成立. 反设结论不成立, 则存在 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2 \in D_1$, 使得 $f(\boldsymbol{Q}_1) > c$, $f(\boldsymbol{Q}_2) < c, \boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2 \in \mathring{D}$, 故存在完全含于 $\mathring{D}$ 的折线段 L, L 连接了 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2$. 现在来构造一条连接 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2$ 的连续曲线: 在圆 $B(\boldsymbol{P}_i,\varepsilon_1), i=1,2,\cdots,n$ 外的部分, L_1 与 L 重合. 如果 L 有部分在圆 $B(\boldsymbol{P}_i,\varepsilon_1)$ 上, 那么这条折线与这个圆至少有两个交点, 选取第一个进圆的交点和最后一个离开圆的交点, 将 L 在这两个交点间的部分通通去掉, 用连接这两个交点的圆周上的弧段替代. 处理的顺序按照折线与圆相交的顺序. 这样所得到的曲线段 L_1 仍然全部含于 $\mathring{D}$ 内, 而且是连续的. $f(x,y)$ 在 L_1 上连续, 且 $f(\boldsymbol{Q}_1) > c, f(\boldsymbol{Q}_2) < c$, 由介值定理, 存在 $\boldsymbol{Q}_3 \in L_1 \subset \mathring{D}$, 使得 $f(\boldsymbol{Q}_3) = c$, 而且 $\boldsymbol{Q}_3 \neq \boldsymbol{P}_i$, 矛盾.

由此可知 $f(x,y)$ 在 D 内恒大于 c 或恒小于 c.

另外, $\forall \varepsilon_2 < \varepsilon_1 \in (0,\varepsilon]$, 在 $D_1 = \mathring{D} - \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(\boldsymbol{P}_i,\varepsilon_j), j=1,2$ 内 $f(x,y) > c$ 或 $f(x,y) < c$ 中的一个恒成立是一致的. 由 ε_1 的任意性, 可设 $f(x,y) > c$ 在 $\mathring{D} - \{\boldsymbol{P}_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$

恒成立, 于是

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > S_D c = \iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

矛盾. 这就证明了二元积分中值定理选出的 (ξ,η) 一定可以有无穷多个. □

11. 解答: 参见第十一章第一组参考题第 3 题第 (2) 问. □

12. 解答: 参见第十一章第一组参考题第 3 题第 (1) 问. □

13. 解答:

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} \\
=&\int_0^R \mathrm{d}s \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=s^2} \frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} \\
=&\int_0^R \mathrm{d}s \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=s^2} \frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{s^2+A^2-2ax-2by-2cz}} \\
\leqslant&\int_0^R \mathrm{d}s \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=s^2} \frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{s^2+A^2-2As}} = \int_0^R \frac{4\pi s^2}{A-s}\mathrm{d}s \\
\leqslant&\int_0^R \frac{4\pi s^2}{A-R}\mathrm{d}s = \frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{A-R}
\end{aligned}$$

中间利用了 Cauchy 不等式

$$(ax+by+cz)^2 \leqslant (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = A^2s^2$$

$$\Rightarrow -As \leqslant ax+by+cz \leqslant As$$

再利用上述另一边的不等式, 则

$$\begin{aligned}
&\int_0^R \mathrm{d}s \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=s^2} \frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{s^2+A^2-2ax-2by-2cz}} \\
\geqslant&\int_0^R \mathrm{d}s \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=s^2} \frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{s^2+A^2+2As}} = \int_0^R \frac{4\pi s^2}{A+s}\mathrm{d}s \\
\geqslant&\int_0^R \frac{4\pi s^2}{A+R}\mathrm{d}s = \frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{A+R}
\end{aligned}$$

注: 事实上本题也可以利用第 10 题的结论, 存在 (ξ,η,ζ) 处于以原点为中心半径为 R 的球内使得

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} = \frac{4}{3}\pi R^3\cdot\frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}}$$

注意到几何意义: 分母是 (ξ,η,ζ) 到球外定点 (a,b,c) 的距离, 最远不会超过 $A+R$, 最近不会少于 $A-R$, 则命题就得证了. □

14. 解答: 易见

$$F(t)=\iiint\limits_{[0,t]^3} f(xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^t \mathrm{d}x\int_0^t \mathrm{d}y\int_0^t f(xyz)\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^t \mathrm{d}x\int_0^t \mathrm{d}y\int_0^{txy} \frac{f(u)}{xy}\mathrm{d}u=\int_0^t \frac{1}{x}\mathrm{d}x\int_0^t \frac{1}{y}g(txy)\mathrm{d}y$$

于是

$$F'(t)=\int_0^t \frac{g\left(t^2y\right)}{ty}\mathrm{d}y+\int_0^t \frac{g\left(t^2x\right)}{tx}\mathrm{d}x+\int_0^t \mathrm{d}x\int_0^t \frac{f(txy)}{xy}xy\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{t}\int_0^{t^3}\frac{g(u)}{u}\mathrm{d}u+\frac{1}{t}\int_0^{t^3}\frac{g(u)}{u}\mathrm{d}u+\int_0^t\left[\int_0^{t^2x}\frac{f(u)}{tx}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2}{t}\int_0^{t^3}\frac{g(u)}{u}\mathrm{d}u+\int_0^t \frac{g\left(t^2x\right)}{tx}\mathrm{d}x=\frac{3}{t}\int_0^{t^3}\frac{g(u)}{u}\mathrm{d}u$$

命题得证. □

15. 解答:

(1) 点 $(f(s),\varphi(s))$ 处的外法线方向, 倾角为 $\theta(s)-\pi/2$, 因此 D 内任意一点的坐标, 可用 s,t 表示为

$$x=f(s)+t\cos\left(\theta(s)-\frac{\pi}{2}\right)=f(s)+t\sin\theta(s)$$
$$y=\varphi(s)+t\sin\left(\theta(s)-\frac{\pi}{2}\right)=\varphi(s)-t\cos\theta(s)$$

其中 $0<t<l, 0\leqslant s<2\pi l$.

(2) 注意到此时有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=f'(s)=\cos\theta(s),\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\varphi'(s)=\sin\theta(s)$$

知

$$|J|=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right|=\begin{vmatrix} f(s)+t\theta'\cdot\cos\theta & \sin\theta \\ \varphi'(s)+t\theta'\cdot\sin\theta & -\cos\theta \end{vmatrix}=-1-t\theta'$$

所以

$$S_D=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D |J|\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\int_0^{2xl}\mathrm{d}s\int_0^l (1+t\theta'(s))\,\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{2xl}\left(l+\frac{l^2}{2}\theta'(s)\right)\mathrm{d}s=3\pi l^2$$

命题得证. □

第二组参考题

1. 解答: 在练习题 8.5.3 第 10 题中取 $x=\varepsilon a^p, y=\varepsilon^{-q/p}b^q$, 则第一个不等号成立. 再由 $p,q>1$ 可知第二个不等号成立. □

2. 解答: 由于

$$\|u\|_q^q=\iint_\Omega |u|^{\lambda q}|u|^{(1-\lambda)q}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\left[\iint_\Omega (|u|^{\lambda q})^{\frac{p}{\lambda q}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{\frac{\lambda q}{p}}\left[\iint_\Omega (|u|^{(1-\lambda)q})^{\frac{r}{(1-\lambda)q}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{\frac{(1-\lambda)q}{r}}$$

$$=\|u\|_p^{\lambda q}\|u\|_r^{(1-\lambda)q}$$

这里需要注意到

$$\frac{1}{q}=\frac{\lambda}{p}+\frac{1-\lambda}{r}$$

再由例题 22.5.9 和上题结论可知

$$\|u\|_q\leqslant\|u\|_r^{\frac{\mu}{1+\mu}}\|u\|_p^{\frac{1}{1+\mu}}\leqslant\varepsilon\|u\|_r+\varepsilon^{-\mu}\|u\|_p$$

命题得证. □

3. 解答:

(1) 仿照例题 10.2.5 即可. 若设 $m\leqslant u(x,y)\leqslant M,(x,y)\in\Omega$, 则可推出

$$M\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}\left(\iint_\Omega u(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/n}\geqslant\varliminf_{n\to\infty}\left(\iint_\Omega u(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/n}\geqslant M-\varepsilon$$

由 ε 的任意性可见

$$\lim_{p\to+\infty}\Phi_p(u)=\lim_{p\to+\infty}|\Omega|^{-1/p}\cdot M=M$$

(2) 记 $q=-p$, 且 $1/M\leqslant 1/u(x,y)\leqslant 1/m,(x,y)\in\Omega$, 直接由 (1) 的结论可知

$$\lim_{p\to-\infty}\Phi_p(u)=\lim_{q\to+\infty}\Phi_q(u)=(1/m)^{-1}=m$$

(3) 类似命题 11.2.1, 由 Jensen 不等式可知

$$\ln\Phi_p(u)=\frac{1}{p}\left[\ln\left(\frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega u^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\right]\geqslant\frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega\ln u\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

又由不等式 $\ln x<x-1$ 可得

$$\frac{1}{p}\left[\ln\left(\frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega u^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\right]\leqslant\frac{1}{p}\left[\frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega u^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y-1\right]=\frac{1}{p}\left[\frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega(u^p-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

注意到当 $p\to 0$ 时 $(u^p-1)/p\to \ln u$, 故

$$\lim_{p\to 0}\iint_{\Omega}\frac{u^p-1}{p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Omega}\ln u\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(更为严谨的写法是作差放缩至零)

由夹逼定理可知

$$\lim_{p\to 0}\Phi_p(u)=\exp\left\{\frac{1}{|\Omega|}\iint_{\Omega}\ln u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}$$

得证. □

4. 解答: 以球心 $\boldsymbol{O}$ 为原点, 以 $\boldsymbol{OP}_0$ 为 x 轴建立空间直角坐标系, 设 $\boldsymbol{P}_0=(r,0,0)$, 其中 $r\in[0,R]$.

(1) 设点 $\boldsymbol{Q}$ 为 (x_0,y_0,z_0), 则球面的切平面方程为

$$x_0x+y_0y+z_0z=R^2$$

点 $\boldsymbol{P}_0$ 在该切平面上的投影点坐标为

$$\begin{cases}x=r+x_0t\\ y=y_0t\\ z=z_0t\end{cases}$$

故

$$x_0(r+x_0t)+y_0^2t+z_0^2t=R^2$$

即

$$t=\frac{R^2-rx_0}{R^2}=1-\frac{r}{R^2}x_0$$

故

$$\begin{cases}x=r+x_0\left(1-\dfrac{r}{R^2}x_0\right)\\ y=y_0\left(1-\dfrac{r}{R^2}x_0\right)\\ z=z_0\left(1-\dfrac{r}{R^2}x_0\right)\end{cases}$$

$$x_0:y_0:z_0=x-r:y:z$$

令 $\begin{cases}x_0=(x-r)u\\ y_0=yu\\ z_0=zu\end{cases}$, $x_0^2+y_0^2+z_0^2=R^2$, 故

$$\left[(x-r)^2+y^2+z^2\right]u^2=R^2\Rightarrow u^2=\frac{R^2}{(x-r)^2+y^2+z^2}$$

又 $y=y_0\left(1-\frac{r}{R^2}x_0\right)$, 即有

$$\left[1+\frac{r}{R^2}(x-r)u^2\right]^2=u^2$$

化简可得

$$\begin{aligned}1+\frac{r}{R^2}(x-r)u^2&=1+\frac{r}{R^2}(x-r)\frac{R^2}{(x-r)^2+y^2+z^2}\\&=1+\frac{r(x-r)}{(x-r)^2+y^2+z^2}=\frac{(x-r)^2+y^2+z^2+r(x-r)}{(x-r)^2+y^2+z^2}\\&=\frac{x(x-r)+y^2+z^2}{(x-r)^2+y^2+z^2}\end{aligned}$$

结合以上式子可知

$$\left[x(x-r)+y^2+z^2\right]^2=R^2\left[(x-r)^2+y^2+z^2\right]$$

即为所求曲面方程. 作变换

$$\begin{cases}x-r=\rho\cos\varphi\\y=\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\geq 0,\varphi\in[0,\pi],\theta\in[0,2\pi]\\z=\rho\sin\varphi\sin\theta\end{cases}$$

代入曲面方程解得

$$\rho^2+r\rho\cos\varphi=\pm R\rho$$

但当 $\rho>0$ 时

$$\rho^2+r\rho\cos\varphi\geqslant\rho^2-r\rho\geqslant\rho^2-R\rho>-R\rho\Rightarrow\rho=R-r\cos\varphi$$

因此所求体积为

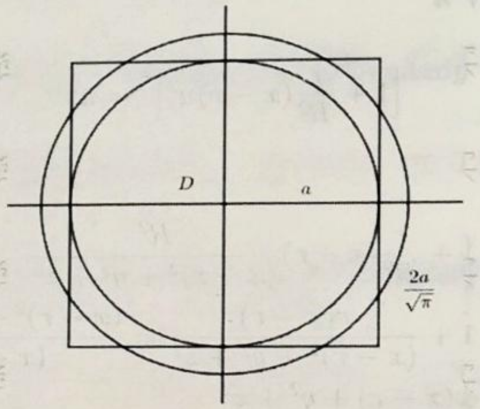
$$\begin{aligned}V&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{R-r\cos\varphi}\rho^2d\rho=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}\sin\varphi(R-r\cos\varphi)^3d\varphi\\&=\frac{\pi}{6r}(R-r\cos\varphi)^4\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi\left[(R+r)^4-(R-r)^4\right]}{6r}=\frac{4\pi}{3}R\left(R^2+r^2\right)\end{aligned}$$

(2) 体积值与 r, 也就是 $\boldsymbol{P}_0$ 到球心的距离有关, 而

$$\operatorname{grad}V\left(\boldsymbol{P}_0\right)=\frac{8\pi}{3}R\overrightarrow{\boldsymbol{OP}_0}$$

故沿着向径方向变化时, 上述体积的变化率最大. □

5. 解答: 如图所示



以原点为中心, 作半径为 a 的圆 D_1. 边长为 $2a$ 的正方形 D_2, 和半径为 $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}a$ 的圆 D_3. 显然 $D_1 \subset D_2, D_1 \subset D_3$, 而 D_2, D_3 的面积都为 $4a^2$. 记 $D_2 \cap D_3 = D$, 则

$$\begin{aligned}\left(\int_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 &= \frac{1}{4}\left(\int_{-a}^a \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\right)^2 = \frac{1}{4}\iint\limits_{D_2} \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &> \frac{1}{4}\iint\limits_{D_1} \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right)\Big|_0^a = \frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-a^2}\right)\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\iint\limits_{D_2} \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \frac{1}{4}\left[\iint\limits_{D} \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2\backslash D} \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right] \\ &< \frac{1}{4}\left[\iint\limits_{D} \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_3\backslash D} \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right] \\ &= \frac{1}{4}\iint\limits_{D_3} \mathrm{e}^{\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{2}{\sqrt{\pi}}a} \mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{4}\left(-\mathrm{e}^{-r^2}\right)\Big|_0^{\frac{2}{\sqrt{\pi}}a} = \frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{4}{\pi}a^2}\right)\end{aligned}$$

综上可知

$$\frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-a^2}\right) < \left(\int_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 < \frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{4}{\pi}a^2}\right)$$

再开方即得结论. □

6. 解答: 作 $[v_1, v_2]$ 得任一划分

$$T: v_1 = v_0' < v_1' < \cdots < v_n' = v_2$$

令 $d(T)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta v_i$, 这里 $\Delta v_i=v_i'-v_{i-1}'$. 于是, 由积分中值定理知

$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{n=1}^{n}\iint\limits_{S(v_{i-1}',v_i')} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i,\bar{v}_i)\Delta S_i$$

这里 ΔS_i 表示小环域 $S(v_{i-1}',v_i')$ 的面积 (可参看吉米多维奇题解第 6 册 P26 的插图 8.33), $\bar{P}(\bar{x}_i,\bar{y}_i)\in S(v_{i-1}',v_i')$. 令 $v_i^*=f(\bar{x}_i,\bar{y}_i)$, 则 $v_{i-1}'\leqslant v_i^*\leqslant v_i'$. 又由微分中值定理有

$$\Delta S_i=F\left(v_i'\right)-F\left(v_{i-1}'\right)=F'\left(\bar{v}_i\right)\left(v_i'-v_{i-1}'\right)=F'\left(\bar{v}_i\right)\Delta v_i$$

其中 $v_{i-1}'\leqslant\bar{v}_i\leqslant v_i'$. 由于 $F'(v)$ 可积, 可设 $|F'(v)|\leqslant M, v_1\leqslant v\leqslant v_2$, 我们有

$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{n} v_i^* F'\left(\bar{v}_i\right)\Delta v_i=I_1+I_2$$

其中

$$I_1=\sum_{i=1}^{n}\bar{v}_i F'\left(\bar{v}_i\right)\Delta v_i,\quad I_2=\sum_{i=1}^{n}\left(v_i^*-\bar{v}_i\right)F'\left(\bar{v}_i\right)\Delta v_i$$

由于 $F'(v)$ 在 $[v_1,v_2]$ 上可积, 故 $vF'(v)$ 也在 $[v_1,v_2]$ 上可积. 因此

$$\lim_{d(T)\to 0} I_1=\lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\bar{v}_i F'\left(\bar{v}_i\right)\Delta v_i=\int_{v_1}^{v_2} vF'(v)\mathrm{d}v$$

另一方面

$$|I_2|\leqslant Md(T)\sum_{i=1}^{n}\Delta v_i=M\left(v_2-v_1\right)d(T)\Rightarrow\lim_{d(T)\to 0} I_1=0$$

从而就有

$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{v_1}^{v_2} vF'(v)\mathrm{d}v$$

证毕. □

第二十三章 含参变量积分

§23.1.3 练习题

1. 解答:

$$f'(\theta)=\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial\theta}\ln(1+\lambda\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^\pi \frac{\cos x}{1+\theta\cos x}dx=\frac{1}{\theta}\int_0^\pi \frac{(1+\theta\cos x)-1}{1+\theta\cos x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\theta}\left(\pi-\int_0^\pi \frac{1}{1+\theta\cos x}\mathrm{d}x\right)$$

可计算出

$$\int\frac{1}{1+\theta\cos x}\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{(1+\theta)(1-\theta)}}\arctan\sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}}\tan\frac{x}{2}+C$$

故

$$\int_0^\pi \frac{1}{1+\theta\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sqrt{(1+\theta)(1-\theta)}}$$

因此

$$f'(\theta)=\frac{1}{\theta}\left[\pi-\frac{\pi}{\sqrt{(1+\theta)(1-\theta)}}\right]\Rightarrow f(\theta)=\int f'(\theta)\mathrm{d}\theta=\pi\ln(1+\sqrt{1-\theta^2})+C$$

再由 $f(0)=0$ 可推出 $C=-\pi\ln 2$, 故 $f(\theta)=\pi\ln(1+\sqrt{1-\theta^2})-\pi\ln 2.$ □

2. 解答: 记 $G(t,u)=\int_0^u f(t,s)\mathrm{d}s$, 则

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x[G(t,x^2)-G(t,t^2)]\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[G(t,x^2)-G(t,t^2)]\mathrm{d}t=\int_0^x 2xf(t,x^2)\mathrm{d}t$$ □

3. 解答: 利用 $f(x,y)$ 的连续性可知, 对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x,y)-f(x_0,y)|<\varepsilon$, 从而

$$|I(x)-I(x_0)|=\left|\int_c^d[f(x,y)-f(x_0,y)]\mathrm{d}y\right|\leqslant\int_c^d|f(x,y)-f(x_0,y)|\mathrm{d}y<(d-c)\varepsilon$$

由此可见 $I(x)$ 在 (a,b) 上连续. □

4. 解答:

$$I'(a)=\int_0^{2\pi}\frac{2a-2R\cos\theta}{R^2+a^2-2aR\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\left[1+\frac{a^2-R^2}{R^2+a^2-2aR\cos\theta}\mathrm{d}\theta\right]$$

利用结论 (万能代换可推导, 也可用留数证明, 参见《积分的方法与技巧》P330 例 6)

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{A+B\cos\theta}=2\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}\theta}{A+B\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{A^2-B^2}}(A>B\geqslant 0)$$

于是
$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{R^2+a^2-2aR\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{(R^2+a^2)^2-4a^2R^2}}=\frac{2\pi}{R^2-a^2}$$

再整理化简即可知 $I'(a)=0$. □

5. 解答: 不妨设 $a<b$.

$$\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x=\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\int_a^b x^y\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y\mathrm{d}x$$

当 $x\to0^+$ 时 $\sin(\ln(1/x))\,x^y\to0$, 故 $\sin(\ln(1/x))\,x^y$ 在 $0\leqslant x\leqslant1, a\leqslant y\leqslant b$ 上连续,故可交换积分次序. 作代换 $x=e^{-t}$, 可得

$$\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-(y+1)t}\sin t\mathrm{d}t=\frac{1}{1+(1+y)^2}$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x&=\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{1+(1+y)^2}=\arctan(1+y)\Big|_a^b\\&=\arctan(1+b)-\arctan(1+a)=\arctan\frac{b-a}{1+(1+b)(1+a)}\end{aligned}$$ □

6. 解答: 改写原式为 $F(t)=\displaystyle\int_0^a\left(\int_{t+u}^{a+t+u}f(v)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u$, 则

$$F'(t)=\int_0^a[f(a+t+u)-f(t+u)]\mathrm{d}u=\int_{t+a}^{t+2a}f(u)\mathrm{d}u-\int_t^{t+a}f(u)\mathrm{d}u$$

$$F''(t)=f(t+2a)-2f(t+a)+f(t)$$

得证. □

7. 解答: 易知

$$f'(x)=2\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\cdot e^{-x^2}=2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$$
$$g'(x)=-\int_0^1 2xe^{-x^2(1+t^2)}\mathrm{d}t=-2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\mathrm{d}t=-2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

可见 $f'(x)+g'(x)\equiv0$, 这说明 $f(x)+g(x)\equiv C$. 易证 $f(0)=0, g(0)=\pi/4$, 则 $C=\pi/4$, 从而

$$f(x)+g(x)\equiv\pi/4$$

又由于

$$\begin{aligned}0\leqslant g(x)&=\int_0^1\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t=e^{-x^2}\int_0^1\frac{e^{-x^2t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t\\&\leqslant e^{-x^2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=e^{-x^2}\cdot\frac{\pi}{4}\to0,\quad x\to+\infty\end{aligned}$$

故

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to+\infty} f(x) + \lim_{x\to+\infty} g(x) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2$$

两边开方即得结论. □

§23.2.3 练习题

1. 解答: 由于

$$\left|e^{-(1+a^2)t}\sin t\right| \leqslant e^{-t}, 0\leqslant t<+\infty, -\infty<a<+\infty$$

而 $\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法知原积分在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(2) 由于

$$\left|\int_0^A \cos xy\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{\sin Ay}{y}\right| \leqslant \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{y_0},\quad A\geqslant 0, y\geqslant y_0$$

因此它在 $[y_0,+\infty)$ 一致有界. 而 $1/\sqrt{x+y}$ 是 x 的单调减少函数且

$$0<\frac{1}{\sqrt{x+y}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x+y_0}}$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+y_0}}=0$. 故这个极限关于 y 在 $[y_0,+\infty)$ 上是一致的. 于是由 Dirichlet 判别法知原积分在 $[y_0,+\infty)$ 上一致收敛.

(3) 对于正整数 n, 取 $t_n=\frac{1}{n^2}$, 此时

$$\left|\int_n^{2n} e^{-t_nx^2}\mathrm{d}x\right| = \int_n^{2n} e^{-\frac{1}{n^2}x^2}\mathrm{d}x > \int_n^{2n} e^{-\frac{1}{n^2}(2n)^2}\mathrm{d}x$$
$$= \int_n^{2n} e^{-4}dx = e^{-4}n \geqslant e^{-4}$$

因此, 只要取 $\varepsilon_0=e^{-4}$, 则对于任意大的正数 A_0, 总存在正整数 n, 满足 $n>A_0$ 及 $t_n=1/n^2\in(0,+\infty)$, 使得

$$\left|\int_n^{2n} e^{-t_nx^2}\mathrm{d}x\right| \geqslant e^{-4}=\varepsilon_0$$

由 Cauchy 准则可知原积分关于 t 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛.

(4) 显然 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 有界, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$, 由 Dirichlet 判别

法知 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛，它当然关于 α 一致收敛. 显然 $e^{-\alpha x}$ 关于 x 单调且

$$0\leqslant e^{-\alpha x}\leqslant 1,\quad 0\leqslant\alpha<+\infty, 1\leqslant x<+\infty$$

即 $e^{-\alpha x}$ 一致有界. 由 Abel 判别法知原积分在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

(5) 注意到

$$J(A)=\int_A^{2A}e^{-(x-y)^2}\mathrm{d}x=\int_{A-y}^{2A-y}e^{-u^2}\mathrm{d}u$$

并让 y 取 A 值,

$$J(A)=\int_0^A e^{-u^2}\mathrm{d}u\to\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\mathrm{d}u(A\to+\infty)$$

即 $J(A)$ 在 $A\to+\infty$ 时不趋于 0, 从而原积分关于 y 在 $(-\infty,+\infty)$ 上非一致收敛.

(6) 先证明 $\int_0^{+\infty}x\ln xe^{-t\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 在 $[t_0,+\infty)(t_0>0)$ 上一致收敛. 由于

$$\left|x\ln xe^{-t\sqrt{x}}\right|\leqslant|x\ln x|e^{-t_0\sqrt{x}},\quad 0\leqslant x<+\infty, t_0\leqslant t<+\infty$$

而 $\int_0^1 x\ln\frac{1}{x}e^{-t_0\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^{+\infty}x\ln xe^{-t_0\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 均收敛, 由 Weierstrass 判别法知原积分在 $[t_0,+\infty)$ 上一致收敛.

再证明 $\int_0^{+\infty}x\ln xe^{-t\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛. 对于正整数 n, 取 $t_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$, 这时

$$\begin{aligned}&\left|\int_n^{2n}x\ln xe^{-t_n\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_n^{2n}x\ln xe^{-\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right|\\&>n\ln n\int_n^{2n}e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{x}}\mathrm{d}x>n\ln n\int_n^{2n}e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{2n}}\mathrm{d}x\\&=n^2\ln n\cdot e^{-\sqrt{2}}\geqslant 4\ln 2\cdot e^{-\sqrt{2}}\end{aligned}$$

因此, 只要取 $\varepsilon_0=4\ln 2\cdot e^{-\sqrt{2}}$, 则对于任意大的正数 A_0, 总存在正整数 n 满足 $n>A_0$, 及 $y_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\in(0,+\infty)$, 使得

$$\left|\int_n^{2n}x\ln xe^{-t_n\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right|>4\ln 2\cdot e^{-\sqrt{2}}=\varepsilon_0$$

由 Cauchy 准则知原积分在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛.

(7) 由于 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$ 收敛, 它当然关于 u 一致收敛. 显然 $1-e^{-ut}$ 关于 t 单调, 且

$$0\leqslant 1-e^{-ut}\leqslant 1,\quad 0\leqslant u\leqslant 1, 1\leqslant t<+\infty$$

即 $1-e^{-ut}$ 一致有界. 由 Abel 判别法, 原积分在 $[0,1]$ 上一致收敛.

(8) 由于

$$\left|\int_0^A \alpha t\cdot e^{-\alpha^2t^2}\cos\alpha^2t^2\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^A\alpha t\cdot e^{-\alpha^2t^2}\mathrm{d}t=\frac{1-e^{-\alpha^2A^2}}{2\alpha}$$

且

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{1-e^{-\alpha^2A^2}}{2\alpha}=0,\ \lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1-e^{-\alpha^2A^2}}{2\alpha}=0$$

因此它在 $(0,+\infty)$ 一致有界, 而 $\dfrac{1}{1+\alpha^2+t^2}$ 是 x 的单调减少函数且

$$\frac{1}{1+\alpha^2+t^2}\leqslant\frac{1}{1+t^2},\lim_{t\to\infty}\frac{1}{1+t^2}=0$$

因此 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{1+\alpha^2+t^2}=0$ 关于 α 在 $(0,+\infty)$ 上是一致的, 于是由 Dirichlet 判别法知原积分在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛.

(9) 对于正整数 n, 取 $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{1+(2n+1)^2\pi^2}}$, 此时

$$\begin{aligned}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}e^{-x_n^2(1+y^2)}\sin y\mathrm{d}y\,|&=\left|\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}e^{-\frac{1}{1+(2n+1)^2\pi^2}(1+y^2)}\sin y\mathrm{d}y\right|\\&>\frac{1}{e}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin y dy=\frac{2}{e}\end{aligned}$$

因此, 只要取 $\varepsilon_0=2/e$, 则对于任意大的正数 A_0, 总存在正整数 n 满足 $2n\pi>A_0$ 及 $y_n=\dfrac{1}{\sqrt{1+(2n+1)^2\pi^2}}\in(0,+\infty)$, 使得

$$\left|\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}e^{-x_n^2(1+y^2)}\sin y dy\right|>\frac{2}{e}=\varepsilon_0$$

由 Cauchy 准则知原积分关于 x 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛.

