

# 《电磁学》期末考试公共试题

(50 分)

(任意矢量  $\vec{A}$  满足:  $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ )

## 一、公共题 (共 50 分)

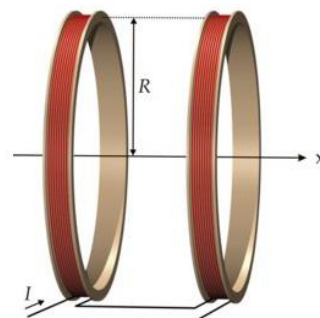
### 1. (17 分) 磁镜

(1) 一个半径为  $R$ , 电流为  $I$  的电流圆环, 求在轴线上的磁感应强度。(5 分)

(2) 设两个线圈各有  $N$  匝线圈, 通以相同的电流为  $I$ , 两个线圈的半径都为  $R$ . 如果两个线圈之间的距离为  $10R$ , 这时两个线圈之间的磁场就形成了一个磁镜, 带电粒子在磁镜中磁矩是守恒量。宇宙射线中的带电粒子在各个方向均匀进入这个磁镜中, 则什么角度范围内的带电粒子进入这个磁镜后会被捕获? (6 分)

(3) 带电粒子在磁镜中运动, 如果磁感应强度为  $B$  处的回旋半径  $a$ , 证明: (6 分)

$$a\sqrt{B} = \text{不变量}$$



【解】(1) 设电流环的轴线为  $x$  轴, 在圆环上取一段圆弧, 则该电流元在轴线上的磁感应强度为:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IRd\varphi}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IRd\varphi}{(R^2 + x^2)}$$

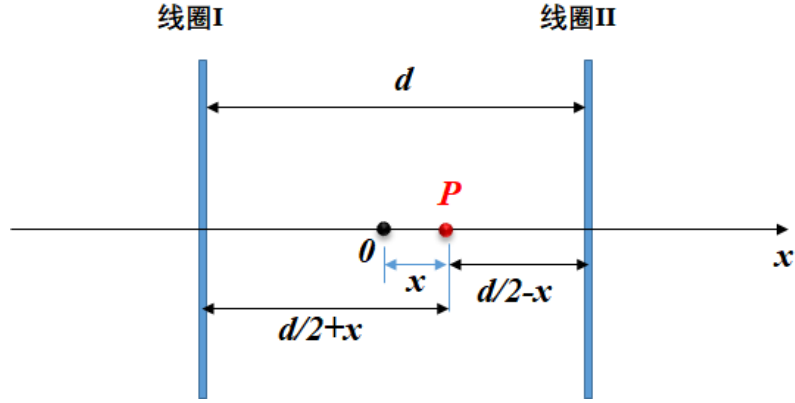
方向垂直于  $r$  方向, 整个电流环在该点叠加的磁感应强度沿  $x$  轴方向, 所以

$$B = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IRd\varphi}{(R^2 + x^2)} \sin\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR^2 d\varphi}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

(2) 载流  $N$  匝圆线圈 (位于坐标原点) 在轴线上某点的磁感应强度为:

$$B_x = \frac{\mu_0}{2} \frac{NIR^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

坐标原点取在两个线圈的中心处, 假设两个线圈中心距离为  $d$ , 则两组线圈叠加的磁场为:



$$B_x = \frac{\mu_0}{2} \frac{N I R^2}{\left( R^2 + \left( \frac{d}{2} + x \right)^2 \right)^{3/2}} + \frac{\mu_0}{2} \frac{N I R^2}{\left( R^2 + \left( \frac{d}{2} - x \right)^2 \right)^{3/2}}$$

如果两个线圈之间的距离为  $10R$ ，则每个线圈中心处的磁场为最大，其值为

$$\begin{aligned} B_{\max} &= \frac{\mu_0}{2} \frac{N I R^2}{\left( R^2 + (5R + 5R)^2 \right)^{3/2}} + \frac{\mu_0}{2} \frac{N I R^2}{\left( R^2 + (5R - 5R)^2 \right)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0}{2} \frac{N I R^2}{(101R^2)^{3/2}} + \frac{\mu_0}{2} \frac{N I}{R} \approx \frac{\mu_0}{2} \frac{N I}{1000R} + \frac{\mu_0}{2} \frac{N I}{R} \approx \frac{\mu_0}{2} \frac{N I}{R} \end{aligned}$$

