

中国科学技术大学
2019–2020学年泛函分析期中考试

姓名: _____ 学号: _____

1. (20分) 下面的说法是否正确? 如果错误, 请说明理由或举出相应的反例; 如果正确, 请给出证明.

(a) $C[0, 1]$ 在 $L^\infty[0, 1]$ 中稠密.

(b) $\left\{ (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} = 0 \right\}$ 是 Banach 空间..

2. (15分) 设 $T: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ 是如下定义的线性算子

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \dots).$$

求 $\|T\|$.

3. (15分) 设 $T: X_1 \rightarrow X_2$ 是两个 Hilbert 空间 X_1 和 X_2 之间的线性等距映射. 证明:

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in X_1.$$

4. (15分) 设 X 是实赋范线性空间. $0 \neq f \in X^*$, E 是 X 中开集. 证明: $f(E)$ 是 \mathbb{R} 中开集.

5. (15分) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个复数列, 满足: 对任何 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_n x_n$ 收敛. 证明: $\sup_{n \geq 1} |a_n| < \infty$.

6. (10分) 设 X 是一个赋范空间, M 是 X 的闭子空间, M 和 X/M (商空间) 都是 Banach 空间. 证明: X 是 Banach 空间.

7. (10分) 证明: Banach 空间不可能有可数无穷的线性基(即代数基, Hamel 基).