中国科学技术大学

2021 年秋季学期《电磁学》期终考试试卷 B

姓名：__________________　学号：____________________　得分：__________

第一题 单选题（30 分，共 10 题，每题 3 分）

1. 关于安培力是否满足牛顿第三定理，下列说正确的是：（ B ）
   A、 电流元之间的相互作用力通常不满足牛顿第三定理,闭合电流回路之间通常也不满足。
   B、 电流元之间的相互作用力通常不满足牛顿第三定理，但闭合电流回路之间满足。
   C、 电流元之间的相互作用力满足牛顿第三定理，但闭合电流回路之间通常不满足。
   D、 电流元之间以及闭合电流回路之间的相互作用力通常均不满足牛顿第三定理。

2. 半径为 a 的圆形电流 I 在圆心处的磁感应强度为：（ A ）

   A、$\dfrac{\mu_0 I}{2a}$　B、$\dfrac{\mu_0 I}{4a}$　C、$\dfrac{\mu_0 I}{a}$　D、$\dfrac{\mu_0 I}{2a^2}$

3. 真空中无限长直导线，距离导线 R 处的磁感应强度为：（ D ）

   A、$\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R^2}$　B、$\dfrac{\mu_0 I}{\pi R^2}$　C、$\dfrac{\mu_0 I}{\pi R}$　D、$\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$

4. 带电量为 q 的粒子以线速度 v 沿着半径为 R 的圆做匀速圆周运动，其磁矩为：（ A ）

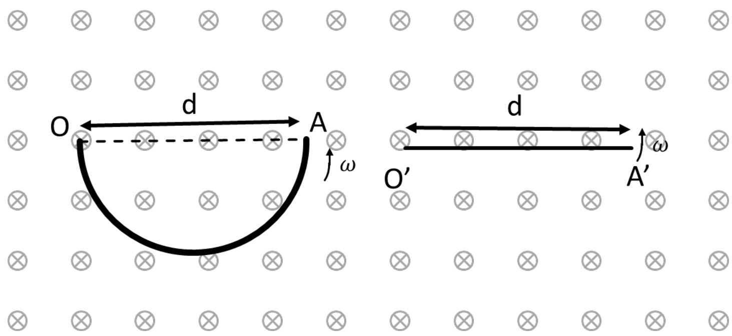
   A、$\dfrac{1}{2}qRv$　B、qRv　C、$\dfrac{1}{2}qR^2v$　D、qR^2v

5. 关于顺磁材料固有磁矩说法正确的是：（ C ）
   A、分子固有磁矩不为零；无外场时整体宏观磁矩不为零。
   B、分子固有磁矩为零；无外场时整体宏观磁矩不为零。
   C、分子固有磁矩不为零；无外场时整体宏观磁矩为零。
   D、分子固有磁矩为零；无外场时整体宏观磁矩为零。

6. 当反铁磁材料的温度高于奈尔温度后，其磁性通常会变为什么磁性：（ A ）
   A、顺磁性　B、抗磁性　C、铁磁性　D、亚铁磁性

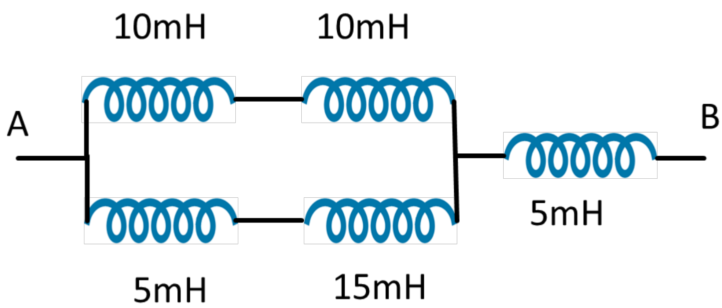
7. 如图在方向指向纸面的均匀磁场中，有两个在纸平面内做匀角速度转动的导体细杆。其中一个为半圆形导体细杆，其直径为 d（=OA），绕着 O 点转动，转动角速度为 ω；另一个为直导体细杆，杆长度 O' A' 与另一导体的直径相同，同样为 d，绕着 O' 点转动，转动角速度同样为 ω。则两个导体两端产生的动生电动势ε_{OA}，与$\varepsilon_{O'A'}$有：（ C ）

A、$\varepsilon_{OA} > \varepsilon_{O'A'}$　B、$\varepsilon_{OA} < \varepsilon_{O'A'}$　C、$\varepsilon_{OA} = \varepsilon_{O'A'}$　D、$\varepsilon_{OA} = -\varepsilon_{O'A'}$