中心处磁场为最小，其值为：

$$B_{\min} = \frac{\mu_0}{2} \frac{N I R^2}{(26R^2)^{3/2}} + \frac{\mu_0}{2} \frac{N I R^2}{(26R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 N I}{\sqrt{17576} R} \approx 0.0075 \frac{\mu_0 N I}{R}$$

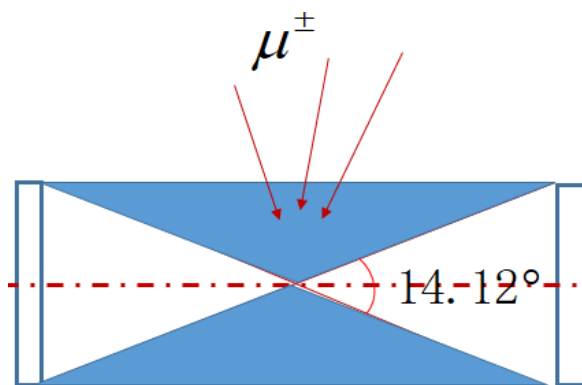
带电粒子在磁镜中磁矩是守恒量，磁矩为

$$\mu = SI = \pi R^2 \frac{q}{T} = \frac{1}{2} \frac{mv_{\perp}^2}{B} = \frac{mv^2 \sin^2 \theta}{2B}$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2} mv^2 \sin^2 \theta}{B_{\min}} &= \frac{\frac{1}{2} mv^2}{B_{\max}} \\ \sin \theta &= \sqrt{\frac{B_{\min}}{B_{\max}}} = \sqrt{\frac{0.0075}{0.5}} = 0.1228 \\ \theta &= 7.06^\circ \end{aligned}$$

即宇宙射线中的带电粒子是以水平轴线成  $14.12^\circ$  的左右两个锥体之外上下两个锥体内进入该磁镜时，会被磁镜捕获。



(3) 因为带电粒子在  $B$  处的回旋半径为

$$a = \frac{mv \sin \theta}{qB}, \quad \text{则 } a^2 = \frac{m^2 v^2 \sin^2 \theta}{q^2 B^2}$$

$$\mu = \frac{\frac{1}{2} m v^2 \sin^2 \theta}{B}, \quad v^2 \sin^2 \theta = \frac{2\mu B}{m}, \quad \text{代入上式, 有}$$

$$a^2 = \frac{m^2 2\mu B}{q^2 B^2 m} = \frac{2m\mu}{q^2 B}$$

即:

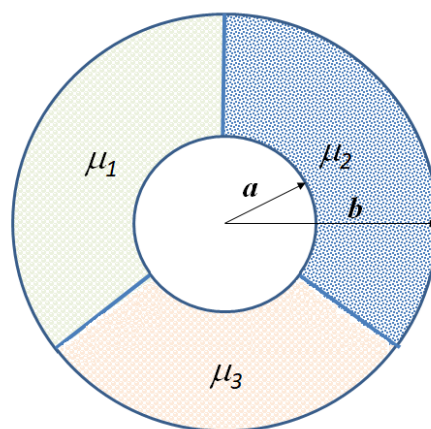
$$a\sqrt{B} = \sqrt{\frac{2m\mu}{q^2}} = \text{守恒量}$$

因为电量, 质量 (非相对论) 和磁矩都是不变量; 所以该式是不变量。

## 2. (16 分) 同轴电缆

同轴电缆的内导体是半径为  $a$  的空心圆柱, 外导体是半径为  $b$  的薄圆柱面, 其厚度可以忽略不计, 内、外导体间填充有绝对磁导率分别为  $\mu_1$ 、 $\mu_2$  和  $\mu_3$  的三种磁介质, 每种磁介质均占三分之一的圆柱间体积, 分界面正好沿半径方向, 如图所示. 设内圆柱面内沿轴线方向流有大小相等, 方向相反的电流, 电流面密度为  $i$ ; 求:

