数分分析 A3 第三次习题课

何展韬

2023 年 10 月 21 日

1 作业答案 (第 4,6 周)

练习 (习题 15.1). 求下列函数项级数的收敛点集：

$$(3)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n \qquad (6)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^ny^n}{x^n+y^n} \quad (x>0,y>0)$$

解. (3) 由于：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(x+n)}{n}\right|=|x| \quad (\forall x\in\mathbb{R})$$

故由 Cauchy 开方判别法知，当 $|x|<1$ 时，原级数绝对收敛，从而收敛。

当 $|x|\geqslant 1$ 时，对通项有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}x^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$，其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\mathrm{e}^x$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n$ 在 $|x|\geqslant 1$ 时不趋于 0，从而通项不趋于 0，原级数发散。

综上收敛点集为 $(-1,1)$。

(6) 由于 $x>0,y>0$，故原级数变为：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x^{-n}+y^{-n}}$。更进一步，不妨设 $0<x\leqslant y$，则有：

$$0<\frac{1}{2}x^n=\frac{1}{2x^{-n}}\leqslant\frac{1}{x^{-n}+y^{-n}}<\frac{1}{x^{-n}}=x^n \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$$

从而当 $x<1$ 时，由正项级数的比较判别法知原级数收敛；当 $x\geqslant 1$ 时，由正项级数的比较判别法知原级数发散。

最后利用 x,y 的对称性，可得收敛点集为：$\{(x,y)\mid 0<\min\{x,y\}<1\}$。 □

练习 (问题 15.1).

1、设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上收敛于 $S(x)$，如果 $u_n(x)\,(n=1,2,\cdots)$ 都是 $[a,b]$ 上的非负连续函数，证明：$S(x)$ 必在 $[a,b]$ 上取到最小值。

2、第一题中的 $S(x)$ 是否一定能取到最大值？

3、把第一题中的有界闭区间换成开区间或无穷区间，结论是否还成立？

解. 1、（解法 1）设 $\inf\limits_{x\in[a,b]} S(x)=S$，由于 $u_n(x)$ 非负，故 $S(x)$ 非负，下确界存在。即证 $\exists x_0\in[a,b]$，使得 $S(x_0)=S$。
由下确界的定义，$\forall n\in\mathbb{N}^*$，$\exists x_n\in[a,b]$，使得：

$$S\leqslant S(x_n)<S+\frac{1}{n}$$

由于 $[a,b]$ 有界闭区间，因此 $\{x_n\}$ 存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 $[a,b]$ 中的一点 x_0，且有：

$$S\leqslant S(x_{n_k})<S+\frac{1}{n_k}\quad(\forall k\in\mathbb{N}*)\tag{1}$$

记函数项级数的部分和为 $S_n(x)$，由于 $u_n(x)\,(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ 在 $[a,b]$ 上非负，故 $S_n(x)$ 关于 n 单调递增，关于 $x\in[a,b]$ 逐点收敛于 $S(x)$。故对式 (1) 有：

$$0\leqslant S_n(x_{n_k})\leqslant S(n_k)<S+\frac{1}{n_k}\quad(\forall n,k\in\mathbb{N}^*)\tag{2}$$

由 $u_n(x)$ 连续性可知 $S_n(x)$ 的连续性，故对式 (2) 先固定 n，令 $k\to\infty$，再由 n 的任意性可得：

$$S_n(x_0)\leqslant S\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)\tag{3}$$

对式 (3) 令 $n\to\infty$，得：

$$S(x_0)\leqslant S$$

最后由 S 的定义可知，$S(x)$ 在 $x_0\in[a,b]$ 处取得最小值 S。

（解法 2）对 $\forall n\in\mathbb{N}^*$，由 $S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，故 $\exists x_n\in[a,b]$，使得 $S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 的最小值为 $S_n(x_n)$，记为 S_n。由于对每个 x，$\{S_n(x)\}$ 关于 n 单调递增，故 $\{S_n\}$ 也单调递增。更进一步，有：

$$S_n=S_n(x_n)\leqslant S_n(x)\leqslant S(x)\quad(\forall x\in[a,b],n\in\mathbb{N}^*)\tag{4}$$

其中第一个 $\leqslant$ 是因为 S_n 是 $S_n(x)$ 的最小值，第二个 $\leqslant$ 是因为对每个 x，$\{S_n(x)\}$ 关于 n 单调递增收敛于 $S(x)$。
由式 (4) 可得 $\{S_n\}$ 为有上界的递增数列，故极限存在，记为 S_0。再对式 (4) 令 $n\to\infty$ 可得：

$$S_0\leqslant S(x)\quad(\forall x\in[a,b])\tag{5}$$

由式 (5) 可知 S_0 为 $S(x)$ 的一个下界。由于 $\{x_n\}\subset[a,b]$，故 $\{x_n\}$ 存在收敛子列。不妨设 $\{x_n\}$ 本身收敛于 $x_0\in[a,b]$，下面证明 $S(x_0)=S_0$。
一方面由式 (5) 可得 $S_0\leqslant S(x_0)$；另一方面，有：

$$S_0\geqslant S_n=S_n(x_n)\geqslant S_m(x_n)\quad(\forall n\geqslant m)\tag{6}$$

其中第一个 $\geqslant$ 是因为 $\{S_n\}$ 递增趋于 S_0，第二个 $\geqslant$ 是因为 $S_n(x) \geqslant S_m(x)$ $(\forall x \in [a,b]$, $n \geqslant m)$。

对式 (6) 先固定 m，令 $n \to \infty$，由 $S_m(x)$ 的连续性，$x_n \to x_0$，以及 m 的任意性可得：

$$S_0 \geqslant S_m(x_0) \quad (\forall m \in \mathbb{N}^*) \tag{7}$$

再对式 (7) 令 $m \to \infty$，由 $\{S_n(x)\}$ 在 $x_0 \in [a,b]$ 这点处收敛于 $S(x_0)$ 可得：

$$S_0 \geqslant S(x_0)$$

故 $S(x_0) = S_0$。由于已经证明了 S_0 是 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 的一个下界，因此 $S(x_0)$ 为 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 的最小值。

2、第一题中的 $S(x)$ 不一定能取到最大值，反例如下：

$$u_n(x) = x^n - x^{n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*, x \in [0,1])$$

显然有 $u_n(x) \geqslant 0$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*, x \in [0,1])$。计算部分和并取极限得：

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} (x - x^{n+1}) = \begin{cases} x & x \in [0,1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

易见 $S(x)$ 在 $[0,1]$ 上没有最大值。

3、结论都不再成立：

(1) 对开区间 $(0,1)$：取 $u_1(x) = x$，$u_n(x) = 0$ $(\forall n \geqslant 2)$，则 $S(x) = x$ 在 $(0,1)$ 上没有最小值；

(2) 对开区间 $(0,+\infty)$：取 $u_1(x) = \dfrac{1}{x}$，$u_n(x) = 0$ $(\forall n \geqslant 2)$，则 $S(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上没有最小值。 $\square$

注 1.1. **对于本题的 3，上面的从第二项开始全是 0，感觉像在“耍赖”。如果学习了幂级数的相关知识，那么由：**

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

也可以同时得到 3(1)(2) 的反例。

练习 (习题 15.2.1). 研究下列函数列在指定区间上的一致收敛性：

(1) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$ $\quad (a)\ 0 < x < +\infty$; $\ (b)\ 0 < \lambda < x < +\infty$

(2) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$ $\quad (a)\ 0 \leqslant x \leqslant 1-\lambda$; $\ (b)\ 1-\lambda \leqslant x \leqslant 1+\lambda$; $\ (c)\ 1+\lambda \leqslant x < +\infty$

(3) $f_n(x) = \mathrm{e}^{-(x-n)^2}$ $\quad (a)\ -l < x < l\ (l > 0)$; $\ (b)\ -\infty < x < +\infty$