8. 下列哪个不是电感的单位：（ D ）
A、亨利　B、韦伯/安培　C、伏特*秒/安培　D、伏特/安培

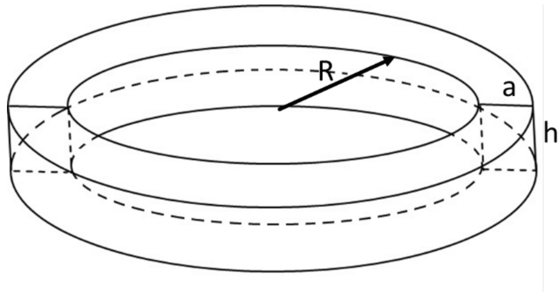
9. 计算以下电感网络上 A 到 B 两点间的等效电感值（电感间的互感可以忽略）：（ B ）
A、10mH　B、15mH　C、17.5mH　D、20mH



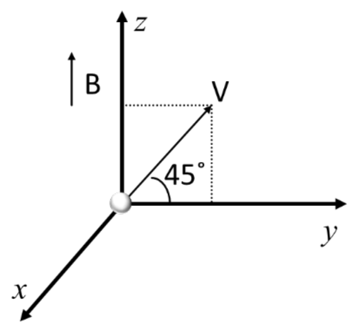
10. 关于涡旋电场下列说法不正确的是：（ C ）
A、涡旋电场是由变化的磁场产生的。
B、 空间中某处的涡旋电场的旋度由此处的磁感应强度的对时间导数决定。
C、 如空间中某处的磁感应强度的对时间导数为零，则此处的涡旋电场也为零。
D、 涡旋电场是非保守力场。

第二题 简答题（20 分，共 2 题，每题 10 分）

1. 已知一横截面为矩形的密绕环形螺线管的内径为 R，线圈宽度为 a，高度为 h，线圈总匝数为 N，通以电流 I， 线圈内没有磁介质，求(1)线圈内的磁感应强度分布（ 5 分 ）;（ 2 ）通过线圈任意横截面的磁通量（ 5 分 ）。



2. 如图所示，已知空间中分布有磁感应强度大小为 B 沿着 z 方向的均匀磁场，一带电粒子的质量为 m，带电量为 q（q>0），初始位置在坐标原点，初始速度为 V，初速度方向为 yz 平面内，且与 y 轴的夹角为 45 度。不忽略重力的情况下（重力沿着- Z 方向）求（1）带电粒子运动轨迹的 x,y,z 三个分量随时间变化的方程（5 分）;（2）经过多长时间以后速度的大小达到最小值，最小值为多少。（5 分）



第三题 计算题（50 分，共 3 题）

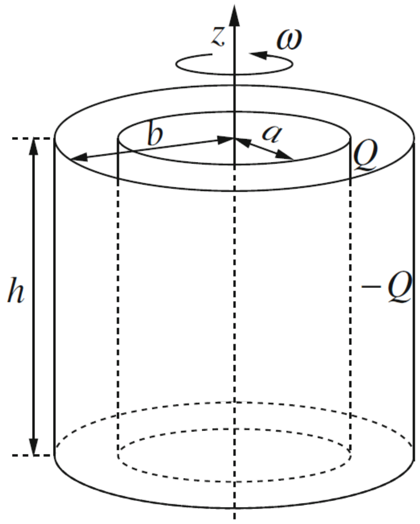
1.（18 分）两个同轴的圆柱面半径分别为 a 和 b，b > a，高度为 h，且 h ≫ b。内圆柱面带+Q 电荷，外圆柱面带-Q 的电荷， 两个圆柱面共同沿中心轴以匀角速度ω转动，忽略边缘效应。

（1）求空间的磁感应强度分布（5 分）;

（2）计算两个圆柱面单位面积的磁场力，并与电场力相比较；（5 分）

（3）计算磁场的能量（3 分）;

（4）计算两个圆柱面在转动状态下各自的自感系数和它们之间的互感系数。（5 分）



【解】（1）内外圆柱面的电荷面密度为：

$$\sigma_1=\frac{Q}{2\pi ah}, \quad \sigma_2=-\frac{Q}{2\pi bh}$$

两个圆柱面转动形成面电流密度 i，

$$i_1=\sigma_1 v=\sigma_1\omega a=\frac{Q}{2\pi ah}\omega a=\frac{Q\omega}{2\pi h}$$

$$i_2=\sigma_2 v=\sigma_2\omega b=-\frac{Q}{2\pi bh}\omega b=-\frac{Q\omega}{2\pi h}$$