(10) 对于任意取定的正数 A, 由于

$$\int_A^{+\infty}\frac{\alpha\mathrm{d}x}{1+\alpha^2x^2}=\frac{\pi}{2}-\arctan(\alpha A)$$

取 $\alpha=\dfrac{1}{A}$, 则有

$$\int_A^{+\infty}\frac{\alpha\mathrm{d}x}{1+\alpha^2x^2}=\int_A^{+\infty}\frac{1/A}{1+x^2/A^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

因此原积分在 $(0,1)$ 上非一致收敛.

(11) 当 $0<x<1$ 时有

$$0\leqslant\left|\frac{x^t}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}}\right|<\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}}$$

当 $1<x<2$ 时有

$$0 \leqslant \left|\frac{x^t}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}}\right| < \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}}$$

因此有

$$\int_0^2 \frac{x^t}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}}\mathrm{d}x < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{(1-x)(2-x)}}\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}}\mathrm{d}x$$

由 Taylor 展开式可知

$$\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{(1-x)(2-x)}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), x \to 0^+$$
$$\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{(1-x)(2-x)}} = O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right), x \to 1$$
$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} = O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right), x \to 1$$
$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} = O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2-x}}\right), x \to 2$$

可知右端积分收敛. 由 Weierstrass 判别法可知原积分关于 $|t|<1/2$ 一致收敛.

(12) 先证明 $\int_0^1 (1-x)^{u-1}\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)(a>0)$ 上一致收敛. 由于

$$(1-x)^{u-1} \leqslant (1-x)^{a-1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, a \leqslant u < +\infty$$

而

$$\int_0^1 (1-x)^{a-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}$$

积分收敛. 由 Weierstrass 判别法知原积分在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛.

再证明原积分再 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛. 对于任意取定的正数 A 且 $A \to 0$, 由

$$\int_A^1 (1-x)^{u-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{A}$$

取 $u = A \in (0,+\infty)$, 当 A 足够小时, 我们有

$$\int_A^1 (1-x)^{u-1}\mathrm{d}x = \frac{(1-A)^u}{u} = \frac{(1-A)^A}{A} > 1$$

因此原积分在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛. □

2. 解答: 由积分 $\int_0^1 x^a f(x)\mathrm{d}x$ 是收敛的, 而 $x^{\lambda-a}$ 对于 $\lambda \geqslant a$ 的值是 x 的单调函数, 并以 1 为界. 因此积分

$$\int_0^1 x^\lambda f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\lambda-a}\cdot x^a f(x)\mathrm{d}x$$

关于 λ 一致收敛. 类似地可以看出以下积分

$$\int_1^{+\infty} x^\lambda f(x)\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} x^{\lambda-b}\cdot x^b f(x)\mathrm{d}x$$

关于 $\lambda \leqslant b$ 一致收敛. 因此原积分关于 λ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. □

3. 解答: 取 $x = 1/A \in (0,+\infty)$, 则有

$$\int_A^{+\infty} xe^{-xy}\mathrm{d}y = \frac{1}{e}$$

因此 $\int_0^{+\infty} xe^{-xy}\mathrm{d}y$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛. □

§23.2.6 练习题

1. 解答: 任取 $x_0 \neq x \in U(x_0)$, 则

$$\frac{\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y - \int_a^{+\infty} f(x_0,y)\,\mathrm{d}y}{x-x_0} = \frac{\int_a^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{x_0}^x f_x(x,y)\mathrm{d}x}{x-x_0}$$

$\int_a^{+\infty} f_x(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $U(x_0)$ 上一致收敛, 故

$$\frac{\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y - \int_a^{+\infty} f(x_0,y)\,\mathrm{d}y}{x-x_0} = \frac{\int_a^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{x_0}^x f_x(x,y)\mathrm{d}x}{x-x_0} = \frac{\int_{x_0}^x\mathrm{d}x\int_a^{+\infty} f_x(x,y)\mathrm{d}y}{x-x_0}$$

$$\frac{\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y - \int_a^{+\infty} f(x_0,y)\,\mathrm{d}y}{x-x_0} - \int_a^{+\infty} f_x(x_0,y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\int_{x_0}^x\mathrm{d}x\int_a^{+\infty}\left[f_x(x,y)-f_x(x_0,y)\right]\mathrm{d}y}{x-x_0}$$

任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $Y > a$, 使得对任意 $x \in U(x_0)$, 恒有

$$\left|\int_Y^{+\infty} f_x(x,y)\mathrm{d}y\right| < \varepsilon$$

当 $x \to x_0$ 时, $f_x(x,y)$ 关于 y 在任何有限区间上一致收敛于 $f_x(x_0,y)$, 故存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $x \in U(x_0)$, $y \in [a,Y]$, 只要 $0 < |x-x_0| < \delta$, 就有

$$|f_x(x,y) - f_x(x_0,y)| < \frac{\varepsilon}{Y-a}$$

故

$$\left|\frac{\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y-\int_a^{+\infty} f(x_0,y)\,\mathrm{d}y}{x-x_0}-\int_a^{+\infty} f_x(x_0,y)\,\mathrm{d}y\right|$$

$$\leqslant \frac{\left|\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x\int_a^{Y}\left|f_x(x,y)-f_x(x_0,y)\right|\mathrm{d}y\right|+\left|\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x\int_Y^{+\infty}\left[f_x(x,y)-f_x(x_0,y)\right]\mathrm{d}y\right|}{|x-x_0|}$$

$$=\frac{\left|\varepsilon\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x\right|+\left|2\varepsilon\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x\right|}{|x-x_0|}=3\varepsilon$$

故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\bigg|_{x=x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y-\int_a^{+\infty} f(x_0,y)\,\mathrm{d}y}{x-x_0}=\int_a^{+\infty} f_x(x_0,y)\,\mathrm{d}y$$

□

即在 $(0,+\infty)$ 上 $F'(x)$ 存在.

2. 解答: 当 $1-\alpha^2>0$ 即 $|\alpha|<1$ 时,

$$\begin{aligned}F(\alpha)&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-\alpha^2)x}{(1-\alpha^2)x}\mathrm{d}[(1-\alpha^2)x]\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

当 $1-\alpha^2<0$ 即 $|\alpha|>1$ 时

$$\begin{aligned}F(\alpha)&=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha^2-1)x}{(\alpha^2-1)x}\mathrm{d}[(\alpha^2-1)x]\\&=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

当 $1-\alpha^2=0$ 即 $|\alpha|=1$ 时, $F(\alpha)=0$. 于是, 在 $\alpha=\pm1$ 处 $F(\alpha)=\pm1$ 处间断, 而在其余区间都连续. □

3. 解答: 易见 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x^2}{x}\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha\in[0,+\infty)$ 是收敛的. 当 $\alpha>0$ 时

$$F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x^2}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x^2}{\alpha x^2}\mathrm{d}\left(\alpha x^2\right)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$$

(这说明 $F(\alpha)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续) 且 $F(0)=0$, 故 $F(\alpha)$ 在 $[0,+\infty)$ 上不连续.

如果 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x^2}{x}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛, 则 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x^2}{x}\mathrm{d}x$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛, 则 $F(\alpha)$ 理应在 $[0,+\infty)$ 连续, 矛盾. □

4. 解答: 对每个 $A>1$, 有

$$\left|\int_1^A xe^{-yx}\mathrm{d}y\right| = |e^{-x}-e^{-Ax}| \leqslant 2$$

又 $1/y\searrow 0$, 故由 Dirichlet 判别法, $\int_1^{+\infty}\frac{xe^{-yx}}{y}\mathrm{d}y$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛, 从而连续. 再考虑

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xe^{-yx}}{y}\right) = \frac{e^{-xy}(1-xy)}{y}$$

对每个 $A>1$, 易见

$$\left|\int_1^A \frac{1-xy}{e^{xy}}\mathrm{d}y\right| = \left|\frac{y}{e^{xy}}\bigg|_1^A\right| = \left|\frac{A}{e^{Ax}}-\frac{1}{e^x}\right| \leqslant 2$$

又 $1/y\searrow 0$, 故可知 $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-xy}(1-xy)}{y}\mathrm{d}y$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛, 从而求导和积分可换序, $F'(x)$ 也自然存在. □

5. 解答: 拆分

$$F(\alpha) = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^{2-\alpha}}\mathrm{d}x = I_1+I_2$$

I_1 以 0 为瑕点, I_2 以 π 为瑕点. 对 $\forall 0<\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant 2-\varepsilon<2$, 由

$$\left|\int_0^\eta \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^{2-\alpha}}\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_0^\eta \frac{x}{x^\varepsilon(\pi/2)^{2-\alpha}}\mathrm{d}x\right| = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2-\alpha}\frac{\eta^{2-\varepsilon}}{2-\varepsilon}\to 0 \quad (\eta\to 0)$$

$$\left|\int_{\pi-\eta}^{\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^{2-\alpha}}\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^\eta \frac{\sin t}{(\pi-t)^\alpha t^{2-\alpha}}\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\alpha}\frac{\eta^{\varepsilon}}{\varepsilon}\to 0 \quad (\eta\to 0)$$

知 I_1, I_2 在 $\varepsilon\leqslant p\leqslant 2-\varepsilon$ 上一致收敛, 所以 $F(\alpha)=I_1+I_2$ 在 $(0,2)$ 内闭一致收敛, 从而 $F(\alpha)$ 在 $(0,2)$ 上连续. □

6. 解答: 考虑当 $y\in[1/2,2]$ 时

$$ye^{-x^2y^2}\cos[x(1-y)]\mathrm{d}x \leqslant 2e^{-x^2/2}$$

而 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2/2}\mathrm{d}x$ 收敛, 故原积分在 $[1/2,2]$ 上一致收敛. 从而积分和极限可以换序, 故有

$$\lim_{y\to 1}F(y) = \int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$ □

7. 解答:

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty}\sin^2 x\mathrm{d}\frac{1}{x} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}\mathrm{d}(2x) = \pi$;

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\left[\frac{3}{4}\cdot\frac{\sin x}{x}-\frac{3}{4}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\right]\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$;

(3) $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} -\frac{x}{2\alpha}\mathrm{d}e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{2\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\alpha^{3/2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^{3/2}}$;

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{a}[(ax+b/2)^2+ac-b^2/4]}\mathrm{d}x = e^{\frac{b^2/4-ac}{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{a}(ax+b/2)2}\mathrm{d}x$

$$=e^{\frac{b^2/4-ac}{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{a}}\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2/4-ac}{a}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2/4-ac}{a}}$$ □

8. 解答:

(1) 由

$$I'(a) = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left[e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\right]\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} -e^{ax}\sin x\mathrm{d}x = -\frac{1}{a^2+1}$$

可知

$$I(a) = -\int\frac{1}{a^2+1}\mathrm{d}a = -\arctan a + C$$

又 $I(0)=\frac{\pi}{2}$, 则

$$I(a) = -\arctan a + \frac{\pi}{2}$$

(2) 由

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left[\frac{\arctan\alpha x}{x(1+x^2)}\right]\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+\alpha^2x^2)(1+x^2)} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+\alpha}$$

可知

$$I(\alpha) = \int\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+\alpha}\mathrm{d}\alpha = \frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)+C$$

又 $I(\alpha)=0$, 故

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)$$

(3) 由

$$f'(x) = \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{y}xe^{-yx}\right]\mathrm{d}y = \int_1^{+\infty}\frac{1-xy}{ye^{xy}}\mathrm{d}y = f(x)+e^{-x}$$

解微分方程可得

$$f(x) = Ce^x - \frac{e^{-x}}{2}$$

又 $f(0)=0$ 可知 $C=\frac{1}{2}$ 从而 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. □

9. 解答:

(1)

$$\begin{aligned}
I(\alpha) &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\cdot\left[\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2x^2}\right]\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\alpha}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+y^2x^2)}\right]\mathrm{d}y\\
&= \int_0^{\alpha}\frac{\pi}{2y+2}\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)
\end{aligned}$$

(2)

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-t\alpha^2}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}\cos\beta x\cdot e^{-tx^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-t\alpha^2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{\beta^2}{4t}}\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-y^2\alpha^2-\frac{\beta^2}{4y^2}}\mathrm{d}y=\sqrt{\pi}e^{\alpha\beta}\int_0^{+\infty}e^{-\left(\alpha y+\frac{\beta}{2y}\right)^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}e^{\alpha\beta}}{\alpha}\int_0^{+\infty}e^{-(t^2+2\alpha\beta)}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}e^{-\alpha\beta}}{\alpha}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\pi e^{-\alpha\beta}}{2\alpha}$$

注: (1) 这里利用了练习题 12.3.3 第 7 题的结论.

(2) 本题是吉米多维奇第 5 册第 3829 题和本章参考题第 15 题的特例.

10. 解答: 由

$$I'(\alpha)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left[\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{-2\alpha x^2}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\alpha}\int_0^1\frac{(1-\alpha^2x^2)-1}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{a}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2}{\alpha}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{\pi}{\alpha}-\frac{\pi}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}$$

可知

$$I(\alpha)=\int I'(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\pi\ln(1+\sqrt{1-\alpha^2})+C$$

而 $I(0)=0=\pi\ln2+C$, 则 $C=-\pi\ln2$ 从而 $I(\alpha)=\pi\ln(1+\sqrt{1-\alpha^2})-\pi\ln2$.

11. 解答: 容易验证积分和求导换序的条件, 则

$$I'(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[e^{-x^2}\cos(2yx)\right]\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}2xe^{-x^2}\sin(2yx)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}\sin(2yx)\mathrm{d}e^{-x^2}=-\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}\sin(2yx)$$

$$=-2y\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos(2yx)\mathrm{d}x=-2yI(y)$$

解微分方程

$$I'(y)=-2yI(y)$$

可得 $I(y)=Ce^{-y^2}$, 又 $I(0)=\int_0^{+\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 则 $I(y)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-y^2}$.

注: (1) 周民强第三册 P201 例 5.2.15(1) 给出了一般的通式.

(2) 其他证明方法可参见徐森林下册 P371 第 715 题.

(3) 利用留数的证明方法可参见钟玉泉《复变函数论》P249 例 6.17.

23.3.5 练习题

1. 解答:

(1) $$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x\ln\frac{1}{x}}} \xlongequal{x=e^{-t}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \xlongequal{t=2x^2} 2\sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi};$$

(2) 令 $\dfrac{x}{1+x} = t$, 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}t = \mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \qquad \square$$

2. 解答:

(1) 令 $\sin x = t$, 再令 $t^2 = u$, 即得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^\alpha x\mathrm{d}x = \int_0^1 t^\alpha\left(1-t^2\right)^{-\frac{\alpha+1}{2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{\alpha-1}{2}}(1-u)^{-\frac{\alpha+1}{2}}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{1-\alpha}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha+1}{2}\pi} = \frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}$$

(2) 令 $1+x = t$, 再令 $t = 2u$, 即得

$$\int_{-1}^1 (1+x)^a(1-x)^b\mathrm{d}x = \int_0^2 t^a(2-t)^b\mathrm{d}t = 2^{a+b+1}\int_0^1 u^a(1-u)^b\mathrm{d}u$$

$$=2^{a+b+1}\mathrm{B}(a+1,b+1) = 2^{a+b+1}\frac{a!b!}{(a+b+1)!} \qquad \square$$

3. 解答: 由 23.3.1 第 3 条性质可知

$$\mathrm{B}(p,n) = \frac{(p-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} = \frac{(p-1)!(n-1)!}{(p+n-1)(p+n-2)\cdots p(p-1)!}$$

$$=\frac{(n-1)!}{p(p+1)\cdots(p+n-1)} \qquad \square$$

4. 解答: 只需证明 $(\ln\Gamma(x))'' \geqslant 0$. 事实上, 由

$$(\ln\Gamma(x))'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \left[\Gamma'(x)\right]^2}{\Gamma^2(x)}$$

而由 Cauchy-Schwarz 不等式可知

$$\begin{aligned}\Gamma''(x)\Gamma(x) &= \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1}\ln^2 t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)\\ &\geqslant \left(\int_0^{+\infty}\sqrt{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}\cdot\sqrt{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}\ln t\mathrm{d}t\right)^2\\ &= \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1}\ln t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)^2 = [\Gamma'(t)]^2\end{aligned}$$

故 $(\ln\Gamma(x))'' \geqslant 0$, 即 $\ln\Gamma(x)$ 是下凸函数.

5. 解答:

(1)$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \xlongequal{x=u^2} \int_0^{+\infty} u^{2p-2}\mathrm{e}^{-u^2}2u\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} u^{2p-1}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$;

(2) 由 (1) 可知

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= 2\int_0^{+\infty} u^{2p-1}e^{-u^2}\mathrm{d}u\cdot 2\int_0^{+\infty} v^{2q-1}\mathrm{e}^{-v^2}\mathrm{d}v\\ &= 4\iint\limits_{[0,+\infty)^2} u^{2p-1}v^{2q-1}\mathrm{e}^{-\left(u^2+v^2\right)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &= \lim_{A\to+\infty} 4\iint\limits_{[0,A]^2} u^{2p-1}v^{2q-1}\mathrm{e}^{-\left(u^2+v^2\right)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\end{aligned}$$

(3) 作极坐标变换可得

$$\begin{aligned}&\lim_{A\to+\infty} 4\iint\limits_{D(A)} u^{2p-1}v^{2q-1}e^{-\left(u^2+v^2\right)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &= \lim_{A\to+\infty} 4\int_0^A r^{2(p+q)-1}\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta\\ &= \mathrm{B}(p,q)\Gamma(p+q)\end{aligned}$$

同理有

$$\lim_{A\to+\infty} 4\iint\limits_{D(\sqrt{2}A)} u^{2p-1}v^{2q-1}e^{-\left(u^2+v^2\right)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \mathrm{B}(p,q)\Gamma(p+q)$$

显然结论得证.

(4) 由于 $D(A)\subset[0,A]^2\subset D(\sqrt{2}A)$, 故

$$\iint\limits_{D(A)} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \leqslant \iint\limits_{[0,A]^2} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \leqslant \iint\limits_{D(\sqrt{2}A)} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

令 $A\to+\infty$ 得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{B}(p,q)\Gamma(p+q) \leqslant \Gamma(p)\Gamma(q) \leqslant \mathrm{B}(p,q)\Gamma(p+q)\\ &\Rightarrow \Gamma(p)\Gamma(q) = \mathrm{B}(p,q)\Gamma(p+q) \Rightarrow \mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\end{aligned}$$

23.4.2 参考题

1. 解答:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-t)}^{x+a(t-t)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t [f(x+a(t-\tau),\tau) + f(x-a(t-\tau),\tau)]\mathrm{d}\tau \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2a}\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2a}\int_0^t [f(x+a(t-\tau),\tau) - f(x+a(t-\tau),\tau)]\mathrm{d}\tau \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{1}{2}[f(x,t)+f(x,t)] + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}[f(x+a(t-\tau),\tau) + f(x-a(t-\tau),\tau)]\mathrm{d}\tau \\
&= f(x,t) + \frac{1}{2}a\int_0^t [f_1'(x+a(t-\tau),\tau) - f_1'(x-a(t-\tau),\tau)]\,\mathrm{d}\tau \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{2a}\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}[f(x+a(t-\tau),\tau) - f(x+a(t-\tau),\tau)]\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2a}\int_0^t [f_1'(x+a(t-\tau),\tau) - f_1'(x+a(t-\tau),\tau)]\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

综上就有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

注: 本题的出题背景是偏微分方程中的达朗贝尔公式, 相关内容可见陈祖墀《偏微分方程》的 3.1.3 节. □

2. 解答: 计算得

$$J_n'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\varphi\sin(n\varphi - x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$J_n''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\varphi\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

于是

$$\begin{aligned}
&x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + \left(x^2 - n^2\right)J_n(x) \\
=&-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[\left(x^2\sin^2\varphi + n^2 - x^2\right)\cos(n\varphi - x\sin\varphi) - x\sin\varphi\sin(n\varphi - x\sin\varphi)\right]\mathrm{d}\varphi \\
=&-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[\left(n^2 - x^2\cos^2\varphi\right)\cos(n\varphi - x\sin\varphi) - x\sin\varphi\sin(n\varphi - x\sin\varphi)\right]\mathrm{d}\varphi \\
=&-\frac{1}{\pi}(n + x\cos\varphi)\sin(n\varphi - x\sin\varphi)\Big|_0^\pi = 0
\end{aligned}$$

命题得证. □

3. 解答:

(1) 由 $f(0)=0$, 分部积分可知

$$\varphi(x)=\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\mathrm{d}t=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}\sqrt{x-t}=2\int_0^x \sqrt{x-t}f'(t)\mathrm{d}t$$

利用含参变量积分的求导法则可知

$$\varphi'(x)=\int_0^x \frac{f'(t)}{\sqrt{x-t}}\mathrm{d}t,\quad x\in(0,1]$$

再考虑

$$\varphi'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}2\int_0^x \frac{\sqrt{x-t}}{x}f'(t)\mathrm{d}t$$

考虑到 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 可设 $|f'(x)|\leqslant M$. 则

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \frac{\sqrt{x-t}}{x}f'(t)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_0^x \left|\frac{\sqrt{x-t}}{x}\right||f'(t)|\mathrm{d}t\leqslant M\int_0^x \frac{\sqrt{x-t}}{x}\mathrm{d}t\\ &\leqslant M\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}t=M\sqrt{x}\to 0\end{aligned}$$

所以 $\varphi'_+(0)=0$.

(2) 利用 (1) 的结论可知

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{x-t}}\mathrm{d}t&=\int_0^x \frac{\int_0^t \frac{f'(s)}{\sqrt{t-s}}\mathrm{d}s}{\sqrt{x-t}}\mathrm{d}t=\int_0^x \mathrm{d}t\int_0^t \frac{f'(s)}{\sqrt{(t-s)(x-t)}}\mathrm{d}s\\ &=\int_0^x f'(s)\mathrm{d}s\int_s^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-s)(x-t)}}=\int_0^x f'(s)\mathrm{d}s\int_0^{x-s}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t+s-s)(x-s-t)}}\\ &=\int_0^x f'(s)\mathrm{d}s\int_0^{x-s}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(x-s-t)}}=\int_0^x f'(s)\mathrm{d}s\int_0^{x-s}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\left(\frac{x-s}{2}\right)^2-\left(t-\frac{x-s}{2}\right)^2}}\\ &=\int_0^x f'(s)\arcsin\frac{t-\frac{x-s}{2}}{\frac{x-s}{2}}\Bigg|_0^{x-s}\mathrm{d}s=\pi\int_0^x f'(s)\mathrm{d}s=\pi[f(x)-f(0)]=\pi f(x)\end{aligned}$$

移项即得结论.

注: (1) 额外定义 $\varphi(0)$ 并不是鸡肋, 同样 $\varphi'_+(0)$ 也不可以直接代入 $x=0$ 得出结论.

(2) 前半题的其他方法可参见裴礼文 P815 练习题 7.1.1. □

4. 解答: 由 $f(x)$ 在 $[0,A]$ 上处处有定义且单调知 $f(0^+)$ 存在. 注意到对任意 $\alpha>0$ 有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^A f(x)\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}f(0^+)\right|&=\left|\int_0^A f(x)\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}f(0^+)\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant\left|\int_0^A[f(x)-f(0^+)]\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x\right|+\left|\int_A^{+\infty}f(0^+)\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x\right|\end{aligned}$$

由积分中值定理可知对于任意 $0<\delta<A$ 存在 $\xi_1\in[0,\delta],\xi_2\in[\delta,A]$ 使得

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\int_0^\delta+\int_\delta^A\right)[f(x)-f(0^+)]\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant&[f(\delta)-f(0^+)]\left|\int_{\xi_1}^\delta\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x\right|+[f(A)-f(0^+)]\left|\int_{\xi_2}^A\frac{\sin\alpha x}{x}dx\right| \\
=&[f(\delta)-f(0^+)]\left|\int_{\alpha\xi_1}^{\alpha\delta}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|+[f(A)-f(0^+)]\left|\int_{\alpha\xi_2}^{\alpha A}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|
\end{aligned}$$

令 $\alpha\to+\infty,\delta\to0^+$ 注意积分收敛的 Cauchy 准则以及 α 的一致性, 即可知

$$\left|\int_0^A f(x)\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}f(0^+)\right|\to0$$

即证命题. □

5. 解答: 换元可知

$$F(t)=\int_0^{+\infty}e^{-y}f\left(\frac{y}{t}\right)\mathrm{d}y$$

由于 $\lim\limits_{\to+\infty}f(x)=\alpha$, 故对 $\exists M>0,\forall x>M,|f(x)|\leqslant\alpha+1$, 而由题设在 $[0,M]$ 上 $f(x)$ 也有界, 即存在 $\beta>0$ 使得 $|f(x)|\leqslant\beta,\forall x\in[0,M]$. 取 $\gamma=\max\{\alpha,\beta\}$ 则 $|f(x)|\leqslant\gamma$. 则

$$\int_0^{+\infty}e^{-y}f\left(\frac{y}{t}\right)\mathrm{d}y\leqslant\int_0^{+\infty}\gamma e^{-y}\mathrm{d}y<+\infty$$

由 Weierstrass 判别法 $F(t)$ 关于 t 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. 于是

$$\lim_{t\to+\infty}F(t)=\int_0^{+\infty}e^{-y}\lim_{t\to+\infty}f\left(\frac{y}{t}\right)\mathrm{d}y=\alpha\int_0^{+\infty}e^{-y}\mathrm{d}y=\alpha$$

命题得证. □

6. 解答:

(1) 固定 t, 由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}
\left[\int_A^B f(t+u)f(u)\mathrm{d}u\right]^2&\leqslant\int_A^B f^2(t+u)\mathrm{d}u\int_A^B f^2(u)\mathrm{d}u \\
&=\int_{A+t}^{B+t}f^2(u)\mathrm{d}u\int_A^B f^2(u)\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

其中 A,B 充分大或充分小, 则 $g(t)$ 对每一个 t 都存在. 由 Weierstrass 判别法可知它对 t 是一致收敛的, 而 $f(t)\in C(-\infty,+\infty)$ 故 $g(t)\in C(-\infty,+\infty)$. 又由显然

$$\left[\int_A^B f(t+u)f(u)\mathrm{d}u\right]^2\leqslant\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(u)\mathrm{d}u\right]^2<+\infty$$

令 $A\to-\infty,B\to+\infty$, 由极限保号性可知 $g(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

(2) 换元且由 (1) 可知存在 $M>0$ 使得

$$\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/4\varepsilon}g(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}g(2\sqrt{\varepsilon}x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$

由 Weierstrass 判别法知左边的含参变量积分积分对 ε 一致收敛, 从而就有

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/4\varepsilon}g(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}g(0)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$$

得证命题. □

7. 解答:

(1) 考虑

$$f(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{|\sin x|^\alpha}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{|\sin x|^\alpha}\mathrm{d}x$$

令 $x=t+n\pi$, 则

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\pi}\int_0^{\pi}\frac{e^{-t}}{\sin^\alpha t}\mathrm{d}t=\frac{1}{1-e^{-\pi}}\int_0^{\pi}\frac{e^{-t}}{\sin^\alpha t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{1-e^{-\pi}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-t}}{\sin^\alpha t}\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{e^{-t}}{\sin^\alpha t}\mathrm{d}t\right]\end{aligned}$$

对任意 $0<b<1$, 对 $\alpha\in[0,b]$, 右端二积分分别以 $0,\pi$ 为奇点, 都以 $\sin^{-b}t$ 作为优函数, 因此它们在 $[0,b]$ 上一致收敛, 即 $f(\alpha)$ 在 $(0,1)$ 上内闭一致收敛, 故 $f(\alpha)$ 在 $(0,1)$ 上连续.