解. (1) 首先对任意固定的 $x>0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$，从而极限函数 $f(x)=0\,(\forall x>0)$。
(a)：

$$\beta_n=\sup_{x\in(0,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in(0,+\infty)}|f_n(x)|\geqslant\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{1}{2}$$

故 $\beta_n\not\to 0$，$\{f_n(x)\}$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛。
(b)：

$$\beta_n=\sup_{x\in(\lambda,+\infty)}|f_n(x)|=\sup_{x\in(\lambda,+\infty)}\left|\frac{1}{1+nx}\right|=\frac{1}{1+\lambda n}\to 0$$

故 $\{f_n(x)\}$ 在 $(\lambda,+\infty)$ 一致收敛。

(2) 先求逐点收敛的极限函数：

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+x^n}\right)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x<1\\ \dfrac{1}{2} & x=1\\ 1 & x>1\end{cases}$$

(a)：

$$\beta_n=\sup_{x\in[0,1-\lambda]}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[0,1-\lambda]}\left|1-\frac{1}{1+x^n}\right|=1-\frac{1}{1+(1-\lambda)^n}\to 0$$

故 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1-\lambda]$ 一致收敛。

(b) 当 n 充分大时：

$$\beta_n=\sup_{x\in[1-\lambda,1+\lambda]}|f_n(x)-f(x)|\geqslant\left|f_n\left(1+\frac{1}{n}\right)-f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{1}{1+(1+\frac{1}{n})^n}\geqslant\frac{1}{1+\mathrm{e}}$$

故 $\beta_n\not\to 0$，$\{f_n(x)\}$ 在 $[1-\lambda,1+\lambda]$ 不一致收敛。
(c)：

$$\beta_n=\sup_{x\in[1+\lambda,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[1+\lambda,+\infty)}\left|\frac{1}{1+x^n}\right|=\frac{1}{1+(1+\lambda)^n}\to 0$$

故 $\{f_n(x)\}$ 在 $[1+\lambda,+\infty)$ 一致收敛。

(3) 首先对任意固定的 $x\in\mathbb{R}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$，从而极限函数 $f(x)=0\,(\forall x\in\mathbb{R})$。
(a) 当 n 充分大时：

$$\beta_n=\sup_{x\in(-l,l)}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in(-l,l)}|f_n(x)|=\mathrm{e}^{-(n-l)^2}\to 0$$

故 $\{f_n(x)\}$ 在 $(-l,l)$ 一致收敛。
(b)：

$$\beta_n=\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|\geqslant|f_n(n)-f(n)|=1$$

故 $\beta_n\not\to 0$，$\{f_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不一致收敛。 $\square$

练习 (补充 EX1).

$f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，令；

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(x+\frac{k}{n})\ (n\in\mathbb{N}^*)$$

试证 $\{f_n(x)\}$ 在任意有限闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛。

解. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，故在 $[a,b+1]$Riemann 可积。注意到 $f_n(x)$ 的表达式是 $f(x)$ 在 $[x,x+1]$ 上积分的 Riemann 和，在 Riemann 可积条件下便有：

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\int_x^{x+1}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t\quad(\forall x\in[a,b])$$

故：

$$\begin{aligned}
&\left|f_n(x)-\int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t\right|\\
=&\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(x+\frac{k}{n})\mathrm{d}t-\int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t\right|\\
=&\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(f(x+\frac{k}{n})-f(x+t)\right)\mathrm{d}t\right|\\
\leqslant&\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\sup_{t\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]}\left|f(x+\frac{k}{n})-f(x+t)\right|\\
\leqslant&\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\omega_k(x)
\end{aligned}\tag{8}$$

其中 $\omega_k(x)=\sup_{s,t\in[x+\frac{k}{n},x+\frac{k+1}{n}]}|f(s)-f(t)|$，即 $f(t)$ 在 $[x+\dfrac{k}{n},x+\dfrac{k+1}{n}]$ 的振幅。

对固定的 $x\in[a,b],n\in\mathbb{N}^*$，已经有 $[x,x+1]$ 的一个分割 π_x，分割得到的每个小区间长度为 $\dfrac{1}{n}$，注意到必定存在 $[a,b+1]$ 的一个分割 $\widetilde{\pi_x}$，使得 π_x 是 $\widetilde{\pi_x}$ 的一部分，而且由 $\widetilde{\pi_x}$ 分割得到的每个小区间长度都不超过 $\dfrac{1}{n}$，即 $\|\widetilde{\pi_x}\|\leqslant\dfrac{1}{n}$。设 $\widetilde{\pi_x}=\{x_0,x_1,\cdots,x_N\}$，进一步有：

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\omega_k(x)\leqslant\sum_{i=0}^{N-1}\omega_i\Delta x_i\tag{9}$$

其中 $\omega_i=\sup_{s,t\in[x_i,x_{i+1}]}|f(s)-f(t)|$，$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$.

对式 (9) 令 $n\to\infty$，则对 $\forall x\in[a,b]$ 都有 $\|\widetilde{\pi_x}\|\to 0$。由于 $f(x)$ 在 $[a,b+1]$Riemann 可积，由数分 A1 可积性相关知识可知式 (6) 右边关于 $x\in[a,b]$ 一致趋于 0。

又

$$\beta_n=\sup_{x\in[a,b]}\left|f_n(x)-\int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t\right| \tag{10}$$

故综合式 (8)(9)(10) 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$，$\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。 □

注 1.2. 本题由于条件是“$f(x)\in C(\mathbb{R})$”，因此在式 (8) 的第 4 行后可以在 $[a,b+1]$ 上用函数一致连续立即得到一致收敛的结果，相比于上面的解法要简单。但值得一提的是，上面的解法本质上只使用了“$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上 Riemann 可积”的条件，说明这个命题对 $\mathbb{R}$ 上 Riemann 可积函数都成立。

练习 (补充 EX2).

$\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 可微且收敛，又有 $|f_n'(x)|\leqslant M$ $(\forall x\in[a,b],n\in\mathbb{N}^*)$，则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛。

解. 对 $\forall x_0\in[a,b]$，$\{f_n(x_0)\}$ 为收敛数列，由数列的 Cauchy 收敛可得：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N(x_0)\in\mathbb{N}^*$，使得：

$$|f_n(x_0)-f_m(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}\quad(n,m>N(x_0)) \tag{11}$$

对这个 x_0，设 $I_{x_0}=(x_0-\frac{\varepsilon}{3M},x_0+\frac{\varepsilon}{3M})$。由微分中值定理：

$$|f_n(x)-f_n(x_0)|\leqslant M|x-x_0|<M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}=\frac{\varepsilon}{3}\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*,x\in I_{x_0}) \tag{12}$$

结合式 (11)(12) 得：

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_m(x)|&\leqslant|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f_m(x_0)|+|f_m(x)-f_m(x_0)|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\\&=\varepsilon\quad(\forall n,m>N(x_0),x\in I_{x_0})\end{aligned} \tag{13}$$

由于 $[a,b]$ 有限闭区间是有界闭集，$\{I_{x_0}\}_{\forall x_0\in[a,b]}$ 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖，故由有限覆盖定理，$\exists\{I_{x_k}\}_{k=1}^n$ 覆盖 $[a,b]$。则令 $N=\max\{N(x_1),N(x_2),\cdots,N(x_n)\}<+\infty$，$N$ 与 $x\in[a,b]$ 无关。则式 (10) 变为：

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon\quad(\forall n,m>N,x\in[a,b]) \tag{14}$$

对式 (14) 由函数列一致收敛的 Cauchy 收敛，得 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛。 □

练习 (习题 15.2.2). 研究下列级数在指定区间上的一致收敛性：

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$，$(-\infty,+\infty)$ (5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$，$(-l,l)\ (l>0)$

