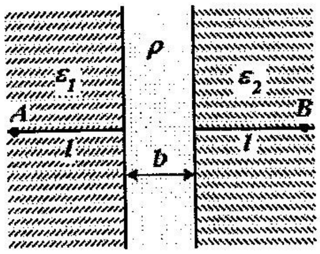
# 电磁学 B 期中考试试题

**考试科目：** 电磁学 B　　**使用单位：** 中国科学技术大学

**姓名：**　　**学号：**　　**成绩：**

**所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效**

1、 （15 分）如图所示，厚度为 $\boldsymbol{b}$ 的无限大平板（绝对介电常数为 $\varepsilon_0$）内均匀分布有电荷密度为 $\rho$（$\rho>0$）的自由电荷，在板外侧分别有绝对介电常数为 $\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_2$ 的均匀电介质。求：




**题 1 图**

（1） 板内外的电场分布；

（2） 板外的 A 点和 B 点分别相距左右两板壁为 $\boldsymbol{l}$，求电势差 $U_{AB}$。

解：（1）由电荷分布的特点知，在板内一定存在一个 $\vec{E}=\vec{D}=0$ 的平面 $MM'$。设此平面距左侧面为 $d_1$，距右侧面为 $d_2$（$d_1+d_2=b$）；过此平面作如题 4.1 图所示的高斯面，可求 $\vec{D}$ 和 $\vec{E}$。板内 $\vec{D}=\rho x\vec{n}$，$\vec{E}=\rho x\vec{n}/\varepsilon_0$；板外：

$\vec{D}_1=-\rho d_1\vec{n},\ \vec{E}_1=-\dfrac{\rho d_1}{\varepsilon_1}\vec{n}$（板左侧）；　　$\vec{D}_2=\rho d_2\vec{n},\ \vec{E}_2=\dfrac{\rho d_2}{\varepsilon_2}\vec{n}$（板右侧）。

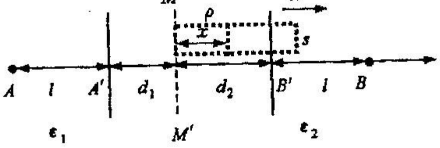
$$\because\left|\vec{E}_1\right|=\left|\vec{E}_2\right|\quad\therefore\frac{d_1}{\varepsilon_1}=\frac{d_2}{\varepsilon_2}\quad（5 分）$$

$$又\quad d_1+d_2=b\quad\therefore d_1=\frac{\varepsilon_1 b}{\varepsilon_1+\varepsilon_2},\ d_2=\frac{\varepsilon_2 b}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\quad（2 分）$$

$$\therefore 板内\ \vec{E}=\rho x\vec{n}/\varepsilon_0,\ 板外\ \vec{E}_1=-\frac{\rho b}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\vec{n},\ \vec{E}_2=\frac{\rho b}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\vec{n}\quad（3 分）$$

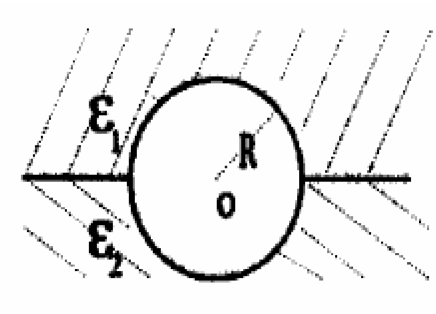
（2）由（1）结果可知板左侧至 A 点与板右侧至 B 点的电势差相等，

$$\therefore U_{AB}=U_{A'B'}=\int_{-d_1}^{d_2}Edx=\int_{-d_1}^{d_2}\frac{\rho x dx}{\varepsilon_0}=\rho\frac{d_2^2-d_1^2}{2\varepsilon_0}=\frac{\rho b^2}{2\varepsilon_0}[\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}]\quad（5 分）$$




**题 1.1 图**

2、（15 分）一导体球外充满两半无限电介质，相对介电常数分别为$\varepsilon_1$、$\varepsilon_2$，介质界面为通过球心的无限平面。设导体半径为$R$，总电荷量为$q$，求空间电场分布和导体球表面的自由电荷分布。




