2014–2015 学年第一学期期中考试试题

考试科目：线性代数　　考试时间：2014.11.23　　得分：＿＿＿＿＿＿

学生所在系：＿＿＿＿＿＿＿＿　　姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿　　学号：＿＿＿＿＿＿＿

【注】1. 不准使用手机和计算器等电子产品。

2. 本试题所涉及的坐标均为直角坐标；卷面总分:100 分；考试时间:120 分钟。

一、 填空题【每题 4 分，共 24 分】

1. 三阶行列式的几何意义是＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

2. 对正整数 n，方程 $z^n = 1$ 的根为＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

3. 点 $(1,1,1)$ 到直线 $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y+2}{5} = \dfrac{z+3}{6}$ 的距离为＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

4. 将 Oyz 面上的曲线 $f(y,z) = 0$ 绕 Oz 轴旋转一周所得旋转曲面的方程为＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

5. 常见的二次曲面有椭球面、＿＿、二次锥面和二次柱面等。

6. 设 A 为 n 阶方阵，若 $rank(A) = r$，则 $rank(A^*) =$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

二、 判断题【判断下列命题是否正确，并简要说明理由。每题 5 分，共 25 分】

1. 对空间任意三个向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$，必有 $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$。

2. 对空间任意三个向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$，必有 $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{c})\times\vec{b} - (\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}$。

3. 若 A, B 分别为 $m\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵，则 $det(AB) = det(BA)$。

4. 若 A, B 分别为 $m\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵，则 $(AB)^T = A^T B^T$。

5. 设 A^* 为 n 阶矩阵 A 的伴随，则 $det(A^*) = (det(A))^{n-1}$。

三、【8 分】设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$,$C=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}$，解方程 $AXB=C$。

四、【8 分】解线性方程组 $\begin{cases}ax+y+z+1=0\\x+ay+z+2=0\\x+y-2z+3=0\end{cases}$ ，指出其几何意义并作示意图。

五、【8 分】计算 n 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}a&1&...&1&1\\1&a&...&1&1\\...&...&...&...&...\\1&1&...&a&1\\1&1&...&1&a\end{pmatrix}$ 的行列式和秩。

六、【9 分】设 A 为 n 阶方阵，证明 $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(I-A)\geq n$，且等号成立的充分必要条件是 $A^2=A$ 。

七、【9 分】设 A 为 n 阶非零方阵，$n\geq 3$，且 $A_{ij}=a_{ij},i,j=1,2,\cdots,n$。

1. 若 $a_{ij}\in\mathbb{R},i,j=1,2,\cdots,n$，证明 A 可逆并求 $det(A)$；

2. 若 $a_{ij}\in\mathbb{C},i,j=1,2,\cdots,n$，则结果又如何？

八、【9 分】设 A,B 分别为 $l\times m$ 和 $m\times n$ 矩阵。试证明：

1. $ABX=0$ 与 $BX=0$ 同解 $\Longleftrightarrow rank(AB)=rank(B)$；

2. 若 A 为实矩阵，则 $rank(A^TA)=rank(A)$。