中国科学技术大学

2019年秋季考试试卷

考试科目: 量子物理B　　　得 分: ________

题目	1	2	3	4	总分
分数	60	10	15	15	100
得分					

学号: ________ 姓名: ________

装订线 答题时不要超过此线

注意事项

1. 全部答题包括选择题必须誊抄在下发的答题纸上, 否则, 一律无效.
2. 解答非选择题应写出必要的文字说明, 方程式和主要演算步骤.

1. **选择题** 每小题6分. 在下面每小题中选择一个你认为正确的答案, 不选, 错选或多选均不得分. 60分

1.1 在量子理论中, 对干涉实验的物理解释是

a. 光子随机地从干涉屏两个孔中的一个通过, 两个或多个光子之间发生干涉

C

b. 光子分解成两部分, 分别通过干涉屏的两个孔, 这两部分发生干涉

c. 光子同时通过干涉屏的两个孔, 自身发生干涉

d. 光子同时通过干涉屏的两个孔, 两个或多个光子之间发生干涉

1.2 量子力学系统中的一个任意态, 对某可观察物理量（它和一个线性算符对应）进行一次测量的结果是

A

a. 该算符的本征值之一

b. 该算符的所有本征值的组合

c. 任何值

d. 完全不能确定

1.3 一个可观察力学变量的两个本征矢量, 如属于不同的本征值, 则

C

a. 它们可以相同

b. 它们之间没有任何关系

c. 它们相互是正交的

d. 它们的关系完全不能确定

1.4 q和p是两个线性算符, 它们有对易关系$qp - pq = i\hbar$, 那么$qp^2 - p^2q$等于

a. $2i\hbar$

C

b. $2i\hbar q$

c. $2i\hbar p$

d. $2i\hbar qp$

1.5 已知算符A和B的对易关系$AB - BA = i\hbar C$, 或者用Poisson括号表示为$[A, B] = C$. 设A是可观察量, 在A的本征态下, C的平均值

C

a. 与A的本征值有关

b. 与A和B的本征值有关

c. 为零

d. 不为零

1.6 量子力学中态和力学变量可以用矢量(左矢, 右矢)和线性算符表示. 用数学描述, 一个表示态的矢量有如下的任意性

D

a. 它的方向

b. 它的大小和方向
c. 它的方向和相因子
d. 它的大小和相因子

1.7 一个可观察量 α 有两个本征值 α_1' 和 α_2', 对应的本征右矢分别是 $|\alpha_1'\rangle$ 和 $|\alpha_2'\rangle$. 而可观察量 β 有两个本征右矢 $|\beta_1'\rangle$ 和 $|\beta_2'\rangle$, 两种本征态有如下关系

A

$$|\alpha_1'\rangle = \frac{1}{\sqrt{13}}\left(2\left|\beta_1'\right\rangle + 3\left|\beta_2'\right\rangle\right),$$
$$|\alpha_2'\rangle = \frac{1}{\sqrt{13}}\left(3\left|\beta_1'\right\rangle - 2\left|\beta_2'\right\rangle\right)$$

对一个态, 依次测量 α, β, α, 第1次测量得到 α_1'. 那么第3次测量得到 α_2' 的概率是

a. $\frac{72}{169}$
b. $\frac{81}{169}$
c. $\frac{97}{169}$
d. 1

1.8 可观察量是线性算符, 它有实本征值, 且其本征态能组成完全集. 一个线性算符如果与对易可观察量完全集之中的每一个可观察量相互对易, 则

B

a. 这个线性算符的本征值是实的
b. 这个线性算符是这些可观察量的函数
c. 这个线性算符和这些可观察量无关
d. 仍无法确定这个线性算符的任何性质

1.9 关于量子泊松 (Poisson) 括号的运算, 以下表达式中正确的是

A

a. $[u, v_1v_2] = [u, v_1]v_2 + v_1[u, v_2]$
b. $[u, v_1v_2] = v_2[u, v_1] + [u, v_2]v_1$
c. $[u, v_1v_2] = v_2[u, v_1] + v_1[u, v_2]$
d. $[u, v_1v_2] = [u, v_1]v_2 + [u, v_2]v_1$

