一.(20分)一维无限深方势阱，质量为m的粒子限制在 $-a<x<a$ 中

(1)求粒子的能量本征值和本征态。

(2)粒子初始时刻 $t=0$ 时波函数是 $\psi(x)=\cos(\frac{\pi x}{2a})(1+\sin(\frac{\pi x}{2a}))$，测量能量的可能的测量值有哪些，概率分别是多少？

(3) t 时刻粒子的波函数是什么？

(4) t 时刻粒子坐标和动量的平均值是多少？

可能要用到的公式：$\sin(ax)\sin(bx)=\frac{1}{2}(\cos((a-b)x)-\cos((a+b)x))$，

$\sin(ax)\cos(bx)=\frac{1}{2}(\sin((a+b)x)+\sin((a-b)x))$.

$\int_{-a}^{a}dx\, x\sin(\frac{\pi x}{a})\cos(\frac{\pi x}{2a})=\frac{32a^2}{9\pi^2}$，$\int_{-a}^{a}dx\sin(\frac{\pi x}{a})\sin(\frac{\pi x}{2a})=\frac{8a}{3\pi}$，

$\int_{-a}^{a}dx\cos(\frac{\pi x}{a})\cos(\frac{\pi x}{2a})=\frac{4a}{3\pi}$

二.(20分)一维阶梯势如图所示：

$V(x>0)=0$，质量为m的入射

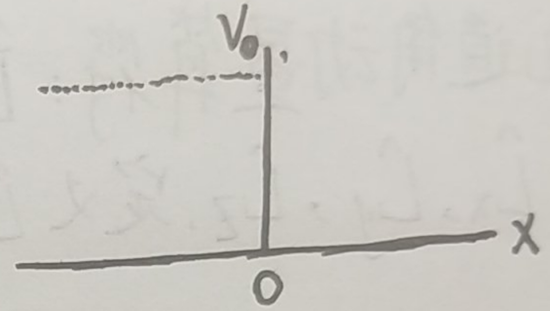
能量 $E>V_0$，求透射系数和

三.(15分)已知在一维谐

基态波函数为 ψ_0

$\psi=\frac{\sqrt{2\alpha}}{\cdots}\alpha x e^{-\alpha^2\cdots}$

二.(20分)一维阶梯势如图所示：$V(x<0)=V_0>0$，$V(x>0)=0$，质量为m的入射粒子从左侧入射，能量$E>V_0$，求透射系数和反射系数。



三.(15分) 已知在一维谐振子势 $V=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ 中运动粒子的基态能量为 $E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega$，基态波函数为 $\psi_0=\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi^{1/4}}e^{-\alpha^2x^2/2}$，第一激发态能量为 $E_1=\frac{3}{2}\hbar\omega$，波函数为 $\psi_1=\frac{\sqrt{2\alpha}}{\pi^{1/4}}\alpha x e^{-\alpha^2x^2/2}$，均已归一化，其中 $\alpha=\sqrt{m\omega/\hbar}$。

某粒子在此谐振子势中运动，我们知道初始波函数为 $\psi=2\psi_0+\psi_1$，之后突然改变势使得新的谐振子势为 $V(x)=2m\omega^2x^2$，

(1) 求新的势下能量基态和第一激发态的能量和波函数。

(2) 假设上述粒子在势场改变瞬间波函数不变，求此后测量能量得到新的基态和第一激发态的能量的概率。

(可能用到积分公式：$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,e^{-a^2x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{|a|}$，$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,x^2e^{-a^2x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2|a|^3}$，$a\in\mathbb{R}$.)

(3) 我们之后对能量进行一次测量，得到了新的基态能量，问此测量之后我们再测量能量的平均值是什么？

四. (15) 三维空间中轨道角动量算符：$\hat{L}=\hat{x}\times\hat{p}$，$\hat{x}$是三维坐标算符，$\hat{p}$是三维动量算符，角动量三个分量，$\hat{L}_x$，$\hat{L}_y$，$\hat{L}_z$. 定义 $\hat{L}^2=\hat{L}_x^2+\hat{L}_y^2+\hat{L}_z^2$. $\hat{L}^2$和$\hat{L}_z$的共同本征态表示为$|lm\rangle$，$\hat{L}^2|lm\rangle=l(l+1)\hbar^2|lm\rangle$，$\hat{L}_z|lm\rangle=m\hbar|lm\rangle$：

1) 请计算对易子$[\hat{L}_x\hat{L}_y,\hat{L}_z]$.

2) $\langle lm|L_x^2|lm\rangle$和$\langle lm|L_y^2|lm\rangle$是否相等，证明你的结论.

3) 求平均值$\langle lm|L_x^2|lm\rangle$.

五.(20分) 某系统态空间为两维，某正交归一基矢为 $|1\rangle, |2\rangle$，某算符在此表象下表示为 $\hat{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

(1) 在此表象下求力学量 $\hat{A}$ 的本征值及本征态。

(2) 某态矢表示为 $|\psi\rangle = |1\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle$。若选取(1)中 $\hat{A}$ 的本征态为基矢构成一个新的 A 表象。在此 A 表象中求 $|\psi\rangle$ 的表示，并求在此态下测量 $\hat{A}$ 的可能测量值及概率。

(3) 另有算符 $\hat{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，此算符是否是厄米算符，是否是幺正算符？是否与 $\hat{A}$ 算符有共同本征态的完备系？说明原因。

(4) 在(2)中 A 表象中，求 $\hat{B}$ 算符的表示。