- (1) 各区域的磁感应强度和磁场强度; (8 分)
- (2) 同轴电缆单位长度所储存的磁场能量; (4 分)
- (3) 同轴电缆单位长度的自感。 (4 分)



【解】(1) 由安培环路定律, 得:

$$\begin{cases} \vec{H}_0 = 0 & (0 < r < a) \\ \vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \vec{H}_3 = \frac{3i2\pi a}{2\pi r} \vec{e}_\phi = \frac{3ia}{r} \vec{e}_\phi & (a < r < b) \\ \vec{H}_4 = 0 & (r > b) \end{cases}$$

由于  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ，所以

$$\begin{cases} \vec{B}_0 = 0 & (0 < r < a) \\ \frac{\vec{B}_1}{\mu_1} + \frac{\vec{B}_2}{\mu_2} + \frac{\vec{B}_3}{\mu_3} = \frac{3ia}{r} \vec{e}_\phi & (a < r < b) \\ \vec{B}_4 = 0 & (r > b) \end{cases}$$

因为同轴电缆线内外导体间的磁场沿 $\phi$ ，即沿圆柱体的圆周方向，在三种介质分界面上只有法向分量，由边界条件知， $B_1=B_2=B_3$ ，所有

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_2 = \vec{B}_3 = \frac{3ia}{r\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3}\right)} \vec{e}_\phi = \frac{3\mu'ia}{r} \vec{e}_\phi, \quad (a < r < b)$$

$\vec{e}_\phi$  是沿圆周方向的单位矢量，按圆柱体内电流的右手螺旋线方向； $\frac{1}{\mu'} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3}$ 。

(2) 长度为  $l$  的同轴电缆内的磁场能量为

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{B_1^2}{\mu_1} \frac{2}{3} \pi r l dr + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{B_2^2}{\mu_2} \frac{2}{3} \pi r l dr + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{B_3^2}{\mu_3} \frac{2}{3} \pi r l dr \\ &= 3\pi\mu' i^2 a^2 l \ln\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

$$\text{单位长度的磁能为: } \frac{W_m}{l} = 3\pi\mu' i^2 a^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

(3) 由  $W_m = \frac{1}{2} LI^2$ ；得到： $W_m = \frac{1}{2} L(2\pi ai)^2 = 2\pi^2 a^2 Li^2$

单位长度的自感为：

$$L = \frac{2W_m}{I^2 l} = \frac{W_m}{2\pi^2 a^2 i^2 l} = \frac{3\pi\mu' i^2 a^2 l \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi^2 a^2 i^2 l} = \frac{3\mu'}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

### 3. (17 分) “涡流”

(1) 一个半径为  $a$ ，非常薄（厚度为  $b$ ）的导体圆盘放置在  $xy$  平面上，导体的电导率为  $\sigma$ ，磁导率为  $\mu_0$ ，原点在圆盘中心，空间加上磁场为：

$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_z$ ，请给出圆盘上半径为  $r$  处的涡流密度  $j_f$ 。（6 分）

(2) 请求出圆盘的总磁矩，并给出远处 P 点 ( $r \gg a$ ) 由涡流产生的磁感应强度。（6 分）

(3) 导体置于随时间变化的磁场中时，导体内部会出现“涡流”，即导体中自由电子在涡旋电场作用下形成的电流，涡旋电流又产生磁场，相当于一种“自激”效应。如果导体的电导率为  $\sigma$ ，磁导率为  $\mu_0$ ，当涡流达到稳恒流动时