1.10 若算符α与β反对易, 即$\alpha\beta + \beta\alpha = 0$. 设$\alpha$的本征态为$|\alpha'\rangle$, 对应于本征值$\alpha'$, 那么, 态$\beta|\alpha'\rangle$

A

a. 是α的本征态
b. 是β的本征态
c. 是α和β的共同本征态
d. 不是α的本征态, 也不是β的本征态

2. 求下列矩阵 $\boxed{10分}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

的本征值和归一化本征矢量. 这些本征矢量正交吗? 试加以评论.

3. 设x和p分别是坐标和动量算符, 在坐标表象下, 求算符$f = \alpha x + \beta p$ (α和β是常数) 的本征态. $\boxed{15分}$

4. 一个粒子, 它由三个直角坐标x, y, z与其共轭动量p_x, p_y, p_z所描述. 该粒子对原点的角动量定义为 $\boxed{15分}$

$$m_x = yp_z - zp_y, \quad , m_y = zp_x - xp_z, \quad m_z = xp_y - yp_x,$$

或者写成矢量形式

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}.$$

试计算对易关系

$$[m_z, x], \quad [m_z, y], \quad [m_z, z], \quad [m_z, m_x], \quad [m_z, m_y],$$

和

$$[m_z, xp_x + yp_y + zp_z].$$

[解] 设 (右) 本征矢量为

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

那么矩阵

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

的本征方程为

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{或者} \quad \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \tag{2.3}$$

其中λ为该矩阵的特征值, 此方程有非零解的条件是

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2.4}$$

由此解得

$$\lambda = -1 \quad \text{和} \quad \lambda = 4 \tag{2.5}$$

进而求得对应的归一化本征矢量分别为

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

容易看到, 这两个本征矢量是相互正交的. 同样的计算步骤, 可以得到矩阵

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

的本征值为

$$\lambda = 1 \quad \text{和} \quad \lambda = 4 \tag{2.8}$$

对应的归一化 (右) 本征矢量分别为

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad 和 \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

这两个本征矢量相互不正交.

注: 下面的讨论分数占比可以根据实际情况酌情处理.

讨论: 从以下两个方面进行.

i. 矩阵本身是对称的 (更一般地说是Hermite的), 此时本征矢量相互正交 (更一般地, 两个矢量的标量积定义为一个矢量的分量和另一个矢量的分量共轭乘积并求和). 这种情况下矢量及其共轭容易直接得到.

ii. 计算矩阵的左本征矢量, 将两个右本征矢量的标量积定义为一个矢量的分量和另一个矢量对应于同一本征值的左本征矢量的分量乘积并求和. 这样, 如果标量积为零, 就定义为这两个矢量相互正交.

容易求得, 题中两个矩阵的归一化左本征矢量分别为

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \quad 和 \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

和

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 和 \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

相比较而言, 这种情况下, 左本征矢量不容易直接由右本征矢量简单推演得到 (实际的做法是由右本征矢量构成的矩阵求逆, 从而得到左本征矢量, 或者相反). 可以看到

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

互为逆矩阵. 而

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

或者归一化的定义为, 对应同一本征值的左右本征矢量构成的标量积为1. 即

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

互为逆矩阵.

另外, 非对称矩阵可以通过变换转换成对称矩阵 (Hermite矩阵), 从而使得本征矢量相互正交的概念和通常理解的一样.