(2) 由 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上有界设 $|f(t)|<M$. 考虑对每个 $t\in[0,1]$, $u(t,\alpha)=\dfrac{1}{\sqrt{|t-\alpha|}}$ 是关于 α 在 $(0,1)$ 上的连续函数. 故对任给的 $\varepsilon>0$ 和某个 $\alpha_0\in(0,1)$, 存在 $\delta>0$, 只要 $|\alpha-\alpha_0|<\delta$ 就有 $|u(t,\alpha)-u(t,\alpha_0)|<\varepsilon$, 从而

$$|g(\alpha)-g(\alpha_0)|=\int_0^1 f(t)\left[u(t,\alpha)-u(t,\alpha_0)\right]\mathrm{d}t<M\varepsilon$$

由 ε 的任意性可知 $g(\alpha)$ 在 $(0,1)$ 上连续. □

8. 解答: 几何体位于 $y\geqslant0$ 的四个卦限内, 由对称性可知所求体积等于位于第一卦限体积的 4 倍. 球坐标变换后可从方程内可解得

$$r=\sqrt[3]{\frac{\sin\varphi\sin\theta}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}}$$

故

$$\begin{aligned}V&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt[3]{\frac{\sin\varphi\sin\theta}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}}}r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}\mathrm{d}\varphi=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi\end{aligned}$$

注: 这里用到了

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}\mathrm{d}\varphi \xlongequal{t=\tan\varphi} \int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t^4}{t\,(1+t^4)}$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^{\frac{1}{4}}(1+u)}=\frac{1}{4}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

□

9. 解答: 令 $x=ar\cos^{2n}\varphi\cos^{2n}\psi, y=br\sin^{2n}\varphi\cos^{2n}\psi, z=cr\sin^{2n}\psi$, 则

$$|J|=4n^2abcr^2\sin^{2n-1}\varphi\cos^{2n-1}\varphi\cos^{4n-1}\psi\sin^{2n-1}\psi$$

于是

$$M(0)=4n^2abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1 r^2\sin^{2n-1}\varphi\cos^{2n-1}\varphi\sin^{4n-1}\psi\sin^{2n-1}\psi\mathrm{d}r$$

$$=4n^2abc\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(n,n\right)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(2n,n\right)=\frac{abcn^2}{3}\cdot\frac{\Gamma(n)^2}{\Gamma(2n)}\cdot\frac{\Gamma(2n)\Gamma(n)}{\Gamma(3n)}=\frac{abcn^2}{3}\cdot\frac{\Gamma(n)^3}{\Gamma(3n)}$$

$$M_x(1)=4n^2a^2bc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1 r^3\cos^{4n-1}\varphi\cos^{6n-1}\psi\sin^{2n-1}\varphi\sin^{2n-1}\psi\mathrm{d}r$$

$$=a^2bcn^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\cos^{4n-1}\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{6n-1}\psi\sin^{2n-1}\psi\mathrm{d}\psi$$

$$=a^2bcn^2\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}(n,2n)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}(3n,n)=\frac{a^2bcn^2}{4}\cdot\frac{\Gamma(n)\Gamma(2n)}{\Gamma(3n)}\cdot\frac{\Gamma(3n)\Gamma(n)}{\Gamma(4n)}$$

从而质心的 x 坐标为

$$\bar{x}=\frac{M_x(1)}{M(0)}=\frac{3a}{4}\cdot\frac{\Gamma(2n)\Gamma(3n)}{\Gamma(n)\Gamma(4n)}$$

□

10. 解答: 记星形线所围成的图形为 D, 则其对 x 轴的惯性矩为

$$I_x=\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

记 D_1 为第一象限部分, 由对称性

$$I_x=4\iint\limits_{D_1} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^R dx\int_0^{\left(R^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}} y^2dy=\frac{4}{3}\int_0^R\left(R^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{2}}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{x=R\sin^3 t}\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(R^{\frac{2}{3}}-R^{\frac{2}{3}}\sin^2 t\right)^{\frac{9}{2}}3R\sin^2 t\cos t\mathrm{d}t=4R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{10}t\sin^2 t\mathrm{d}t$$

$$=2R^4\mathrm{B}(5.5,1.5)=2R^4\cdot\frac{\Gamma(5.5)\Gamma(1.5)}{\Gamma(7)}=2R^4\cdot\frac{21}{1024}\cdot\Gamma(0.5)^2=\frac{21}{512}\pi R^4$$

注: 最后利用了余元公式 (命题 23.3.3) 以及 23.3.4 中 $\Gamma(x)$ 函数的第二条性质. □

11. 解答: 由已知 $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u$ 可知 $\forall\varepsilon>0,\exists T>0$ 使得

$$\int_T^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u<\varepsilon \tag{1}$$

令 $tx=u$, 则

$$\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t^2x^2}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^t \mathrm{e}^{-u^2}f\left(\frac{u}{t}\right)\mathrm{d}t$$

只要证明

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \mathrm{e}^{-u^2}\left[f\left(\frac{u}{t}\right)-f(0)\right]\mathrm{d}u=0$$

因为 $f(x)\in C[0,1]$, 对上述 $\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $|u/t|<\delta$ 时有

$$\left|f\left(\frac{u}{t}\right)-f(0)\right|<\varepsilon \tag{2}$$

且存在 $M>0$ 使得 $|f(x)|\leqslant M,\forall x\in[0,1]$. 结合 (1)(2) 式可知当 t 充分大时有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t e^{-u^2}\left[f\left(\frac{u}{t}\right)-f(0)\right]\mathrm{d}u\right|&\leqslant 2M\int_T^t e^{-u^2}\mathrm{d}u+\int_0^T e^{-u^2}\left|f\left(\frac{u}{t}\right)-f(0)\right|\mathrm{d}u\\&\leqslant 2M\varepsilon+\varepsilon\frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}$$

□

由 ε 的任意性可知命题得证.

12. 解答: 易知 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛, 且固定 $y\in[0,+\infty)$, e^{-xy} 关于 x 是单调递减的有界函数, 由 Abel 判别法可知 $\int_0^{+\infty}e^{-xy}f(x)\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. 故积分与极限可换序, 即有

$$\lim_{y\to0^+}\int_0^{+\infty}e^{-xy}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

□

命题得证.

13. 解答:

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\cos x^p\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{p}-1}\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{p\Gamma(1-1/p)}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}u^{-\frac{1}{p}}e^{-tu}\mathrm{d}u\right)\cos t\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{p\Gamma(1-1/p)}\int_0^{+\infty}u^{-\frac{1}{p}}\left(\int_0^{+\infty}e^{-tu}\cos t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{p\Gamma(1-1/p)}\int_0^{\infty}\frac{u^{1-\frac{1}{p}}}{1+u^2}\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{p\Gamma(1-1/p)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^{1-\frac{1}{p}}\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{p\Gamma(1-1/p)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{1-\frac{1}{p}}\theta\cos^{\frac{1}{p}-1}\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2p\Gamma(1-1/p)}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2p},1-\frac{1}{2p}\right)=\frac{1}{2p\Gamma(1-1/p)}\Gamma\left(\frac{1}{2p}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2p}\right)\\&=\frac{1}{2p\Gamma(1-1/p)}\cdot\frac{\pi}{\sin(\pi/(2p))}=\frac{1}{2p}\cdot\sin\frac{\pi}{p}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cdot\frac{1}{\sin(\pi/(2p))}=\frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cos\frac{\pi}{2p}\end{aligned}$$

注: (1) 类似还可求得

$$\int_0^{+\infty}\sin x^p\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\sin\frac{\pi}{2p}$$

代入 $p=2$ 便可得到 Fresnel 积分.

(2) 本题也可以使用留数通过围道积分得到. □

14. 解答: 令 $1-x=t$ 可得

$$\int_0^1\ln\Gamma(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\ln\Gamma(1-t)\mathrm{d}t=\int_0^1\ln\Gamma(1-x)\mathrm{d}x$$

和原积分相加利用余元公式可知

$$2\int_0^1\ln\Gamma(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\ln[\Gamma(x)\Gamma(1-x)]\mathrm{d}x=\int_0^1\ln\frac{\pi}{\sin\pi x}\mathrm{d}x$$
$$=\ln\pi-\int_0^1\ln\sin\pi x\mathrm{d}x=\ln\pi-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\ln\sin t\mathrm{d}t=\ln\pi-\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi\ln\sin t\mathrm{d}t\right]$$
$$=\ln\pi-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=\ln\pi-\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)=\ln 2\pi$$

于是得到 $\int_0^1\ln\Gamma(x)\mathrm{d}x=\ln\sqrt{2\pi}$. □

15. 解答: 借助练习题 23.2.6 第 9 题 (2) 的结论可知

$$I_1=\frac{\pi}{2a}e^{-ab}$$

注意到 (由 Dirichlet 判别法易验证求导和积分换序的条件)

$$\frac{\partial I_k}{\partial a}=-2ak\int_0^{+\infty}\frac{\cos bx}{(a^2+x^2)^{k+1}}=-2akI_{k+1}$$

这就给出了 I_k 的递推公式. 而 I_k 再对 b 求导就可发现 $J_k=-\dfrac{\partial I_k}{\partial b}$. □

16. 解答: 记

$$f_n(x)=\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

则

$$\ln f_n(x)=\ln n!+x\ln n-\sum_{k=0}^n\ln(x+k)$$

对 x 求导可知

$$\frac{f_n'(x)}{f_n(x)}=\ln n-\sum_{k=0}^n\frac{1}{x+k}=\ln n-\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{x+k-1}-\frac{1}{k}\right)$$

取 $x=1$ 可知

$$\frac{f_n'(1)}{f_n(1)} = \ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

取极限可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n'(1)}{f_n(1)} = -\gamma$$

另一方面由 Gauss 无穷乘积分解公式可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n'(x)}{f_n(x)} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

结合以上可知

$$\Gamma'(1) = -\gamma\Gamma(1) = -\gamma$$

注: 其他证明方法可参见菲赫金哥尔茨《微积分学教程》第二卷 P641. □

17. 解答:

(1) 由 n 次根单位分解式可知

$$\begin{aligned} x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1 &= \frac{x^n-1}{x-1} \\ &= \prod_{k=1}^{n-1}\left(x-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(x-e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right) \end{aligned}$$

(2) 在 (1) 中令 $x\to 1$ 可知

$$\begin{aligned} n = \lim_{x\to 1}\frac{z^n-1}{z-1} &= \prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1}\left|1-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}\right| = \prod_{k=1}^{n-1}\sqrt{\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)^2+\left(\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^2} \\ &= \prod_{k=1}^{n-1}\sqrt{2\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)} = \prod_{k=1}^{n-1}2\sin\frac{k\pi}{n} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} \end{aligned}$$

移项即证.

(3) 利用余元公式和 (2) 的结论可知

$$\begin{aligned} &\left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]\left[\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\right]\cdots\left[\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\ =&\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{n}}\cdots\frac{\pi}{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}} = \frac{\pi^{n-1}}{\frac{n}{2^{n-1}}} = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n} \end{aligned}$$

两边开方即证命题.

注: 其他方法参见徐森林下册 P360 第 700 题. □

第二十四章　曲线积分

24.1.3 练习题

1. 解答:

(1) 曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$, 故

$$\mathrm{d}s = \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t\mathrm{d}t} = 3a\cos t\sin t\mathrm{d}t \quad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

则

$$\int_C \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right)\mathrm{d}s = 4a^{\frac{4}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^4 t + \sin^4 t\right)3a\cos t\sin t\mathrm{d}t = 4a^{\frac{7}{3}}$$

注:其他方法可参见吉米多维奇第 6 册 P118 第 4224 题.

(2) 凸围线由三段组成, 分别是直线段 $\varphi = 0(0 \leqslant r \leqslant a)$, 圆弧段 $r = a\,(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4)$, 直线段 $\varphi = \pi/4(0 \leqslant r \leqslant a)$. 弧长的微分相应的是 $\mathrm{d}s = \mathrm{d}r$, $\mathrm{d}s = \sqrt{r^2 + r'^2}\mathrm{d}\varphi = a\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}s = \mathrm{d}r$. 于是

$$\int_C \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s = \int_0^a \mathrm{e}^r\mathrm{d}r + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^a a\mathrm{d}\varphi + \int_0^a \mathrm{e}^r\mathrm{d}r = 2\left(\mathrm{e}^a - 1\right) + \frac{\pi a e^a}{4}$$

(3) 极坐标方程为 $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, 弧长的微分为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{r^2 + r'^2}\mathrm{d}\varphi = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\mathrm{d}\varphi$$

于是

$$\int_C |y|\mathrm{d}s = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\mathrm{d}\varphi = 4a^2(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2(2-\sqrt{2})$$

(4) 弧长的微分为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}\mathrm{d}x = \mathrm{ch}\frac{x}{a}\mathrm{d}x$$

于是

$$\int_C \frac{\mathrm{d}s}{y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{ch}\frac{x}{a}}{a^2\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{sh}\frac{x}{a}\right)}{1 + \mathrm{sh}^2\frac{x}{a}} = \frac{1}{a}\arctan\left(\mathrm{sh}\frac{x}{a}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{a}$$

(5) 由曲线方程得

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{y^4}{a^2} + y^2} = \frac{y}{a}\sqrt{y^2 + a^2}$$

从而曲线的参数方程可取为

$$\begin{cases} x=\dfrac{y^2}{a} \\ y=y \\ z=\dfrac{y}{a}\sqrt{y^2+a^2} \end{cases}$$

弧长的微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{2y}{a}\right)^2+1+\left(\frac{2y^2+a^2}{a\sqrt{y^2+a^2}}\right)^2}\mathrm{d}y=\sqrt{\frac{8y^6+9a^2y^2+2a^6}{a^2\left(y^2+a^2\right)}}\mathrm{d}y$$

于是

$$\int_c z\mathrm{d}s=\int_0^a\frac{y}{a}\sqrt{y^2+a^2}\sqrt{\frac{8y^3+9a^2y^2+2a^4}{a^2\left(y^2+a^2\right)}}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{8}}{a^2}\int_0^a y\sqrt{y^4+\frac{9}{8}a^2y^2+\frac{1}{4}a^4\mathrm{d}y}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\int_0^a\sqrt{\left(y^2+\frac{9a^2}{16}\right)^2-\frac{17a^4}{16^2}}\mathrm{d}\left(y^2+\frac{9a^2}{16}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\left[\frac{y^2+\frac{9a^2}{16}}{2}\sqrt{y^4+\frac{9}{8}a^2y^2+\frac{1}{4}a^4}-\frac{17a^4}{2\cdot16^2}\ln\left(y^2+\frac{9a^2}{16}+\sqrt{y^4+\frac{9}{8}a^2y^2+\frac{1}{4}a^4}\right)\right]\Bigg|_0^a$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\left[\left(\frac{25a^4}{64}\sqrt{\frac{19}{2}}-\frac{17a^4}{2\cdot16^2}\ln\frac{25a^2+8\sqrt{\frac{19}{2}}a^2}{16}\right)-\left(\frac{9a^4}{64}-\frac{17a^4}{2\cdot16^2}\ln\frac{17a^2}{16}\right)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\cdot\frac{25a^4\sqrt{38}-18a^4}{128}+\frac{\sqrt{2}}{a^2}\frac{17a^4}{2\cdot16^2}\ln\frac{17a^2/16}{\left(25a^2+8\sqrt{\frac{19}{2}}a^2\right)/16}$$

$$=\frac{a^2}{256\sqrt{2}}\left[100\sqrt{38}-72-17\ln\frac{25+4\sqrt{38}}{17}\right]$$

□

2. 解答:

(1) 当 $|x_0|<a$ 时弧长的微分为

$$ds=\sqrt{1+\frac{a^2}{a^2-x^2}+\frac{a^4}{4\left(a^2-x^2\right)^2}}=\frac{3a^2-2x^2}{2\left(a^2-x^2\right)}\mathrm{d}x$$

于是, 当 $x_0\geqslant0$ 时有

$$s=\int_0^{x_0}\frac{3a^2-2x^2}{2\left(a^2-x^2\right)}\mathrm{d}x=\frac{a}{4}\ln\frac{a+x_0}{a-x_0}+x_0=|z_0|+|x_0|$$

当 $x_0<0$ 时也有

$$s=\int_{x_0}^{0}\frac{3a^2-2x^2}{2\left(a^2-x^2\right)}\mathrm{d}x=-\frac{a}{4}\ln\frac{a+x_0}{a-x_0}-x_0=|z_0|+|x_0|$$

(2) 令 $x=\sqrt{a^2-z^2}\cos\varphi, y=\sqrt{a^2-z^2}\sin\varphi$, 不妨设 $z>0$, 则有

$$z=\sqrt{a^2-\left(x^2+y^2\right)}=\sqrt{a^2\left(1-\frac{1}{\operatorname{ch}^2\varphi}\right)}=a\operatorname{th}\varphi$$

而

$$\sqrt{a^2-z^2}=\sqrt{a^2\left(1-\operatorname{th}^2\varphi\right)}=\frac{a}{\operatorname{ch}\varphi}$$

故曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=\dfrac{a\cos\varphi}{\operatorname{ch}\varphi}\\ y=\dfrac{a\sin\varphi}{\operatorname{ch}\varphi}\\ z=a\operatorname{th}\varphi\end{cases}$$

弧长的微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2}\mathrm{d}\varphi=a\sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2\varphi+\operatorname{sh}^2\varphi+1}{\operatorname{ch}^4\varphi}}\mathrm{d}\varphi=\sqrt{2}a\frac{\mathrm{d}\varphi}{\operatorname{ch}\varphi}$$

于是弧长为

$$\begin{aligned}s&=\int_0^{\varphi}\sqrt{2}a\frac{\mathrm{d}\varphi}{\operatorname{ch}\varphi}=\sqrt{2}a\int_0^{\varphi}\frac{2}{\mathrm{e}^{\varphi}+\mathrm{e}^{-\varphi}}\mathrm{d}\varphi=2\sqrt{2}a\int_0^{\varphi}\frac{1}{1+\left(\mathrm{e}^{\varphi}\right)^2}\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\varphi}\right)\\&=2\sqrt{2}a\arctan\mathrm{e}^{\varphi}\Big|_0^{\varphi}=2\sqrt{2}a\left(\arctan e^{\varphi}-\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

由 $z=a\tan\varphi$ 知

$$\begin{aligned}&z\left(\mathrm{e}^{\varphi}+\mathrm{e}^{-\varphi}\right)=a\left(\mathrm{e}^{\varphi}-\mathrm{e}^{-\varphi}\right)\Rightarrow z\left(\mathrm{e}^{2\varphi}+1\right)=a\left(\mathrm{e}^{2\varphi}-1\right)\\&\Rightarrow\mathrm{e}^{2\varphi}=\frac{a+z}{a-z}\Rightarrow e^{\varphi}=\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}\end{aligned}$$

又因为

$$\tan\left(\arctan\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a-\sqrt{a^2-z^2}}{z}=\tan\frac{1}{2}\left(\arctan\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}\right)$$

所以

$$\arctan\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\arctan\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}$$

综上就有

$$s = \sqrt{2}a \arctan \frac{z}{\sqrt{a^2 - z^2}}$$

当 $z < 0$ 时同理可得

$$s = \sqrt{2}a \arctan \frac{-z}{\sqrt{a^2 - z^2}}$$

所以

$$s = \sqrt{2}a \arctan \frac{|z|}{\sqrt{a^2 - z^2}}$$ □

3. 解答: 弧长的微分为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 \frac{x}{a}}\mathrm{d}x = \mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\mathrm{d}x$$

质量为

$$M = \rho_0 \int_0^b \mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\mathrm{d}x = a\rho_0\,\mathrm{sh}\,\frac{b}{a} = \rho_0\sqrt{h^2 - a^2}$$

这里是因为

$$h = a\mathrm{ch}\frac{b}{a} \Rightarrow \mathrm{ch}\frac{b}{a} = \frac{h}{a} \Rightarrow \mathrm{sh}\,\frac{b}{a} = \sqrt{\mathrm{ch}^2\,\frac{b}{a} - 1} = \frac{\sqrt{h^2 - a^2}}{a}$$

于是质心的坐标为

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\rho_0}{M}\int_0^b x\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\mathrm{d}x = \frac{\rho_0}{M}\left[ab\,\mathrm{sh}\,\frac{b}{a} - a^2\left(\mathrm{ch}\,\frac{b}{a} - 1\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{h^2 - a^2}}\left[b\sqrt{h^2 - a^2} - a^2\left(\frac{h}{a} - 1\right)\right] = b - a\sqrt{\frac{h-a}{h+a}} \\ y_0 &= \frac{\rho_0}{M}\int_0^b y\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\mathrm{d}x = \frac{a\rho_0}{M}\int_0^b \mathrm{ch}^2\,\frac{x}{a}\mathrm{d}x = \frac{a\rho_0}{M}\int_0^b \frac{1 + \mathrm{ch}\,2x}{2}\mathrm{d}x = \frac{a\rho_0}{M}\left[\frac{x}{2} + \frac{a}{4}\,\mathrm{sh}\,\frac{2x}{a}\right]\Bigg|_0^b \\ &= \frac{a\rho_0}{M}\left(\frac{b}{2} + \frac{a}{4}\,\mathrm{sh}\,\frac{2b}{a}\right) = \frac{a}{\sqrt{h^2 - a^2}}\left(\frac{b}{2} + \frac{h}{2}\frac{\sqrt{h^2 - a^2}}{a}\right) = \frac{h}{2} + \frac{ab}{2\sqrt{h^2 - a^2}} \end{aligned}$$ □

4. 解答: 记 $a = s^{-1}(0), b = s^{-1}(L)$, 由公式 (24.1) 可知

$$\int_\Gamma f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}s = \int_a^b f(\boldsymbol{x}(t))|\boldsymbol{x}'(t)|\mathrm{d}t$$

而

$$|\boldsymbol{x}'(t)| = s'(t) = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow |\boldsymbol{x}'(s)| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s} = 1$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(\boldsymbol{x}(t))|\boldsymbol{x}'(t)|\mathrm{d}t = \int_0^L f(\boldsymbol{x}(s))|\boldsymbol{x}'(s)|\mathrm{d}s = \int_0^L f(\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s$$

从而命题得证.

注: 这是微分几何曲线论中曲线的弧长参数化, 这里的 $\boldsymbol{x}(s)$ 称为曲线 Γ 的自然参数. □

§24.2.4 练习题

1. 解答:

(1) 线段 AB 的参数方程为 $\begin{cases} x=t \\ y=2t-1 \end{cases}$ $(1\leqslant t\leqslant 2)$, 故

$$\int_L xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_1^2[t(2t-1)+2(t-1)]\mathrm{d}t=\frac{25}{6}$$

(2) 曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=t \\ y=2(t-1)^2+1 \end{cases}$ $(1\leqslant t\leqslant 2)$, 故

$$\int_L xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_1^2\left[t\left(2t^2-4t+3\right)+\left(2t^2-5t+3\right)(4t-4)\right]\mathrm{d}t=\frac{10}{3}$$

(3) 线段 AD 和线段 DB 的参数方程分别为 $\begin{cases} x=t \\ y=1 \end{cases}$ $(1\leqslant t\leqslant 2)$ 和 $\begin{cases} x=2 \\ y=t \end{cases}$ $(1\leqslant t\leqslant 3)$

$$\int_L xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_1^2 t\mathrm{d}t+\int_1^3(t-2)\mathrm{d}t=\frac{3}{2}$$ □

2. 解答:

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{a(t-\sin t)}{a(1-\cos t)}\cdot a(1-\cos t)+\frac{a\sin t}{-a\cos t}\right]\mathrm{d}t=\left(\frac{\pi^2}{24}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a-\frac{\ln 3}{2}$$ □

3. 解答: 线段 AB,BD,DA 的参数方程分别为

$$\begin{cases} x=t\in[1,3] \\ y=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \end{cases},\quad \begin{cases} x=3 \\ y=t\in[1,2] \end{cases},\quad \begin{cases} x=t\in[1,3] \\ y=1 \end{cases}$$

注意到曲线的方向, 可知

$$\begin{aligned}\int_C(x+y)^2\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y&=\int_1^3\left[\left(\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(t^2-\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)^2\right)\right]\mathrm{d}t\\&\quad+\int_2^1(9-t^2)\mathrm{d}t+\int_3^1(t+1)^2\mathrm{d}t\\&=28-\frac{20}{3}-\frac{56}{3}=\frac{8}{3}\end{aligned}$$

注: 由于曲线是封闭的, 也可用 Green 公式转化为二重积分计算. □

4. 解答: 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = t \\ y = t^2/2 \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2)$, 故

$$\int_C 4xy^2 \mathrm{d}x - 3x^4 \mathrm{d}y = \int_0^2 [t^5 - 3t^5] \mathrm{d}t = -\frac{64}{3}$$

□

5. 解答: 引入柱坐标变换

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

则

$$x^2 + y^2 = 2ax \Rightarrow r^2 = 2ar\cos\theta \Rightarrow r = 2a\cos\theta$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx &\Rightarrow r^2 + z^2 = 2Rr\cos\theta \\ &\Rightarrow z = \sqrt{2Rr\cos\theta - r^2} \\ &\Rightarrow z = 2\sqrt{aR - a^2}|\cos\theta| \end{aligned}$$

故曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = 2a\cos^2\theta \\ y = 2a\sin\theta\cos\theta \qquad (-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2) \\ z = \sqrt{2Rr\cos\theta - r^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\oint_C \left(y^2 + z^2\right) \mathrm{d}x + \left(z^2 + x^2\right) \mathrm{d}y + \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}z \\ =& \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[4a^2 \sin^2\theta \cos^2\theta + 4(aR - a^2)\cos^2\theta\right] (-4a\cos\theta\sin\theta) \mathrm{d}\theta \\ &+ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [4(aR - a^2)\cos^2\theta + 4a^2\cos^4\theta](2a\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [4a^2\cos^2\theta] z'(\theta)\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

注意到第一项和第三项积分内的函数都是奇函数, 第二项积分内的函数是偶函数, 故

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} [4(aR - a^2)\cos^2\theta + 4a^2\cos^4\theta](2a\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta = 2a^2R\pi$$

□

注: 也可利用 Stokes 公式计算, 参见吉米多维奇第六册第 4372 题.

6. 解答: 若满足 (1), 则

$$\begin{aligned} \int_C y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} [(R\sin\varphi\sin\theta)(-R\sin\varphi\sin\theta) + R\cos\varphi(R\sin\varphi\cos\theta)]\mathrm{d}\theta \\ &= -\pi R^2\sin^2\varphi + \pi R^2\sin\varphi\cos\varphi = \pi B^2\sin\varphi(\cos\varphi - \sin\varphi) \end{aligned}$$

若满足 (2), 则

$$\int_C y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z = \int_0^{\pi} [(R\sin\varphi\sin\theta)(R\cos\varphi\cos\theta) + R\cos\varphi(R\cos\varphi\sin\theta) + R\sin\varphi\cos\theta(-R\sin\varphi)]\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot R^2\sin\theta - \frac{\pi}{2}\cdot R^2\cos\theta = \frac{\pi R^2}{2}(\sin\theta - \cos\theta)$$ □

7. 解答:

(1)
$$I = \int_0^{2\pi} -\left(a^2\cos^2 t + 5a\sin t + \frac{3abt\sin t}{2\pi}\right) a\sin t + (5a\cos t + 3a^2\sin t\cos t - 2)\, a\cos t + \left(3a^2\sin t\cos t - \frac{2bt}{\pi}\right)\frac{b}{2\pi}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{3a^2bt\sin^2 t}{2\pi} + 5a^2\cos^2 t - 5a^2\sin^2 t - \frac{b^2t}{\pi^2}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{3}{2}a^2b\pi - 2b^2$$

(2) 参数方程为 $\begin{cases} x = a \\ y = 0\ (0 \leqslant t \leqslant b), \\ z = t \end{cases}$ 故 $I = \int_0^b -4t\mathrm{d}t = -2b^2$. □

8. 解答: 由题意知

$$W = \int_L y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y + (x+y+z)\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^{2\pi}\left[a\sin t(-a\sin t) - a\cos t(a\cos t) + \left(a\cos t + a\sin t + \frac{b}{2\pi}t\right)\left(\frac{b}{2\pi}\right)\right]\mathrm{d}t$$
$$= -a^2\pi - a^2\pi + b^2/2 = b^2/2 - 2a^2\pi$$ □

9. 解答: 记 $P = \dfrac{e^x}{1+y^2}, Q = \dfrac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2}$, 注意到

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

故积分与路径无关, 可以用直线段连接始末点作为新路径来计算, 即

$$W = \int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{e^t}{1+t^2} + \frac{2t(1-e^t)}{(1+t^2)^2}\right]\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_0^1 (e^t - 1)\mathrm{d}\frac{1}{t^2+1}$$
$$= \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^2}\mathrm{d}t + \left.\frac{e^t-1}{t^2+1}\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{e-1}{2}$$ □

§24.3.3 练习题

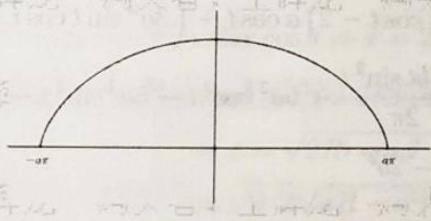
1. 解答:

(1) $\oint_C (x^2+xy)\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}(2x-x)\mathrm{d}y=0;$

(2) $\oint_C \ln\frac{2+y}{1+x^2}\mathrm{d}x+\frac{x(y+1)}{2+y}\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}\left[\frac{y+1}{2+y}-\frac{1}{2+y}\right]\mathrm{d}y=4-4\ln 3;$

(3) $\oint_C (x^2-y^2)\mathrm{d}x-2xy\mathrm{d}y=\iint\limits_D(-2y+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0;$

(4)(a) 如图所示



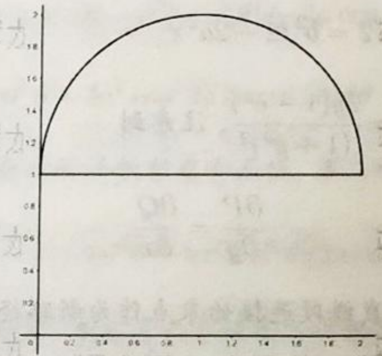
补充曲线

$$L: y=0,\quad -a\pi\leqslant x\leqslant a\pi$$

则由 Green 公式

$$I=\int_C+\int_L-\int_L=\iint\limits_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{-a\pi}^{a\pi}0\mathrm{d}x=0$$

(b) 如图所示



补充曲线

$$L: y=1,\quad 0\leqslant x\leqslant 2$$

则由 Green 公式

$$I=\int_C+\int_L-\int_L=\iint\limits_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=-\arctan 2$$

2. 解答:

(1) 记 $P=yf(xy), Q=xf(xy)$, 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 由 Green 公式可知

$$\oint_C f(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=\iint_D\left(-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

(2) 记 $P=x^{n-1}f(x^n+y^n), Q=y^{n-1}f(x^n+y^n)$, 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 由 Green 公式可知

$$\oint_C f(x^n+y^n)(x^{n-1}\mathrm{d}x+y^{n-1}\mathrm{d}y)=\iint_D\left(-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

本题取 $n=2$ 即可.

