学号: ________ 姓名: ________

装订线 答题时不要超过此线

中国科学技术大学

2019年秋季考试试卷

考试科目: 量子物理B 得 分: ____________

题目	1	2	3	4	5	总分
分数	40	10	20	15	15	100
得分						

注意事项

1. 全部答题包括选择题必须誊抄在下发的答题纸上, 否则, 一律无效.
2. 解答非选择题应写出必要的文字说明, 方程式和主要演算步骤.
3. 考试结束后, 将本试卷和答题纸一并交回, 并确认每张纸上写有自己的姓名和学号.

1. **选择题** 每小题5分. 在下面每小题中选择一个你认为正确的答案, 不选, 错选或多选均不得分. 40分

1.1 q和p是两个线性算符, 它们有对易关系$qp-pq=i\hbar$, 那么$q^2p^2-p^2q^2$等于

a. $2i\hbar$

b. $2i\hbar qp$

c. $4i\hbar qp$

$\boxed{\text{d.}}$ $4i\hbar qp+2\hbar^2$

1.2 设一系统处于角动量算符L^2和L_z的本征态$|l,m\rangle$, 对应于L^2和L_z的本征值$l(l+1)\hbar^2$和$m\hbar$, $L^2=L_x^2+L_y^2+L_z^2$. 那么对该系统测量L_x^2的平均值是

a. 0

b. $m^2\hbar^2$

c. $l(l+1)\hbar^2$

$\boxed{\text{d.}}$ $\frac{1}{2}\{l(l+1)-m^2\}\hbar^2$

1.3 对于定态, 如果有两个守恒的物理量 f 和 g, 它们不对易, 那么该系统的诸能级一般讲来

$\boxed{\text{a.}}$ 是简并的

b. 不是简并的

c. 是部分简并的

d. 简并性是无法确定的

[解] 考察 H 的任意本征态 $|H'\rangle$, f 也具有确定的值 (此本征态或是 H 和 f 的共同本征态, 或 f 是 H 的函数), 即 $f|H'\rangle=f'|H'\rangle$. f 和 g 不对易, 那么$fg\neq gf$, 而$\langle H'|fg|H'\rangle=\langle H'|gf|H'\rangle=$ f' $\langle H'|gf|H'\rangle$, 只有当 $f'=0$ 或 $\langle H'|g|H'\rangle=0$ 时才能成立. 一般地, f 有不同的本征值 (因此存在不同于零的本征值), 因此要求 $\langle H'|g|H'\rangle=0$, 即$g|H'\rangle$ 与 $|H'\rangle$ 不同 (线性无关). 由题意, g是守恒量, 那么$|H'\rangle$和$g|H'\rangle$都是H的本征态, 属于同一本征值H', 因此能级是简并的.

1.4 可观察量是线性算符, 它有实本征值, 且其本征态能组成完全集. 对于一个可观察量ξ及一个线性算符f, 如果与ξ对易的任意线性算符也与f对易, 则

a. 这个线性算符f的本征值是实的

b. 这个线性算符f和ξ无关

$\boxed{\text{c.}}$ 这个线性算符f是ξ的函数

d. 无法确定这个线性算符f的任何性质

1.5 对应于Hamilton(哈密顿)量 $H=\boldsymbol{p}^2/2m+V(\boldsymbol{r})$, 具有分立能级的定态中, 动量的平均值 $\langle\boldsymbol{p}\rangle$

$\boxed{\text{a.}}$ 为零

b. 不为零

c. 和能级的能量有关

d. 不能确定

1.6 对于定态, 对应的Hamilton(哈密顿)量为恒量, 某一时刻测量系统的能量, 其平均值

a. 随时间是变化的

$\boxed{\text{b.}}$ 不随时间变化

c. 和初始时刻的具体状态有关

d. 不能确定

1.7 如果势能是x的偶函数, 即$V(x)=V(-x)$, 那么, Hamilton算符

$$H(x)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x).$$

也是x的偶函数. 设能级非简并, 能量本征函数为$\psi(x)$, 则其与x的关系, 在下述说法中正确的是

a. ψ是x的周期函数

b. ψ是x的偶函数, 即$\psi(x)=\psi(-x)$

c. ψ是x的奇函数, 即$\psi(x)=-\psi(-x)$

$\boxed{\text{d.}}$ ψ要么是x的偶函数, 要么是x的奇函数

1.8 氢原子的能级公式为$E_n=-\frac{me^4}{2\hbar^2n^2}$ $(n=1,2,3,\ldots)$, 其中m和e分别是电子的质量和电荷, $\hbar=\frac{h}{2\pi}$ (h是Plank常数). 对于电子偶素体系 (e^+-e^-束缚体系), 其能级为