两个圆柱面的面电流等效于两个螺线管， 对应的 $nI=i$，不考虑边缘效应，螺线管只在内部产生磁场，因此有：

$$\vec{B}_1=\vec{B}_1'+\vec{B}_2'=(\mu_0 i_1+\mu_0 i_2)\vec{e}_z=\left(\frac{\mu_0 Q\omega}{2\pi h}-\frac{\mu_0 Q\omega}{2\pi h}\right)\vec{e}_z=0, \quad r<a$$

$$\vec{B}_2=\vec{B}_1'+\vec{B}_2'=0+\mu_0 i_2\vec{e}_z=-\frac{\mu_0 Q\omega}{2\pi h}\vec{e}_z, \quad a<r<b$$

$$\vec{B}_3=\vec{B}_1'+\vec{B}_2'=0+0=0, \quad r>b$$

(2)先计算电场力：根据高斯定理 $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{Q}{\varepsilon_0}$，可以计算出三个区域的电场强度。

$$2\pi rhE_1=0 \quad \Rightarrow \quad E_1=0, \quad r<a$$

$$2\pi rhE_2=\frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_2=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\frac{1}{r}\vec{e}_r, \quad a<r<b$$

$$2\pi rhE_3=\frac{Q-Q}{\varepsilon_0}\quad\Rightarrow\quad E_3=0,\quad r>b$$

内圆柱面单位面积的静电力为：

$$f_{Ea}=\frac{1}{2}\left(E_1(r=a^-)+E_2(r=a^+)\right)\sigma=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 h}\frac{1}{a}\cdot\frac{Q}{2\pi ah}=\frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0 a^2h^2}$$，方向沿径向向外

外圆柱面单位面积的静电力为：

$$f_{Eb}=\frac{1}{2}\left(E_2(r=b^-)+E_3(r=b^+)\right)\sigma=-\frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0 b^2h^2}$$，方向沿径向向内

再计算磁场力。

内圆柱面单位面积的磁场力为：

$$\vec{f}_{Ba}=\sigma_1\vec{v}\times\left(\frac{\vec{B}_1+B_2}{2}\right)=\frac{Q}{2\pi ah}\omega a\vec{e}_\varphi\times\frac{1}{2}\left(-\frac{\mu_0 Q\omega}{2\pi h}\vec{e}_z\right)=-\frac{\mu_0 Q^2\omega^2}{8\pi^2h^2}\vec{e}_r$$

外圆柱面单位面积的磁场力为：

$$\vec{f}_{Bb}=\sigma_2\vec{v}\times\left(\frac{\vec{B}_2+B_3}{2}\right)=\frac{-Q}{2\pi bh}\omega b\vec{e}_\varphi\times\frac{1}{2}\left(-\frac{\mu_0 Q\omega}{2\pi h}\vec{e}_z\right)=+\frac{\mu_0 Q^2\omega^2}{8\pi^2h^2}\vec{e}_r$$

只需比较外圆柱面的电场力与磁场力，因为 $c^2=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$，所以有：

$$\left|\frac{f_{Eb}}{f_{Bb}}\right|=\frac{\dfrac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0 b^2h^2}}{\dfrac{\mu_0 Q^2\omega^2}{8\pi^2h^2}}=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0 b^2\omega^2}=\frac{c^2}{v_b^2}$$

（3）由于磁场只局限在两个圆柱面之间，而且为均匀磁场，因此磁能为：

$$W_B=\frac{1}{2\mu_0}B^2\cdot\pi\left(b^2-a^2\right)h=\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 Q\omega}{2\pi h}\right)^2\pi\left(b^2-a^2\right)h=\frac{\mu_0 Q^2\omega^2}{8\pi h}\left(b^2-a^2\right)$$

（4）圆柱面转动形成的电流强度为：$I=ih=\frac{Q\omega}{2\pi h}\cdot h=\frac{Q\omega}{2\pi}$

内圆柱面，根据磁能的表达式：$W_{Ba}=\frac{1}{2}L_a I^2$，

$$W_{Ba}=\frac{1}{2\mu_0}B_1'^2\cdot\pi a^2h=\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 Q\omega}{2\pi h}\right)^2\pi a^2h=\frac{\mu_0 Q^2\omega^2a^2}{8\pi h}$$