注: 也可借助全微分, 参见吉米多维奇第 6 册第 4270 题. □

3. 解答: 考虑

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y)$$

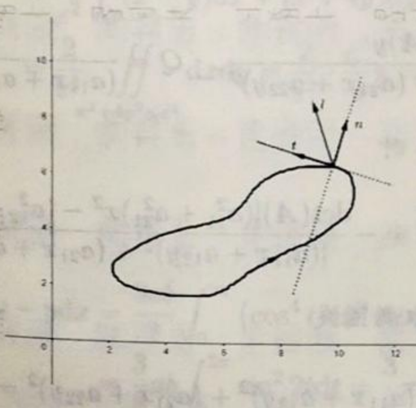
左右同乘 ds 可得

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x$$

于是, 由 Green 公式可知

$$\oint_L\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\iint_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4S_D=36\pi$$ □

4. 解答: 如图所示



用 $\boldsymbol{t}$ 表示单位切向量, 用 $\boldsymbol{n}$ 表示单位法向量, 则从图中可知

$$(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})=(\boldsymbol{l},x)-(\boldsymbol{n},x)$$

故得

$$\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})=\cos(\boldsymbol{l},x)\cos(\boldsymbol{n},x)+\sin(\boldsymbol{l},x)\sin(\boldsymbol{n},x)$$

但是

$$\sin(\boldsymbol{n},x)=\sin\left[(\boldsymbol{t},x)-\frac{\pi}{2}\right]=-\cos(\boldsymbol{t},x)$$

$$\cos(\boldsymbol{n},x)=\cos\left[(\boldsymbol{t},x)-\frac{\pi}{2}\right]=\sin(\boldsymbol{t},x)$$

且

$$\cos(\boldsymbol{t},x)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},\quad \sin(\boldsymbol{t},x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$$

因此有

$$\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})\mathrm{d}s=\cos(\boldsymbol{l},x)\mathrm{d}y-\sin(\boldsymbol{l},x)\mathrm{d}x$$

利用 Green 公式, 并注意到 $\sin(\boldsymbol{l},x)$ 和 $\cos(\boldsymbol{l},x)$ 均为常数, 即得

$$\oint_C\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})\mathrm{d}s=\oint_C[-\sin(\boldsymbol{l},x)\mathrm{d}x+\cos(\boldsymbol{l},x)\mathrm{d}y]=\iint_S 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$ □

5. 解答: 记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$, 由题意知 $\det(\boldsymbol{A})\neq 0$, 而使得 $X^2+Y^2=0$(即 $X=Y=0$) 的条件是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$, 故该方程组只有零解, 即只有在原点处能够使得 $X^2+Y^2=0$. 而

$$\begin{aligned}X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}x&=(a_{11}x+a_{12}y)(a_{21}\mathrm{d}x+a_{22}\mathrm{d}y)-(a_{21}x+a_{22}y)(a_{11}\mathrm{d}x+a_{12}\mathrm{d}y)\\&=\det(\boldsymbol{A})(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow I=\oint_C\frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}=\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

其中

$$P=-\frac{\det(\boldsymbol{A})y}{(a_{11}x+a_{12}y)^2+(a_{21}x+a_{22}y)^2},\quad Q=\frac{\det(\boldsymbol{A})x}{(a_{11}x+a_{12}y)^2+(a_{21}x+a_{22}y)^2}$$

容易算得当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\det(\boldsymbol{A})[(a_{11}^2+a_{21}^2)x^2-(a_{12}^2+a_{22}^2)y^2]}{[(a_{11}x+a_{12}y)^2+(a_{21}x+a_{22}y)^2]^2}$$

故积分与路径无关, 可以取新围线

$$C':(a_{11}x+a_{12}y)^2+(a_{21}x+a_{22}y)^2=r^2$$

其中 r 是充分小的正数. 于是利用 Green 公式得

$$\begin{aligned}I&=\oint_C\frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}=\oint_{X^2+Y^2=r^2}\frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}\\&=\frac{1}{r^2}\oint_{X^2+Y^2=r^2}X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X=\frac{\det(\boldsymbol{A})}{r^2}\oint_{X^2+Y^2=r^2}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \frac{\det(\boldsymbol{A})}{r^2} \iint\limits_{X^2+Y^2\leqslant r^2} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\det(2\boldsymbol{A})}{r^2} \iint\limits_{X^2+Y^2\leqslant r^2} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(X,Y)}\right| \mathrm{d}X\mathrm{d}Y$$

$$= \frac{2\det(\boldsymbol{A})}{r^2} \cdot \frac{1}{|\det(\boldsymbol{A})|}\pi r^2 = 2\pi\mathrm{sgn}(\det(\boldsymbol{A}))$$

命题得证. □

6. 解答: 记

$$P = \frac{x-y}{x^2+4y^2}, \quad Q = \frac{x+4y}{x^2+4y^2}$$

注意到

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

故积分与路径无关, 可取新路径为围线

$$C: x^2+4y^2 = \varepsilon^2$$

则有

$$I = I_1 + I_2 = \oint_{L-C} \frac{(x-y)\mathrm{d}x + (x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2} + \int_C \frac{(x-y)\mathrm{d}x + (x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

由 Green 公式可知 $I_1 = 0$, 而

$$I_2 = \int_C \frac{(x-y)\mathrm{d}x + (x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_C (x-y)\mathrm{d}x + (x+4y)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{2}{\varepsilon^2}\iint\limits_{x^2+4y^2\leqslant\varepsilon^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\frac{\varepsilon^2}{2}\pi = \pi$$

故可知 $I = \pi$. □

7. 解答:

(1)

$$S = \frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{3ab}{2}\int_0^{2\pi} \left(\cos^4 t\sin^2 t + \cos^2 t\sin^4 t\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{8}ab\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\mathrm{d}t = \frac{3}{8}\pi ab$$

(2) 作代换 $y = tx$, 可得曲线参数方程

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}(0 \leqslant t \leqslant +\infty)$$

且

$$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t$$

从而

$$S=\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t=\frac{3a^2}{2}\left[-\frac{1}{1+t}\right]\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{3a^2}{2}$$

(3) 作代换 $y=\dfrac{b}{a}xt$, 可得曲线参数方程

$$x=\frac{act^n}{1+t^{2n+1}},\quad y=\frac{bct^{n+1}}{1+t^{2n+1}}\,(0\leqslant t<+\infty)$$

且

$$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{abc^2t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^2}\mathrm{d}t$$

从而

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{abc^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^2}\mathrm{d}t\\&=-\frac{abc^2}{2(2n+1)}\cdot\frac{1}{1+t^{2n+1}}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{abc^2}{2(2n+1)}\end{aligned}$$

8. 解答:

(1) 由于

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=0$$

故积分与路径无关

$$\begin{aligned}I&=\int_{(1,2)}^{(3,2)}\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_{(3,2)}^{(2,4)}\Psi(y)\mathrm{d}y\\&=\int_1^3\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_2^4\Psi(y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

(2) 由于

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

故积分与路径无关

$$\begin{aligned}I&=\left(\int_{(1,0)}^{(6,0)}+\int_{(6,0)}^{(6,8)}\right)\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\\&=\ln 6+\frac{1}{2}\ln 100-\frac{1}{2}\ln 36=\ln 10\end{aligned}$$

9. 解答:

(1) 记

$$M_1=-y\sqrt{x^2+y^2+1},\qquad M_2=-x(x^2+y^2)$$
$$N_1=x\sqrt{x^2+y^2+1},\qquad N_2=-y(x^2+y^2)$$

考虑方程

$$M_1\mathrm{d}x+N_1\mathrm{d}y=0\qquad(1)$$
$$M_2\mathrm{d}x+N_2\mathrm{d}y=0\qquad(2)$$

取 $\mu_1=\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+y^2+1}}$ 乘于 (1) 式两边可见

$$-\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{x}\mathrm{d}y=\mathrm{d}\frac{y}{x}=0$$

故 (1) 的积分因子为 μ_1, 通解为 $\varphi_1(x,y)=\dfrac{y}{x}=C_1$.

而易验证 (2) 是一个恰当方程, 积分因子可看作 $\mu_2=1$, 按照 (24.12) 可求出它的通解是

$$\varphi_2(x,y)=\frac{(x^2+y^2)^2}{4}=C_2$$

然后设

$$\mu_1g_1(\varphi_1)=\mu_2g_2(\varphi_2)$$

即

$$\frac{g_1(y/x)}{x^2\sqrt{x^2+y^2+1}}=g_2\left[\frac{(x^2+y^2)^2}{4}\right]$$

记 $y/x=t_1$, $x^2+y^2=t_2$, 则有

$$1+t_1^2=\frac{t_2}{x^2}\Rightarrow x=\sqrt{\frac{t_2}{1+t_1^2}}$$

方程转化为

$$\frac{1+t_1^2}{t_2\sqrt{t_2+1}}g_1(t_1)=g_2\left(\frac{t_2^2}{4}\right)$$

令 $g_1(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, 则

$$g_2\left(\frac{t_2^2}{4}\right)=\frac{1}{t_2\sqrt{t_2+1}}$$

令 $t_2=2\sqrt{x}$, 则

$$g_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{x}+1}\cdot2\sqrt{x}}$$

于是取

$$M = g_2\left(\frac{t_2^2}{4}\right) = \frac{1}{t_2\sqrt{t_2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}(x^2+y^2)}$$

易验证

$$Mw = \left[-\frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\right]\mathrm{d}x + \left[\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\right]\mathrm{d}y$$

在 $(x,y) \neq (0,0)$ 时是全微分, 按 (24.12) 即可求出原函数为

$$\varphi(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1} + \arctan\frac{x}{y} + C$$

(2) 记

$$M_1 = x(ay+bx)^3, \qquad M_2 = axy^3$$
$$N_1 = y(ay+bx)^3, \qquad N_2 = bx^3y$$

考虑方程

$$M_1\mathrm{d}x + N_1\mathrm{d}y = 0 \tag{1}$$
$$M_2\mathrm{d}x + N_2\mathrm{d}y = 0 \tag{2}$$

取 $\mu_1 = \dfrac{1}{(ay+bx)^3}$ 乘于 (1) 式两边可见

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = \mathrm{d}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) = 0$$

故 (1) 的积分因子为 μ_1, 通解为 $\varphi_1(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2} = C_1$.
取 $\mu_2 = -\dfrac{1}{x^3y^3}$ 乘于 (2) 式两边可见

$$-\frac{a}{x^2}\mathrm{d}x - \frac{b}{y^2}\mathrm{d}y = \mathrm{d}\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y}\right) = 0$$

故 (2) 的积分因子为 μ_2, 通解为

$$\varphi_2(x,y) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = C_2$$

然后设

$$\mu_1 g_1(\varphi_1) = \mu_2 g_2(\varphi_2)$$

即

$$\frac{g_1\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)}{(ay+bx)^3} = -\frac{g_2\left(\dfrac{ay+bx}{xy}\right)}{x^3y^3}$$

取 $g_1(x) = -1, g_2(x) = \dfrac{1}{x^3}$, 则可满足上述方程. 于是取

$$M = \mu_1 g_1(\varphi_1) = \frac{1}{(ay+bx)^3}$$

易验证

$$Mw = \left[x + \frac{axy^3}{(ay+bx)^3}\right]\mathrm{d}x + \left[y + \frac{bx^3y}{(ay+bx)^3}\right]\mathrm{d}y$$

在 $ay + bx \neq 0$ 时是全微分, 按 (24.12) 即可求出原函数为

$$\varphi(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{x^2y^2}{2(ay+bx)^2} + C$$

注: 本题采用的手段是常微分方程中的分组求积分因子, 该方法的具体详情参见方道元 2.2 节 (一般的常微分方程教材不会涉及). □

§24.5.2 参考题

第一组参考题

1. 解答: 由两类曲线积分的关系及 Cauchy 不等式可知

$$\begin{aligned}
\left|\int_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y\right| &= \left|\int_C [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s\right| \\
&\leqslant \int_C |P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta|\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_C \sqrt{[P^2(x,y)+Q^2(x,y)][\cos^2\alpha+\cos^2\beta]}\mathrm{d}s \\
&\leqslant M\int_C \mathrm{d}s = ML
\end{aligned}$$

记

$$P(x,y) = \frac{y}{(x^2+xy+y^2)^2}, \quad Q(x,y) = -\frac{x}{(x^2+xy+y^2)^2}$$

则

$$P^2(x,y) + Q^2(x,y) = \frac{x^2+y^2}{(x^2+xy+y^2)^4} \leqslant \frac{16}{(x^2+y^2)^3}$$

于是利用已证得的不等式可知

$$|I_R| \leqslant \frac{16}{R^3}\cdot 2\pi R = \frac{32\pi}{R^2} \to 0 \quad (R \to +\infty)$$

即证 $\lim\limits_{R\to+\infty} I_R = 0$.

注: 推广结论及不同证法参见徐森林下册 P99 第 477 题.

2. 解答: 只计算 (2), 取 $b=0$ 即得 (1). □

$$
\begin{aligned}
I &= \int\limits_{x^2+y^2=R^2} \ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\mathrm{d}s \\
&= R\int_0^{2\pi} \ln\sqrt{(R\cos\theta-a)^2+(R\sin\theta-b)^2}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{R}{2}\int_0^{2\pi} \ln[R^2-2aR\cos\theta-2bR\sin\theta+(a^2+b^2)]\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

由辅助角公式及三角函数积分的周期性可知

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{R}{2}\int_0^{2\pi} \ln[R^2-2R\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\varphi)+(a^2+b^2)]\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{R}{2}\int_0^{2\pi} \ln[R^2-2R\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta+(a^2+b^2)]\mathrm{d}\theta \\
&= R\int_0^{\pi} \ln[R^2-2R\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta+(a^2+b^2)]\mathrm{d}\theta \\
&= R\int_0^{\pi} \ln\left[1-2\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{R}\cos\theta+\frac{a^2+b^2}{R^2}\right]\mathrm{d}\theta+2\pi R\ln R
\end{aligned}
$$

由第十一章第二组参考题第 2 题的结论可知

$$
I=\begin{cases} 2\pi R\ln R, & a^2+b^2<R^2 \\ 2\pi R\ln\sqrt{a^2+b^2}, & a^2+b^2>R^2 \end{cases}
$$

注: 事实上根据第十一章第二组参考题第 2 题的结论, 当 $a^2+b^2=R^2$ 时结论也是成立的 (此时 $I=2\pi R\ln R$). □

3. 解答: 考虑

$$
\begin{aligned}
&\ln\sqrt{x^2+y^2}\oint f(\xi,\eta)\mathrm{d}s-u(x,y) \\
&=\oint_L f(\xi,\eta)\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\mathrm{d}s+\oint_L f(\xi,\eta)\ln\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s \\
&=\oint_L f(\xi,\eta)\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\oint f(\xi,\eta)\ln\frac{x^2+y^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

我们只需要证明

$$
\lim_{x^2+y^2\to+\infty}\oint f(\xi,\eta)\ln\frac{x^2+y^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\mathrm{d}s=0 \tag{*}
$$

即可证得充要性. 下面来证明 (*) 式成立.

先由 $f(x,y)$ 在有界闭集上连续性可知存在 $M>0$ 使得

$$\left|f(\xi,\eta)\ln\frac{x^2+y^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\mathrm{d}s\right|\leqslant M\left|\ln\frac{x^2+y^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\mathrm{d}s\right|$$

令 $x=\rho\cos\varphi,y=\rho\sin\varphi,\xi=r\cos\theta,\eta=r\sin\theta$, 则

$$\begin{aligned}\ln\frac{x^2+y^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}&=\ln\frac{\rho^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)}\\&=-\ln\left[1+\left(\frac{r}{\rho}\right)^2-\frac{2r}{\rho}\cos(\theta-\varphi)\right]\end{aligned}$$

记 $r_0=\max\limits_{0\leqslant\theta\leqslant2\pi}r(\theta)$，当 $\rho^2=x^2+y^2\to+\infty$ 时

$$\left|\left(\frac{r}{\rho}\right)^2-\frac{2r}{\rho}\cos(\theta-\varphi)\right|\leqslant\left(\frac{r}{\rho}\right)^2+\frac{2r}{\rho}\leqslant\left(\frac{r_0}{\rho}\right)^2+\frac{2r_0}{\rho}\to0$$

故当 $x^2+y^2\to+\infty$ 时

$$\ln\frac{x^2+y^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\rightrightarrows0$$

关于 $(\xi,\eta)\in L$. 于是 $\forall\varepsilon>0,\exists\Delta>0$ 使得 $|x|>\Delta,|y|>\Delta$ 时有

$$\ln\frac{x^2+y^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}<\frac{\varepsilon}{lM}$$

其中 l 表示曲线 L 的长度. 则综上可知

$$\begin{aligned}\left|\oint_L f(\xi,\eta)\ln\frac{x^2+y^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\mathrm{d}s\right|&\leqslant\oint_L\left|f(\xi,\eta)\ln\frac{x^2+y^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right|\mathrm{d}s\\&\leqslant M\cdot\frac{\varepsilon}{lM}\oint_L\mathrm{d}s=\varepsilon\end{aligned}$$

由 ε 的任意性可知 $(*)$ 式成立, 从而命题得证. □

4. 解答:

必要性: 若前者成立则用二重积分的极坐标代换 $(\xi=x-\rho\cos\theta,\eta=y-\rho\sin\theta))$ 可知

$$\pi r^2u(x,y)=\iint\limits_{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\leqslant r^2}u(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^r\rho u(\rho(x-\cos\theta),\rho(y-\sin\theta))\mathrm{d}\rho$$

两边对 r 求导可知

$$2\pi ru(x,y)=\int_0^{2\pi}ru(r(x-\cos\theta),r(y-\sin\theta))\mathrm{d}\theta$$

另一方面把第一型曲线积分转化为定积分可知

$$\oint\limits_{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\leqslant r^2} u(\xi,\eta)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi} ru(r(x-\cos\theta),r(y-\sin\theta))\mathrm{d}\theta$$

故

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} ru(r(x-\cos\theta),r(y-\sin\theta))\mathrm{d}\theta=\oint\limits_{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\leqslant r^2} u(\xi,\eta)\mathrm{d}s$$

即后者成立.

充分性: 反之若后者成立, 则先把第一型曲线积分转化为定积分后两边对 r 积分即可证得前者成立.

注: 事实上题设的两个条件都等价于调和函数的 (逆) 平均值定理, 并且可推广至 n 维. 关于 n 维情形调和函数的 (逆) 平均值定理可参见 GT《二阶椭圆型偏微分方程》定理 2.1 和 2.7 或柯朗《数学物理方法》第四章 1.3 节和 3.2 节, 低维特例可参看 26.2.2 性质 1 以及第二十六章第二组参考题第 1 题.

5. 解答: 先由 Green 公式引出二重积分的分部积分公式, 即

$$\iint\limits_G fg_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial G} fg\mathrm{d}y-\iint\limits_G f_xg\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

$$\iint\limits_G fg_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial G} fg\mathrm{d}x-\iint\limits_G f_yg\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2}$$

只证第 (1) 式, 类似可得第 (2) 式: 由下式移项即可

$$\oint_{\partial G} fg\mathrm{d}y\xlongequal{\text{Green}}\iint\limits_G (fg)_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_G f_xg\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_G fg_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

现在在 (1) 中令 $g(x,y)=x$, 并注意到 f 在边界 ∂G 上为零, 则

$$\iint\limits_G f\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_G xf_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

运用 (2) 式我们还可以得到

$$\iint\limits_G f\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_G yf_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

于是由 Cauchy 不等式有

$$\left|\iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|=\frac{1}{2}\left|\iint\limits_G (xf_x+yf_y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{1}{2}\iint\limits_G \left(f_x^2+f_y^2\right)^{1/2}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

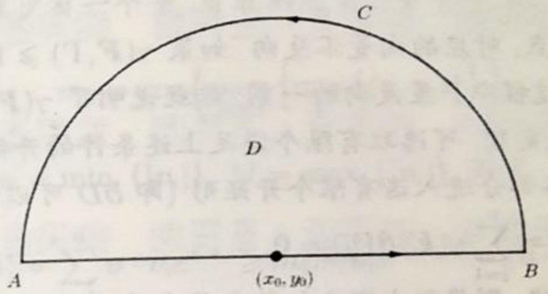
记 $M=\max\limits_G\left\{\left(f_x^2+f_y^2\right)^{1/2}\right\}$, 则

$$\left|\iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{M}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{3}a^3M$$

□

命题得证.

6. 解答: 如图所示, 连接半圆周 C 的两个端点 A,B 形式闭路, 记半圆域为 D, 半径为 r.



则由 Green 公式和积分中值定理可知存在 $M\in D$ 使得

$$\begin{aligned}\int_{AB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y&=\oint_{C+AB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{M^\bullet}\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{M^\bullet}\cdot\frac{\pi r^2}{2}\end{aligned}$$

另一方面由积分中值定理可知存在 $\xi\in[x_0-r,x_0+r]$

$$\begin{aligned}\int_{AB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y&=\int_{AB}P(x,y)\mathrm{d}x\\&=\int_{x_0-r}^{x_0+r}P\left(x,y_0\right)\mathrm{d}x\\&=P\left(\xi,y_0\right)\int_{x_0-r}^{x_0+r}\mathrm{d}x\\&=P(\xi,y_0)\cdot 2r\end{aligned}$$

结合来看就有

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{M^\bullet}\cdot\frac{\pi r}{2}=P\left(\xi,y_0\right)\cdot 2$$

此式对于 $\forall r>0$ 都成立, 则令 $r\to 0^+$ 可得 $P(x_0,y_0)=0$, 再由 (x_0,y_0) 的任意性可知 $P(x,y)=0$. 再由上式可知

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{M^\bullet}=0$$

再令 $r\to 0^+$ 可得 $\left.\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=0$. 由 (x_0,y_0) 的任意性即知 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=0$ 也成立. □

第二组参考题

1. 解答: 考虑 D 内任一点 (x,y), 存在以 (x,y) 为中心的开矩形 (只要区域足够小, 向量的形变就足够小), 使对于任一条位于开矩形及其边界上的逐段光滑定向闭曲线 Γ 有

$$\frac{\boldsymbol{F}(x_1,y_1)}{|\boldsymbol{F}(x_1,y_1)|}\neq-\frac{\boldsymbol{F}(x_2,y_2)}{|\boldsymbol{F}(x_2,y_2)|},\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\Gamma$$

即对于 Γ 内的任意两点, 对应的向量不反向. 如果 $\gamma(\boldsymbol{F},\Gamma)\geqslant 1$, 则必然会导致向量场内的向量在旋转一周的过程中产生反向的一刻, 这就说明了 $\gamma(\boldsymbol{F},\Gamma)=0$. 注意到 D 是有界闭域, 故由有限覆盖定理, 可选取有限个满足上述条件的开矩形 $D_1,D_2,\cdots,D_n$ 覆盖住 D. 将 ∂D 剖分成各部分进入这有限个开矩形 (即 ∂D 可以由 D_i 内的闭曲线 Γ_i 组合而成). 从而 $\gamma(\boldsymbol{F},\partial D)=\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma(\boldsymbol{F},\partial D_i)=0$.

注: 考虑若 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 退化, 则将引出微分拓扑中著名的 Poincaré—Hopf 定理, 它刻画了曲面的切矢量场和拓扑的内在关系, 可参见张筑生《微分拓扑新讲》定理 6.3. □

2. 解答: 记 $M=\max\limits_{\boldsymbol{x}\in D}f(\boldsymbol{x}),m=\min\limits_{\boldsymbol{x}\in D}f(\boldsymbol{x})$. 如果 $m=M$ 则 $f(\boldsymbol{x})$ 为常值函数, 结论不证自明. 现在假设 $M>m$, 并设 $\boldsymbol{P}$ 为最大值点, $\boldsymbol{Q}$ 为最小值点. 由于

$$\sum_{i=1}^{n}D_if(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_i=\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})$$

为全微分, 故对于任意的曲线 L, 曲线积分 $\int_L\sum\limits_{i=1}^{n}D_if(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_i$ 积分与路径无关. 这样, 对于任何以 $\boldsymbol{P}$ 为起点, $\boldsymbol{Q}$ 为终点的曲线 L 有

$$\int_L\nabla f(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\int_L\sum_{i=1}^{n}D_if(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_i=M-m$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ 为 L 在 $\boldsymbol{x}$ 处的单位切向量.

现在, 我们选取一条路径 $L:\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$, 使得 L 的长度为 $2r$(两点最近距离至多为 $2r$, 若不足 $2r$ 则可多绕路), 且 $x_i'=\dfrac{D_if(\boldsymbol{x}(s))}{|\nabla f(\boldsymbol{x}(s))|}$, 则曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 都在 D 内, 且

$$\int_L\nabla f(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\int_L|\nabla f(\boldsymbol{x})|\mathrm{d}s=M-m$$

由介值定理可知存在 $\boldsymbol{p}_0=(p_1^0,\cdots,p_n^0)\in\operatorname{int}D$ 使得

$$\max_{\boldsymbol{x}\in D}f(\boldsymbol{x})-\min_{\boldsymbol{x}\in D}f(\boldsymbol{x})=|\nabla f(\boldsymbol{p}_0)|\cdot 2r\in[\min_{\boldsymbol{x}\in D}|\nabla f(\boldsymbol{x})|\cdot 2r,\max_{\boldsymbol{x}\in D}|\nabla f(\boldsymbol{x})|\cdot 2r]$$

注: 如果设定 L 的长度 $a\geqslant 2r$, 则存在其它中值点 $\boldsymbol{p}_0$ 使得 $M-m=|\nabla f(\boldsymbol{p}_0)|\cdot a$. 但是 $a<2r$ 时不一定可行, 因为最值点为对径点时任何长为 a 的曲线无法连接这两点. □

3. 解答: 令 $f(\boldsymbol{v})=\sum_{i=1}^{n} e^{(a_i,b_i)\boldsymbol{v}}$, 令 $\boldsymbol{v}=(u,v)$, 得到梯度向量场

$$\nabla f(u,v)=\sum_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\,e^{a_iu+b_iv}$$

考察函数 $\boldsymbol{v}\cdot\nabla f(\boldsymbol{v})>0$, 记 $\boldsymbol{v}_i=(a_i,b_i)(i=1,2,\cdots,n)$. 由于多边形包含原点在其内部, 对任何非零向量 $\boldsymbol{v}$, 至少有一个 $\boldsymbol{v}_i$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角小于 $\pi/2$, 记

$$m_0=\cos\left(\max_{|\boldsymbol{v}|=1}\left\{\min_i\left\{\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_i\rangle\right\}\right\}\right)$$

有 $m_i\in(0,1)$, 再记 $m=\min_i\{|\boldsymbol{v}_i|\}, M=\max_i\{|\boldsymbol{v}_i|\}$, 则有

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla f(\boldsymbol{v})=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_ie^{v\cdot v_i}\geqslant m_0m|\boldsymbol{v}|e^{m_0m|\boldsymbol{v}|}-(n-1)M|\boldsymbol{v}|$$

可知当 $|\boldsymbol{v}|$ 足够大就有 $\boldsymbol{v}\cdot\nabla f(\boldsymbol{v})>0$. 考虑 $D=\{\boldsymbol{v}:|\boldsymbol{v}|\leqslant r\}$, 则 r 足够大时在 ∂D 上总有

$$(u,v)\cdot\nabla f(u,v)>0$$

即 $\nabla f(u,v)$ 和 (u,v) 的夹角不超过 $\pi/2$. 现在令

$$G(u,v,\lambda)=\lambda\nabla f(u,v)+(1-\lambda)(u,v)$$

则对任何 $\lambda\in[0,1]$ 有 $G(u,v,\lambda)$ 在 ∂D 非退化, 故 ∇f 与 id 是 ∂D 上的同伦向量场, 故

$$\gamma(\nabla f,\partial D)=\gamma(\text{ id },\partial D)=1$$

因此 ∇f 在 D 上非退化, 即存在 $(u_0,v_0)\in D$ 使

$$\nabla f(u_0,v_0)=\sum_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\,e^{u_0a_i+v_0b_i}=0$$

取 $x=e^{u_0}, y=e^{v_0}$ 即证命题.

注: 下面再给出一个极具分析色彩的证明:

依然令 $f(\boldsymbol{v})=\sum_{i=1}^{n}e^{(a_i,b_i)\boldsymbol{v}}$, 令 $\boldsymbol{v}=(u,v)$, 得到梯度向量场

$$\nabla f(u,v)=\sum_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\,e^{a_iu+b_iv}$$

即要寻找 $\nabla f(u,v)$ 的零点, 只需证明该向量场在包含原点半径 R 充分大的圆周上旋转都不为 0. 为此, 令 $\varphi(u,v)=\max_k\{a_ku+b_kv\}$. 下证当 $(u,v)\neq(0,0)$ 时有 $\varphi(u,v)>0$.