题 2 图

解：建立球坐标系，原点为球心。场线平行介质的分界面，$E_{1t}=E_{2t}$，由$\vec{D}_1=\varepsilon_0\varepsilon_1\vec{E},\vec{D}_2=\varepsilon_0\varepsilon_2\vec{E}$（2 分）

又：$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=q\ \therefore 2\pi r^2 D_1+2\pi r^2 D_2=q$（3 分）

$$\therefore E=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\quad（2 分）$$

$$\therefore \vec{D}_1=\varepsilon_0\varepsilon_1\vec{E}=\frac{\varepsilon_1 q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}$$

（4 分）

$$\vec{D}_2=\varepsilon_0\varepsilon_2\vec{E}=\frac{\varepsilon_2 q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}$$

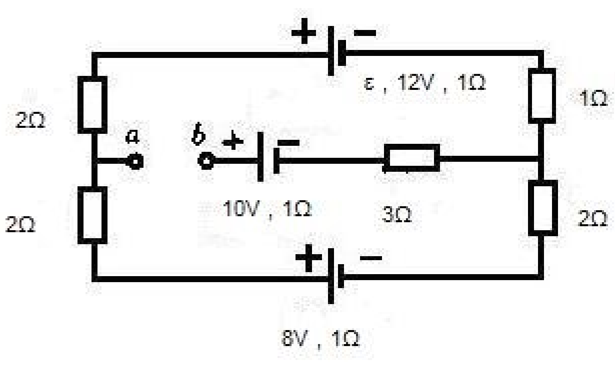
故与$\varepsilon_1$接触的半球面上的自由电荷密度：$\sigma_1=D_1|_{r=a}=\dfrac{\varepsilon_1 q}{2\pi a^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$（2 分）

与$\varepsilon_2$接触的半球面上的自由电荷密度：$\sigma_2=D_2|_{r=a}=\dfrac{\varepsilon_2 q}{2\pi a^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$（2 分）

3、（12 分）如图所示的电路中，求；

（1）a，b 断开时的$U_{ab}$；

（2）a，b 短路时通过电源$\varepsilon$的电流大小和方向




解：（1）当 a，b 断开时，流过大回路的电流为：

$$I=\frac{12-8}{3\times2+3\times1}=\frac{4}{9}(A)$$（方向沿逆时针）（2 分）

$$\therefore u_{ab}=12-10-\frac{4}{9}(2+2)=0.22(V)\quad（3 分）$$

（2）a,b 两点接上后，设各支路中的电流方向及两个独立回路的绕行方向如图示，则：

$$I_2+I_3-I_1=0$$
$$(2+1+1)I_1+(3+1)I_3=12-10\quad（6 分）$$
$$-(3+1)I_2+(2+2+1)I_3=10-8$$

联立方程，解得：$I_1=0.464\,A$（1 分）

4、（15 分）半径为$\boldsymbol{a}$的导体圆柱外套有一个内半径为$\boldsymbol{b}$的同轴导体圆筒。它们的长度都是$L$，圆柱与圆筒间充满相对介电常数为$\boldsymbol{\varepsilon}$的均匀介质。圆柱带有电荷量$\boldsymbol{Q}$，圆筒带有

电荷量 **-Q**。略去边缘效应。

（1）试以求圆柱与圆筒间离轴线为 $r$ 处的电场能量密度；

（2）试求整个介质内的电场能量 $W$；

（3）试证：$W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$，式中 $C$ 是圆柱和圆筒间的电容。

**【解】** (1)由对称性和高斯定理得，介质内离轴线为 $r$ 处的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon r l}\boldsymbol{e}_r \qquad (1)$$

式中 $\boldsymbol{e}_r$ 是圆柱体表面外法线方向上的单位矢量，$r$ 处的电场能量密度为

$$w=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon r^2 l^2} \qquad (2)$$

(2)整个介质内的电场能量为

$$W=\iiint_V w\mathrm{d}V=\int_a^b\frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon r^2 l^2}\cdot 2\pi r l\mathrm{d}r=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon l}\int_a^b\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon l}\ln\frac{b}{a} \qquad (3)$$

(3)由式(1)得两极的电势差为

$$U=\int_a^b\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_a^b E\mathrm{d}r=\frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\int_a^b\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{b}{a} \qquad (4)$$