(6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$，$[0,2\pi]$ (7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$，$(0,+\infty)$

解. (4) $\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\right|\leqslant\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\ (\forall n\in\mathbb{N}^*,x\in\mathbb{R})$，由 Weierstrass 判别法，函数项级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛。

(5) 本题需要对 x 的正负分类讨论。当 n 充分大时有：

$$\left|\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)\right|=\begin{cases}\ln\left(1-\dfrac{x}{n\ln^2 n+x}\right) & x\in(-l,0)\\[2ex] \ln\left(1+\dfrac{x}{n\ln^2 n}\right) & x\in[0,l)\end{cases}\leqslant\begin{cases}\dfrac{l}{n\ln^2 n-l} & x\in(-l,0)\\[2ex] \dfrac{l}{n\ln^2 n} & x\in[0,l)\end{cases}$$

$$\leqslant\frac{l}{n\ln^2 n-l}$$

故由 Weierstrass 判别法，函数项级数在 $(-l,l)$ 上一致收敛。

(6) $\sum\limits_{n=2}^{N}(-1)^n$ 一致有界，$b_n(x)=\frac{1}{n+\sin x}$ 对 $\forall x\in[0,2\pi]$ 都关于 n 单调递减趋于 0，且 $|b_n(x)|\leqslant\frac{1}{n-1}\ (\forall n>1,x\in[0,2\pi])$，故 $\{b_n(x)\}$ 在 $[0,2\pi]$ 一致收敛于 0。故由函数项级数一致收敛的 Dirichlet 判别法，函数项级数在 $[0,2\pi]$ 一致收敛。

(7) 若函数项级数在 $(0,+\infty)$ 一致收敛，那么通项函数 $u_n(x)=2^n\sin\frac{1}{3^n x}$ 在 $(0,+\infty)$ 应当一致收敛于 0。但是：

$$\beta_n=\sup_{x\in(0,+\infty)}|u_n(x)|\geqslant u_n\left(\frac{1}{3^n\cdot\frac{\pi}{2}}\right)=2^n$$

故 $\beta_n\not\to 0$，矛盾。故函数项级数在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛。 □

注 1.3. 本题的 (5) 错得比较多，主要错因是没有对 x 的正负进行分类，轻易地得到下面的错误放缩：

$$\left|\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)\right|\leqslant\frac{l}{n\ln^2 n}\quad(\forall x\in(-l,l))$$

上式错误的原因是不等式 $\ln(1+x)\leqslant x$ 不能加绝对值，这是因为在 $x<0$ 时，不等式左右两边都小于 0，加绝对值之后会变号。

练习 (习题 15.2.7). 设 $\{u_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数列。证明：如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b)$ 内的每一点收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(b)$ 发散，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b)$ 上不一致收敛。

解. 反证：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b)$ 上一致收敛，则由 Cauchy 收敛，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ 与 x 无关，使得 $\forall n > N, p \in \mathbb{N}^*$ 都有：

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall x \in [a,b)) \tag{15}$$

由 $u_k(x)$ 在 $[a,b]$ 的连续性，对式 (12) 先固定 n,p，令 $x \to b^-$，再由 n,p 的任意性可得：

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k(b) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad (\forall n > N, p \in \mathbb{N}^*) \tag{16}$$

而式 (13) 其实是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(b)$ 的 Cauchy 收敛，与其发散矛盾。故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b)$ 上不一致收敛。 □

练习 (习题 15.2.11). 证明：函数列

$$f_n(x) = xn^{-x}(\ln n)^{\alpha} \quad (n = 1, 2 \cdots)$$

在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛的充分必要条件是 $\alpha < 1$。

解. 首先计算逐点收敛的极限函数：

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ xn^{-x}(\ln n)^{\alpha} & x > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad (\forall x \geqslant 0)$$

故：

$$\beta_n = \sup_{x\geqslant 0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\geqslant 0} \left(xn^{-x}(\ln n)^{\alpha} \right) \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

为了求出 β_n 的具体表达式，我们对 $f_n(x)$ 求导得：

$$f_n'(x) = n^{-x}(\ln n)^{\alpha} - xn^{-x}(\ln n)^{\alpha+1} = n^{-x}(\ln n)^{\alpha}(1 - x\ln n)$$

则 $n > 1$ 时，$f_n(x)$ 在 $x = \dfrac{1}{\ln n}$ 处取得极大值，计算得：

$$\beta_n = \frac{(\ln n)^{\alpha}}{e} \quad (\forall n > 1)$$

故函数列在 $x \in [0,+\infty)$ 一致收敛 $\iff \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0 \iff \alpha < 1$。 □

练习 (问题 15.2.1). 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$$

在区间 $[0,\delta]$ 和 $[\delta,+\infty]$ 上的一致收敛性，其中 $\delta > 0$。

解. 记 $f_n(x)=\dfrac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$，由于：

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}\\=&\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+(n-1)x)}-\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}\right)\\=&1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}\end{aligned}$$

故函数项级数的一致收敛性与函数列 $\{f_n(x)\}$ 的一致收敛性相同。计算 $\{f_n(x)\}$ 的极限函数得：

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x>0\end{cases}$$

(i)$x\in[0,\delta]$ 时：

$$\beta_n=\sup_{x\in[0,\delta]}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[0,\delta]}\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}=1$$

故 $\beta_n\not\to 0$，$\{f_n(x)\}$ 在 $x\in[0,\delta]$ 不一致收敛，从而原级数在 $x\in[0,\delta]$ 不一致收敛。

(ii)$x\in[\delta,+\infty)$ 时：

$$\beta_n=\sup_{x\in[\delta,+\infty)}\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}\leqslant\sup_{x\in[\delta,+\infty)}\frac{1}{(1+x)^n}=\frac{1}{(1+\delta)^n}\to 0$$

故 $\{f_n(x)\}$ 在 $x\in[\delta,+\infty)$ 一致收敛，从而原级数在 $x\in[\delta,+\infty)$ 一致收敛。 □

练习 (习题 15.3.1). 确定下列函数的存在域，并研究它们的连续性：

(1) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^n$ (2) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x+(-1)^n n}{x^2+n^2}$

解. (1) 先确定函数的收敛域。当 $|x|<1$ 时：

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|x+\frac{1}{n}\right|^n}=\lim_{n\to\infty}\left|x+\frac{1}{n}\right|=|x|<1$$

故由 Cauchy 开方判别法，$f(x)$ 在 $|x|<1$ 时逐点收敛。

当 $|x|\geqslant 1,x\neq -1$ 时，无论 x 正负，当 n 充分大时，都有：

$$\left|x+\frac{1}{n}\right|^n\geqslant 1$$

故通项不趋于 0，$f(x)$ 在 $|x|\geqslant 1,x\neq -1$ 时发散。

$x=-1$ 时：

$$\lim_{n\to\infty}\left|x+\frac{1}{n}\right|^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{\mathrm{e}}\neq 0$$

故通项不趋于 0，$f(x)$ 在 $x=-1$ 时发散。综上 $f(x)$ 的收敛域为 $\{x:|x|<1\}$。

下证 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内闭一致收敛。对任意给定的 $1>\delta>0$，在 $[-1+\delta,1-\delta]$ 上，当 n 充分大时有：

$$\left|x+\frac{1}{n}\right|^n\leqslant\left(|x|+\frac{\delta}{2}\right)^n\leqslant\left(1-\frac{\delta}{2}\right)^n\quad(\forall x\in[-1+\delta,1-\delta])$$

故由 Weierstrass 判别法，$f(x)$ 在 $[-1+\delta,1-\delta]$ 一致收敛，从而 $f(x)$ 在 $[-1+\delta,1-\delta]$ 连续。再由 δ 任意性，$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上连续。

(2) 我们将这个函数项级数拆成两部分进行讨论：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x+(-1)^n n}{x^2+n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2+n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{x^2+n^2}\triangleq I_1+I_2 \tag{17}$$

首先对任意给定的 $x\in\mathbb{R}$，级数 I_1 收敛。对级数 I_2，$\dfrac{n}{x^2+n^2}$ 在 n 充分大时递减，且趋于 0，由 Leibniz 判别法也可得收敛，故由式 (17)，$f(x)$ 收敛域为 $\mathbb{R}$.