假设存在 $(s,t)\neq(0,0)$ 使得当 $k=1,2,\cdots,n$ 时有 $\varphi(s,t)\leqslant 0$, 则有 $sa_k+tb_k\leqslant 0$. 考虑 Oxy 平面上的集合 $B=\{(x,y)|sx+ty\leqslant 0\}$, 这是一个过原点直线 $sx+ty=0$ 为边界的半平面 (原点在直线上) 且 $(a_k,b_k)\in B(k=1,2,\cdots,n)$. 则以 $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_n,b_n)$ 为顶点的凸多边形不可能包含原点 O 在其内, 从而导致了矛盾. 因此当 $(u,v)\neq(0,0)$ 时有 $\varphi(u,v)>0$. 而 $k=1,2,\cdots,n$ 有限, 故 $\varphi(u,v)$ 为半平面上的连续函数. 考虑单位圆周 $E=\{(u,v)|u^2+v^2=1\}$, 由 $\varphi(u,v)$ 连续则它在 E 上必有最小值, 记为 M. 在半径 R 充分大的圆周 $\Gamma: u^2+v^2=R^2$ 上有

$$\varphi(u,v)=\max_k\{a_ku+b_kv\}\geqslant M\sqrt{u^2+v^2}$$

记 $\boldsymbol{r}=(u,v)$, 则 $\|\boldsymbol{r}\|=R$ 且有

$$a_ku+b_kv=(a_k,b_k)\cdot\boldsymbol{r},\quad \varphi(u,v)\geqslant M\|\boldsymbol{r}\|$$

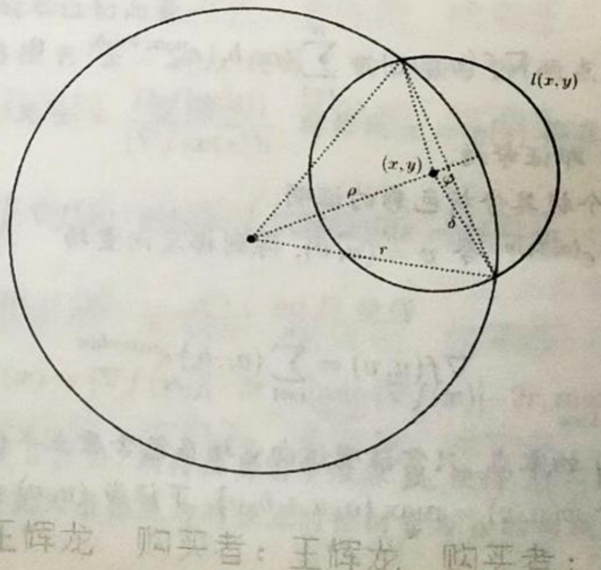
当 Γ 的半径 R 充分大时有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}\cdot\nabla f(u,v)&=\sum_{k=1}^{n}e^{a_ku+b_kv}(a_k,b_k)\boldsymbol{r}\\&\geqslant M\|\boldsymbol{r}\|e^{M\|\boldsymbol{r}\|}+(n-1)\inf_{x\in\mathbb{R}}xe^{x}\\&\geqslant M\|\boldsymbol{r}\|e^{M\|\boldsymbol{r}\|}-\frac{n-1}{e}>0\end{aligned}$$

故 $\nabla f(u,v)$ 在圆周 $\|\boldsymbol{r}\|=R$ 上处处不为 0.

当 $\boldsymbol{r}=(u,v)$ 逆时针绕一圈遍历圆周 Γ 上所有点时 $\nabla f(u,v)$ 恰好旋转一周, 旋转度为 1, 则 $\nabla f(u,v)$ 在该圆盘内有零点 (u_0,v_0), 取 $x=e^{u_0},y=e^{v_0}$ 即完成了本题的证明. □

4. 解答: 如图所示



利用余弦定理可以得出关系式

$$\rho^2+\delta^2-2\rho\delta\cos(\pi-\varphi)=r^2, \rho\in(r-\delta,r)$$

于是由极坐标变换后可得到

$$\iint_D l(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{r-\delta}^r 2\delta\varphi\rho\mathrm{d}\rho=4\pi\delta\int_{r-\delta}^r \rho\arccos\frac{r^2-\rho^2-\delta^2}{2\rho\delta}\mathrm{d}\rho$$

由积分中值定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to0^+}\frac{1}{\delta^2}\iint_D l(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=4\pi r\lim_{\delta\to0^+}\int_{r-\delta}^r\frac{1}{\delta}\arccos\frac{(r/\delta)^2-(\rho/\delta)^2-1}{2(\rho/\delta)}\mathrm{d}(\rho/\delta)\\&=4\pi r\lim_{\delta\to0^+}\int_{r-\delta}^r\arccos\frac{r^2-\rho^2-\delta^2}{2\rho\delta}\\&=4\pi r\lim_{A\to+\infty}\int_{A-1}^A\arccos\frac{A^2-u^2-1}{2u}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

令 $t=\dfrac{A^2-u^2-1}{2u}$, 则 $u=\sqrt{A^2-t^2-1}-t$, $\mathrm{d}u=\left(\dfrac{t}{\sqrt{A^2-t^2-1}}-1\right)\mathrm{d}t$, 化为

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to0^+}\frac{1}{\delta^2}\iint_D l(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=&4\pi r\lim_{A\to+\infty}\int_1^0\arccos t\left(\frac{t}{\sqrt{A^2-t^2-1}}-1\right)\mathrm{d}t\\=&4\pi r\int_0^1\arccos t\mathrm{d}t=4\pi r\cdot1=4\pi r\end{aligned}$$

□

5. 解答:

(1) 构造微分形式

$$\omega=g_1\mathrm{d}g_2=g_1\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+g_1\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2$$

易验证 (用外微分的运算性质非常简便)

$$\mathrm{d}\omega=\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x_1,x_2)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

所以由 Green 公式

$$\iint_B\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x_1,x_2)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\iint_B\mathrm{d}\omega=\oint_{\partial B}g_1\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+g_1\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2$$

(2) 第二个等式是显然的. 设圆周 ∂B 的参数方程为 $x_1=x_1(t), x_2=x_2(t)$, 则有

$$g_2(x_1(t),x_2(t))=x_2(t)$$

从而

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1(t)+\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2(t)=\mathrm{d}x_2(t)$$

代入题设等式的第一项可知它与第三项相等，从而结论得证.

(3) 假设存在这样的映射，则将有

$$(g_1(\boldsymbol{x}))^2+(g_2(\boldsymbol{x}))^2=1$$

微分此式可得

$$\begin{cases} g_1\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}+g_2\dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}=0 \\ g_1\dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}+g_2\dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}=0 \end{cases}$$

由 Cramer 法则知 $\dfrac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x_1,x_2)}=0$，由 (1) 可见这意味着

$$\oint_{\partial B}\omega=0$$

但另一方面由 (2) 可知

$$\oint_{\partial B}\omega=\oint_{\partial B}g_1\mathrm{d}g_2=\oint_{\partial B}x_1\mathrm{d}x_2=\iint\limits_{B}\mathrm{d}\left(x_1\mathrm{d}x_2\right)=\pi>0$$

导致矛盾，从而命题得证.

(4) 设曲面定义在圆盘上，并保持边界圆周不动，则这样的曲面不能退缩到边界上，除非撕破曲面.

□

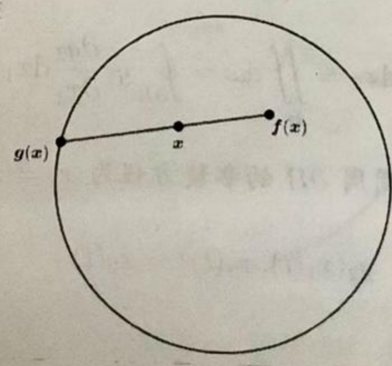
6. 解答:

(1) 取模平方后可得

$$\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\|^2=\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+t(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\|^2=1$$

将上式展开即得结论.

(2) 由 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 的定义，当 $\boldsymbol{x}\in C$ 时显然 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 与 $\boldsymbol{x}$ 是同一点且 $\boldsymbol{g}(B)\subset C$. 直观图如下



(3) 由于

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|^2>0,\quad \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|^2-1\leqslant 0$$

所以从 (1) 中可知 $t(\boldsymbol{x})$ 满足的二次方程有两个实根, 并且其中至多只有一个根是正的. 考察方程左边的式子, 可见当 $t(\boldsymbol{x})=1$ 时此式化为

$$\|\boldsymbol{x}\|^2-1\leqslant 0$$

而当 $t(\boldsymbol{x})$ 充分大时该式显然大于 0. 由此可知对任意给定的 $\boldsymbol{x}\in B$, 关于 $t(\boldsymbol{x})$ 的二次方程有唯一正根 $t(\boldsymbol{x})\geqslant 1$.(几何上来看就是从点 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 出发经过点 $\boldsymbol{x}$ 所引的射线与 C 恰有一个交点) 利用二次方程根的表示式容易看出 $t(\boldsymbol{x})$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 至少是二阶连续可微的. 因而 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 也至少是二阶连续可微的. 从而 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 满足第 5 题第 (3) 问的条件, 所以 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 其实是不存在的, 导致了矛盾, 从而命题成立.

注: Brouwer 不动点定理有许多实际运用, 例如: 将一碗粥中的米看作是均匀分布且大小形状皆相同的, 用筷子搅动这碗粥后, Brouwer 不动点定理告诉我们至少有一粒米在搅动后仍然处于原先的位置. □

第二十五章 曲面积分

§25.1.3 练习题

1. 解答:

(1) $\displaystyle\iint\limits_S z^2\mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{R^2}{2}}\sqrt{2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{R/\sqrt{2}}\sqrt{2}r^3\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{2}R^4}{8}\pi$

(2) 由于

$$E=\cos^2\varphi\sin^2\alpha+\sin^2\varphi\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$G=r^2\cos^2\varphi\sin^2\alpha+r^2\sin^2\varphi\sin^2\alpha=r^2\sin^2\alpha$$
$$F=(\cos\varphi\sin\alpha)(-r\sin\varphi\sin\alpha)+\sin\varphi\sin\alpha(r\cos\varphi\sin\alpha)=0$$

计算出

$$\sqrt{EG-F^2}=r\sin\alpha$$

则有

$$\iint\limits_S z^2\mathrm{d}S=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2\cos^2\alpha\cdot r\sin\alpha\mathrm{d}r=\frac{\pi a^4}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha$$

注: 事实上 (1) 是 (2) 的特例 (取 $a=R,\alpha=\pi/4$). □

2. 解答: 由于

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

故有

$$\begin{aligned}\iint\limits_S(x+y+z)\mathrm{d}S&=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}(x+y+\sqrt{1-x^2-y^2})\mathrm{d}y\\&=\int_{-1}^1(\pi x+2\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x=4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=4\cdot\frac{\pi}{4}=\pi\end{aligned}$$ □

3. 解答: 根据对称性可知

$$\iint\limits_S(2xy+2yz+2zx)\mathrm{d}S=0$$

故

$$\iint\limits_S(x+y+z)^2\mathrm{d}S=\iint\limits_S(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\iint\limits_S\mathrm{d}S=4\pi$$

注: 也可利用 Possion 公式 (例题 25.5.1), 参见周民强第三册 P332 例 7.4.4 第 (3) 问. □

4. 解答: $\iint\limits_S (x^4 - y^4 + y^2z^2 - z^2x^2 + 1)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2x} \mathrm{d}S = \sqrt{2}\pi.$ □

5. 解答:

(1) 由对称性, 只需考虑第一卦限的部分 S_1, 投影区域为 $D = \{(x,y)|x+y\leqslant 1, x, y\geqslant 0\}$.

$$\iint\limits_{S_1}|xyz|\mathrm{d}S = \sqrt{3}\iint\limits_D xy(1-x-y)\mathrm{d}y = \sqrt{3}\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{1-x} y(1-x-y)\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{3}}{120}$$

故

$$\iint\limits_S|xyz|\mathrm{d}S = 8\iint\limits_{S_1}|xyz|\mathrm{d}S = \frac{\sqrt{3}}{15}$$

(2) 由于

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}$$

故有

$$\iint\limits_S|xyz|\mathrm{d}S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\cos\varphi\sin\varphi\sqrt{1+4r^2}r\mathrm{d}r = 2\int_0^1 r^5\sqrt{1+4r^2}\mathrm{d}r$$

$$\overset{r^2=t}{=\!=\!=}\int_0^1 t^2\sqrt{1+4t}\mathrm{d}t \overset{y=\sqrt{1+4t}}{=\!=\!=\!=\!=}\int_1^{\sqrt{5}}\frac{1}{32}\left(y^2-1\right)^2y^2\mathrm{d}y = \frac{125\sqrt{5}-1}{420}$$ □

6. 解答: 由对称性可知

$$\iint\limits_S\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}S = 8\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\sqrt{3}\left[x^2+y^2+(a-x-y)^2\right]\mathrm{d}y$$

$$= 16\sqrt{3}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\left[x^2+y^2+xy+\frac{a^2}{2}-a(x+y)\right]\mathrm{d}y$$

$$= 16\sqrt{3}\int_0^a\left[x^2(a-x)-\frac{1}{6}(a-x)^3-ax(a-x)+\frac{a^2}{2}(a-x)\right]\mathrm{d}x$$

$$= 16\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{24}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)a^4 = 2\sqrt{3}a^4$$ □

7. 解答: 由球面方程 $x^2+y^2+z^2=t^2$ 知

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{|t|}{\sqrt{t^2-(x^2+y^2)}}$$

而由

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=t^2 \\ z^2=x^2+y^2 \end{cases}$$

可得

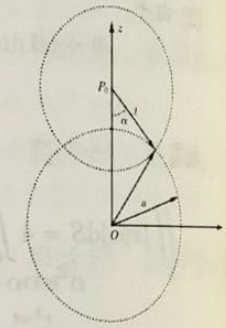
$$x^2+y^2=\frac{t^2}{2}=\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2$$

于是

$$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\left(t/\sqrt{2}\right)^2}\left(x^2+y^2\right)\frac{|t|}{\sqrt{t^2-(x^2+y^2)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=|t|\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}}\frac{r^3}{\sqrt{t^2-r^2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=|t|\int_0^{2\pi}\frac{8-5\sqrt{2}}{12}|t|^3\mathrm{d}\varphi=\frac{(8-5\sqrt{2})\pi}{6}t^4$$ □

8. 解答: 记 $x^2+y^2+z^2=r^2$. 旋转坐标轴, 使点 $P(x,y,z)$ 位于 Oz 轴的正方向上的点 $P_0(0,0,r)$, 如右图所示. 显然, 当 $0<t\leqslant r-a$ 及 $t\geqslant r+a$ 时, 整个球面上的点满足 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant 0$, 此时 $f(\xi,\eta,\zeta)=0$. 从而, 积分



$$f(x,y,z,t)=\iint\limits_S f(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}S=0$$

当 $r-a<t<r+a$ 时, 则

$$F(x,y,z,t)=\iint\limits_{S'}\mathrm{d}S'$$

其中 S' 为 S 位于 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=a^2$ 内的部分. 从而我们有

$$F(x,y,z,t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a}t^2\sin\theta\mathrm{d}\theta=2\pi t^2(1-\cos\alpha)$$
$$=2\pi t^2\left(1-\frac{t^2+r^2-a^2}{2rt}\right)=\frac{\pi t}{r}\left[a^2-(r-t)^2\right]$$ □

9. 解答: 曲面由四部分组成, 分别为

$$S_1: x+y+z=1, x>0, y>0, z>0 \quad S_2: x=0 \quad S_3: y=0 \quad S_4: z=0$$

于是我们有

$$\iint\limits_S\frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}=\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2}+\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-x}\frac{\mathrm{d}z}{(1+y)^2}$$
$$+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{\mathrm{d}z}{(1+x^2)}+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2}$$
$$=(\sqrt{3}+1)\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2}+2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{\mathrm{d}z}{(1+x)^2}$$
$$=(\sqrt{3}+1)\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)+2(1-\ln 2)=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$$ □

10. 解答:
$$\iint\limits_S \frac{|x|}{z}\mathrm{d}S=\int_0^{2a}\mathrm{d}z\int_0^{\frac{z^2}{2a}}\frac{|x|}{z}\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\mathrm{d}y=\int_0^{2a}\mathrm{d}z\int_0^{\frac{z^2}{2a}}\frac{|x|}{z}\sqrt{1+\left(\frac{2a-2y}{2x}\right)^2}\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{2a}\mathrm{d}z\int_0^{\frac{z^2}{2a}}\frac{1}{z}\sqrt{x^2+(y-a)^2}\mathrm{d}y=\int_0^{2a}\mathrm{d}z\int_0^{\frac{z^2}{2a}}\frac{a}{z}\mathrm{d}y=a^2.$$ □

11. 解答:
$$\iint\limits_S(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt{2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{2}r^3\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$ □

25.2.3 练习题

1. 解答: 注意到当曲面由 $z=z(x,y)$ 表示时有 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 而
$$\cos\alpha=\frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\quad \cos\beta=\frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\quad \cos\gamma=1$$
由两类曲面积分之间的关系可知
$$\begin{aligned}&\iint\limits_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\pm\iint\limits_S\left[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S\\
=&\pm\iint\limits_D\left[P(x,y,z)(-z_x)+Q(x,y,z)(-z_y)+R(x,y,z)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\pm\iint\limits_D(-Pz_x-Qz_y+R)\Big|_{z=z(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$
注: 这个公式的优势在于避免了同一曲面要向三个坐标平面分别作投影, 简化了第二型曲面积分的计算. □

2. 解答: 记 Σ_2 是 Σ 在 xOy 平面以下的部分, 若记 $\Sigma_1: z_1=z_1(x,y)$ 和 $\Sigma_2: z_2=z_2(x,y)$, 则有
$$z_1(x,y)=-z_2(x,y)\Rightarrow\frac{\partial z_1}{\partial x}=-\frac{\partial z_2}{\partial x},\frac{\partial z_1}{\partial y}=-\frac{\partial z_2}{\partial y}$$
而 Σ_1 和 Σ_2 在 xOy 平面上的投影区域相同, 所以有
$$\begin{aligned}-\iint\limits_{\Sigma_2}f(x,y,z)\mathrm{d}S&=\iint\limits_{\Sigma_2}f(x,y,-z)\mathrm{d}S\\
&=\iint\limits_{D_{xy}}f\left(x,y,-z_2(x,y)\right)\sqrt{1+z_{2x}^2+z_{2y}^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint\limits_{D_{xy}}f\left(x,y,z_1(x,y)\right)\sqrt{1+z_{2x}^2+z_{2y}^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}f(x,y,z)\mathrm{d}S\end{aligned}$$

从而

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S = 0$$

注: 第一型曲面积分对称性的规律为偶倍奇零.

3. 解答: 延续上一题的符号, 则

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_2} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= -\iint_{\Sigma_2} R(x,y,-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x,y,-z_2(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x,y,z_1(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_1} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

所以

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_1} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_2} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_{\Sigma_1} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

根据本题条件再补充一例:

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_2} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= -\iint_{\Sigma_2} P(x,y,-z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iint_{\Sigma_2} P(x,y,-z)\left(-\frac{\partial z_2}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{\Sigma_2} P(x,y,-z)\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\iint_{\Sigma_2} P(x,y,z)\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{\Sigma_1} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

所以可以得到

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma_1} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{\Sigma_2} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$$

注: 本题展示了第二型曲面积分对称性的原理, 但与第一型曲面积分不同, 需要考虑方向, 规律较为复杂, 记忆容易混淆, 在第 6 题中我们结合例子给出具体的记忆方法. □

4. 解答: 考虑两类曲面积分之间的联系可知

$$D_{xy} = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{S} \cos(\boldsymbol{n},z)\mathrm{d}S = \mu\iint_{S} \mathrm{d}S = \mu S$$

在例题 21.4.2 中, 椭圆 l 在 xOy 平面的投影为

$$\frac{x^2}{3}+y^2+\frac{(2x+y)^2}{2}=1$$

即

$$14x^2+12xy+9y^2-6=0$$

我们采用正交变换拉化简这个椭圆, 从而求出它的面积 (正交变换不改变形状). 具体步骤如下:

$$I_1=14+9=23,\quad I_2=\begin{vmatrix}14&6\\6&9\end{vmatrix}=90$$

曲线的特征方程为

$$\lambda^2-23\lambda-90=0$$

解得 $\lambda_1=5,\lambda=18$, 对应的单位特征向量为 $\left(-\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^{\mathrm{T}},\left(\frac{3}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^{\mathrm{T}}$. 令

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{13}}&\frac{3}{\sqrt{13}}\\\frac{3}{\sqrt{13}}&\frac{2}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

则原方程化为

$$5x'^2+18y'^2=12$$

故投影后椭圆的面积为 $S'=\frac{2}{5}\sqrt{10}\pi$. 又法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,1,1)$, $\cos(\boldsymbol{n},z)=\frac{1}{\sqrt{6}}$, 故原椭圆 l 的面积为

$$S=\frac{S'}{\mu}=\frac{2}{5}\sqrt{10}\pi\cdot\sqrt{6}=\frac{2\sqrt{15}}{15}\pi$$

注: 利用正交变换化简二次曲线的详细方法可参见吕林根第五章第 6 节. □

5. 解答: 根据第 3 题, 由对称性可知

$$I_1=2\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{a^2-r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}r\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{3}a^3$$

而由对称性可知 $I_2=0$. □

6. 解答: 先引入对称性的记忆技巧: 对于第二型曲面积分 $\iint\limits_{S}f(x,y,z)\mathrm{d}a\mathrm{d}b$

如果曲面 S 对于平面 Σ 对称, 记对称点为 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$, 对应的外法向量和 c 轴的夹角 α 和 β.(这里 a 和 b 为 $\{x,y,z\}$ 中的两元, c 为剩余的元) 令

$$p_{\Sigma}=\begin{cases}1, f(\boldsymbol{P})=f(\boldsymbol{Q})\\ -1, f(\boldsymbol{P})=-f(\boldsymbol{Q})\end{cases},\quad q_{ab}=\begin{cases}1, \alpha=\beta\in(0,\pi/2)\\ -1, \alpha=\pi-\beta\neq\pi/2\\ 0, \alpha=\beta=\pi/2\end{cases}$$

记相互对称的其中一面为 S', 则有

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)\mathrm{d}a\mathrm{d}b=\begin{cases}2\iint\limits_{S'} f(x,y,z)\mathrm{d}a\mathrm{d}b, & p_{\Sigma}q_{ab}=1\\ 0, & p_{\Sigma}q_{ab}\in\{0,-1\}\end{cases}$$

以本题为例:

(i) 对于第一项:

这里曲面 S 关于 xOy 平面对称, $f(\boldsymbol{P})=-f(\boldsymbol{Q})$ 故 $p_{xy}=-1$, 又 $\alpha=\beta\in(0,\pi/2)$ 故 $q_{yz}=1$, 从而 $p_{xy}\cdot q_{yz}=-1$, $\iint\limits_{S} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$.

(ii) 对于第二项:

这里曲面 S 关于 zOx 平面对称, $f(\boldsymbol{P})=-f(\boldsymbol{Q})$ 故 $p_{zx}=-1$, 又 $\alpha=\pi-\beta\neq\pi/2$, 故 $q_{zx}=-1$, 从而 $p_{zx}\cdot q_{zx}=1$,

$$\iint\limits_{S} yx\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\iint\limits_{S\cap\{y\geqslant 0\}} yx\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$S\cap\{y\geqslant 0\}$ 在 zOx 平面上的投影为矩形区域 $\{(x,z)|0\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant z\leqslant 1\}$, 故

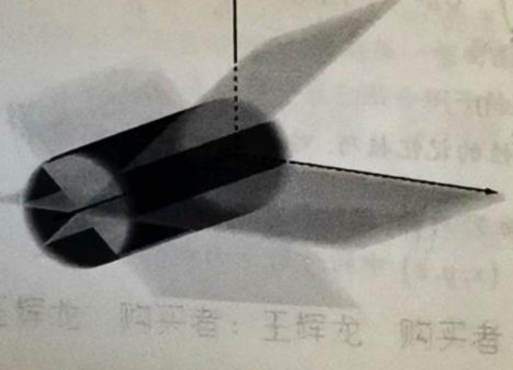
$$2\iint\limits_{S\cap\{y\geqslant 0\}} yx\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\int_{1}^{1}\mathrm{d}z\int_{0}^{1}x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$$

(iii) 对于第三项:

根据几何意义可知 S 上任一点处的外法向量都与 z 轴垂直, 故 $\alpha=\beta=\pi/2$, 积分为零.

综上可知所求第二型曲面积分的值为 4/3. □

7. 解答: 如图所示



曲面的参数方程为

$$x = r, y = \cos\theta, z = \sin\theta$$

区域为 $D = \{(r,\theta)|\theta \in [\pi/4, 3\pi/4], r \in [0,1]\}$

$$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)} = 0,\quad B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(r,\theta)} = -\cos\theta,\quad C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = -\sin\theta$$

利用 (25.3) 可知

$$\begin{aligned}\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_D [QB + RC]\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\ &= \iint_D [-\cos^2\theta(r^2 - \sin^2\theta) - \sin^2\theta(\cos^2\theta - r^2)]\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}r \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} -r^2\cos 2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

□

§25.3.2　练习题

1. 解答:

(1) $\iint_S y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(y^2 + xz\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iiint_{[0,a]^3}(y+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -a^4$;

(2)

$$\begin{aligned}&\iint_S (x^3+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^2 - xz)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^3+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ =&\iiint_{x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 1}(3x^2 + 2y + 3z^2 + 2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ =&\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 [3\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + 2\rho\sin\varphi\sin\theta + 3(\rho\cos\varphi + 1)^2 + 2]\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho \\ =&\frac{124}{15}\pi\end{aligned}$$

(3) 计算得

$$\begin{aligned}P &= \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 0 \\ Q &= \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = 3z^2 - z \\ R &= \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = y^2 - x^2\end{aligned}$$

故由 Gauss 公式

$$I = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$$

□

2. 解答:

(1) 补充平面 $\Sigma_1=\{(x,y,z)|z=h,x^2+y^2\leqslant h^2\}$, 方向取上侧. 由 $\Sigma+\Sigma_1$ 的对称性可知

$$\iiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

于是由 Gauss 公式有

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\left(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma\right)\mathrm{d}S=\iiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}2(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=2\iiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h r\mathrm{d}r\int_r^h z\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}h^4\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}\left(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma\right)\mathrm{d}S&=\frac{\pi}{2}h^4-\iint\limits_{\Sigma_1}\left(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma\right)\mathrm{d}S\\&=\frac{\pi}{2}h^4-\iint\limits_{\Sigma_1}h^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{2}h^4\end{aligned}$$

(2) 补充平面 $\Sigma_1=\{(x,y,z)|z=0,x^2+y^2\leqslant a^2\}$ ，方向取下侧. 则由 Gauss 公式有

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{\Sigma}+\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}\\&=\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2\\ z\geqslant 0}}(3x^2+3y^2+3z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^3+y^3+z^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=3\int_0^a r^4\sin\varphi\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi+0=\frac{6}{5}a^5\pi\end{aligned}$$

(3) 补充平面 $\Sigma_1=\{(x,y,z)|x=0,y^2/b^2+z^2/c^2\leqslant 1\}$, 方向取前侧. 则由 Gauss 公式有

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{\Sigma}+\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=I_1-I_2\\&=\iiint\limits_{\substack{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1\\ x\geqslant 0}}\left(\frac{3x^2}{a^3}+\frac{3y^2}{b^3}+\frac{3z^2}{c^3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1}y^3z^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_1&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 3r^2\left(\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{a}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b}+\frac{\cos^2\varphi}{c}\right)abcr^2\sin\varphi\mathrm{d}r\\&=\frac{3}{5}abc\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{b}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{c}\cdot\frac{2}{3}\cdot\pi\right)=\frac{2}{5}(ab+bc+ca)\pi\end{aligned}$$

$$I_2=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\cos^3\theta\cdot r^3\sin^3\theta\cdot bcr\mathrm{d}r=0$$

故 $I=\dfrac{2}{5}(ab+bc+ca)\pi$. □

3. 解答: 易见 $F(x,y,z)$ 是 x,y,z 的二次齐次函数, 根据命题 19.3.1 可知

$$x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}+z\frac{\partial F}{\partial z}=2F(x,y,z) \tag{1}$$

记 S 是锥体 V 的底部, 则由 Gauss 公式可知

$$\iint_{S+\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iint_{S+\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint_V\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3V$$

另一方面

$$\cos\alpha=\frac{F_x}{\pm\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}},\cos\beta=\frac{F_y}{\pm\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}},\cos\gamma=\frac{F_z}{\pm\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}$$

由 (1) 式可知在 Σ 上

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\frac{xF_x+yF_y+zF_z}{\pm\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}=\frac{2F(x,y,z)}{\pm\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}=0$$

故

$$\iint_\Sigma(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=0$$

又在 Π 上 (x,y,z) 是向径, $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)^{\mathrm{T}}$ 是 Π 的单位外法向量, 故

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=(x,y,z)(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)^{\mathrm{T}}=H$$

$$\iint_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=H\iint_S\mathrm{d}S=HS$$

综上可知

$$V=\iint_{S+\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=\frac{1}{3}SH$$

注: 其他证明方法参见吉米多维奇第 6 册第 4383 题. □

4. 解答: 由球坐标变换

$$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$$

代入方程得

$$r^4=a^2r^2\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta$$

解出

$$r = a\sqrt{\sin\theta\cos\theta}\sin\varphi$$

所以

$$V = \iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\sqrt{\sin\theta\cos\theta}\sin\varphi} r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{3}a^3\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\sqrt{\sin\theta\cos\theta}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin^4\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{2}{3}a^3\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\frac{5}{4}\right)\mathrm{B}\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$$

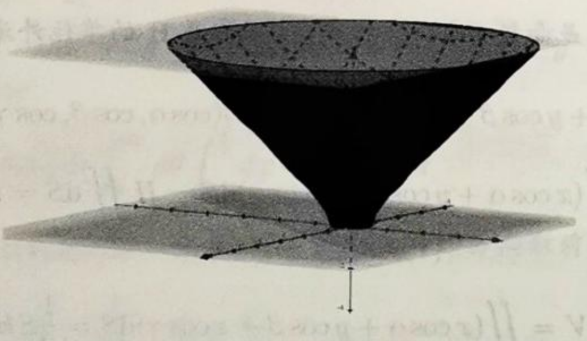
$$= \frac{1}{3}a^3\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma(3)} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{96}a^3\sqrt{\pi}$$

注: 本题若逆用 Gauss 公式利用公式 (25.3) 计算曲面积分计算量会非常大. □

5. 解答: 如图所示, 补充平面

$$S_1 = \left\{(x,y,z)|z=0, x^2+y^2\leqslant 1\right\}\text{(方向取下侧)}$$
$$S_2 = \left\{(x,y,z)|z=\sqrt{3}, x^2+y^2\leqslant 4\right\}\text{(方向取上侧)}$$

形成封闭立体记为 Ω.