求得内圆柱面自感系数为：

$$L_a = \frac{2W_{Ba}}{I^2} = \frac{2 \cdot \frac{\mu_0 Q^2 \omega^2}{8\pi h} a^2}{\left(\frac{Q\omega}{2\pi}\right)^2} = \frac{\mu_0 \pi}{h} a^2$$

【另解】内圆柱面截面的磁通量为：

$$\Phi_a = \pi a^2 B_1' = \pi a^2 \frac{\mu_0 Q \omega}{2\pi h} = \frac{\mu_0 Q \omega}{2h} a^2$$

$$L_a = \frac{\Phi_a}{I} = \frac{\mu_0 Q \omega}{2h} a^2 \cdot \frac{2\pi}{Q\omega} = \frac{\mu_0 \pi}{h} a^2$$

对外圆柱面有：

$$W_{Bb} = \frac{1}{2\mu_0} B_2'^2 \cdot \pi b^2 h = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 Q \omega}{2\pi h}\right)^2 \pi b^2 h = \frac{\mu_0 Q^2 \omega^2 b^2}{8\pi h}$$

$$L_b = \frac{2W_{Bb}}{I^2} = \frac{2 \cdot \frac{\mu_0 Q^2 \omega^2}{8\pi h} b^2}{\left(\frac{Q\omega}{2\pi}\right)^2} = \frac{\mu_0 \pi}{h} b^2$$

现在求两个圆柱面之间的互感系数：外部圆柱的电流 I 在内部圆柱面中产生的磁感应强度为：

$$\vec{B}_2' = \mu_0 \vec{i}_2 = -\frac{\mu_0 Q \omega}{2\pi h} \vec{e}_z, \quad r < a$$

磁通量为：

$$\Phi_{ab} = \pi a^2 B_2' = \pi a^2 \frac{\mu_0 Q \omega}{2\pi h} = \frac{\mu_0 Q \omega}{2h} a^2$$

$$M = \frac{\Phi_{ab}}{I} = \frac{\mu_0 Q \omega}{2h} a^2 \cdot \frac{2\pi}{Q\omega} = \frac{\mu_0 \pi}{h} a^2$$

$$M^2 < L_1 L_2$$

【另解】由于互感磁能为

$$W_{ab} = W_B - W_{Ba} - W_{Bb} = -\frac{\mu_0 \omega^2 Q^2}{4\pi h} a^2 = M I^2$$

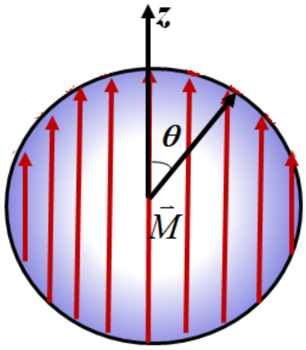
所以互感系数为

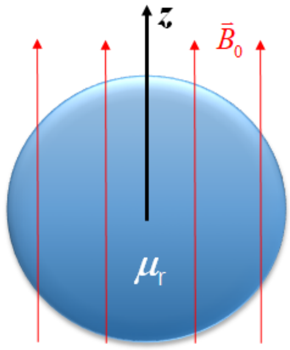
$$M = \frac{W_{ab}}{I^2} = -\mu_0 \frac{\pi a^2}{h}$$

2. （15 分）

（1）一个半径为 R 的磁化球，磁化强度 M 沿 z 轴方向，且均匀磁化。已知球内磁感应强度是均匀的，球外为等效磁偶极矩产生的磁场，求球内外的磁感应强度；（8 分）

（2）一个相对磁导率为μ_r的顺磁性磁介质球，放置在均匀外磁场B_0中，磁场方向沿 z 轴，介质球被均匀磁化，求球内外的磁感应强度。（7 分）





【解】(1) 由题目已知球内磁场为均匀的，因此只需求出球心处的磁感应强度。磁化球表面的磁化电流为：

$$\vec{i}=\vec{n}\times\vec{M}=M\sin\theta\vec{e}_\phi$$

球面圆环带上的电流为：$dI=M\sin\theta Rd\theta$，该圆环电流在球心处的磁感应强度为:

$$dB_0=\frac{\mu_0}{2}\frac{r^2dI}{(z^2+r^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0}{2}\frac{R^2\sin^2\theta M\sin\theta Rd\theta}{(R^2\sin^2\theta+R^2\cos^2\theta)^{3/2}}=\frac{\mu_0}{2}\sin^3\theta Md\theta$$