下证 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上内闭一致收敛。对任意给定的 $M>0$，在 $[-M,M]$ 上：

对级数 I_1：

$$\left|\frac{x}{x^2+n^2}\right|\leqslant\frac{M}{n^2}\quad(\forall x\in[-M,M],N\in\mathbb{N}^*)$$

故由 Weierstrass 判别法，级数 I_1 在 $[-M,M]$ 一致收敛。

对级数 I_2：

$\left|\sum\limits_{n=1}^{N}(-1)^n\right|$ 一致有界，$\left\{\dfrac{n}{x^2+n^2}\right\}$ 在 $[-M,M]$ 上对每个 x 都关于 n 递减，且一致趋于 0，故由 Dirichlet 判别法，级数 I_2 在 $[-M,M]$ 一致收敛。

故由式 (17)，$f(x)$ 在 $[-M,M]$ 一致收敛，从而连续。再由 M 的任意性，$f(x)\in\mathrm{C}(\mathbb{R})$. $\square$

练习 (习题 15.3.5).

已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$，证明：

$$\lim_{x\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}=\ln 2$$

解. 在 $[\dfrac{1}{2},\infty)$ 上考虑 $f(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$，由于 $\left|\sum\limits_{n=1}^{N}(-1)^n\right|$ 一致有界，且 $\left\{\dfrac{1}{n^x}\right\}$ 在 $[\dfrac{1}{2},\infty)$ 上对每个 x 都关于 n 递减，且一致趋于 0，因此 $f(x)$ 在 $[\dfrac{1}{2},\infty)$ 一致收敛，从而在 $[\dfrac{1}{2},\infty)$ 上连续。特别地，$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，故：

$$\lim_{x\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}=\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=\lim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$$

□

练习 (习题 15.3.6). 设 E 是 $(-\infty,+\infty)$ 中的一个点集，x_0 是 E 的一个极限点（x_0 可以是 $\pm\infty$）。如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 E 上一致收敛，而且 $\lim\limits_{x\to x_0}u_n(x)=a_n\ (x\in E,n=1,2\cdots)$。证明：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\ \ (x\in E)$

解. (1) 由于函数项级数在 E 上一致收敛，故由 Cauchy 收敛，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=N(\varepsilon)$ 与 x 无关，使得 $\forall n>N,p\in\mathbb{N}^*$，都有：

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p}u_k(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad(\forall x\in E)\tag{18}$$

对式 (18) 固定 n,p，令 $x\to x_0$，由条件和 n,p 任意性可得：

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p}a_k\right|=\left|\sum_{k=n}^{n+p}u_k(x_0)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\quad(\forall n>N,p\in\mathbb{N}^*)\tag{19}$$

式 (19) 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的 Cauchy 收敛，即证。

(2) 由函数项级数一致收敛的定义可得，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=N(\varepsilon)$ 与 x 无关，使得 $\forall n>N$，都有：

$$\left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)-\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad(\forall x\in E)\tag{20}$$

对式 (20)，先固定 N，令 $x\to x_0$ 取下极限，由条件和 N 的任意性可得：

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k-\varliminf_{x\to x_0}\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\quad(\forall n>N)\tag{21}$$

对式 (21) 先令 $n\to\infty$，再令 $\varepsilon\to 0^+$，结合上一问可得：

$$\varliminf_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\tag{22}$$

同理对式 (20) 改为取上极限，也能得到跟式 (22) 相近的式子，只是左式换成了上极限。由于上下极限都取同一个有限值，故极限存在，且极限就是这个值，即证。 □

练习 (习题 15.3.7).

设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x}{1+2x}\right)^n\cos\dfrac{n\pi}{x}$。计算 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

解. 在 $x \in [\frac{1}{2}, +\infty)$ 上考虑函数项级数，由于：

$$\left|\left(\frac{x}{1+2x}\right)^n \cos\frac{n\pi}{x}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (\forall x \in [\frac{1}{2}, +\infty), n \in \mathbb{N}^*)$$

故由 Weierstrass 判别法，$f(x)$ 在 $x \in [\frac{1}{2}, +\infty)$ 一致收敛，从而在 $x \in [\frac{1}{2}, +\infty)$ 上连续，故：

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{1}{4}$$

另一方面，由于：

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+2x}\right)^n \cos\frac{n\pi}{x} = \frac{1}{2^n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

由习题 15.3.6，令 $E = [\frac{1}{2}, +\infty)$，$x_0 = +\infty$，$a_n = \frac{1}{2^n}$，则有：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1$$

□

注 1.4. 本题在求 $x \to +\infty$ 的极限时，有的同学证明的是级数在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 内闭一致收敛，得到 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 连续，从而说 $x \to +\infty$ 极限和无穷求和号可以交换次序。这种证明思路是错误的。存在的问题如下：

(1) 一方面，对 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，以及交换次序后的 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x)$，这两个值都不一定存在；

(2) 即使都存在（如本题），(1) 中的这两个值也不一定相等，反例如下：

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant x \leqslant n \\ n+1-x & n < x < n+1 \\ 0 & x \geqslant n+1 \end{cases}$$

约定 $f_0(x) = 0$，令 $u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$，易见 $\{f_n(x)\}$ 在 $x \geqslant 0$ 上连续，从而 $\{u_n(x)\}$ 在 $x \geqslant 0$ 上连续。且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, +\infty)$ 逐点收敛于 $f(x) = 1$，$f(x)$ 在 $x \geqslant 0$ 上连续。更进一步，还可证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, +\infty)$ 内闭一致收敛于 $f(x)$，但在 $[0, +\infty)$ 不一致收敛（用上确界判别法）。此时：

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$$

正确的做法应当是证明级数在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 一致收敛，并且使用习题 **15.3.6** 的结论。

2 知识拓展

以下内容所涉及的知识点不在本课程的范围内，大家感兴趣可以阅读。

2.1 度量空间与完备化

定义 1 (度量与度量空间).
已知非空集合 $\mathscr{X}$，$\rho: \mathscr{X} \times \mathscr{X} \to \mathbb{R}$ 称为**度量**（或者距离），若满足以下三条：

(1)（正定性）：$\rho(x,y) \geqslant 0\ \ (\forall x,y \in \mathscr{X})$，而且 $\rho(x,y)=0 \iff x=y$；

(2)（对称性）：$\rho(x,y)=\rho(y,x)\ \ (\forall x,y \in \mathscr{X})$；

(3)（三角不等式）：$\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y)+\rho(y,z)\ \ (\forall x,y,z \in \mathscr{X})$.