则

$$I = \iint\limits_{\Sigma} = \iint\limits_{\Sigma+S_1+S_2} - \iint\limits_{S_1} - \iint\limits_{S_2} = I_1 - I_2 - I_3$$

由 Gauss 公式

$$I_1 = \iiint\limits_{\Omega}(3x^2+2x^2-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{\sqrt{3}}\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z^2+1}4x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z^2+1}}4r^3\cos^2\theta\mathrm{d}r = \frac{24\sqrt{3}}{5}\pi$$

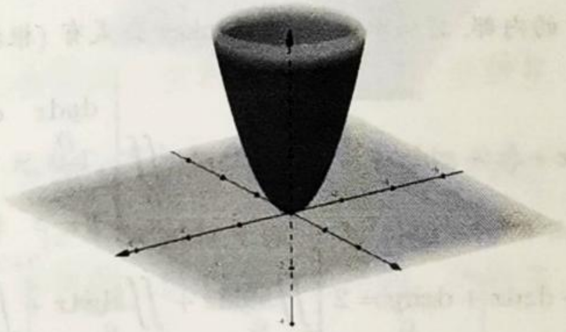
由于 S_1 上的外法向量和 x 轴, y 轴始终成直角, 故 $I_2 = 0$.

同理, I_3 的前两项也为 0, 且外法向量和 z 轴正方向一致, 故

$$I_3 = \iint\limits_{S_2} -x^2 z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} -\sqrt{3}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -4\sqrt{3}\pi$$

综上可知 $I = \dfrac{44\sqrt{3}}{5}\pi$. □

6. 解答: 积分区域如图



由 Gauss 公式

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{S} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x^2+y^2)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{V}(z+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z}(z+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}}(z+r^2)r\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \frac{3}{2}\pi z^2\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

□

7. 解答: 由 Gauss 公式

$$\iint\limits_{S} z\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \cos y\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}(-\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

根据对称性可知积分值为 0. □

§25.3.4 练习题

1. 解答: 记

$$P = z\cos\beta - y\cos\gamma,\quad Q = x\cos\gamma - z\cos\alpha,\quad R = y\cos\alpha - x\cos\beta$$

则由 Stokes 公式有

$$\oint_C \begin{vmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} = \oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

$$= 2\iint_S \left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\right)\mathrm{d}S = 2\iint_S \mathrm{d}S = 2S$$

□

2. 解答: 记 D 为 C 的内部, 方向取上侧, 由 Stokes 公式有 (根据右手法则判断正负)

$$\oint_C (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z = -\iint_D \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix}$$

$$=2\iint_D \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\left[\iint_{D_{yz}} \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{D_{zx}} \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

考虑三个投影面

$$D_{yz}: (1-y-z)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 2y^2 + z^2 + 2yz - 2y - 2z = 0$$
$$D_{zx}: x^2 + (1-x-z)^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 + z^2 + 2xz - 2x - 2z = 0$$
$$D_{xy}: x^2 + y^2 = 1$$

对于椭圆 D_{yz}, 令 $z' = z + 1$ 移轴可得新椭圆方程

$$2x^2 + 2xz + z^2 = 1$$

利用长 (短) 半轴端点与原点的距离为最大 (小) 值这一性质, 可令 (Lagrange 乘子法)

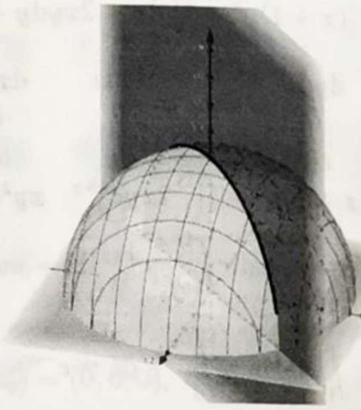
$$\begin{cases} L = x^2 + z^2 + \lambda(2x^2 + 2xz + z^2 - 1) \\ L_x = 2x + 4\lambda x + 2\lambda z = 0 \\ L_z = 2z + 2\lambda x + 2\lambda z = 0 \\ 2x^2 + 2xz + z^2 = 1 \end{cases}$$

先解得 $\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$, 最后可以解得 $x^2 + z^2$ 的最小值为 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, 最大值为 $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

从而椭圆面积为 $D_{yz} = D_{zx} = \pi$. 又 $D_{xy} = \pi$, 故原积分值为 6π.

注: 事实上线性代数中有结论: 形如 $ax^2 + 2bxy + cz^2 = 1$ 的椭圆半轴长是矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ 特征值倒数的开方. □

3. 解答:



如图所示, 连接 AB 记为 Γ, 方向为 B 到 A. 由 Stokes 公式

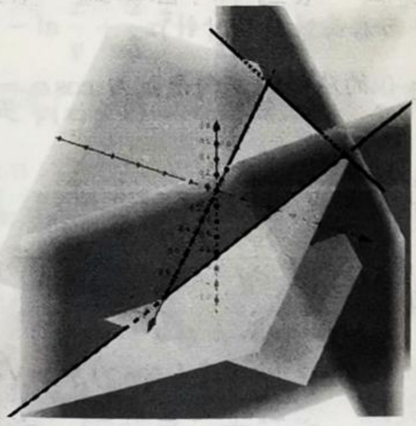
$$
\begin{aligned}
I_1 &= \oint_{C+\Gamma}(z^3+3x^2y)\mathrm{d}x+(x^3+3y^2z)\mathrm{d}y+(y^3+3z^2x)\mathrm{d}z \\
&= \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z^3+3x^2y & x^3+3y^2z & y^3+3z^2x \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}
$$

Γ 的参数方程为 $x=t, y=t, z=0, t\in[-a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2}]$, 故

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_\Gamma (z^3+3x^2y)\mathrm{d}x+(x^3+3y^2z)\mathrm{d}y+(y^3+3z^2x)\mathrm{d}z \\
&= \int_{-a/\sqrt{2}}^{a/\sqrt{2}}(3t^3+t^3+t^3)\mathrm{d}t = 0
\end{aligned}
$$

因此 $I = I_1 - I_2 = 0$. □

4. 解答:



如图所示, 连接 $(a,0,0)$ 到 $(-a,0,0)$ 的直线段, 记为 Γ. 由 Stokes 公式

$$I_1=\oint_{C+\Gamma} \mathrm{e}^{x+z}\left\{\left[(x+1)y^2+1\right]\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y+xy^2\mathrm{d}z\right\}$$

$$=\iint_S\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ e^{x+z}[(x+1)y^2+1] & 2xye^{x+z} & xy^2e^{x+z}\end{vmatrix}$$

$$=\iint_S e^{x+z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\int_0^a\mathrm{d}z\int_{z-1}^{1-z}e^{x+z}\mathrm{d}x=ea+\frac{1}{2e}-\frac{e^{2a-1}}{2}$$

$$I_2=\int_\Gamma e^x\mathrm{d}x=\int_a^{-a}e^t\mathrm{d}t=e^{-a}-e^a$$

故 $I=I_1-I_2=ea+\dfrac{1}{2e}-\dfrac{e^{2a}-1}{2}-e^{-a}+e^a.$ □

5. 解答: 由 f,g,h 连续知存在原函数 F,G,H, 于是

$$\oint_C[f(x)-yz]\mathrm{d}x+[g(y)-xz]\mathrm{d}y+[h(z)-xy]\mathrm{d}z=\oint_C\mathrm{d}(F+G+H-xyz)$$

由于 C 是封闭曲线, 积分的起点和终点为同一点, 故上式为 0.

注: 本题缺乏 f,g,h 可导的条件, 不可以直接使用 Stokes 公式.(若要强行使用, 需要把 f,g,h 分离出去计算, 剩余部分再使用 Stokes 公式) □

6. 解答: 逆用 Stokes 公式可知

$$\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x-z & x^3-yz & -3xy^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S=-\oint_{\substack{x^2+y^2=R^2\\ z=0}}x\mathrm{d}x+x^3\mathrm{d}y-3xy^2\mathrm{d}z$$

$$=-\int_0^{2\pi}(-R^2\cos\theta\sin\theta+R^4\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta=-\frac{3}{4}R^4\pi$$

(由右手法则知从 xOy 平面看曲线是顺时针) □

7. 解答: 平面 $x+y+z=0$ 的法线的方向余弦为 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 于是由 Stokes 公式可知

$$\oint_c y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}\mathrm{d}S=-\iint_S(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=-\pi a^2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)=-\sqrt{3}\pi a^2$$ □

注: 也可转化曲线积分为定积分直接计算, 参见吉米多维奇第 6 册第 4367 题.

§25.3.6 练习题

1. 解答:

(1) 容易验证

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-2z$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}=-2x$$
$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}=-2y$$

因此是全微分. 取 $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$, 原函数为

$$\varphi(x,y,z)=\int_0^x(x^2-2yz)\mathrm{d}x+\int_0^y y^2\mathrm{d}y+\int_0^z z^2\mathrm{d}z+C=\frac{x^3+y^3+z^3}{3}-2xyz+C$$

(2) 容易验证

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{4xy}{(x^2-y^2)^3}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}=0$$

因此是全微分. 取 $(x_0,y_0,z_0)=(1,2,0)$. 原函数为

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z)&=\int_1^x\left[\frac{x}{(x^2-y^2)^2}-\frac{1}{x}+2x^2\right]\mathrm{d}x+\int_2^y\left[\frac{1}{y}-\frac{y}{(1-y^2)^2}+3y^3\right]\mathrm{d}y+\int_0^z 5z^3\mathrm{d}z+C\\&=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2-y^2}-\frac{1}{1-y^2}\right]-(\ln x-\ln 1)+\frac{2}{3}(x^3-1)+(\ln y-\ln 2)\\&\quad-\left[\frac{1}{2-2y^2}+\frac{1}{6}\right]+\frac{3}{4}(y^4-16)+\frac{5}{4}z^4+C\\&=-\frac{1}{2(x^2-y^2)}-\ln\frac{x}{y}+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}y^4+\frac{5}{4}z^4+C\end{aligned}$$

□

2. 解答: 容易看出原函数是 $\varphi(x,y,z)=xyz$, 故

$$\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)}yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z=xyz\Big|_{(1,2,3)}^{(6,1,1)}=0$$

□

3. 解答: 容易看出

$$r^3(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)=\mathrm{d}\frac{r^5}{5}$$

起点位置始终满足 $r=a$, 终点位置始终满足 $r=b$, 从而

$$\int_C r^3(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)=\int_C\mathrm{d}\frac{r^5}{5}=\frac{1}{5}\left(b^5-a^5\right)$$

□

§25.5.3 参考题

1. 解答:

显然, 平面 $x+y+z=\pm\sqrt{3}$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的两个切平面, 于是

$$f(x,y,z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2, & |t|\leqslant\sqrt{3}\\ 0, & |t|>\sqrt{3}\end{cases}$$

由方程组 $\begin{cases}x+y+z=t\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$ 得椭圆方程

$$x^2+y^2+[t-(x+y)]^2=1$$

或

$$x^2+y^2+xy-t(x+y)=\frac{1-t^2}{2}$$

记该椭圆围成的区域为 Ω, 则

$$\begin{aligned}F(t)&=\iint\limits_{\Omega}\left\{1-x^2-y^2-[t-(x+y)]^2\sqrt{3}\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\sqrt{3}\iint\limits_{\Omega}\left[1-t^2-2(x^2+y^2)-2xy+2t(x+y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

令

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{t}{3}\\ \frac{t}{3}\end{pmatrix}$$

则方程化为标准椭圆方程

$$\frac{x'^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}\right)^2}+\frac{y'^2}{\left(\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}\right)^2}=1$$

记相应得区域为 Ω', 则

$$F(t)=\sqrt{3}\iint\limits_{\Omega'}\left[1-\frac{t^2}{3}-\left(3x''^2+y''^2\right)\right]\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

作广义极坐标变换

$$x'=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}r\cos\varphi,\quad y'=\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}r\sin\varphi$$

则当 $|t| \leqslant \sqrt{3}$ 时有

$$F(t) = \left(1 - \frac{t^2}{3}\right) \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(1 - \frac{t^2}{3}\right)(r - r^3)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \left(1 - \frac{t^2}{3}\right)^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{18}\left(3 - t^2\right)^2$$

而当 $|t| > \sqrt{3}$ 时有 $F(t) = 0$.

注: 吉米多维奇第六册第 4359 题还讨论了 $F(t)$ 的图像. □

2. **解答**: 记 Σ 是单位球面. 令

$$x = \sin\theta\cos\varphi, y = \sin\theta\sin\varphi, z = \cos\theta$$

则 $\mathrm{d}S = \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$, 从而所求积分可转化为第一型曲面积分

$$I = \iint\limits_{\Sigma} \mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}S$$

设平面 $P_t : \dfrac{x-y}{\sqrt{2}} = t, -1 \leqslant t \leqslant 1$, 其中 t 为平面 P_t 被球面截下部分中心到原点的距离. 用平面 P_t 分割球面 Σ, 球面在平面 $P_t, P_{t+\mathrm{d}t}$ 之间的部分形如圆台外表面状, 记为 $\Sigma_{t+\mathrm{d}t}$. 被积函数在其上为 $e^{x-y} = e^{\sqrt{2}t}$.

由于 $\Sigma_{t+\mathrm{d}t}$ 半径为 $r_t = \sqrt{1-t^2}$, 半径的增长率为

$$\mathrm{d}\sqrt{1-t^2} = \frac{-t\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

就是 $\Sigma_{t+\mathrm{d}t}$ 上下底半径之差. 记圆台外表面斜高为 h_t, 则由微元法知

$$\mathrm{d}t^2 + (\mathrm{d}\sqrt{1-t^2})^2 = h_t^2$$

得到 $h_t = \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$, 所以 $\Sigma_{t+\mathrm{d}t}$ 的面积为

$$\mathrm{d}S = 2\pi r_t h_t = 2\pi\mathrm{d}t$$

于是

$$I = \int_{-1}^{1} e^{\sqrt{2}t} 2\pi\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} e^{\sqrt{2}t}\Big|_{-1}^{1} = \sqrt{2}\pi\left(e^{\sqrt{2}} - e^{-\sqrt{2}}\right)$$ □

3. **解答**: 充分必要条件: f 是 -3 次齐次函数, 即满足

$$F(x,y,z) = 3f + x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

必要性: 记 V 是闭曲面 S 的内部, 则由 Gauss 公式可得

$$\iint_S xf(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yf(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + zf(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_V F(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$$

充分性: 假设存在 $\boldsymbol{P}\in\Omega$ 使得 $F(x,y,z)\neq 0$, 不妨设 $F(\boldsymbol{P})>0$, 则存在充分小的开球 $O_\delta(\boldsymbol{P})$, 在其上 $F(x,y,z)$ 恒正, 从而

$$\iint_{\partial O_\delta(\boldsymbol{P})} xf(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yf(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + zf(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{O_\delta(\boldsymbol{P})} F(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z > 0$$

与题设矛盾. 故 $F(x,y,z)\equiv 0$, 得证. □

4. 解答: 先考虑如果 (x_0,y_0,z_0) 不在曲面 Σ 上, 则有

$$\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}) = \cos(x,\boldsymbol{r})\cos\alpha + \cos(y,\boldsymbol{r})\cos\beta + \cos(z,\boldsymbol{r})\cos\gamma$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦. 易见

$$\cos(x,\boldsymbol{r}) = \frac{x-x_0}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos(y,\boldsymbol{r}) = \frac{y-y_0}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos(z,\boldsymbol{r}) = \frac{z-z_0}{|\boldsymbol{r}|}$$

由 Gauss 公式有

$$\begin{aligned}&\iint_\Sigma \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\mathrm{d}S = \iint_\Sigma \left(\frac{x-x_0}{|\boldsymbol{r}|}\cos\alpha + \frac{y-y_0}{|\boldsymbol{r}|}\cos\beta + \frac{z-z_0}{|\boldsymbol{r}|}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S\\ &= \iiint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x_0}{|\boldsymbol{r}|}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-y_0}{|\boldsymbol{r}|}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-z_0}{|\boldsymbol{r}|}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\iiint_\Omega \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|\boldsymbol{r}|}\end{aligned}$$

如果 (x_0,y_0,z_0) 在曲面 Σ 上, 作充分小的开球 $O_\varepsilon(x_0,y_0,z_0)$, 则

$$\iint_\Sigma \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma-\partial O_\varepsilon(x_0,y_0,z_0)} \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\mathrm{d}S + \iint_{\partial O_\varepsilon(x_0,y_0,z_0)} \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\mathrm{d}S$$

第一项由之前讨论的结论可知其值为 $2\iiint_\Omega \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|\boldsymbol{r}|}$, 而对于第二项, 我们注意到在开球 $O_\varepsilon(x_0,y_0,z_0)$ 的边界上 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 方向始终相反, 即 $\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})=-1$, 于是

$$\iint_{\partial O_\varepsilon(x_0,y_0,z_0)} \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\mathrm{d}S = -4\pi\varepsilon^2$$

令 $\varepsilon\to 0^+$ 便得到了结论. □

5. 解答: 平面 Π 的法向量是 (A,B,C), 也是 Γ 的法向量. 不妨设 A,B,C 都非负, 则

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

记 Γ 围成区域为 D, 则由 Stokes 知

$$\oint_{\Gamma}\omega=\iint_{D}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

我们希望积分内的行列式为 1, 即

$$\cos\alpha\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\cos\beta\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\cos\gamma\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=1$$

显然 A,B,C 不能同时为 0, 不妨设 $A\neq 0$, 令 $R=\dfrac{y}{\cos\alpha},P=0,Q=0$, 满足上式, 从而

$$\oint_{\Gamma}\omega=\iint_{D}\mathrm{d}S=S(\Gamma)$$

(求出一组解即可) □

6. 解答: 记

$$A=\frac{\xi-x}{r^3},B=\frac{\eta-y}{r^3},C=\frac{\zeta-z}{r^3}$$

易验证

$$A_\xi+B_\eta+C_\zeta=0,\quad A_x+B_y+C_z=0$$

且

$$C_x=-C_\xi,\quad C_y=-C_\eta,\quad C_z=-C_\zeta$$

于是

$$\begin{aligned}P_y&=\oint_{\Gamma}C_y\mathrm{d}\eta-B_y\mathrm{d}\zeta=\oint_{\Gamma}(C_y\mathrm{d}\eta+C_z\mathrm{d}\zeta)+A_x\mathrm{d}\zeta\\&=\oint_{\Gamma}-(C_\eta\mathrm{d}\eta+C_\zeta\mathrm{d}\zeta)+A_x\mathrm{d}\zeta=\oint_{\Gamma}C_\xi\mathrm{d}\xi+A_x\mathrm{d}\zeta=\oint_{\Gamma}-C_x\mathrm{d}\xi+A_x\mathrm{d}\zeta=Q_x\end{aligned}$$

其余等式类似可验证 (或直接由轮换对称性可知). □

7. 解答: 由 Stokes 公式可知

$$\begin{aligned}P(x,y,z)&=\iint_{S}\begin{vmatrix}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi & \mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi & \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\ \dfrac{\partial}{\partial\xi} & \dfrac{\partial}{\partial\eta} & \dfrac{\partial}{\partial\zeta}\\ 0 & C & -B\end{vmatrix}=\iint_{S}(-B_\eta-C_\zeta)\,\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta+B_\xi\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi+C_\xi\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\&=\iint_{S}A_\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta+B_\xi\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi+C_\xi\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=-\frac{\partial}{\partial x}\iint_{S}A\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta+B\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi+C\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\end{aligned}$$

同理可求出

$$Q(x,y,z) = -\frac{\partial}{\partial y}\iint_S A\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta + B\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi + C\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$
$$-\frac{\partial}{\partial z}\iint_S A\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta + B\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi + C\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

于是 $u(x,y,z) = -\iint\limits_S A\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta + B\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi + C\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$ □

8. 解答: 设液体表面为 xy 平面, z 轴方向向下, 液体比重为 ρ, 物体表面面积元 $\mathrm{d}S$ 的深度为 z, 则这一元素所受液体压力为 $\rho z\mathrm{d}S$, 它在 z 轴方向的分力为 $-\rho z\cos(\boldsymbol{n},z)\mathrm{d}S$, 于是由 Gauss 公式可知, 在 z 轴方向的受力 (即浮力)

$$F_z = -\iint_S \rho z\cos(\boldsymbol{n},z)\mathrm{d}S = -\rho\iiint_V \mathrm{d}v = -\rho V = -m$$

(显然在 x 和 y 轴方向不受力) 这说明浮力方向垂直向上, 且等于物体排开液体的重量. 注: 可参看卓里奇第二卷 P219 例 3. □

第二十六章　场论初步

26.1.5 练习题

1. 解答: 以下皆设 $\boldsymbol{a}=(P_1,Q_1,R_1),\boldsymbol{b}=(P_2,Q_2,R_2)$.

(1)

$$\begin{aligned}\nabla(\alpha f+\beta g)&=\boldsymbol{i}\frac{\partial(\alpha f+\beta g)}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial(\alpha f+\beta g)}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial(\alpha f+\beta g)}{\partial z}\\&=\alpha\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right)+\beta\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial g}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial g}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial g}{\partial z}\right)\\&=\alpha\nabla f+\beta\nabla g\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b})&=\mathrm{div}(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b})\\&=\left(\frac{\partial\alpha P_1}{\partial x}+\frac{\partial\alpha Q_1}{\partial y}+\frac{\partial\alpha R_1}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial\beta P_2}{\partial x}+\frac{\partial\beta Q_2}{\partial y}+\frac{\partial\beta R_2}{\partial z}\right)\\&=\alpha\mathrm{div}\boldsymbol{a}+\beta\mathrm{div}\boldsymbol{b}=\alpha\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\beta\nabla\cdot\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}&\nabla\times(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b})=\mathrm{curl}(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b})\\&=\left[\frac{\partial(\alpha R_1+\beta R_2)}{\partial y}-\frac{\partial(\alpha Q_1+\beta Q_2)}{\partial z}\right]\boldsymbol{i}+\left[\frac{\partial(\alpha P_1+\beta P_2)}{\partial z}-\frac{\partial(\alpha R_1+\beta R_2)}{\partial x}\right]\boldsymbol{j}\\&\quad+\left[\frac{\partial(\alpha Q_1+\beta Q_2)}{\partial x}-\frac{\partial(\alpha P_1+\beta P_2)}{\partial y}\right]\boldsymbol{k}\\&=\alpha\left[\left(\frac{\partial R_1}{\partial y}-\frac{\partial Q_1}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P_1}{\partial z}-\frac{\partial R_1}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]\\&\quad+\beta\left[\left(\frac{\partial R_2}{\partial y}-\frac{\partial Q_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P_2}{\partial z}-\frac{\partial R_2}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q_2}{\partial x}-\frac{\partial P_2}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]\\&=\alpha\mathrm{curl}\boldsymbol{a}+\beta\mathrm{curl}\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\nabla(fg)&=\boldsymbol{i}\frac{\partial(fg)}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial(fg)}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial(fg)}{\partial z}\\&=\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial f}{\partial x}g+\frac{\partial g}{\partial x}f\right)+\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial f}{\partial y}g+\frac{\partial g}{\partial y}f\right)+\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial f}{\partial z}g+\frac{\partial g}{\partial z}f\right)\\&=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right)g+f\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial g}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial g}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial g}{\partial z}\right)\\&=(\nabla f)g+f(\nabla g)\end{aligned}$$

(5)

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(f\boldsymbol{a}) &= \frac{\partial(fP_1)}{\partial x}+\frac{\partial(fQ_1)}{\partial y}+\frac{\partial(fR_1)}{\partial z}\\
&=\left(f\frac{\partial P_1}{\partial x}+P_1\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\left(f\frac{\partial Q_1}{\partial y}+Q_1\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\left(f\frac{\partial R_1}{\partial z}+R_1\frac{\partial f}{\partial z}\right)\\
&=f\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial y}+\frac{\partial Q_1}{\partial z}\right)+\left(P_1\frac{\partial f}{\partial x}+Q_1\frac{\partial f}{\partial y}+R_1\frac{\partial f}{\partial z}\right)\\
&=f(\nabla\cdot\boldsymbol{a})+(\nabla f)\cdot\boldsymbol{a}
\end{aligned}
$$

(6)

$$
\begin{aligned}
\nabla\times(f\boldsymbol{a}) =&\boldsymbol{i}\left[\frac{\partial(fR_1)}{\partial y}-\frac{\partial(fQ_1)}{\partial z}\right]+\boldsymbol{j}\left[\frac{\partial(fP_1)}{\partial z}-\frac{\partial(fR_1)}{\partial x}\right]+\boldsymbol{k}\left[\frac{\partial(fQ_1)}{\partial x}-\frac{\partial(fP_1)}{\partial y}\right]\\
=&\boldsymbol{i}\left[f\left(\frac{R_1}{\partial y}-\frac{\partial Q_1}{\partial z}\right)+\left(R_1\frac{\partial f}{\partial y}-Q_1\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]\\
&+\boldsymbol{j}\left[f\left(\frac{P_1}{\partial z}-\frac{\partial R_1}{\partial x}\right)+\left(P_1\frac{\partial f}{\partial z}-R_1\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]\\
&+\boldsymbol{k}\left[f\left(\frac{Q_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)+\left(Q_1\frac{\partial f}{\partial x}-P_1\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]\\
=&f\left[\left(\frac{\partial R_1}{\partial y}-\frac{\partial Q_1}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P_1}{\partial z}-\frac{\partial R_1}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]\\
&+\boldsymbol{i}\left(R_1\frac{\partial f}{\partial y}-Q_1\frac{\partial f}{\partial z}\right)+\boldsymbol{j}\left(P_1\frac{\partial f}{\partial z}-R_1\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\boldsymbol{k}\left(Q_1\frac{\partial f}{\partial x}-P_1\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
=&f(\nabla\times\boldsymbol{a})+(\nabla f)\times\boldsymbol{a}
\end{aligned}
$$

(7)

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a}) =&\operatorname{div}(\nabla\times\boldsymbol{a})\\
=&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R_1}{\partial y}-\frac{\partial Q_1}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P_1}{\partial z}-\frac{\partial R_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)\\
=&\left(\frac{\partial^2 R_1}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 R_1}{\partial y\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 P_1}{\partial z\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 Q_1}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 Q_1}{\partial x\partial z}\right)=0
\end{aligned}
$$

(8)

$$
\begin{aligned}
\nabla\times(\nabla f) &= \nabla\times\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right)\\
&=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

□

2. 解答:

(1) 按 $(i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$ 来证明此命题:

$(i) \Rightarrow (iii)$: 设 $\boldsymbol{A} = (P, Q, R)$ 是有势场, 则存在势函数 u 使得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R$$

从而

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \operatorname{curl}(\boldsymbol{A}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$$

即 $\boldsymbol{A}$ 是无旋场.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: 由 Stokes 公式可知

$$\oint_C \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\tau} \mathrm{d}s = \iint_S \operatorname{curl}(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = 0$$

$(iv) \Rightarrow (ii)$: 设起点 A 终点 B, 任给两条路径 Γ_1 和 Γ_2, 记 $-\Gamma_2$ 是反向的 Γ_2, 则 $\Gamma_1 - \Gamma_2$ 构成闭回路, 从而

$$\oint_{\Gamma_1 - \Gamma_2} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

即积分与路径无关.

