1. 求下列矩阵：

的本征值与归一化本征矢量。这些本征矢量正交吗？试加以评论。

解：

相互正交；

不相互正交。

2. 试推导Schwarz不等式：

其中和是Hilbert空间中的任意2矢量。

解：

用代替上式中的和，则上式变为：

而的极小值为，故：

再以代替，则上式变为：

当时，左式有极大值，故上式化为：

得证。

3. 试推导三角不等式：

解：

由于，上式化为：

得证。

4. 求证：正交归一化矢量系为完备系的充要条件是：对任意两矢量，关系式成立。

解：

充分性：使用反证法。假设不是完备系，则存在与都正交的矢量。不妨选择，则：

矛盾。因此是完备系，充分性得证。

必要性：由于是完备系，有：

因此：

必要性得证。

5. 设是Hilbert空间的一个子空间，是它的正交补空间。任一矢量可以写成它在两个子空间的投影之和，求证：满足的投影算符是Hermite算符，且满足方程。

解：

先证。，故，得证。

对任意有：

即是Hermite算符。得证。

6. 求证，如果前一问题的子空间取为单个归一化矢量张成的子空间，则相应的投影算符由给出。

解：

在这个假设下，。因此：

即，得证。

7. 求证，如果表示一可观察量的本征矢，则下列**封闭关系**成立：

解：

设是一个投影算符，作用于由矢量所张成的子空间上。因为是一个可观察量，所以有。另一方面，在子空间上的投影等于在此子空间中所有基底上的投影之和。特别是，式中是投向矢量上的线性算符，这样我们就有。但根据前一问题我们知道，，所以有：

得证。

8. 如果子空间包含在里，则称投影算符大于或等于另一个投影算符，即，求证：

i. 关系式满足任何不等式所要求的公理。

ii. 。

iii. 关系式成立对Hilbert空间的任一矢量，。

解：

(i) 从定义可以直接得出，如果且，则；如果且，则。得证。

(ii) ，所以。得证。

(iii) ：

对于投影算符有。则：

故。又有：

由于，得。因此：

得证。

：

如果是补空间的矢量，有。又因为，有。于是，如果，则；如果，则。但是，因此对。因此等价于。又因为等价于，得证。

9. 考虑矢量系，其中是连续角标，可以取间隔内的所有制。求证，如果矢量在下述意义上是正交归一化的，即，则算符：

是投向由矢量系张成的子空间的投影算符。

解：

对有：

因此与所有正交。又因为是矢量系的线性组合，所以是一个投向由矢量系张成的子空间的投影算符。

10. 求证，如果幺正算符可写成的形式，其中是一无穷小实数，则算符是Hermite算符。

解：

因为是幺正的，有：

拆开左右两式，只保留的一次项，则得到，即是Hermite算符。

11. 如果Hermite算符满足，则称为正定算符。求证：是Hermite正定算符。

解：

所以是Hermite算符。又有，故是正定算符。

12. 如果是Hermite正定算符，则。又已知，，其中构成一组可观察量本征矢的完备系。求证，，等号当且仅当时成立。

解：

由于，所以，且当且仅当等号成立。在

中，我们取，则，而是任意的，所以。由于构成一组基矢量，所以都是的线性组合，有。得证。

13. 求证，由关系式：

定义的算符是线性Hermite算符，其中核是实函数。

解：

任取，则：

故是线性算符。

记，则：

而：

故是Hermite算符。

14. 求证，微分算符：

在所有满足在间隔的两端点为0的可微波函数（如）的空间中是线性Hermite算符。

解：

故是线性Hermite算符。

15. 平移算符的定义如下：

求证：

i. 可以通过算符表示。

ii. 是幺正算符。

解：

(i) 利用泰勒定理展开有：

故。

(ii) 定义为，对有，由此得出：

故，因此，得证。

16. 给出3个算符，试用对易关系和表示对易关系。

解：

17. 设是一个作用于波函数上的算符，而是一坐标变换算符，它作用于波函数上，使。求证，在坐标变换下，如果是不变的，即，则。

解：

对，，由此，。

18. 设算符的逆算符存在，试将算符展开成的幂级数。

解：

设能展开为如下形式：

其中是待定算符。以左乘左右两式，有：

同幂次系数相等，故。因此：

46. 设为体系的两个可能实现的状态，现做如下三种线性叠加：

i. 。

ii. 。

iii. 。

为实常数。请问是否表示相同的态？

解：

相差的为绝对相位，是同一态；与相差的为相对相位，不是同一态。

47. 设是某一系统的两个波函数，是常数，现在构成以下的函数：

i.

ii.

iii.

这些函数是不是该系统的波函数？为什么？

解：

一个系统的波函数应当满足方程式与叠加原理。显而易见，满足条件，不满足。所以只有是该系统波函数，其它都不是。

48. 证明任何一个Hermite矩阵都能被一个幺正矩阵对角化。

140. 2个无相互作用的粒子，质量都为，处于一维无限深方势阱中，势阱宽度为，在阱中势为0，阱外势无穷大：

i. 求系统四个最低能级的能量值。

ii. 求这些能级的简并度，当这两个粒子：

(1) 全同粒子，自旋为。

(2) 不是全同粒子，自旋为。

(3) 是全同粒子，自旋为。

解：

(i) 在这样的一维势中，单粒子空间波函数为：

其中，对应的能量为。这里：

当两个粒子分别处于态，系统的双粒子态可表示为：

此态对应能量为，因此最低的四个能级是：

(ii.1) 系统态函数可以表示为空间波函数与自旋波函数之乘积，因为粒子是全同Fermi子，态必须是反对称的。这是若空间波函数对称，则自旋波函数反对称；否则空间波函数反对称，自旋波函数对称。因为粒子自旋为，有3个对称自旋态和1个反对称自旋态，3个对称态的总自旋为1，称为三重态，反对称态总自旋为0，称为单态。

因为空间态对称，所以整个波函数是空间态乘上自旋的单态，因此能级简并度为，归一化波函数为：

其中表示自旋朝上或朝下的自旋态，下标表示不同的粒子。

空间态可以是对称也可以是反对称，前者需乘反对称的自旋态，而后者应乘三重态。所以第二个能量的简并度为，它们之中的两个为：

当，简并度为；当，简并度为。

(ii.2) 如果粒子是非全同粒子，则系统的波函数没有对称性或反对称性的约束。这时若则有两个空间态具有相同能量，分别是和。每个空间波函数可以乘上四个自旋波函数。故总的简并度为，如果则简并度为4。

(ii.3) 具有整数自旋的全同粒子波函数是对称的，所以对称的空间波函数需要乘上对称的自旋波函数，反之亦然。由上题可知自旋为1的两个全同粒子有6个对称的、3个反对称的自旋态。于是空间态是对称的必须乘上6个对称自旋态之一。空间态有对称态和反对称态，需分别乘上反对称与对称自旋态，导致总简并度为。类似地，可以计算空间态和的简并度分别为与。