a. $E_n=-\frac{me^4}{8\hbar^2n^2}$

$\boxed{\text{b.}}$ $E_n=-\frac{me^4}{4\hbar^2n^2}$

c. $E_n=-\frac{me^4}{2\hbar^2n^2}$

d. $E_n=-\frac{me^4}{\hbar^2n^2}$

2. 设x和p分别是坐标和动量算符, 在动量表象下, 求算符$f = \alpha x + \beta p$ (α和β是常数) 的本征态. 10分

[解] 在动量表象下, x表示为

$$x = i\hbar\frac{d}{dp}, \tag{2.1}$$

f对应于本征值f'的本征态波函数$\psi_{f'}(p)$满足的本征方程是

$$\left\{i\hbar\alpha\frac{d}{dp} - \beta p\right\}\psi_{f'}(p) = f'\psi_{f'}(p). \tag{2.2}$$

此方程的解为

$$\psi_{f'}(p) = C\exp\left\{i\frac{(\beta p - f')^2}{2\hbar\alpha\beta}\right\} \tag{2.3}$$

其中C是待定的归一化常数. 由归一化条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\psi_{f'}(p)}\psi_{f''}(p)dx = \delta(f' - f''). \tag{2.4}$$

从而得

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\alpha}}. \tag{2.5}$$

最后有f对应于本征值f'的本征态为

$$\psi_{f'}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\alpha}}\exp\left\{i\frac{(\beta p - f')^2}{2\hbar\alpha\beta}\right\} \tag{2.6}$$

另解: $\frac{f}{\alpha}$与p的对易关系和$i\hbar\frac{d}{dp}$与p的对易关系相同, 因此, 可以设

$$\frac{f}{\alpha} = i\hbar\frac{d}{dp} \tag{2.7}$$

仿照坐标本征态在动量表象下的表示式推导过程, 解得对应于本征值f'的本征态为

$$\psi_{f'}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\alpha}}\exp\left\{\frac{-ipf'}{\hbar\alpha}\right\} \tag{2.8}$$

此式和前面的结果相比, 差一个相因子$\frac{1}{2\hbar\alpha\beta}(\beta^2p^2 + f'^2)$.

3. 一个质量为m的粒子在一维无限深势阱$(0 \le x \le a)$中运动, $t = 0$时刻的初始波函数为 20分

$$\psi = \sqrt{\frac{8}{5a}}\left[1 + \cos\frac{\pi x}{a}\right]\sin\frac{\pi x}{a}, \quad (0 \le x \le a)$$

i. 在后来某一时刻t_0的波函数是什么?

ii. 系统在$t = 0$和$t = t_0$时测量的平均能量是多少?

iii. 在$t = t_0$时, 在势阱左半部$(0 \le x \le a/2)$发现粒子的概率是多少?

[解] 无限深势阱中的定态波函数和相应的能量为

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}, \qquad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{3.1}$$

初态波函数以此展开为

$$\psi(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{a}}\left[\sqrt{\frac{4}{5}}\sin\frac{\pi x}{a} + \sqrt{\frac{1}{5}}\sin\frac{2\pi x}{a}\right] \tag{3.2}$$

i. 因此$t = t_0$时刻粒子的波函数为

$$\psi(x, t) = e^{-i\hat{H}t_0/\hbar}\psi(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{a}}\left[\sqrt{\frac{4}{5}}e^{-iE_1t_0/\hbar}\sin\frac{\pi x}{a} + \sqrt{\frac{1}{5}}e^{-iE_2t_0/\hbar}\sin\frac{2\pi x}{a}\right] \tag{3.3}$$

ii. $t=0$时, 平均能量$\langle E\rangle=\int_{-a/2}^{a/2}\psi^*(x,0)\hat{H}\psi(x,0)dx=\frac{4}{5}E_1+\frac{1}{5}E_2=\frac{4\pi^2\hbar^2}{5ma^2}$; 同理可得$t=t_0$时刻平均能量与$t=0$时刻相同.

iii. 在左半部($0\le x\le a/2$)发现粒子的概率

$$\begin{aligned}P=&\int_0^{a/2}\psi^*(x,t_0)\psi(x,t_0)dx\\=&\int_0^{a/2}\left[\frac{8}{5a}\sin^2\frac{\pi x}{a}+\frac{2}{5a}\sin^2\frac{2\pi x}{a}+\frac{8}{5a}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{3\pi^2\hbar t_0}{2ma^2}\right]dx\\=&\frac{1}{2}+\frac{16}{15\pi}\cos\frac{3\pi^2\hbar t_0}{2ma^2}\end{aligned}\tag{3.4}$$

4. 电子的自旋算符可以用无量纲算符 (Pauli算符) $\boldsymbol{\sigma}$ 来表示, 即 $\boldsymbol{s}=\frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}$. 求在 σ_z 表象中 σ_y 的本征态. 15分
提示: 算符 $\boldsymbol{\sigma}$ 有性质 $\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma_z^2=1$, $\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{\sigma}=2i\boldsymbol{\sigma}$