$(ii) \Rightarrow (i)$: 设 (a, b, c) 是 $\boldsymbol{A}$ 中的一个固定点, (x, y, z) 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一点, 定义函数

$$u(x, y, z) = \int_{(a,b,c)}^{(x,y,z)} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

取 $|h|$ 充分小, 由积分中值定理可知存在 x^* 介于 x 和 $x + h$ 之间使得

$$u(x+h, y, z) - u(x, y, z) = \int_{(x,y,z)}^{(x+h,y,z)} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_x^{x+h} P(t, y, z)\mathrm{d}t = hP(x^*, y, z)$$

由此得到

$$\frac{u(x+h, y, z) - u(x, y, z)}{h} = P(x^*, y, z)$$

两边令 $h \to 0$ 可知 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P$. 同理可证 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q, \dfrac{\partial u}{\partial z} = R$.

(2) 先证 $(i) \Leftrightarrow (ii)$ 再证 $(i) \Leftrightarrow (iii)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: 记 $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z), \boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$, 直接验证

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \operatorname{div} \operatorname{curl} \boldsymbol{B} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) = 0\end{aligned}$$

$(i) \Rightarrow (ii)$: 我们即要证明存在向量场 $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ 使得

$$A_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad A_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad A_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}$$

为此只要解出上式成立的一个特解即可, 为此先令 $B_z = 0$, 则上式转化为

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z} = A_x, \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} = A_y$$

对 z 求积分可得

$$B_y = -\int_{z_0}^{z} A_x(x, y, z)\mathrm{d}z + u(x, y), \quad B_x = \int_{z_0}^{z} A_y(x, y, z)\mathrm{d}z$$

再对 x 求导可得

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = -\int_{z_0}^{z} \frac{\partial A_x}{\partial x}\mathrm{d}z + \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial B_x}{\partial y} = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial A_y}{\partial y}\mathrm{d}z$$

由 $\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0$ 可解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A_z\left(x, y, z_0\right)$$

再积分, 即得到了 $u(x, y, z)$, 从而 B_x, B_y, B_z 都找到了特解.

$(i) \Rightarrow (iii)$: 记任一闭曲面 Σ 围成区域是 Ω, 由 Gauss 公式可知

$$\iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$$

$(iii) \Rightarrow (i)$: 类似第二十五章参考题第 3 题必要性的证明方法反证即可. □

3. 解答:

(1) 给定 $\boldsymbol{p}_0 \in V$, 当 $\dim V \to 0$ 时 V 缩向 $\boldsymbol{p}_0$. 利用 Gauss 公式和积分中值定理有

$$\lim_{\dim V \to 0} \frac{1}{|V|} \iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \lim_{\dim V \to 0} \frac{1}{|V|} \iiint\limits_{V} \operatorname{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \operatorname{div}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_0)$$

(2) 设 $\boldsymbol{A} = (P, Q, R)$, 则

$$\lim_{\dim V\to 0}\frac{1}{|V|}\iint_{\Sigma}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}S=\lim_{\dim V\to 0}\frac{1}{|V|}\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \cos\alpha&\cos\beta&\cos\gamma\\ P&Q&R\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\lim_{\dim V\to 0}\frac{1}{|V|}\iint_{\Sigma}[(\cos\beta R-\cos\gamma Q)\boldsymbol{i}+(\cos\gamma P-\cos\alpha R)\boldsymbol{j}+(\cos\alpha Q-\cos\beta P)\boldsymbol{k}]\mathrm{d}S$$

$$=\lim_{\dim V\to 0}\frac{1}{|V|}\iint_{\Sigma}[(R\mathrm{d}z\mathrm{d}x-Q\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\boldsymbol{i}+(P\mathrm{d}x\mathrm{d}y-R\mathrm{d}y\mathrm{d}z)\boldsymbol{j}+(Q\mathrm{d}y\mathrm{d}z-P\mathrm{d}z\mathrm{d}x)\boldsymbol{k}]$$

$$\xlongequal{\text{Gauss}}\lim_{\dim V\to 0}\frac{1}{|V|}\left[\iiint_V(R_y-Q_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\boldsymbol{i}+\iiint_V(P_z-R_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\boldsymbol{j}\right.$$

$$\left.+\iiint_V(Q_x-P_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\boldsymbol{k}\right]$$

$$\xlongequal{\text{积分中值定理}}[(R_y-Q_z)\boldsymbol{i}+(P_z-R_x)\boldsymbol{j}+(Q_x-P_y)\boldsymbol{k}]\Big|_{\boldsymbol{p}_0}=\mathrm{curl}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_0)$$

注: 在等式右边若略去极限运算事实上代表把场 $\boldsymbol{A}$ 内每一点的值都作用到了曲面在该点的切平面内, 并与 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_0)$ 正交. 向量的长即相当于原向量值投影到这点切平面上的大小, 然后沿曲面积分. 这恰巧对应着 $\mathbb{R}^3$ 中二维曲面 Poincaré—Hopf 定理 (第二十四章第二组参考题第 1 题注中提及) 的应用.

(3)

$$\lim_{\dim V\to 0}\frac{1}{|V|}\iint_{\Sigma}\varphi\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\lim_{\dim V\to 0}\frac{1}{|V|}\iint_{\Sigma}\varphi(\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k})\mathrm{d}S$$

$$=\lim_{\dim V\to 0}\frac{1}{|V|}\left(\iint_{\Sigma}\varphi\mathrm{d}y\mathrm{d}z\boldsymbol{i}+\iint_{\Sigma}\varphi\mathrm{d}z\mathrm{d}x\boldsymbol{j}+\iint_{\Sigma}\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}y\boldsymbol{k}\right)$$

$$\xlongequal{\text{Gauss}}\lim_{\dim V\to 0}\frac{1}{|V|}\iiint_V(\varphi_x\boldsymbol{i}+\varphi_y\boldsymbol{j}+\varphi_z k)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\xlongequal{\text{积分中值定理}}(\varphi_x\boldsymbol{i}+\varphi_y\boldsymbol{j}+\varphi_z\boldsymbol{k})\Big|_{\boldsymbol{p}_0}=\mathrm{grad}\,\varphi\,(\boldsymbol{p}_0)$$

□

4. 解答:

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}f(r)&=\frac{\partial f(r)}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f(r)}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f(r)}{\partial z}\boldsymbol{k}\\&=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}\boldsymbol{i}+f'(r)\frac{\partial r}{\partial y}\boldsymbol{j}+f'(r)\frac{\partial r}{\partial z}\boldsymbol{k}\\&=f'(r)\mathrm{grad}r=f'(r)\left(\frac{x}{r}\boldsymbol{i}+\frac{y}{r}\boldsymbol{j}+\frac{z}{r}\boldsymbol{k}\right)=f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(f(r)\boldsymbol{r})&\xlongequal{(26.11)}f(r)\mathrm{div}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{grad}f(r)\\&=3f(r)+\boldsymbol{r}\cdot f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}=3f(r)+rf'(r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}(f(r)\boldsymbol{r}) &\xlongequal{(26.12)} \nabla\times(f(r)\boldsymbol{r}) = f(r)(\nabla\times\boldsymbol{r}) + (\nabla f(r))\times\boldsymbol{r}\\ &= \mathbf{0} + f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\times\boldsymbol{r} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

□

5. 解答:

(1)

$$\operatorname{curl}(\boldsymbol{r}) = \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

(2) 设 $\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$, 则

$$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ c_x & c_y & c_z\\ x & y & z\end{vmatrix} = (c_yz-c_zy)\boldsymbol{i} + (c_zx-c_xz)\boldsymbol{j} + (c_xy-c_yx)\boldsymbol{k}$$

于是

$$\operatorname{curl}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r}) = \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x}\\ c_yz-c_zy & c_zx-c_xz & c_xy-c_yx\end{vmatrix} = 2\boldsymbol{c}$$

□

6. 解答: 根据第 4 题的结论可知 $f(r)$ 满足微分方程

$$3f(r)+rf'(r)=0 \Rightarrow \frac{f'(r)}{f(r)} = -\frac{3}{r}$$

两边积分可得 $f(r)=\dfrac{C}{r^3}$(C 为常数).

□

7. 解答: 记 $\boldsymbol{A}=(A_x,A_y,A_z)$, $\boldsymbol{B}=(B_x,B_y,B_z)$. 由题设可知 $\operatorname{curl}\boldsymbol{A}=\operatorname{curl}\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$, 则

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) =&\frac{\partial}{\partial x}(A_yB_z-A_zB_y) + \frac{\partial}{\partial y}(A_zB_x-A_xB_z) + \frac{\partial}{\partial z}(A_xB_y-A_yB_x)\\ =&B_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + B_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + B_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\\ &-A_x\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right) - A_y\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right) - A_z\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\\ =&\boldsymbol{B}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{B} = 0\end{aligned}$$

因此, 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是无旋场, 则 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 是无源场.

□

§26.2.4 练习题

1. 解答:

(1) 练习题 26.1.5 第 1 题 (8) 中已证.

(2)

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=\nabla\left(\frac{\partial a_1}{\partial x}+\frac{\partial a_2}{\partial y}+\frac{\partial a_3}{\partial z}\right)-\nabla\times\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_1&a_2&a_3\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_3}{\partial z\partial x},\frac{\partial^2 a_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_3}{\partial z\partial y},\frac{\partial^2 a_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_2}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 a_3}{\partial z^2}\right)$$

$$-\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial a_3}{\partial y}-\dfrac{\partial a_2}{\partial z}&\dfrac{\partial a_1}{\partial z}-\dfrac{\partial a_3}{\partial x}&\dfrac{\partial a_2}{\partial x}-\dfrac{\partial a_1}{\partial y}\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_3}{\partial z\partial x},\frac{\partial^2 a_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_3}{\partial z\partial y},\frac{\partial^2 a_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_2}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 a_3}{\partial z^2}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial^2 a_2}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 a_3}{\partial x\partial z},\frac{\partial^2 a_3}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 a_2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 a_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_1}{\partial y\partial x},\right.$$
$$\left.\frac{\partial^2 a_1}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 a_3}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 a_3}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_2}{\partial z\partial y}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2},\frac{\partial^2 a_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_2}{\partial z^2},\frac{\partial^2 a_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_3}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_3}{\partial z^2}\right)$$

$$=(\Delta a_1,\Delta a_2,\Delta a_3)=\Delta\boldsymbol{a}$$ □

2. 解答:

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(v\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}-u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\left[\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\alpha+\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos\beta+\left(v\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left[v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(v\Delta u-u\Delta v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

注: 第二 Green 恒等式常常将等式两边写成行列式的形式. □

3. 解答: 首先有

$$
\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S &= \iint_{\Sigma}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + u\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + u\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S \\
&= \iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \iiint_{V} u\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

由于 u 在 Ω 上调和, 第一项为 0, 故

$$
\iiint_{\Omega} |\nabla u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S
$$

证明调和函数的唯一性即证明如果两个调和函数的值在边界上都相同, 那么整个区域上 (包含内部) 都相同. 设 u_1, u_2 是调和函数且在边界 Σ 上 $u_1 = u_2$, 显然 $u = u_1 - u_2$ 也是调和函数且在 Σ 上 $u = 0$, 于是由已证结论可知

$$
\iiint_{\Omega} |\nabla u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0
$$

得到 $|\nabla u| = 0$, 也即 $u_x = u_y = u_z = 0$, 从而 $u \equiv 0$(严谨的证明参见练习题 19.2.4 第 7 题), 即 $u_1 \equiv u_2$. □

4. 解答: 取 $v(x,y,z) = \dfrac{1}{\rho}$, 其中 $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$, 则

$$
\nabla v = -\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho = -\frac{1}{\rho^2}\frac{(x-x_0, y-y_0, z-z_0)}{\rho}
$$

任取 $0 < \varepsilon < r \leqslant R$, 记 $\Omega_\varepsilon = B_r(\boldsymbol{M}_0)\backslash B_\varepsilon(\boldsymbol{M}_0)$, 由第二 Green 恒等式 (第 2 题), 可得

$$
\iint_{\partial\Omega_\varepsilon}\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S = \iiint_{\Omega_\varepsilon}(v\Delta u - u\Delta v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0
$$

即

$$
\iint_{B_r(\boldsymbol{M}_0)}\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S + \iint_{B_\varepsilon(\boldsymbol{M}_0)}\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S = 0 \tag{*}
$$

又因为

$$
\begin{aligned}
\iint_{\partial B_r(\boldsymbol{M}_0)} u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S &= \iint_{\partial B_r(\boldsymbol{M}_0)} u\nabla v\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \\
&= \iint_{\partial B_r(\boldsymbol{M}_0)} u\left[-\frac{1}{\rho^2}\frac{(x-x_0, y-y_0, z-z_0)}{\rho}\cdot\frac{(x-x_0, y-y_0, z-z_0)}{\rho}\right]\mathrm{d}S
\end{aligned}
$$

$$=-\iint\limits_{\partial B_r(\boldsymbol{M}_0)}\frac{u}{\rho^2}\mathrm{d}S=-\frac{1}{r^2}\iint\limits_{\partial B_r(\boldsymbol{M}_0)}u\mathrm{d}S$$

$$\left|\iint\limits_{\partial B_\varepsilon(\boldsymbol{M}_0)}v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S\right|\leqslant\iint\limits_{\partial B_\varepsilon(\boldsymbol{M}_0)}|v|\left|\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|\mathrm{d}S\leqslant\iint\limits_{\partial B_\varepsilon(\boldsymbol{M}_0)}\frac{1}{\varepsilon}|\nabla u|\mathrm{d}S$$

$$=4\pi\varepsilon\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\iint\limits_{\partial B_\varepsilon(\boldsymbol{M}_0)}|\nabla u|\mathrm{d}S\right]\to 0,\varepsilon\to 0^+$$

得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\iint\limits_{\partial B_\varepsilon(\boldsymbol{M}_0)}v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=0$$

另一方面

$$\iint\limits_{\partial B_\varepsilon(\boldsymbol{M}_0)}u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\iint\limits_{\partial B_\varepsilon(\boldsymbol{M}_0)}u\nabla v\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{\partial B_\varepsilon(\boldsymbol{M}_0)}u\left\{-\frac{1}{\rho^2}\frac{(x-x_0,y-y_0,z-z_0)}{\rho}\cdot\left[-\frac{(x-x_0,y-y_0,z-z_0)}{\rho}\right]\right\}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\partial B_\varepsilon(\boldsymbol{M}_0)}u\mathrm{d}S=4\pi\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{\partial B_\varepsilon(\boldsymbol{M}_0)}u\mathrm{d}S\to 4\pi u(\boldsymbol{M}_0),\varepsilon\to 0^+$$

得到

$$\iint\limits_{\partial B_\varepsilon(\boldsymbol{M}_0)}u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=4\pi u(\boldsymbol{M}_0)$$

在 $(*)$ 式两边令 $\varepsilon\to 0^+$ 可得

$$-\left[-\frac{1}{r^2}\iint\limits_{\partial B_r(\boldsymbol{M}_0)}u\mathrm{d}S\right]-4\pi u(\boldsymbol{M}_0)=0$$

即

$$\iint\limits_{\partial B_r(\boldsymbol{M}_0)}u\mathrm{d}S=4\pi r^2u(\boldsymbol{M}_0)$$

两边关于 r 在 $[0,R]$ 上积分, 可得

$$\iiint\limits_{B_R(\boldsymbol{M}_0)}u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^R\mathrm{d}r\iint\limits_{\partial B_r(\boldsymbol{M}_0)}u\mathrm{d}S=4\pi u(\boldsymbol{M}_0)\int_0^R r^2\mathrm{d}r=\frac{4\pi R^3}{3}u(\boldsymbol{M}_0)$$

移项即得结论.

注: 对于 n 维形式的平均值定理证明思路是一样的, 可参见 GT《二阶椭圆型偏微分方

程》定理 2.1.(此时 n 维球体的体积需要运用第十九章参考题第 7 题注中的结论) □

5. 解答: 设 $v(x',y')=u(Rx,Ry)$, 则 u 调和等价于 v 调和, 由命题 26.2.1 可知

$$
\begin{aligned}
u(r\cos\theta, r\sin\theta) &= v\left(\frac{r}{R}\cos\theta, \frac{r}{R}\sin\theta\right)\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R\cos\varphi, R\sin\varphi)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}
$$

注: 其他证明方法可参见谷超豪《数学物理方程》第三章 3.3. 在复平面上的 Poisson 积分公式类似, 参见钟玉泉《复变函数论》第九章第 2 节. n 维形式的 Poisson 积分公式可参看 GT《二阶椭圆型偏微分方程》公式 (2.26), Evans 2.2.1 定理 1. □

6. 解答: 将 u 改写为

$$
u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{1-x^2-y^2}{1-2(x\cos\varphi+y\sin\varphi)+x^2+y^2}\mathrm{d}\varphi
$$

根据含参变量常义积分求导可交换的性质, 且积分可以线性运算, 方便起见省去积分符号, 并记

$$
A=1-x^2-y^2,\quad B=1-2(x\cos\varphi+y\sin\varphi)+x^2+y^2
$$

则

$$
A_x=-2x,\quad A_{xx}=-2,\quad A_y=-2y,\quad A_{yy}=-2
$$

$$
\begin{aligned}
&B_x=-2\cos\varphi+2x,\quad B_{xx}=2,\quad B_y=-2\sin x+2y,\quad B_{yy}=2\\
&\left(\frac{A}{B}\right)_x=\frac{A_xB-AB_x}{B^2}\\
&\left(\frac{A}{B}\right)_{xx}=\frac{-2B(A+B)-2BB_xA_x+2AB_x^2}{B^3}\\
&\Delta\left(\frac{A}{B}\right)=-\frac{-4B(A+B)-2B(A_xB_x+A_yB_y)+2A(B_x^2+B_y^2)}{B^3}
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
B_x^2+B_y^2 &=4\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi+4x^2+4y^2-8x\cos\varphi-8y\sin\varphi=4B\\
A_xB_x+A_yB_y &=4x\cos\varphi-4x^2+4y\sin\varphi-4y^2=2(A-B)
\end{aligned}
$$

因此

$$
\Delta\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{-4BA-4B^2-4BA+4B^2+8AB}{B^3}=0
$$

注: 因此 Poisson 积分公式也给出了单位圆盘上 Dirichlet 问题的解, 参见菲赫金哥尔茨《微积分学教程》第三卷 P500. □

7. 解答: 根据 Poisson 积分公式, 显然积分内的函数无限次可微, 因而由含参变量常义积分求导可交换的性质, 任意调和函数都是无限次可微的 (事实上也解析).

注: 还可以利用 Poisson 方程 $\Delta u = f$ 的 Schauder 估计理论 (PDE 最经典的估计理论之一), 即

$$[u]_{k+2,\alpha} \leqslant C \cdot [f]_{k,\alpha}$$

其中 $[\cdot]_{k,\alpha}, 0 < \alpha < 1$ 是 Holder(半) 模. 代入 Laplace 方程得

$$[u]_{k+2,\alpha} \leqslant C \cdot [0]_{k,\alpha} = 0 \Rightarrow u \in C^{k+2,\alpha}$$

具体详情可见 GT《二阶椭圆型偏微分方程》第六章. □

8. 解答: 由于

$$\partial^i g \circ f(x) = g'(f(x))\partial^i f(x)$$

$$\partial^{ii} g \circ f(x) = g''(f(x))\left[\partial^i f(x)\right]^2 + g'(f(x))\partial^{ii} f(x)$$

而 f 和 $g \circ f$ 都是调和函数, 故

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i=1}^{n} \partial^{ii} g \circ f(x) &= g''(f(x)) \sum_{i=1}^{n} \left[\partial^i f(x)\right]^2 + g'(f(x)) \sum_{i=1}^{n} \partial^{ii} f(x) \\ &= g''(f(x)) \sum_{i=1}^{n} \left[\partial^i f(x)\right]^2 \end{aligned}$$

又 f 非常值函数, 故 $\sum\limits_{i=1}^{n} \left[\partial^i f(x)\right]^2 > 0$, 从而 $g''(f(x)) = 0$, g 是线性函数. □

9. 解答: 证明必要性即证

$$\iiint\limits_{D} \Delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S$$

这就是 (26.15). □

26.3.2 参考题

第一组参考题

1. 解答:

(1) 记 $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$. 所需证明恒等式即为

$$\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ A_x & A_y & A_x\\ \mathrm{curl}_x\, B & \mathrm{curl}_y\, B & \mathrm{curl}_z\, B\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ B_x & B_y & B_z\\ \mathrm{curl}_x\, A & \mathrm{curl}_y\, A & \mathrm{curl}_x\, A\end{vmatrix}$$

$$+\left(B_x\frac{\partial}{\partial x}+B_y\frac{\partial}{\partial y}+B_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(A_x\boldsymbol{i}+A_x\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})$$

$$+\left(A_x\frac{\partial}{\partial x}+A_y\frac{\partial}{\partial y}+A_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k})$$

对 $\boldsymbol{i}$ 分量而言

$$\frac{\partial}{\partial x}(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)$$

$$=\begin{vmatrix}A_y & A_x\\ \dfrac{\partial B_x}{\partial z}-\dfrac{\partial B_z}{\partial x} & \dfrac{\partial B_y}{\partial x}-\dfrac{\partial B_x}{\partial y}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}B_y & B_z\\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x} & \dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}\end{vmatrix}$$

$$+B_x\frac{\partial A_x}{\partial x}+B_y\frac{\partial A_x}{\partial y}+B_z\frac{\partial A_x}{\partial z}+A_x\frac{\partial B_x}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_x}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_x}{\partial z}$$

类似可检验对 $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分量都成立.

(2)

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{k}$$

所需证明恒等式即为

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_yB_z-A_zB_y & A_zB_x-A_xB_z & A_xB_y-A_yB_x\end{vmatrix}$$

$$=\left(B_x\frac{\partial}{\partial x}+B_y\frac{\partial}{\partial y}+B_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(A_x\boldsymbol{i}+A_x\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})$$

$$-\left(A_x\frac{\partial}{\partial x}+A_y\frac{\partial}{\partial y}+A_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k})$$

$$+\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)(A_x\boldsymbol{i}+A_x\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})$$

$$-\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)(B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k})$$

对 $\boldsymbol{i}$ 分量而言

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(A_xB_y-A_yB_x)=&B_x\frac{\partial A_x}{\partial x}+B_y\frac{\partial A_x}{\partial y}+B_z\frac{\partial A_x}{\partial z}\\&-A_x\frac{\partial B_x}{\partial x}-A_y\frac{\partial B_x}{\partial y}-A_z\frac{\partial B_x}{\partial z}\\&+\frac{\partial B_x}{\partial x}A_x+\frac{\partial B_y}{\partial y}A_x+\frac{\partial B_z}{\partial z}A_x\\&-\frac{\partial A_x}{\partial x}B_x-\frac{\partial A_y}{\partial y}B_x-\frac{\partial A_z}{\partial z}B_x\end{aligned}$$

类似可检验对 $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分量都成立. □

注: 裴礼文 P1022 有较全面的场论公式总结.

2. 解答: 只需要证明

$$\nabla\times[t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)\times\boldsymbol{r}]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[t^2\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)\right]$$

再两边对 t 从 0 到 1 积分即得结论. 设 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(P,Q,R)$, 由上一题 (2) 可知

$$\begin{aligned}\nabla\times[t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)\times\boldsymbol{r}]=&(\boldsymbol{r}\cdot\nabla)t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)-(t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)\cdot\nabla)\boldsymbol{r}\\&+(\nabla\cdot\boldsymbol{r})t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)-(\nabla\cdot t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz))\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

依次计算

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{r}\cdot\nabla)t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)=&t\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)\\=&t\left[x\frac{\partial\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)}{\partial x}+y\frac{\partial\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)}{\partial y}+z\frac{\partial\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)}{\partial z}\right]\\=&t^2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{r})t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)=t\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)=3t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)$$

$$(tF(tx,ty,tz)\cdot\nabla)\boldsymbol{r}=t\left[P(tx,ty,tz)\frac{\partial}{\partial x}+Q(tx,ty,tz)\frac{\partial}{\partial y}+R(tx,ty,tz)\frac{\partial}{\partial z}\right]\boldsymbol{r}$$

$$=tP(tx,ty,tz)\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x}+tQ(tx,ty,tz)\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial y}+tR(tx,ty,tz)\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial z}$$

$$=tP(tx,ty,tz)\boldsymbol{i}+tQ(tx,ty,tz)\boldsymbol{j}+tR(tx,ty,tz)\boldsymbol{k}=t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)$$

由题设 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 是无源场, 则 $\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)$ 也是无源场, 从而

$$\nabla\cdot t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)\boldsymbol{r}=t\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$$

综上所述可得

$$\nabla\times[t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)\times\boldsymbol{r}]=t^2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)}{\mathrm{d}t}+2t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[t^2\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)\right]$$

证毕. □

3. 解答: 由题设有

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})=\nabla\cdot\frac{1}{r}(\nabla r\times\boldsymbol{A})$$

用性质 (26.13) 可知

$$\nabla\cdot\frac{1}{r}(\nabla r\times\boldsymbol{A})=0$$

又

$$\nabla\cdot\left[\frac{1}{r}(\nabla r\times\boldsymbol{A})\right]=\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\cdot(\nabla r\times\boldsymbol{A})+\frac{1}{r}\nabla\cdot(\nabla r\times\boldsymbol{A})$$
$$=-\frac{\nabla r}{r^2}\cdot(\nabla r\times\boldsymbol{A})+\frac{1}{r}\nabla\cdot(\nabla r\times\boldsymbol{A})=\frac{1}{r}\nabla\cdot(\nabla r\times\boldsymbol{A})$$
$$=\frac{1}{r}[\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\nabla r)-\nabla r\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})]=-\frac{1}{r}\nabla r\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

$$\Rightarrow\nabla r\cdot(\nabla\times A)=0\Rightarrow\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0\Rightarrow\boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$$

记 Γ 围成区域为 D, 则由 Stokes 公式有

$$\oint_\Gamma\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\iint_D\mathrm{curl}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0$$ □

4. 解答: 记 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\nabla F}{|\nabla F|}$, 由 Green 公式 (26.4) 得

$$\iint_D\nabla\cdot\boldsymbol{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\mathrm{div}\boldsymbol{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D}(-\boldsymbol{n})(\boldsymbol{n})\mathrm{d}S=-\oint_{\partial D}\mathrm{d}s=-l$$

注: 中间需要注意到 $\boldsymbol{a}$ 在 ∂D 上是单位内法向量. □

5. 解答: 由积分中值定理显然有

$$\lim_{R\to0}F(R)=u(\boldsymbol{M})$$

根据 (25.28), 可将 $F(R)$ 改写为

$$F(R)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial B_R(\mathbf{0})}u(\boldsymbol{M}+R\boldsymbol{n})\mathrm{d}s$$

现在记 $K(R)=F(R)-u(\boldsymbol{M})$, 依次计算 $K(R)$ 的各项导数.

$$K(R)=F(R)-u(\boldsymbol{M})=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial B_R(\mathbf{0})}u(\boldsymbol{M}+R\boldsymbol{n})-u(\boldsymbol{M})\mathrm{d}s$$

类似 (26.18) 可知

$$K'(R)=\lim_{R\to 0}\frac{1}{4\pi R^2}\iiint\limits_{B_R(\boldsymbol{M})}\Delta u\mathrm{d}V=\frac{R}{3}\Delta u(\boldsymbol{M})$$

类似 (26.19) 可知

$$K''(R)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\partial B_R(\boldsymbol{M})}\Delta u\mathrm{d}S_R-\frac{1}{2\pi R^3}\iiint\limits_{B_R(\boldsymbol{M})}\Delta u\mathrm{d}V$$

注意到

$$K''(R)+\frac{2}{R}K'(R)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\partial B_R(\boldsymbol{M})}\Delta u(\boldsymbol{M}+R\boldsymbol{n})\mathrm{d}S_R=\Delta u(\boldsymbol{M})$$

因此

$$K''(R)=\Delta u(\boldsymbol{M})-\frac{2}{3}\Delta u(\boldsymbol{M})=\frac{1}{3}\Delta u(\boldsymbol{M})$$

也就是说

$$F'(0)=0,F''(0)=\frac{1}{3}\Delta u(\boldsymbol{M})$$

则由 Taylor 公式, 当 $R\to 0$ 时有

$$F(R)-u(\boldsymbol{M})=F'(0)R+\frac{F''(0)}{2}R^2+o(R^2)=\frac{1}{6}\Delta u(\boldsymbol{M})R^2+o(R^2)$$

即 $F(R)-u(\boldsymbol{M})$ 的主要部分是 $\frac{1}{6}\Delta u(\boldsymbol{M})$. □

6. 解答: 由 u 调和知 $\Delta u=0$, 由第一 Green 恒等式 (例题 26.2.1) 知

$$0=\iiint\limits_{\Omega}(u-v)\Delta u=\iint\limits_{\partial\Omega}(u-v)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S-\iiint\limits_{\Omega}\nabla(u-v)\nabla u$$

题设在 $\partial\Omega$ 上 $u=v$, 故

$$\iiint\limits_{\Omega}\nabla(u-v)\nabla u=0\Rightarrow\iiint\limits_{\Omega}|\nabla u|^2=\iiint\limits_{\Omega}\nabla u\nabla v$$

由基本不等式

$$\iiint\limits_{\Omega}\nabla u\nabla v\leqslant\frac{1}{2}\left(\iiint\limits_{\Omega}|\nabla u|^2+\iiint\limits_{\Omega}|\nabla v|^2\right)$$

整理即得

$$\iiint_{\Omega} |\nabla u|^2 \leqslant \iiint_{\Omega} |\nabla v|^2$$

证毕. □

7. 解答: 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 则

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = r\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + r\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} r\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y} r\sin\theta = xf_x + yf_y$$

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1} \left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} r^2\frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}\theta = \int_0^1 r\mathrm{d}r \oint\limits_{x^2+y^2=r^2} \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y - \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x$$

由 Green 公式

$$\begin{aligned}\oint\limits_{x^2+y^2=r^2} \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y - \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x &= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2} \Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2} e^{-x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^r e^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho = \pi(1-e^{-r^2})\end{aligned}$$

因此

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1} \left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \pi r(1-e^{-r^2})\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2\mathrm{e}}$$

注: 其他方法参见蒲和平 P187 例 21. □

第二组参考题

1. 解答: 设 G 是 Ω 内的球, 设 v 是由 Poisson 积分公式给定的势函数, 则在 $\partial\Omega$ 上满足 $\Delta v = 0$, 在 ∂G 上满足 $v = u$(因为 v 调和, 也满足平均值公式). 由于 u, v 都满足平均值公式, 必然 $u - v$ 也满足平均值公式, 因而满足极值原理. 但在 ∂G 上 $u - v = 0$, 所以在 G 上 $u \equiv v$. 那么根据 G 的任意性可知在 Ω 上满足 $\Delta u = 0$, 即 u 是调和函数.