$$B_0=\frac{\mu_0M}{2}\int_0^\pi\sin^3\theta d\theta=-\frac{\mu_0M}{2}\int_0^\pi\sin^2\theta d\cos\theta=-\frac{\mu_0M}{2}\int_0^\pi(1-\cos^2\theta)\,d\cos\theta$$

$$=-\frac{\mu_0M}{2}\left(\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\Big|_0^\pi=-\frac{\mu_0M}{2}\left[\left(-1-\frac{1}{3}(-1)\right)-\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]=-\frac{\mu_0M}{2}\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{2}{3}\mu_0M$$

球内磁场各处大小均与球心处磁感应强度的值相同，方向均沿 M 方向。

磁化球等效于一个磁矩，该磁矩为：

$$\vec{m}=\vec{M}V=\frac{4}{3}\pi R^3\vec{M}$$

球外的磁感应强度为该磁矩产生，因此为：

$$\vec{B}_{外}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})}{r^5}\vec{r}-\frac{\vec{m}}{r^3}\right]$$

【另解】磁化球等效于一个磁矩，该磁矩为：

$$\vec{m}=\vec{M}V=\frac{4}{3}\pi R^{3}\vec{M}$$

设球内外的磁感应强度分别为 $\vec{B}_{内}=B_0\hat{z}$ 和

$$\vec{B}_{外}=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{m}\right]=\mu_0 M\frac{R^3}{3r^3}\left[(2\cos\theta)\hat{r}+(\sin\theta)\hat{\theta}\right]$$

由磁感应强度的法向分量连续，$\hat{r}\cdot(\vec{B}_{外}-\vec{B}_{内})_{r=R}=0$，得到

$$B_0=\frac{2}{3}\mu_0 M$$

(2)磁介质球在均匀的外磁场中将被磁化，假设磁化强度为 *M*, 对顺磁性材料，则磁介质内部（球心）的总磁感应强度为：

$$\vec{B}=\vec{B}_0+\vec{B}'=\vec{B}_0+\frac{2}{3}\mu_0\vec{M}$$

根据磁介质的特性方程：

$$\vec{M}=(\mu_r-1)\vec{H}=(\mu_r-1)\frac{\vec{B}}{\mu_0\mu_r}$$

有

$$\vec{B}=\vec{B}_0+\frac{2}{3}\mu_0(\mu_r-1)\frac{\vec{B}}{\mu_0\mu_r}=B_0+\frac{2(\mu_r-1)}{3\mu_r}\vec{B}$$

因此

$$\vec{B}=\frac{3\mu_r}{\mu_r+2}\vec{B}_0$$

磁化强度为

$$\vec{M}=(\mu_r-1)\frac{\vec{B}}{\mu_0\mu_r}=(\mu_r-1)\frac{1}{\mu_0\mu_r}\cdot\frac{3\mu_r}{\mu_r+2}\vec{B}_0=\frac{3(\mu_r-1)}{\mu_0(\mu_r+2)}\vec{B}_0$$

球外的磁感应强度等效于一个放在球心的磁矩 $\vec{m}=\vec{M}V=\frac{4\pi(\mu_r-1)R^3}{\mu_0(\mu_r+2)}\vec{B}_0$ 和一个均匀磁场 $\vec{B}_0$ 叠加，即

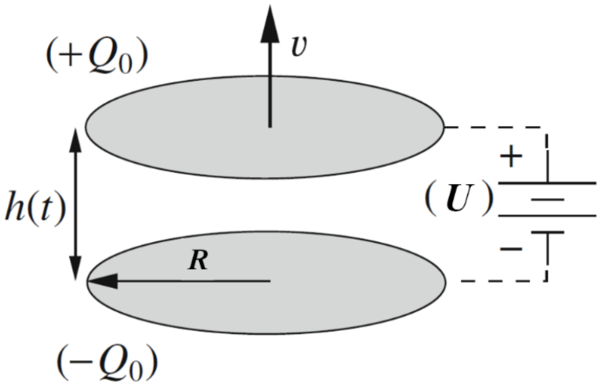
$$\vec{B}_{外}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})}{r^5}\vec{r}-\frac{\vec{m}}{r^3}\right]+\vec{B}_0$$