[解] 在σ_z的表象中, (由提示的公式) σ_x, σ_y和σ_z的表示式为

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad\sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.\tag{4.1}$$

设σ_y的本征态为

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\tag{4.2}$$

则

$$\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\tag{4.3}$$

或者

$$-ib=\pm a,\tag{4.4}$$

$$ia=\pm b.\tag{4.5}$$

因此

$$b=\pm ia,\tag{4.6}$$

从而求得σ_b的归一化本征态为

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\\pm i\end{pmatrix},\tag{4.7}$$

分别对应于本征值±1.

5. 一维谐振子的Hamilton量$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2q^2$. 设系统处于能量本征态$|n\rangle$下, 对应于能量本征值$(n+1/2)\hbar\omega$, 计算 15分

$$\Delta q=\sqrt{\langle(q-\langle q\rangle)^2\rangle},\quad\Delta p=\sqrt{\langle(p-\langle p\rangle)^2\rangle},\quad\Delta q\Delta p.$$

其中$\langle X\rangle=\langle n|X|n\rangle$ 表示 X 的平均值.
提示: 利用(升降)算符 $\eta=(2m\hbar\omega)^{-1/2}(p+im\omega q)$ 和 $\bar{\eta}=(2m\hbar\omega)^{-1/2}(p-im\omega q)$的性质,

$$\bar{\eta}\eta=\frac{H}{\hbar\omega}+\frac{1}{2},\quad\eta\bar{\eta}=\frac{H}{\hbar\omega}-\frac{1}{2}.$$

[解] 设$|n\rangle$是归一化的, 由η和$\bar{\eta}$的性质, 由

$$\frac{H}{\hbar\omega}|n\rangle=(n+1/2)|n\rangle\tag{5.1}$$

和

$$\frac{H}{\hbar\omega}\eta|n\rangle = (n+3/2)\eta|n\rangle \tag{5.2}$$

$$\frac{H}{\hbar\omega}\bar{\eta}|n\rangle = (n-1/2)\bar{\eta}|n\rangle \tag{5.3}$$

得到

$$\langle n|\bar{\eta}\eta|n\rangle = n+1 \tag{5.4}$$

$$\langle n|\eta\bar{\eta}|n\rangle = n \tag{5.5}$$

$$\langle n|\eta|n\rangle = 0 \tag{5.6}$$

$$\langle n|\bar{\eta}|n\rangle = 0 \tag{5.7}$$

$$\langle n|\eta^2|n\rangle = 0 \tag{5.8}$$

$$\langle n|\bar{\eta}^2|n\rangle = 0 \tag{5.9}$$

因此

$$\langle n|\eta+\bar{\eta}|n\rangle = 0 \tag{5.10}$$

$$\langle n|\eta+\bar{\eta}|n\rangle = 0 \tag{5.11}$$

又

$$q = \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}(\eta-\bar{\eta}) \tag{5.12}$$

$$p = \frac{1}{2}\sqrt{2\hbar m\omega}(\eta+\bar{\eta}) \tag{5.13}$$

从而

$$\langle q\rangle = 0 \tag{5.14}$$

$$\langle p\rangle = 0 \tag{5.15}$$

再有

$$\langle n|(\eta+\bar{\eta})^2|n\rangle = \langle n|\eta\bar{\eta}+\bar{\eta}\eta+\eta^2+\bar{\eta}^2|n\rangle = 2n+1 \tag{5.16}$$

$$\langle n|(\eta-\bar{\eta})^2|n\rangle = \langle n|-\eta\bar{\eta}-\bar{\eta}\eta+\eta^2+\bar{\eta}^2|n\rangle = -2n-1 \tag{5.17}$$

因此

$$\langle q^2\rangle = -\frac{\hbar}{2m\omega}\langle(\eta-\bar{\eta})^2\rangle = (n+1/2)\frac{\hbar}{m\omega} \tag{5.18}$$

$$\langle p^2\rangle = \frac{(hbarm\omega}{2}\langle(\eta+\bar{\eta})^2\rangle = (n+1/2)\hbar m\omega \tag{5.19}$$

从而

$$\Delta q = \sqrt{\langle(q-\langle q\rangle)^2\rangle} = \sqrt{\langle q^2\rangle} = \sqrt{(n+1/2)\frac{\hbar}{m\omega}} \tag{5.20}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle(p-\langle p\rangle)^2\rangle} = \sqrt{\langle p^2\rangle} = \sqrt{(n+1/2)\hbar m\omega} \tag{5.21}$$

$$\Delta q\Delta p = (n+1/2)\hbar \tag{5.22}$$