注: 其他方法参见柯朗《数学物理方法》第四章 1.3 节. □

2. 解答: 以 f_n 表示调和函数 u_n 在 ∂B_R 上的值. 按题设, 连续函数序列 $\{f_n\}$ 在 ∂B_R 上一致收敛, 即对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在这样的 N, 使得当 $n, m > N$ 时, 在 ∂B 上处处有 $|f_n - f_m| \leqslant \varepsilon$. 由极值原理, 对于这些 n, m, 在 B_R 中处处有 $|u_n - u_m| \leqslant \varepsilon$, 所以由 Cauchy 准则知调和函数序列 $\{u_n\}$ 在 B_R 中也一致收敛. 为证明其极限函数是调和函数, 只要证明 u 在 B_R 中任意一点的邻域中是调和函数就可以了. 为此, 在 B_R 内任取一点 $\boldsymbol{M}_0$, 以 $\boldsymbol{M}_0$ 为中心作一位于 B_R 内的球 G, 在此球上, 每一个调和函数 u_n 均可用 Poisson 积分公式表示为

$$u_n(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)$$
$$=\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}u_n(R,\theta,\varphi)\cdot\frac{(R^2-\rho_0^2)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{\left\{R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\left[\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)\right]\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

其中 R 是球 G 的半径, $(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)$ 是点 $\boldsymbol{M}_0$ 的球坐标. 因为函数列 $\{u_n(R,\theta,\varphi)\}$ 一致收敛于 u, 在上式两边令 $u\to\infty$ 取极限就得到

$$u(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)$$
$$=\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}u(R,\theta,\varphi)\cdot\frac{(R^2-\rho_0^2)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{\left\{R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\left[\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)\right]\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

由于 u 可被 Poisson 积分公式表示, 由练习题 26.2.4 第 6 题可知极限函数 u 是调和函数, 证毕.

注: 此命题是 Harnack 第一定理, 还有 Harnack 第二定理, 参见谷超豪《数学物理方程》定理 3.2. □

3. 解答:

必要性: 由题设有

$$\iiint\limits_{B_R(\boldsymbol{M}_0)}\Delta u\mathrm{d}V\geqslant 0$$

由 (26.15) 和 (25.28) 知

$$\iint\limits_{\partial B_R(\boldsymbol{M}_0)}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=R^2\iint\limits_{\partial B_1(\boldsymbol{0})}\frac{\partial u}{\partial R}(\boldsymbol{M}_0+R\boldsymbol{n})\mathrm{d}S_1\geqslant 0$$

即有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left[R^{-2}\iint\limits_{\partial B_R(\boldsymbol{0})}u(\boldsymbol{M}_0+R\boldsymbol{n})\mathrm{d}S_R\right]\geqslant 0$$

当 $R\to 0^+$ 时

$$R^{-2}\iint\limits_{\partial B_R(\boldsymbol{0})}u(\boldsymbol{M}_0+R\boldsymbol{n})\mathrm{d}S_R\to 4\pi u(\boldsymbol{M}_0)$$

故 $\forall R>0$ 有

$$\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\partial B_R(\boldsymbol{M}_0)}u(x,y,z)\mathrm{d}S\geqslant u(\boldsymbol{M}_0)$$

充分性: 在本章第一组参考题第 5 题中我们证得

$$F(R)-u(\boldsymbol{M}_0)=F'(0)R+\frac{F''(0)}{2}R^2+o(R^2)=\frac{1}{6}\Delta u(\boldsymbol{M}_0)R^2+o(R^2)$$

由题设可知 $F(R)\geqslant u(\boldsymbol{M}_0)$, 所以必然 $\Delta u(\boldsymbol{M}_0)\geqslant 0$, 由 $\boldsymbol{M}_0$ 的任意性可知 $\Delta u\geqslant 0$ 在 D 上恒成立.

注: 也可以在平均值公式原本的证明中修改符号, 方法是一样的, 具体可参见 GT《二阶椭圆型偏微分方程》定理 2.1(含 n 维情形). □

4. 解答: 在第二 Green 恒等式 (练习题 26.2.4 第 2 题) 中令 $v=1/r$, 则知当 $(\xi,\eta,\zeta)\neq(x,y,z)$ 时有 $\Delta v=0$. 现以点 $\boldsymbol{P}(x,y,z)$ 为中心, ρ 为半径作一球面 S_ρ 含于曲面内, 积分区域限定在 $S+S_\rho$ 所包围的区域 V 内, 即得

$$\iint\limits_{S+S_\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial(1/r)}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S=0$$

即

$$\iint\limits_{S_\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial(1/r)}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S=-\iint\limits_{S}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial(1/r)}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S=0$$

显然 S 上的法线是向外的, 而 S_ρ 上的法线是指向球心的, 因此

$$\frac{\partial(1/r)}{\partial \boldsymbol{n}}=-\frac{\partial(1/r)}{\partial r}\bigg|_{r=\rho}=\frac{1}{\rho^2}$$

于是, 我们有

$$\iint\limits_{S_\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-\frac{u}{\rho^2}\right)\mathrm{d}S=-\iint\limits_{S}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial(1/r)}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S$$

但

$$\iint\limits_{S_\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\frac{1}{\rho}\iint\limits_{S_\rho}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=0$$

又由积分中值定理, 得

$$\iint\limits_{S_\rho}\frac{u}{\rho^2}\mathrm{d}S=\frac{1}{\rho^2}u(x',y',z')\,4\pi\rho^2=4\pi u(x',y',z')$$

其中 $u(x',y',z')$ 为函数 u 在球面 S_ρ 上某点之值. 从而

$$u(x',y',z')=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial(1/r)}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S$$

上式右端与 ρ 无关, 而 $\lim\limits_{\rho\to 0^+}u(x',y',z')=u(x,y,z)$, 因此, 令 $\rho\to 0^+$ 即得

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial(1/r)}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S$$

又由于

$$\frac{\partial(1/r)}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{\partial(1/r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{n}}=-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\cos\alpha+\frac{\partial r}{\partial \eta}\cos\beta+\frac{\partial r}{\partial \zeta}\cos\gamma\right)$$
$$=-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\cos\beta+\frac{\zeta-z}{r}\cos\gamma\right)=-\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}$$

最后便得到

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[u(\xi,\eta,\zeta)\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S$$

至此证毕. □

5. 解答: 不失一般性, 可设 $(x_0,y_0)=(0,0)$. 利用 Poisson 积分公式有

$$\begin{aligned}u(r\cos\theta,r\sin\theta)&=\frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(R\cos\varphi,R\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\\&\leqslant\frac{R^2-r^2}{2\pi(R-r)^2}\int_0^{2\pi}u(R\cos\varphi,R\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{R+r}{R-r}u(0,0)\end{aligned}$$

(最后一步是在 Poisson 积分公式中取 $r=0$ 得到的)

同理,

$$\begin{aligned}u(r\cos\theta,r\sin\theta)&=\frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(R\cos\varphi,R\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\\&\geqslant\frac{R^2-r^2}{2\pi(R+r)^2}\int_0^{2\pi}u(R\cos\varphi,R\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{R-r}{R+r}u(0,0)\end{aligned}$$

注: 通过 n 维的 Poisson 公式用同样的技巧我们可以证明推广的命题 (Harnack 不等式)

$$\left(\frac{R}{R+r}\right)^{n-2}\frac{R-r}{R+r}u(\boldsymbol{P})\leqslant u(\boldsymbol{Q})\leqslant\left(\frac{R}{R-r}\right)^{n-2}\frac{R+r}{R-r}u(\boldsymbol{P})$$

其中 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 是 n 维球内任意两点. □

6. 解答: 利用上一题的结论, 取定 r, 令 $R\to+\infty$, 即得 $u(x,y)\equiv u(0,0)$.

注: 对于 n 维情形的命题 (Liouville 定理) 可参见陈祖墀《偏微分方程》定理 5.3.5. □

上册勘误表 (2003)

页码	行	误	正
目录 v	14	积分号下	对积分
前言 6	倒 3	数列速度	收敛速度
5	13	不等式.s	不等式.
16	倒 9	$[4/\varepsilon^2]$	$\max\{2,[4/\varepsilon^2]\}$
29	11	303	315
34	4	$n>N$	$n\geqslant N$
44	倒 5	$\left\{\sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}}\right\}$	$\sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}}$
45	倒 6	题 5	题 4
49	倒 2	数列收敛	数列
62	倒 4	$\dfrac{x_n-y_n}{2}$	$\dfrac{\lvert x_n-y_n\rvert}{2}$
79	倒 11	(2.14)	(2.17)
97	倒 14	邻域	去心邻域
105	倒 10	.,	.
109	倒 4	$x\to b$	$x\to b^-$
123	6	第 4 题	第 11 题
124	倒 3	$\lim\limits_{a\to0^+}$	$\lim\limits_{\delta\to0^+}$
125	倒 2	$-\infty,+\infty$	$(-\infty,+\infty)$
133	倒 11	$\sum\limits_{k=1}^{n-1}\lvert a_k\rvert<a_n$	$\sum\limits_{k=0}^{n-1}\lvert a_k\rvert<a_n$
140	3	临近	邻近
146	倒 2	(Period 后补上 three)	
155	倒 10	$m(x)=\max\limits_{a\leqslant y\leqslant x}f(y)$	$m(x)=\min\limits_{a\leqslant y\leqslant x}f(y)$
156	10	$x\in O(x_0)$	$x\in O(x_0)-\{x_0\}$
162	图 6.2	$x_0,y_0)$	(x_0,y_0)
163	倒 6	(右端少句号)	
166	倒 4	$i=1,2,\cdots,n$	$i=1,2,\cdots,k$
170	倒 8	P	P_k
	倒 3	$\lim\limits_{x\to0}e^{-\frac{1}{x^2}}$	$e^{-\frac{1}{x^2}}$
187	13	命题 8.3.1	例题 8.3.1
191	倒 13	(如上一行那样补上 $0<\theta<1$)	
197	8	$\eta_1-c),\eta_2-c)$	η_1-c,η_2-c

	倒 2	$\eta \in (0,h)$	$\eta \in (0,h)$ 或 $(h,0)$
201	13	$g(x)$	$g'(x)$
208	6,10,14,15	$f^{(k-1)}(x_0), f^{(k)}(x_0)$	$f^{(k-1)}(x_0)/(k-1)!, f^{(k)}(x_0)/k!$
213	7	第二个注解	第三个注解
	倒 12	$= f(t)$	$= f(x)$
215	倒 5	E_2n	E_{2n}
216	10	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x-1}, x \neq 1 \\ 1, \quad x = 1 \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x-1}, x \neq 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$
219	倒 14	n	n 阶
	倒 7	(在该行开始处加" 其中 $0 < \theta < 1$,")	
222	10,11	$[a,b], (a,b), (a,b)$	$[0,1], (0,1), (0,1)$
223	倒 11	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\forall x > 0$
226	10	教学	学习
228	8	$1 + x^2$	$(1+x)^2$
	倒 5	(7.20)	(7.19)
231	10	$= \dfrac{1}{6}$(原来的写法错)	因此所求极限为 $\dfrac{1}{6}$
234	倒 1	截矩	截距
238	9	实根	零点
241	倒 1	定义域	范围
246	倒 2	注解	分析
247	倒 3	(在第一个句号前加" 或 (x,x_0)")	
	13	$(x_\lambda - x_2)$	$(x_\lambda - x_2)f'(\xi_2)$
250	倒 16	保号	无零点
256	2	(不等式右边的两个和式内的 x, y 少写了下标 k)	
258	倒 1	(加上 $x_1, x_, \cdots, x_n > 0$)	
259	3	$x > 1$	$x > 0$
260	11,13,14	$\sum\limits_{k=1}^{n}$	$\sum\limits_{k=0}^{n}$
262	倒 9	y	y'_x
263	12	图 8.11	图 8.10
266	倒 2	$\sqrt{a_{n-1}}b_{n-1}$	$\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$
272	7	求根法	求根法成功
274	倒 5	$\geqslant$	$>$

277	倒 11	19	18
289	7	$\cos 2x \sin^{n-1} x$	$\cos 2x \sin^{n-1} 2x$
290	倒 6	$\dfrac{x}{2(x^2+1)^2}$(原著 [68] 中错)	$\dfrac{x-1}{2(x^2+1)}$
296	倒 3	$\cos 7x$	$\cos^7 x$
299	4	在积分号下 (配合目录第 v 页)	对积分
304	6	命题 3.5.2	例题 3.5.3
306	6	积分号下取 (配合目录第 v 页)	对积分求
	10	$\eta \in f([a,b]) = [m,M]$ 改为 $\eta \in [m,M]$, 前加 $m \leqslant f(x) \leqslant M$.	
309	倒 7	(改标题为" 对积分求极限")	
310	9	一些 (配合目录第 v 页)	一个典型
311	倒 1	例题 2.2.4	例题 2.2.3
312	倒 2	属于积分号下 (配合目录第 v 页)	对于含有参数的积分
313	4	$f, g \in R[a,b]$, 其中	$f \in R[a,b], g \in R[0,T]$, 且
	13	设 f	设非负 f
317	11	零点	零点个数
	倒 3	$\int f(x)g(x)\mathrm{d}x > 0$	$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x > 0$
318	倒 1	$\left(\int_a^x f(x)\mathrm{d}x - \int_x^b \dfrac{\mathrm{d}x}{f(x)}\right)$	$\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_x^b \dfrac{\mathrm{d}t}{f(t)}\right)$
319	5	$[0, +\infty)$	$(0, +\infty)$
	倒 6,8	$u'(x)v'(x)$	$u'(x), v'(x)$
321	倒 9,10	12.3.5	12.3.4
324	倒 5	(多一个逗号)	
	13,14	(删除" 由于 $\cdots$ 计算.")	
325	1	解 1(原来的解 2 已经取消)	解
327	11	可微且	可微, $g' \in R[a,b]$ 且
330	倒 5	Fejer	Fejér
332	倒 5	$a < b$	$0 < a < b$
333	7	$[a-\delta, a+\delta]$	$[a-\delta, b+\delta]$
	倒 12	上几乎处处成立	的每个子区间中有 x 使得
	倒 4	严格增加	严格单调增加
	倒 1	$p \to \infty$	$p \to +\infty$
334	1	实数	正实数

	3	$C(-\infty,+\infty)$	$C^1(-\infty,+\infty)$
	6	(组合数记号 C 改用正体)	
	倒 13	(所有二字去掉)	
335	12	(改自变量 n 为 p, $n\to\infty$ 为 $p\to+\infty$)	
344	12	(刘徽并非最早,Archimedes 的著作中已有)	
348	倒 7	$[0,\infty)$	$[0,+\infty)$
349	图	(对每个小图在横轴箭头处加 x)	
	图	(对每个小图在纵轴的适当位置处加 b)	
	倒 7	abw	$ab.$
350	5	$\left(\int_a^b(\|f(x)\|+\|g(x)\|)^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$	$\left(\int_a^b(\|f(x)+g(x)\|)^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$
352	7	例题 8.5.1	命题 8.5.1
	倒 3,4	(在 3 个积分号的每个前加 λ_i)	
354	1	(在 $b\ln b$ 后 $-e^{-1}$)	
355	11	(11.18)	(11.19)
	12	$0<\theta<1$	$0<\theta\leqslant 1$
356	倒 3	$f(x_{i-1}$	$f(x_{i-1})$
357	倒 5	7.4.2 小节	7.3.2 小节
359	4	$\dfrac{n^2\pi^2}{8}$	$\dfrac{n^2\pi^2}{4}$
360	2	(等号右边的负号应当去掉)	
	5	$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\|$	$\left\|\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\right\|$
368	倒 6	(括号内改为“题 (4) 可用 372 页题 2, 题 (6) 可用 332 页题 3.”)	
371	倒 5	可导	连续可微
	倒 1	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$
372	倒 3,4	$C[a,b]$	$C[0,+\infty)$(并加” 对 $a,b>0$”.)
	倒 2	($C[a,b]$ 要求 $a,b>0$)	
373	倒 3	$[a,b]$	$[0,1]$
374	4	加条件”$f'\in R[a,b]$” 后容易一些, 但可不加.	

375	倒 14	例题 10.2.1	命题 10.1.1
381	倒 1,6	$u(b^+)$	$u(b^-)$
388	6	$p > 2$	$p \geqslant 2$
391	2	实数 $a, b > 0$	$0 < a < b$
392	2	$f(+\infty) \ln \dfrac{b}{a}$	$f(+\infty) \ln \dfrac{a}{b}$
393	3	(11.26)	(11.29)
395	2	$(x + \dfrac{1}{2})^2$	$(x^2 + \dfrac{1}{2})^2$
	倒 2	$\int_a^A f(x)\mathrm{d}x >$	$\int_a^A f(x)\mathrm{d}x =$
396	倒 12	$0 \leqslant 2xf(x) \leqslant$	$0 \leqslant xf(2x) \leqslant$
398	4,5	(条件收敛依然成立, 必须去掉连续条件才可以不成立. 第二版中已改正)	
399	10	$p > 0$	$p \geqslant 1$
	12	$p > 0$	$p > 1$
	倒 3	$-1 < p \leqslant +\infty$	$-1 \leqslant p \leqslant +\infty$
400	4	(题 (1) 加条件 $p, q, r > 0$)	
	10	(删去" 在任意有限区间上可积, 且")	
	倒 5	$\xi \in (a, b)$	$\xi \in [a, b]$
401	倒 2	$\int_0^{+\infty}$	$\int_b^{+\infty}$
403	倒 14	题 9	题 10
404	5	(原提示只对 $\{p_n\}$ 严格单调有用)	
405	倒 6	$\dfrac{n(n^2-1)}{6}$	$\dfrac{n(1-n^2)}{6}$
407	倒 13	参考题 9	参考题 10
409	倒 5	$b - a$	$a - b$
410	倒 8,9	(辅助函数改为 $e^x(f(x) \pm 1)$ 并删去括号中内容)	
413	倒 5	答案是不存在这样的 f	
416	1	答案是错的, 第二版中已改正	
418	3,5	(多两个句号)	

下册勘误表 (2004)

页码	行	误	正
9	倒 5	$\int_1^{\infty}$	$\int_1^{+\infty}$
10	1	(和式下标)$n=1$	$n=0$
16	倒 12	删去“我们不知道”	
		是否	还
		删去“若可以的话,”	
	倒 11	又是多少	是 2
36	9	单调减少	单调减少收敛于 0
46	倒 16	(最后的逗号改为句号)	
50	11	收敛准则	一致收敛准则
52	7	$S(x)=x$	$S(x)\equiv 0$
53	倒 9	下节	下一小节
61	倒 11	$\dfrac{1}{(1-y)^2}$	$\dfrac{y}{(1-y)^2}$
73	倒 8	命题 13.3.4	命题 13.3.5
80	倒 1,2	a_n', nb_n	$\pi a_n', n\pi b_n$
83	9	在 $d^2(f,T_n)$ 前加 2π	
	12	在 $d^2(f,S_n)$ 前加 2π	
93	倒 4	68	67
94	10	在 $d^2(f,S_n)$ 前加 2π	
99	倒 12	14.1.7	14.1.8
103	倒 11-12	删去这两行	
105	3	$\geqslant \dfrac{2}{\pi e}$	$> \dfrac{2}{\pi e}$
107	倒 6	$\int_0^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$	$\int_a^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$
110	10	(13.27)	(13.30)
111	8	删去” 收敛半径为 $+\infty$,	
113	倒 6	(13.24)	(13.30)
120	倒 6	Fejé	Fejér
130	倒 10	$<$	$\leqslant$
131	1	存在奇次多项式	存在每项为奇次的多项式
169	倒 14	f_{xy} 在点 (x_0,y_0) 连续	f_{xy} 在点 (x_0,y_0) 的邻域内连续

170	倒 5	$\dfrac{1}{\pi}$	$\dfrac{1}{2\pi}$
170	倒 5,6	$[(x-\xi)+(y-\eta)]$	$[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]$
175	3	$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微	$f(x,y)$ 在 (x,y) 点可微
	16	$\Omega\in\mathbb{R}^2$	$\Omega\subset\mathbb{R}^2$
181	倒 10	二元函数 F	二元连续可微函数 F
183	11	$[0,1]$	$[0,2\pi]$
186	5	不超过	小于
188	倒 15	时有	时若有
	倒 14	并且	则
197	16,18	$\boldsymbol{Ty}$	$\boldsymbol{Tk}$
198	15	加条件 $g_z\neq 0$	
203	11	$\forall\boldsymbol{y}\in D$	$\forall\boldsymbol{y}\in f(D)$
206	9	$f(x)$	$y(x)$
	12	有 Jacobi 行列式	Jacobi 矩阵的秩恒为 1
207	9	$o(\lvert\boldsymbol{x}\rvert)$	$o(\boldsymbol{x})$
	14	$f(\boldsymbol{x}_0)$	$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$
236	6	相等	相等体积
	倒 9	$O_\delta(\boldsymbol{x}_0)$	$O_{\delta_0}(\boldsymbol{x}_0)$
242	12	加条件 $\dfrac{1}{f(x,y)}$ 有界	
269	1	凸函数	下凸函数
	14	右边 $\leqslant$ 改 $=$	
290	11	$(x-1)(x-2)$	$\lvert x-1\rvert\cdot\lvert x-2\rvert$
295	12	$\int_0^{+\infty}$	$\int_1^{+\infty}$
302	2	$0<x<+\infty$	$0<x<1$
304	13	Striling	Stirling
321	2	Grren	Green
	倒 8,10	(这个公式中应将 ξ 与 η 互换)	
357	倒 4	60,60,61	59,60,61
360	倒 11	(删去“只是大家”)	
368	10	(这一行最后要加一个句号)	
369	倒 3	(这一行最后要加一个逗号)	
370	倒 3	$u(z,y,z)$	$u(x,y,z)$
371	倒 1	$\mathrm{d}S$	$\mathrm{d}s$
380	1	Green	Gauss

387	倒 12	将原文改为“写 $(a_1+\cdots+a_n)b_n=(a_1+\cdots+a_N)+(a_{N+1}+\cdots+a_n)b_n$, 对右边第二项用 Abel 变换.”	
388	12	(题 9 的提示改为“用 Abel 第二定理”)	
389	倒 15	(2) 与 (3)	(2)
396	13	含变参量积分	含参变量积分
397	3	第 4 题	第 5 题
399	12	把 f 都改成 u	

参考文献

[1] 徐森林, 薛春华. 数学分析精选习题全解. 北京: 清华大学出版社, 2009.

[2] 徐森林, 薛春华. 数学分析. 北京: 清华大学出版社, 2005.

[3] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2015

[4] 常庚哲, 史济怀. 数学分析教程. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[5] 周民强. 数学分析习题演练. 北京: 科学出版社, 2010.

[6] 朱尧辰. 数学分析例选通过范例学技巧. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2013.3

[7] 张筑生. 数学分析新讲. 北京, 北京大学出版社, 1990.

[8] 蒲和平. 大学生数学竞赛教程. 北京: 电子工业出版社, 2014.

[9] 陈兆斗. 大学生数学竞赛习题精讲. 北京: 清华大学出版社, 2010.

[10] 李傅山. 数学分析中的问题与方法. 北京: 科学出版社, 2016.

[11] 钱吉林. 数学分析题解精粹. 武汉: 崇文书局, 2003.

[12] 吉米多维奇. 数学分析习题集. 北京: 人民教育出版社, 2001.

[13] 费定晖, 周学圣. 吉米多维奇数学分析习题集题解. 第四版. 山东: 山东科学技术出版社, 2012.

[14] 谢惠民, 恽自求, 易法槐, 钱定边. 数学分析习题课讲义. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2018.

[15] 谢惠民, 沐定夷. 吉米多维奇数学分析习题集学习指引. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[16] 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[17] 卓里奇. 数学分析. 第四版. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[18] 林源渠, 方企勤. 数学分析解题指南. 北京: 北京大学出版社, 2003.

[19] 汪林. 数学分析中的问题和反例. 北京: 高等教育出版社, 2015.

[20] 梅加强. 数学分析讲义.

[21] 楼红卫. 微积分进阶. 北京: 科学出版社, 2009.

[22] 楼红卫. 数学分析要点难点与拓展. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[23] 楼红卫. 数学分析技巧选讲.

[24] Walter Rudin. 数学分析原理. 北京: 机械工业出版社, 2004.

[25] 邹应. 数学分析. 北京: 高等教育出版社, 1995.

[26] 华东师范大学数学系. 数学分析. 第四版. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[27] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2004.

[28] 刘培杰数学工作室. 超越普里瓦洛夫. 数项级数卷. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2015.

[29] 吕林根, 许子道. 解析几何. 北京: 高等教育出版社, 2007.

[30] 程其襄, 张奠宙, 魏国强, 胡善文, 王漱石. 实变函数与泛函分析基础. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[31] 周民强. 实变函数论. 北京: 北京大学出版社, 2008.
[32] 徐森林, 薛春华. 实变函数论. 北京: 清华大学出版社, 2009.
[33] 徐森林, 胡自胜, 金亚东, 薛春华. 实变函数习题精选. 北京: 清华大学出版社, 2011.
[34] 汪林. 实分析中的反例. 北京: 高等教育出版社, 2014.
[35] 钟玉泉. 复变函数论. 北京: 高等教育出版社, 2004.
[36] 王高雄, 周之铭. 朱思铭. 王寿松. 常微分方程. 北京: 高等教育出版社, 2006.
[37] 朱思铭. 常微分方程学习辅导与习题解答. 北京: 高等教育出版社, 2009.
[38] 方道元, 薛儒英. 常微分方程. 北京: 高等教育出版社, 2017.
[39] 王萼芳, 石生明. 高等代数. 第四版. 北京: 高等教育出版社.2013.
[40] 许甫华, 张贤科. 高等代数解题方法. 北京: 清华大学出版社, 2001.
[41] 朱尧辰. 高等代数范例选解. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2015.
[42] Richard A. Brualdi. 组合数学. 北京: 机械工业出版社, 2012.
[43] 张德学. 一般拓扑学基础. 北京: 科学出版社, 2012.
[44] 熊金城. 点集拓扑讲义. 北京: 高等教育出版社, 2011.
[45] Elias M.Stein. 傅里叶分析导论. 世界图书出版公司, 2007.
[46] 陈维桓. 微分几何初步. 北京: 北京大学出版社, 1990.
[47] 梅向明, 黄敬之. 微分几何. 第四版. 北京: 高等教育出版社, 2008.
[48] 白正国, 沈一兵. 水乃翔. 郭孝英. 黎曼几何初步. 北京: 高等教育出版社,1992.
[49] 张筑生. 微分拓扑新讲. 北京: 北京大学出版社,2002.
[50] 张恭庆, 林渠源. 泛函分析讲义. 北京: 北京大学出版社, 1987.
[51] Haim Brezis. Functional Analysis Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. 世界图书出版公司. 2010.
[52] Thomas W.Hungerford. Algebra. 世界图书出版公司, 2000.
[53] 许以超. 线性代数与矩阵论. 北京: 高等教育出版社, 2008.
[54] 潘承洞, 于秀源. 阶的估计基础. 北京: 高等教育出版社, 2015.
[55] 金玉明, 顾新身, 毛瑞庭. 积分的方法与技巧. 安徽: 中国科学技术大学出版社，2017.
[56] 陈祖墀. 偏微分方程. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2008.
[57] Lawrence C.Evans. Partial Differential Equations. 北京: 高等教育出版社, 2017.
[58] 谷超豪. 李大潜. 陈恕行. 郑宋穆. 谭永基. 数学物理方程. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2002.
[59] David Gilbarg, Neil S. Trudin 二阶椭圆型偏微分方程. 北京: 高等教育出版社, 2016.
[60] 柯朗, 希尔伯特. 数学物理方法. 北京: 科学出版社, 2011.
[61] 匡继昌. 常用不等式. 山东: 山东科学技术出版社, 2004.
[62] 哈代, 利特伍德, 波利亚. 不等式. 北京: 科学出版社, 1965.
[63] 国际最佳数学征解问题分析. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1983.