3.（17 分）一个平行板电容器由两个半径为 R 的金属圆盘组成，初始间距为h_0，下极板保持静止，上极板以速度 v 匀速离开下极板，因此在 t 时刻的间距为 $h(t) = h_0 + vt$，设任何时刻均有 $h \ll R$，即忽略边缘效应和磁场变化带来的电场，并假设速度 v 很小，求：

（1）若下极板带电量为$-Q_0$，上极板带电为$+Q_0$，求两个极板之间的磁场；（5 分）

（2）两个极板之间始终接有恒定的电源，电压为 U，求两个极板之间的磁场，并求玻印廷矢量；（7 分）

（3）两个极板之间始终接有恒定的电源的情况下，求从电容器侧面单位时间流出的能量，并求电源所接收到的功率。（5 分）



【解】（1）取垂直于电容器极板方向为 z 方向，即极板沿 z 轴运动，电容为：

$$C = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2}{h_0 + vt}$$

两个极板之间的电势差为：

$$V = \frac{Q_0}{C} = Q_0 \frac{h_0 + vt}{\varepsilon_0 \pi R^2}$$

电场强度为：

$$E = \frac{V}{h} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 \pi R^2}$$

由于电量保持恒定，因此，两个极板之间的位移电流为零，此外两个极板之间的传导电流也为零，所以，两个极板之间的磁感应强度为零。（说明：此时电容器内部存储的静电能是增加的，，

$W_E = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2\varepsilon_0 \pi R^2}(h_0 + vt)$，$\frac{dW_E}{dt} = \frac{Q_0^2}{2\varepsilon_0 \pi R^2} vt$，增加的能量来自于移动极板的外力做功，由于

极板匀速运动，外力必须等于极板的静电力，证明略。）

【另解】由于忽略边缘效应，因此，空间中磁场可以认为是电荷均匀分布的无限大平面垂直于平面运动时所产生的。而速度 v 很小，因此，磁场与电流满足 BS 定律。而由于每一个与极板垂直的平面均为电流分布的对称平面，由此可断定，空间各点的磁感应强度为零。

（2）两个极板之间接上电源，电压不变，即：

$$\vec{E}=-\frac{U}{h}\vec{e}_z=-\frac{U}{h_0+vt}\vec{e}_z$$

电场随时间变化，因此有位移电流，对应产生的磁感应强度为：

$$2\pi rB=\mu_0 I_D=\pi\mu_0 r^2\frac{dD}{dt}=\pi\varepsilon_0\mu_0 r^2 U\frac{v}{(h_0+vt)^2}$$

$$\vec{B}=\frac{\varepsilon_0\mu_0 rU}{2}\frac{v}{(h_0+vt)^2}\vec{e}_\varphi=\frac{rU}{2c^2}\frac{v}{(h_0+vt)^2}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}=\frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{U}{h_0+vt}\vec{e}_z\right)\times\left[\frac{rU}{2c^2}\frac{v}{(h_0+vt)^2}\vec{e}_\varphi\right]=\frac{rU^2}{2\mu_0c^2}\frac{v}{(h_0+vt)^3}\vec{e}_r=\frac{r\varepsilon_0U^2}{2}\frac{v}{(h_0+vt)^3}\vec{e}_r$$

方向为从电容器侧面指向外。

（3）单位时间从电容器侧面流出的能量为：

$$-\iint\vec{S}\cdot d\vec{s}=S(r=R)\cdot 2\pi R(h_0+vt)=\frac{\varepsilon_0\pi R^2U^2v}{(h_0+vt)^2}=\frac{\varepsilon_0\pi R^2U^2v}{(h_0+vt)^2}$$

电源回路中的传导电流为： $I=\frac{dQ}{dt}=\frac{d(CU)}{dt}=-U\varepsilon_0\pi R^2\frac{v}{(h_0+vt)^2}$

这个电流是流到电源的，因此电源接收到的功率为：

$$P=-UI=\frac{U^2\varepsilon_0\pi R^2v}{(h_0+vt)^2}$$

正好等于单位时间从电容器侧面流出的能流，即电容器从侧面流出的能量是由电源接收的。

（说明：（3）本问题简化了能量的讨论，只计算独立的两部分：单位面积的流出能量和电源接收的能量，避免去讨论整个系统能量守恒问题，因为整个系统能量守恒满足：

$$-\iint\vec{S}\cdot d\vec{s}=\frac{dW}{dt}+\vec{F}\cdot\vec{v}$$

W 是整个电容器内部的电场和磁场能量，F 是保持极板匀速运动需要的力，可以证明该等式成立，证明过程略。）