3. 设x和p分别是坐标和动量算符, 在坐标表象下, 求算符$f = \alpha x + \beta p$ (α和β是常数) 的本征态. 15分

[解] 在坐标表象下, p表示为

$$p = -i\hbar \frac{d}{dx}. \tag{3.1}$$

f对应于本征值f'的本征态波函数$\psi_{f'}(x)$满足的本征方程是

$$\left\{\alpha x - i\beta\hbar \frac{d}{dx}\right\} \psi_{f'}(x) = f' \psi_{f'}(x). \tag{3.2}$$

此方程的解为

$$\psi_{f'}(x) = C \exp\left\{-i\frac{(\alpha x - f')^2}{2\hbar\alpha\beta}\right\} \tag{3.3}$$

其中C是待定的归一化常数. 由归一化条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi_{f'}(x)} \psi_{f''}(x) dx = \delta(f' - f''). \tag{3.4}$$

从而得

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\beta}}. \tag{3.5}$$

最后有f对应于本征值f'的本征态为

$$\psi_{f'}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\beta}} \exp\left\{-i\frac{(\alpha x - f')^2}{2\hbar\alpha\beta}\right\} \tag{3.6}$$

另解: $\frac{f}{\beta}$与x的对易关系和$-i\hbar\frac{d}{dx}$与x的对易关系相同, 因此, 可以设

$$\frac{f}{\beta} = -i\hbar \frac{d}{dx} \tag{3.7}$$

仿照动量本征态在坐标表象下的表示式计算过程, 解得对应于本征值f'的本征态为

$$\psi_{f'}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\beta}} \exp\left\{\frac{ixf'}{\hbar\beta}\right\} \tag{3.8}$$

此时和前面的结果相差一个相因子$\frac{1}{2\hbar\alpha\beta}\left(\alpha^2 x^2 + f'^2\right)$.

4. 一个粒子, 它由三个直角坐标x, y, z与其共轭动量p_x, p_y, p_z所描述. 该粒子对原点的角动量定义为 15分

$$m_x = yp_z - zp_y, \quad , m_y = zp_x - xp_z, \quad m_z = xp_y - yp_x.$$

或者写成矢量形式

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}.$$

试计算对易关系

$$[m_z, x], \quad [m_z, y], \quad [m_z, z], \quad [m_z, m_x], \quad [m_z, m_y],$$

和

$$[m_z, xp_x + yp_y + zp_z].$$

[解] 由坐标, 动量相互之间的对易关系 (仅列出了不对易的关系式),

$$[x, p_x] = 1, \quad [y, p_y] = 1, \quad [z, p_z] = 1 \tag{4.1}$$

和Poisson括号计算规则,

$$[m_z, x] = [xp_y - yp_x, x] = -y[p_x, x] = y \tag{4.2}$$

$$[m_z, y] = [xp_y - yp_x, y] = x[p_y, y] = -x \tag{4.3}$$

$$[m_z, z] = [xp_y - yp_x, z] = 0 \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}[m_z, m_x] &= [xp_y - yp_x, yp_z - zp_y] = [xp_y, yp_z] + [yp_x, zp_y] \\ &= x[p_y, y]p_z + z[y, p_y]p_x = -xp_z + zp_x = m_y\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}[m_z, m_y] &= [xp_y - yp_x, zp_x - xp_z] = [xp_y, zp_x] + [yp_x, xp_z] \\ &= z[x, p_x]p_y + y[p_x, x]p_z = zp_y - yp_z = -m_x\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}[m_z, xp_x + yp_y + zp_z] &= [xp_y - yp_x, xp_x + yp_y + zp_z] \\ &= [xp_y, xp_x] + [xp_y, yp_y] - [yp_x, xp_x] - [yp_x, yp_y] \\ &= x[x, p_x]p_y + x[p_y, y]p_y - y[p_x, x]p_x - y[y, p_y]p_x \\ &= xp_y - xp_y + yp_x - yp_x = 0.\end{aligned} \tag{4.7}$$

注: 最后一个式子表明角动量和任意由坐标与动量通过矢量代数运算构成的标量函数对易.

注: 将中括号对直接定义为对易关系推导过程相同, 结果正确同样计分 (很多教材是这样定义的, 包括曾瑾言版教材)