二元组 $(\mathscr{X},\rho)$ 称为**度量空间**（或距离空间）。

引入度量的目的是刻画收敛。在度量空间中点列 $\{x_n\} \subset \mathscr{X}$ **收敛到** $x_0 \in \mathscr{X}$ 是指：$\rho(x_n,x_0) \to 0\ (n \to \infty)$。我们说度量空间 $\mathscr{X}$ 中某点列收敛，默认收敛点在 $\mathscr{X}$ 中。以下是一些常见的度量空间的例子。

例 2.1. 二元组 $(\mathbb{R}^n,\rho)$ 是度量空间，其中：

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2} \quad (\forall x,y \in \mathbb{R}^n)$$

我们常称其为**欧氏空间**，ρ 为欧氏范数。

例 2.2. 二元组 $(\mathrm{C}[a,b],\rho)$ 是度量空间，其中：

$$\rho(f,g)=\max_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)| \quad (\forall f,g \in C[a,b])$$

在这个空间中，“收敛”是指函数列一致收敛。

对于度量空间的收敛，我们关心的其中一点是如何内蕴地刻画敛散性，即在不明确收敛点是否存在，存在的收敛点是否在原空间 $\mathscr{X}$ 中的情况下，如何仅根据点列 $\{x_n\}$ 判断敛散性。根据所学我们可以认识到，Cauchy 收敛准则能很好地做到这一点，然而并不是所有的度量空间都满足 Cauchy 收敛（反例见后），因此我们需要将满足 Cauchy 收敛的度量空间单独定义。

定义 2 (基本列，完备度量空间).
已知度量空间 $(\mathscr{X},\rho)$，$\{x_n\} \subset \mathscr{X}$ 为**基本列**，若 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N \in \mathbb{N}^*$，使得 $\forall n,m>N$ 都有 $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$.
若度量空间 $(\mathscr{X},\rho)$ 中所有基本列都是收敛点列（收敛点在 $\mathscr{X}$ 中），则称该空间**完备**。

注 2.1. 根据所学不难得例 2.1,2.2 两个度量空间都是完备的。

例 2.3 (S 空间).
令 S 为一切实 (复) 数列

$$x = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$$

组成的集合。在 S 中定义度量为:

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \quad (\forall x, y \in S)$$

则 (S, ρ) 为完备度量空间。

证明. 下面只对实数列情形证明,复数列同理。证明分为 2 步:验证 ρ 为度量,证明空间完备。

(i) 证明 ρ 为度量:
只验证三角不等式成立。不难得只需证:

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$$
$$\iff \quad \frac{1}{1+|x|+|y|} + \frac{1}{|x|} + \frac{1}{1+|y|} \leqslant 1 \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$$

(ii) 证明 (S, ρ) 完备:
设 $\{x_n\} \subset S$ 为基本列,$x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_k^{(n)}, \cdots)$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$,则对任意给定的 $t \in \mathbb{N}^*$,$\forall \varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$,$\exists N = N(t, \varepsilon) \in \mathbb{N}^*$,使得:

$$\rho(x_n, x_m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right|}{1 + \left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right|} < \frac{\varepsilon}{2^t} \quad (\forall n, m > N)$$

故有:

$$\frac{1}{2^t} \cdot \frac{\left|x_t^{(n)} - x_t^{(m)}\right|}{1 + \left|x_t^{(n)} - x_t^{(m)}\right|} < \frac{\varepsilon}{2^t} \quad \Rightarrow \quad \left|x_t^{(n)} - x_t^{(m)}\right| < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} < 2\varepsilon \quad (\forall n, m > N) \tag{23}$$

其中式 (23) 中的 $N = N(t, \varepsilon)$ 在 t 固定时只跟 ε 有关,因此对固定的 t,由式 (23) 可得 $\{x_t^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 为数列的基本列($x_t^{(n)}$ 都是实数),从而 $\exists x_t^{(0)} \in \mathbb{R}$,使得 $x_t^{(n)} \to x_t^{(0)}\,(n \to \infty)$。再由 t 的任意性,得 $x_k^{(n)} \to x_k^{(0)}\,(n \to \infty, \forall k \in \mathbb{N}^*)$。令 $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_k^{(0)}, \cdots) \in S$,下证一开始假设的 S 中的基本列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0。
一方面对 $\forall \varepsilon > 0$,$\exists N_0 \in \mathbb{N}^*$,使得:

$$\sum_{k=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{24}$$

另一方面对 $\forall 1 \leqslant k \leqslant N_0$，$\exists N_k \in \mathbb{N}^*$，使得：

$$\left|x_k^{(n)} - x_k^{(0)}\right| < \varepsilon \quad (\forall n > N_k) \tag{25}$$

取 $N' = \max\{N_1, N_2, \cdots, N_{N_0}\} < +\infty$，则结合式 (24)(25) 可得：

$$\begin{aligned}
\rho(x_n, x_0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\left|x_k^{(n)} - x_k^{(0)}\right|}{1 + \left|x_k^{(n)} - x_k^{(0)}\right|} \\
&= \sum_{k=1}^{N_0} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right|}{1 + \left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right|} + \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right|}{1 + \left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right|} \\
&< \sum_{k=1}^{N_0} \frac{\varepsilon}{2^k} + \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon \quad (\forall n > N')
\end{aligned}$$

故 $x_n \to x_0 \ (n \to \infty)$。故 (S, ρ) 中任何基本列都是收敛点列，(S, ρ) 完备。 □

例 2.4 (不完备的度量空间).
设 F 是只有有限项不为 0 的实数列全体，在 F 上定义度量：

$$\rho(x, y) = \sup_{k \geqslant 1} |x_k - y_k|$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots)$ $y = (y_1, y_2, \cdots, y_k, \cdots)$，求证：$(F, \rho)$ 不完备。

证明. 只需要举出 (F, ρ) 中的一个基本列，其在 F 中没有收敛点即可。
令：

$$\begin{aligned}
x_1 &= (1, 0, 0, \cdots) \\
x_2 &= (1, \frac{1}{2}, 0, 0, \cdots) \\
x_3 &= (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0, \cdots) \\
&\cdots \\
x_n &= (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, 0, 0, \cdots) \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)
\end{aligned}$$

则 $\{x_n\} \subset F$，且 $\rho(x_n, x_m) = \dfrac{1}{n+1}$ $(\forall n < m)$，从而 $\{x_n\}$ 为 F 中的基本列。

若 $\{x_n\}$ 在 F 中有收敛点 $x_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)},\cdots)$，则由 $\rho(x_n,x_0)\to 0$ 得 $x_n^{(0)}=\dfrac{1}{n}$，从而 x_0 没有一个分量为 0，$x_0\notin F$，矛盾。故 $\{x_n\}$ 在 F 中没有收敛点，(F,ρ) 不完备。 □

例 2.5 (**不完备的度量空间**).
在 $\mathrm{C}[-1,1]$ 上定义度量：

$$\rho(f,g)=\int_{-1}^{1}|f-g|\mathrm{d}x$$

其中定积分采用 Lebesgue 积分（关于 Lebesgue 积分理论，可以在实分析书中了解。此处可以视为 Riemann 积分，关于 Lebesgue 积分的假设是为了后面完备化的需要）。求证：$(\mathrm{C}[-1,1],\rho)$ 不完备。

证明. 只需要举出 $(\mathrm{C}[-1,1],\rho)$ 中的一个基本列，其在 $\mathrm{C}[-1,1]$ 中没有收敛点即可。
令：

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & -1\leqslant x<-\dfrac{1}{n}\\[2ex] nx+1 & -\dfrac{1}{n}\leqslant x<0\\[2ex] 1 & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\qquad(\forall n\in\mathbb{N}^*)$$

则 $\{f_n(x)\}\subset\mathrm{C}[-1,1]$，且 $\rho(f_n,f_m)\leqslant\dfrac{1}{n}\,(\forall n,m)$，从而 $\{f_n(x)\}$ 为 $\mathrm{C}[-1,1]$ 中的基本列。
又令：

$$f(x)=\begin{cases}0 & -1\leqslant x<0\\ 1 & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

则 $f(x)\notin\mathrm{C}[-1,1]$，但是 $\rho(f_n,f)\leqslant\dfrac{1}{n}\,(\forall n\in\mathbb{N}^*)$。从而 $\rho(f_n,f)\to 0\,(n\to\infty)$。故 $\{f_n(x)\}$ 收敛点不在 $\mathrm{C}[-1,1]$ 中，$(\mathrm{C}[-1,1],\rho)$ 不完备。 □