( $\nabla \cdot \vec{j}_f = 0$ )，请证明：涡流密度  $j_f$  满足以下方程：(5 分)

$$\nabla^2 \vec{j}_f = \sigma \mu_0 \frac{\partial \vec{j}_f}{\partial t}$$

解：(1) 取一半径为  $r$  的圆，根据电磁感应定律，由于涡旋电场沿圆的切线方向，大小处处相等，故

$$2\pi r E = -\frac{\partial B}{\partial t} \pi r^2 = B_0 \omega \pi r^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\vec{E} = \frac{B_0 \omega r}{2} \sin(\omega t + \varphi) \vec{e}_\theta$$

所以，有：

$$\vec{j}_f = \sigma \vec{E} = \frac{B_0 \sigma \omega r}{2} \sin(\omega t + \varphi) \vec{e}_\theta$$

(2) 圆盘的磁矩为：

$$dm = \pi r^2 dI = \pi r^2 j_f b dr = \frac{\pi B_0 \sigma b \omega \sin(\omega t + \varphi) r^3 dr}{2}$$

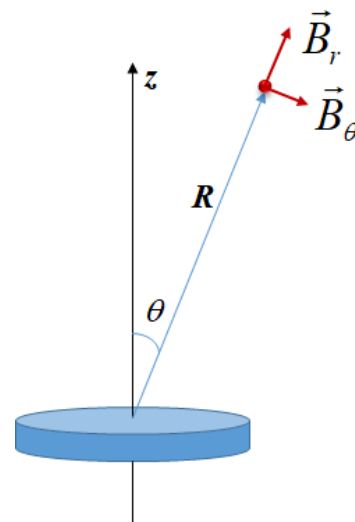
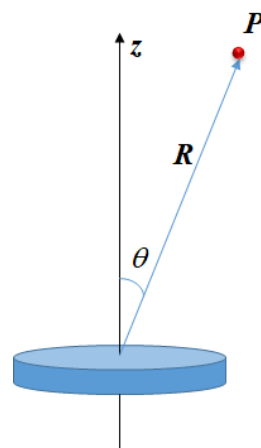
总磁矩为：

$$m = \int_0^a dm = \frac{\pi B_0 \sigma b \omega \sin(\omega t + \varphi)}{2} \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi B_0 \sigma b \omega a^4 \sin(\omega t + \varphi)}{8}$$

$$\vec{m} = m \vec{e}_z$$

$$\begin{cases} B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m_{//}}{R^3} = \frac{\mu_0}{16} \frac{B_0 \sigma b \omega a^4 \sin(\omega t + \varphi)}{R^3} \cos \theta \\ B_\theta = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_\perp}{R^3} = -\frac{\mu_0}{32} \frac{B_0 \sigma b \omega a^4 \sin(\omega t + \varphi)}{R^3} \sin \theta \end{cases}$$

或者总磁感应强度为：(这部分可计算，如没有计算不扣分)



$$B = \sqrt{B_r^2 + B_\theta^2} = \frac{\mu_0}{32} \frac{B_0 \sigma b \omega a^4 \sin(\omega t + \varphi)}{R^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}$$

方向，与  $r$  方向成  $\alpha$  角度，其值为：

$$\tan \alpha = \frac{B_\theta}{B_r} = \frac{1}{2} \tan \theta$$

(3) 根据电磁感应定律，有

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

稳定的涡流满足：  $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ ，涡流产生的磁感应强度满足  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ ，

根据欧姆定律，  $\vec{j}_f = \sigma \vec{E}$ ，代入上式

$$\nabla \times \sigma \vec{E} = -\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{j}_f = -\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

对该式两边用  $\nabla$  左叉乘，则

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{j}_f) = -\sigma \frac{\partial (\nabla \times \vec{B})}{\partial t} = -\sigma \mu_0 \frac{\partial \vec{j}_f}{\partial t}$$

因为：

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{j}_f) = \nabla (\nabla \cdot \vec{j}_f) - \nabla^2 \vec{j}_f = -\nabla^2 \vec{j}_f$$

最终得：

$$\nabla^2 \vec{j}_f = \sigma \mu_0 \frac{\partial \vec{j}_f}{\partial t}$$