所以

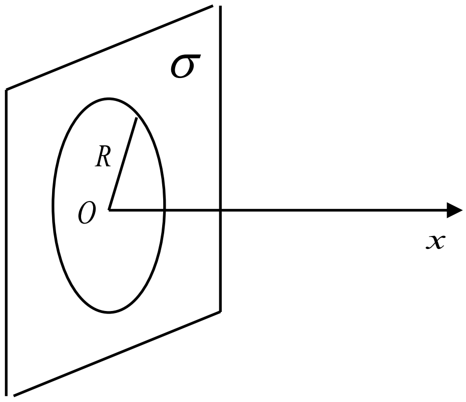
$$C=\frac{Q}{U}=\frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{b}{a}} \qquad (5)$$

由式(3)、(5)得

$$W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad (6)$$

(1)、(2)、(3)、(4) 式各 3 分；(5) 式 2 分；(6) 式 1 分

5、(15 分) 一“无限大”平面，中部有一半径为 $R$ 的圆孔，设平面上均匀带电，电荷面密度为 $\sigma$，试求通过小孔中心 0 并与平面垂直的直线上各点的场强和电势。(选 0 点的电势为零)。




题 5 图

解：距 O 点为 r 处取同心圆环，宽度为 dr，带电量 $dq=\sigma\cdot 2\pi r dr$ --------2 分

均匀带电圆环中心轴线上场强分布：

$$d\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dqx}{(R^2+x^2)^{3/2}}\vec{i}$$

…………………………….3 分

带圆孔的无限大平面中心轴线上的场强：

$$\vec{E}=\int d\vec{E}=\int_R^\infty\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dqx}{(R^2+x^2)^{3/2}}\vec{i}=\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0(R^2+x^2)^{1/2}}\vec{i}$$ ………..5 分

由电势定义：

$$u=\int_x^0\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_x^0\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0(R^2+x^2)^{1/2}}dx$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(R-\sqrt{R^2+x^2})$$ ……………………..5 分

6、（13 分）一内半径为 a、外半径为 b 的金属球壳，带有电荷 Q，在球壳空腔内距离球心 r 处有一点电荷 q，设无穷远处为电势零点，试求：

（1）球壳内外表面上的电荷；

（2）球心 0 点处，由球壳内表面上电荷产生的电势；

（3）球心 0 点处的总电势。

解：（1）导体达静电平衡时，金属球壳的内表面上有感应电荷-q;外表面上的电荷：q+Q （4 分）

(2)球壳内表面上的感应电荷分布是不均匀的，球心 O 是个对称点。对这个特殊点，所有感应电荷到 O 点的距离相同因此无论球壳内表面上的感应电荷如何分布，球壳内表面在 O 点产生的电势为：U=-q/(4 pai ε0 a)（4 分）

(3) U=q/(4 pai ε0 r)-q/(4 pai ε0 a)+ (Q+q/(4 pai ε0 b) (5 分)

7、（15 分）汤姆孙的氢原子模型是：原子的正电荷量$e$均匀分布在半径为$R$的球体内，原子的负电荷量$-e$集中成一个点电荷(即电子)，在正电荷的球体内运动．设电子质量为$m$，某时刻的位矢为$\bar{r}$(从球心到电子的位置矢量)（1）试求电子所受的力；（2）若电子的初速度为零，试证明它将作简谐振功，并求振动频率。

**【解】** (1)设电子所在处的电场强度为 $\boldsymbol{E}$,则由对称性和高斯定理得

$$\oint\!\!\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=4\pi r^2 E=\frac{1}{\epsilon_0}\frac{e}{\frac{4\pi}{3}R^3}\cdot\frac{4\pi}{3}r^3=\frac{e}{\epsilon_0 R^3}r^3,$$

所以

$$\boldsymbol{E}=\frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3}\boldsymbol{r} \tag{1}$$

故电子所受的力为

$$\boldsymbol{F}=-e\boldsymbol{E}=-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}\boldsymbol{r} \tag{2}$$

(2)电子的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F}=-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}\boldsymbol{r} \tag{3}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m R^3}\boldsymbol{r}=0 \tag{4}$$

这是简谐振动的方程.它表明电子将以 $\boldsymbol{r}=0$ 的球心为平衡点作简谐振动.振动频率为

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m R^3}} \tag{5}$$

高斯定理加（1）式 6 分；（2）、（4）式各 3 分；（5）式 3 分