注 2.2. 我们可能会发现即使 $f(x)$ 在 0 处取值不是 1，是 0 或者其他数，新的 $f(x)$ 仍旧是 $\{f_n(x)\}$ 的收敛点，这似乎与极限的唯一性是矛盾的。事实上采用 Lebesgue 积分后，我们会把相差零测集下相等的函数视为同一个函数，因为在 Lebesgue 积分理论中，改变零测集上的函数值不会改变其积分值。因此 $f(x)$ 实际上代表了一整个函数族，这个函数族里的函数都跟 $f(x)$ 在相差零测集下相等。因此在比 $\mathrm{C}[-1,1]$ 更大的空间中，极限的唯一性能得到保证。而在 $(\mathrm{C}[-1,1],\rho)$ 中，我们要考虑的，其实是 $f(x)$ 所代表的函数族里，是否有 $\mathrm{C}[-1,1]$ 中的元素，即是否有连续函数，跟 $f(x)$ 在相差零测集下相等。容易得到是没有的。因此 $\{f_n(x)\}$ 的收敛点不可能是连续函数，$(\mathrm{C}[-1,1],\rho)$ 不完备。这个才是例 2.5 的完整解释。

若度量空间 $(\mathscr{X},\rho)$ 不完备，一个自然的想法是将其扩充为完备度量空间。扩充所遵守的原则自然是保证原来的空间的结构不被破坏，在这里是指原有的度量能够得到保持。扩充的方式也是想找到“最小”的完备度量空间。因此有如下定义。

定义 3 (完备化).
$(\mathscr{X},\rho_X)$ 是度量空间，$(\mathscr{Y},\rho_Y)$ 是 $(\mathscr{X},\rho_X)$ 的一个完备化，若满足以下三条：

(1)$(\mathscr{Y},\rho_Y)$ 为完备度量空间；

(2)$\exists\,\varphi:(\mathscr{X},\rho_X)\to(\mathscr{Y},\rho_Y)$，使得 φ 保距，即：

$$\rho_Y(\varphi(x_1),\varphi(x_2))=\rho_X(x_1,x_2)\quad(\forall x_1,x_2\in\mathscr{X})$$

(3) 若又有 $(\mathscr{Y}',\rho_{Y'})$ 完备，且 $\exists\,\phi:(\mathscr{X},\rho_X)\to(\mathscr{Y}',\rho_{Y'})$，使得 ϕ 保距，则 $\exists\,\psi:(\mathscr{Y},\rho_Y)\to(\mathscr{Y}',\rho_{Y'})$，使得 ψ 保距。

注 2.3. (1) 由保距容易得到单射。
(2) 如果我们把定义 3 中所有的保距映射全部视为保距恒同映射，即 $\varphi=id_{\mathscr{X}}$，其他同理，那么 $(\mathscr{X},\rho_X)$ 的一个完备化 $(\mathscr{Y},\rho_Y)$ 则为包含 $\mathscr{X}$ 且保距的最小的完备度量空间。
(3)$(\mathscr{X},\rho_X)$ 的完备化可能不唯一，具体的例子见后。
(4) 对任意 $(\mathscr{X},\rho_X)$，我们都可以构造其一个完备化，故完备化必定存在。但从构造方法中无法看出完备化到底长什么样子，因此此处省去该部分的证明，感兴趣的同学可以查找泛函分析书。在实际的操作中，寻找完备化的方法更多是先猜后证，而不是依靠完备化存在性证明中的构造。
(5) 证明完备化的时候，定义中的 (3) 是很难把握的，但是可以证明：若 $(\mathscr{Y},\rho_Y)$ 满足定义中的 (1)(2)，且像集 $\varphi(\mathscr{X})$ 在 $\mathscr{Y}$ 中稠密（在度量 ρ_Y 下稠密），则 $(\mathscr{Y},\rho_Y)$ 即为 $(\mathscr{X},\rho_X)$ 的一个完备化。证明稠密比证明定义中的 (3) 成立要简单得多。

例 2.6.
考虑 $[a,b]$ 上多项式全体，记为 $\mathrm{P}[a,b]$。采用**例2.2**的度量（即“一致收敛”度量），则由 Weierstrass 一致逼近定理可知 $(\mathrm{P}[a,b),\rho)$ 不完备，其完备化为 $(\mathrm{C}[-1,1],\rho)$。

例 2.7.
考虑**例2.4**的度量空间 (F,ρ)，已证其不完备。它的完备化为 (F_0,ρ)，其中 ρ 沿用之前的度量，各个保距映射均为恒同映射，且：

$$F_0=\left\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\;\middle|\;\lim_{n\to\infty}x_n=0\right\}$$

感兴趣的同学可以自行证明。证明过程中需要用到**注 2.3(5)**。

例 2.8.
考虑**例2.5**的度量空间 $(\mathrm{C}[-1,1],\rho)$，已证其不完备。它的完备化为 $(\mathrm{L}^1[-1,1],\rho)$，其中 $\mathrm{L}^1[-1,1]$ 为 $[-1,1]$ 上 Lebesgue 可积函数全体。
正如**注2.2**所说，$\mathrm{L}^1[-1,1]$ 中的元素都是函数族，一个函数族中的各个函数都在相差零测集下相等。因此此处完备化的保距映射不是恒同映射，而是把 $\mathrm{C}[-1,1]$ 中的一个元素（函数），映到了 $\mathrm{L}^1[-1,1]$ 中的一个元素（函数族）。

例 2.9 (**完备化不唯一**).
设 $l^2=\left\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\text{实数列}\;\middle|\;\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2<+\infty\right\}$，在上面定义度量：

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2}$$

可以证明 (l^2,ρ) 完备（需要用到 Minkowski 不等式）。又设：

$$l_0^2=\left\{x=(0,x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\text{实数列}\;\middle|\;(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^2\right\}$$

沿用同一个度量，由 (l^2,ρ) 完备可得 (l_0^2,ρ) 完备。
注意到 (l^2,ρ) 与 (l_0^2,ρ) 之间存在一个自然的保距双射，利用**注 2.3(5)** 可以证明 (l_0^2,ρ) 是 (l^2,ρ) 的一个完备化，但 (l^2,ρ) 显然是它自己的完备化，且 $l_0^2\subsetneqq l^2$，故 (l^2,ρ) 的完备化不唯一。

注 2.4. (1) 例 2.9 提醒我们，$(\mathscr{Y},\rho_Y)$ 是 $(\mathscr{X},\rho_X)$ 的完备化不一定意味着 $\mathscr{X}\subset\mathscr{Y}$，实际上只有 $\varphi(\mathscr{X})\subset\mathscr{Y}$。对无穷维空间来说，空间可以嵌入到它的真子空间中，这便导致了例 2.9。
(2) 为了确立完备化的唯一性，我们约定完备化在保距双射下唯一，则例 2.9 中 (l^2,ρ) 的两个完备化在保距双射下是同一个。

2.2 度量空间下的最佳逼近

逼近论的一个基本问题是：给定一组函数 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$（这里先暂定是有限个）和一个函数 f，用 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 的线性组合，在给定度量下逼近 f，问是否有**“距离最小”**的逼近。一个常见的最佳逼近是三维欧氏空间中一个二维线性子空间（即过原点的平面）和平面外一个点，此时最佳逼近是以原点为起点，垂足为终点的向量。

但是一般在度量空间中没有“垂直”的概念，因此为了得到度量空间下的最佳逼近定理，我们需要从度量着手，重新考虑这个问题。

定义 4 (**范数与赋范线性空间**).
已知线性空间 $\mathscr{X}$，$\|\cdot\|:\mathscr{X}\to\mathbb{R}$ 称为**范数**，若满足以下三条：

(1)（正定性）：$\|x\| \geqslant 0 \ (\forall x \in \mathscr{X})$，而且 $\|x\| = 0 \iff x = 0$（$\mathscr{X}$ 中的零元）；

(2)（齐次性）：$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \ (\forall x \in \mathscr{X}, \lambda \in \mathbb{R})$；

(3)（三角不等式）：$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \ (\forall x, y \in \mathscr{X})$.

二元组 $(\mathscr{X}, \|\cdot\|)$ 称为**赋范线性空间**，记为 B^* 空间。

注 2.5. 范数可以诱导度量：给定范数 $\|\cdot\|$，设 $\rho(x,y) = \|x - y\| \ (\forall x, y \in \mathscr{X})$，则 ρ 为 $\mathscr{X}$ 上一个度量。因此 B^* 空间是特殊的度量空间。

我们先考虑度量空间下最佳逼近的一个相对容易的情形，有限维情形：给定一个 B^* 空间 $\mathscr{X}$，及 $\mathscr{X}$ 中的有限维线性子空间 M，基为 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$。对 $x \in \mathscr{X}$，求实向量 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，使得：

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\| = \inf_{\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|$$

其中 $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$。

首先研究存在性。为此我们需要一个引理。

引理 1.

给定一个 B^* 空间 $\mathscr{X}$，及 $\mathscr{X}$ 中的有限维线性子空间 M，基为 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，则 $\exists c > 0$，使得：

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\| \geqslant c \, |\overrightarrow{a}| \quad (\forall \overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^{\ltimes})$$

其中 $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|^2}$

证明. 设：

$$f(\overrightarrow{a}) = \frac{1}{|\overrightarrow{a}|} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\| \quad (\forall \overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0})$$

记 $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$，$b_i = \dfrac{1}{|\overrightarrow{a}|} a_i \ (\forall 1 \leqslant i \leqslant n)$，则由范数的齐次性可得：

$$g(\overrightarrow{b}) \triangleq \left\| \sum_{i=1}^{n} b_i e_i \right\| = \frac{1}{|\overrightarrow{a}|} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\| = f(\overrightarrow{a})$$

其中 $\sum\limits_{i=1}^{n} |b_i|^2 = 1$，$g$ 定义在 n 维单位球面上。

由于范数的连续性（本质是度量的连续性，可归结为三角不等式，留给大家证明），g 是 n 维欧氏空间单位球面上的连续函数，且 g 非负，因此 $\exists c \geqslant 0$，$|\overrightarrow{b_0}| = 1$，使得：

$$g(\overrightarrow{b}) \geqslant g(\overrightarrow{b_0}) = c \ \Rightarrow \ f(\overrightarrow{a}) \geqslant c |\overrightarrow{a}| \quad (\forall \overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0})$$

若 $c=0$，则 $g(\overrightarrow{b_0})=0$，设 $\overrightarrow{b_0}=(b_1^{(0)},b_2^{(0)},\cdots,b_n^{(0)})$，则：

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} b_i^{(0)} e_i\right\|=0 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} b_i^{(0)} e_i=0 \;\Rightarrow\; b_i^{(0)}=0 \quad (\forall 1\leqslant i\leqslant n)$$

其中第一个箭头利用了范数的正定性，第二个箭头利用了 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 线性无关。
但这与 $|\overrightarrow{b_0}|=1$ 矛盾。故 $c>0$，即证。 □

定理 1 (最佳逼近存在性).
给定一个 B^* 空间 $\mathscr{X}$，及 $\mathscr{X}$ 中的有限维线性子空间 M，基为 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$。则 $\forall x\in\mathscr{X}$，存在最佳逼近系数 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，使得：

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\right\|=\inf_{\overrightarrow{a}\in\mathbb{R}^n}\left\|x-\sum_{i=1}^{n}a_i e_i\right\|$$

其中 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$。

证明. 设：

$$F(\overrightarrow{a})=\left\|x-\sum_{i=1}^{n}a_i e_i\right\| \quad (\forall\overrightarrow{a}\in\mathbb{R}^n)$$

利用范数的连续性可得 F 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数，且由范数的三角不等式以及引理 1 可得：

$$F(\overrightarrow{a})\geqslant\left\|\sum_{i=1}^{n}a_i e_i\right\|-\|x\|\geqslant c\,|\overrightarrow{a}|-\|x\| \quad (\forall\overrightarrow{a}\in\mathbb{R}^n) \tag{26}$$

由式 (26) 可知当 $|\overrightarrow{a}|\to+\infty$ 时，$F(\overrightarrow{a})\to+\infty$，从而连续函数 F 在 $\mathbb{R}^n$ 取到最小值，最小值点 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 即为所求。 □

接下来研究最佳逼近的唯一性。对一般赋范线性空间而言，在有限维线性子空间上找最佳逼近元也可能不唯一（反例见后），因此我们需要额外添加条件。

定义 5 (严格凸 B^* 空间).
给定一个 B^* 空间 $\mathscr{X}$，我们称 $\mathscr{X}$ **严格凸**，若 $\forall x\neq y\in\mathscr{X}$，$\|x\|=\|y\|=1$，都有：

$$\|\alpha x+\beta y\|<1 \quad (\forall\alpha,\beta>0,\alpha+\beta=1)$$

注 2.6. 由范数的三角不等式可知，任何 B^* 空间必然是凸的，但不一定严格凸。

引理 2.
给定一个 B^* 空间 $\mathscr{X}$，及 $\mathscr{X}$ 中的有限维线性子空间 M，基为 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$。若 $x\notin M$，则：

$$\rho(x,M)\xlongequal{\Delta}\inf_{y\in M}\|x-y\|>0$$

证明. (i) 首先证明在给定范数后，有限维线性子空间 M 是闭集。在**引理1**的证明中，我们还可以得到：$\exists\, C>0$，使得：

$$g(\overrightarrow{b}) \leqslant C \ \Rightarrow\ f(\overrightarrow{a}) \leqslant C|\overrightarrow{a}| \quad (\forall \overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0})$$

总结来说就是：$\exists\, 0<c_1 \leqslant c_2 < +\infty$，使得：

$$c_1|\overrightarrow{a}| \leqslant f(\overrightarrow{a}) \leqslant c_2|\overrightarrow{a}| \quad (\forall \overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}) \tag{27}$$

$\forall \{x_n\} \subset M$，记 x_n 在基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 下的坐标为 $\overrightarrow{x_n}$。若 $x_n \to x_0 \in \mathscr{X}\ (n\to\infty)$，由于收敛点列必是基本列，又由式 (27) 左半边可得：

$$|\overrightarrow{x_n} - \overrightarrow{x_m}| \leqslant \frac{1}{c_1} f(\overrightarrow{x_n} - \overrightarrow{x_m}) = \frac{1}{c_1}\|x_n - x_m\| \quad (\forall n, m)$$

故 $\{\overrightarrow{x_n}\} \subset \mathbb{R}^n$ 也为基本列，在 $\mathbb{R}^n$ 中收敛于 $\overrightarrow{x_0}$，对应存在 $x_0' \in M$，在基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 下的坐标为 $\overrightarrow{x_0}$。再由式 (27) 右半边：

$$\|x_n - x_0'\| = f(\overrightarrow{x_n} - \overrightarrow{x_0}) \leqslant c_2|\overrightarrow{x_n} - \overrightarrow{x_0}|$$

由 $\overrightarrow{x_n} \to \overrightarrow{x_0}$ 可得 $x_n \to x_0' \in M$。又一开始已经假设 $x_n \to x_0 \in \mathscr{X}$，故 $x_0 = x_0'$，即 $\{x_n\}$ 收敛点在 M 中，从而 M 为闭集。
(ii) 证明引理成立。若 $\rho(x, M)=0, x \notin M$，则由下确界的定义，$\forall n \in \mathbb{N}^*$，$\exists\, x_n \in M$，使得：

$$0 \leqslant \|x_n - x\| < \frac{1}{n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

即 $\|x_n - x_0\| \to 0\ (n\to\infty)$，故 $x_n \to x$。又 $\{x_n\} \subset M$，M 为闭集，故 $x \in M$，与 $x \notin M$ 矛盾。故 $\rho(x, M) > 0$。 □

定理 2 (最佳逼近唯一性).
设 B^* 空间 $\mathscr{X}$ 严格凸，$\mathscr{X}$ 中一个有限维线性子空间为 M，基为 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$。则 $\forall x \in \mathscr{X}$，存在唯一的一组最佳逼近系数 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，使得：

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\| = \inf_{\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\| = \rho(x, M)$$

其中 $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$。

证明. 存在性即定理 1，下证唯一性。首先若 $x \in M$，则 $\rho(x, M)=0$，且取到 0 当且仅当 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i = x$。
若 $x \in M$，由引理 2，$d \triangleq \rho(x, M) > 0$。此时若存在两个不同的最佳逼近元 $y, z \in M$，则有 $\|x-y\| = \|x-z\| = d$，故对 $\forall \alpha, \beta > 0, \alpha+\beta=1$，由 $\mathscr{X}$ 严格凸可得：

$$\frac{1}{d}\|x - (\alpha y + \beta z)\| = \frac{1}{d}\|\alpha(x-y) + \beta(x-z)\| = \left\| \alpha(\frac{x-y}{d}) + \beta(\frac{x-z}{d}) \right\| < 1$$

其中第二个等号利用了范数齐次性，小于号是因为严格凸以及 $\left\|\dfrac{x-y}{d}\right\|=\left\|\dfrac{x-z}{d}\right\|=1$。故 $\|x-(\alpha y+\beta z)\|<d$，但由于 M 是线性子空间，$y,z\in M$，故 $\alpha y+\beta z\in M$，从而 $\|x-(\alpha y+\beta z)\|\geqslant d$ 矛盾。故最佳逼近元唯一。 □

利用最佳逼近理论可以轻松解决一些问题。

例题 2.1.
给定有限闭区间 $[a,b]$，若 $\{P_k(x)\}$ 为 $[a,b]$ 上次数不超过 n 的多项式序列，且 $\{P_k(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$，则 $f(x)$ 也是 $[a,b]$ 上次数不超过 n 的多项式。

解. 考虑 $(\mathrm{C}[a,b],\|\cdot\|)$，其中：

$$\|f\|=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|\quad(\forall f\in\mathrm{C}[a,b])$$

则这个范数诱导“一致收敛”度量。
记 $\mathrm{P}_n[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上次数不超过 n 的多项式全体。由于 $(\mathrm{C}[a,b],\|\cdot\|)$ 赋范线性空间，且完备，故 $f\in\mathrm{C}[a,b]$。又 $(\mathrm{P}_n[a,b],\|\cdot\|)$ 为 $(\mathrm{C}[a,b],\|\cdot\|)$ 的有限维线性子空间，故由定理 1，对 $f(x)$，在 $\mathrm{P}_n[a,b]$ 上存在最佳逼近元 f_0，使得：

$$\|f-f_0\|=\inf_{g\in\mathrm{P}_n[a,b]}\|g-f\|\leqslant\inf_n\|P_n-f\| \tag{28}$$

由于 $P_n(x)\rightrightarrows f(x)$，故式 (28) 右边为 0，从而 $\|f-f_0\|=0$，由范数正定性，$f=f_0$，即 $f(x)$ 也是 $[a,b]$ 上次数不超过 n 的多项式。 □

再次回到唯一性，关于定理 2 中 B^* 空间 $\mathscr{X}$ 严格凸的条件，某种程度上来说是不可再减弱的。

例 2.10 (不严格凸的反例).
考虑 $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|)$，其中：

$$\|(x,y)\|=\max\{|x|,|y|\}\quad(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)$$

设 $M=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}^*\}$ 为一维线性子空间，$\overrightarrow{a}=(1,1)\notin M$，试证：$(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|)$ 不严格凸，且 $\overrightarrow{a}$ 的最佳逼近元不唯一。

证明. (i) 考虑该范数下的“单位球”$S=\{(x,y)\mid\|(x,y)\|=1\}$，设 $\overrightarrow{b}=(1,0),\overrightarrow{c}=(1,1)$，则 $\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\in S$，且对 $\forall\alpha,\beta>0,\alpha+\beta=1$，有：

$$\|\alpha\overrightarrow{b}+\beta\overrightarrow{c}\|=\|(1,\beta)\|=\max\{1,|\beta|\}=1$$

故 $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ 不严格凸。
(ii) 由于：

$$\|(x,0)-(1,1)\| = \|(x-1,-1)\| = \max\{|x-1|,1\} \geqslant 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

故当 $x \in [0,2]$ 时都有 $\|(x,0)-(1,1)\| = 1$，从而最佳逼近元不唯一。 □

对无穷维闭线性子空间（相当于是有限维的保持闭性的推广），我们同样关心最佳逼近问题，但对赋范线性空间而言，在无穷维闭线性子空间上考虑最佳逼近，连存在性也无法保证。

例 2.11 (**无穷维闭线性子空间的反例**)**.**
设 C_0 表示以 0 为极限的实数列全体，并在 C_0 上定义范数：

$$\|x\| = \max_{n\geqslant 1} |x_n| \quad (\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in C_0)$$

又设 $M = \left\{ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in C_0 \;\middle|\; \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n}{2^n} = 0 \right\}$，求证：
(1) M 为 C_0 的无穷维闭线性子空间；
(2) 设 $x_0 = (2, 0, 0, \cdots, 0, \cdots)$，则：

$$\inf_{z\in M} \|x_0 - z\| = 1$$

但 $\forall y \in M$，$\|x_0 - y\| > 1$.

提示：(1) 无穷维：令 $x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_k^{(n)}, \cdots)$，满足 $x_1^{(n)} = 1, x_{n+1}^{(n)} = -2^n$，其他均取 0，验证 $\{x_n\} \subset M$，且 $\{x_n\}$ 不可包含在有限维线性子空间中。

闭性：对 $\{y_n\}$，若 $y_n \to y_0 \in C_0$，先证明 y_n 的每个分量都收敛于 y_0 的对应分量，再通过部分和证明 $y_0 \in M$。

(2) 先证明，若 $\|x_0 - y\| \leqslant 1$，记 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots)$，则必有 $y_1 \geqslant 1, |y_n| \leqslant 1\ (\forall n \geqslant 2)$，此时 $y \notin M$，矛盾。故 $\forall y \in M$，$\|x_0 - y\| > 1$，从而 $\inf\limits_{z\in M} \|x_0 - z\| \geqslant 1$。

再令 $z_n = (1 - \dfrac{1}{2^n}, -1, -1, \cdots, -1, 0, 0, \cdots)$，其中有 n 个 -1。验证 $z_n \in M$，$\|x_0 - z_n\| = 1 + \dfrac{1}{2^n}$，从而 $\inf\limits_{z\in M} \|x_0 - z\| \leqslant 1$。综上可得 $\inf\limits_{z\in M} \|x_0 - z\| = 1$。

事实上，我们想要的，是在最佳逼近中得到类似于欧氏空间“垂直”的结果，一般赋范线性空间无法做到这点，因此我们需要引入内积，用内积诱导范数。但引入内积后我们同样需要谨慎对待无穷维闭线性子空间与有限维的差异。令人欣喜的是，对完备的内积空间（Hilbert 空间），最佳逼近有一个令人满意的解答：最佳逼近对无穷维闭线性子空间仍成立，具有存在唯一性，且具有“垂直”的直观解释。由于本讲义篇幅有限，不能一一叙述，感兴趣的同学可以查阅《泛函分析讲义》（张恭庆，林源渠）。