第六次习题课讲义

于俊骜

2023 年 12 月 2 日

目录

1 复习回顾

期中考试后，我们进入了第四、五单元，即积分学的学习。相较于微分学，积分学的技巧性和计算量都有所提升，但题目大同小异，且证明有所减少。积分学最重要的就是将课内的各种算法练熟，并提升计算正确率。

1.1 不定积分 (Antiderivative)

1.1.1 定义

不定积分是由原函数定义的，即

定义 1 (不定积分). $f(x)$ 在区间 I 上原函数的全体 $F(x)+C$ 称为 $f(x)$ 的不定积分。

注 1. 注意，不定积分是在区间上定义的，因此“某点处的不定积分”是没有意义的。

从 antiderivative 一词也能看出，求不定积分就是把求导的过程逆回去。不难发现，我们直接使用的所有不定积分公式都是由求导公式给出的。

另外请一定记住，**不定积分要加 C**，这是因为 $f(x)$ 的原函数不止一个，它们两两之间差一个常数。如果漏掉 C，考试是一定会扣分的。

注 2. $\frac{1}{x}$ 的不定积分是 $\ln|x|+C$，不要忘了加绝对值。

1.1.2 计算方法

除了直接套用公式，积分的计算无外乎**分部积分**和**换元**两种方法。

分部积分是乘积求导的直接推论，实际操作中就是“积回一项，再导掉另一项”。下面是一些分部积分的常用场景：

- 含 ln 项：想办法把 ln 项求导；
- 含 e^{ax} 项：将 e 指数积回去，对另一项求导；
- 含正余弦：将正余弦积回去，对另一项求导；
- 被积函数求导后性质很好：添一项 x。

项	$g(x)$	$\sqrt{1-x^2}$	$\sqrt{1+x^2}$
换元	$t=g(x)$	$x=\sin\theta$ 或 $x=\cos\theta$	$x=\sinh t$ 或 $x=\tan x$

表 1: 不定积分换元

注 3. *分部积分公式是对公式 $(uv)'=u'v+uv'$ 做了一次不定积分得到的，因此理应出现一个常数 C。我们实际计算中往往省略，只在最后***积分号全部消失***后加上 C。例如习题 4.1 的 5(3) 题，看似结果不需要加 C，但实际上 C 已经在分部积分的过程中产生了。*

换元法通常由观察得出，书上给出的“第一、第二换元法”无需区别记忆，本质就是 $x=\varphi(t)$ 和 $t=\varphi(x)$ 的区别。不定积分换元，一般不用验证 φ 的可微性。

下面给出几种常用的换元（$g(x)$ 通常为三角、根号、指数等）：

1.2 定积分 (Integral)

1.2.1 定义：线下面积

从英文名可以看出，定积分并不是导数的衍生物。很多同学刚接触定积分时，会先验地认为积分就是求导反过来。但事实上，积分和求导是两个完全不同的极限运算，求导是“差商的极限”，积分是“分割求和取极限”。直观上来看，定积分就是**线下面积**。积分的一切性质都是由 Riemann 和

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

推出来的。

注 4. *只有在单变量情形下才有求导、积分互逆。一旦到了多变量，导数和积分就会分道扬镳。之后，求导会推广到流形和纤维丛上，而积分会在 Lebesgue 框架下推广到广义函数。*

1.2.2 微积分基本定理

定积分的实际计算归结与微积分基本定理，这是单变量微积分中一个美妙的巧合。

定理 1 (微积分基本定理). 任意 $f(x) \in C[a,b]$，有 $f'(x) \in C[a,b]$ 且

$$\int_a^x f'(t)dt = f(t) - f(a)$$

任意 $g(x) \in C[a,b]$，有 $\int_a^x g(t)dt \in C^1[a,b]$，且

$$\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)dt = g(x)$$

实际计算中，我们经常用采用不定积分中的分部积分和换元技巧。分部积分时，要注意后面是减号，且第一项的边界值是作差；换元时要特别注意新元的范围，有时候定义域还会出问题（例如 $\tan t, t \in (0,\pi)$）。特别地，要注意单调性，有可能上下限的大小关系会变（尤其是 $\cos t$，容易漏负号）。

1.2.3 几何量计算

这部分全是复杂的公式，写作业时对着套就行，考前一天背也来得及。

几何量	弧长	围成的面积
直角坐标	$L = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx$	$S = \int_a^b f(x)dx$
极坐标	$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r^2(\theta)+r'^2(\theta))^2}d\theta$	$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta$
参数方程	$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$	$S = \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)y'(t) - x'(x)y(t))dt$

几何量	绕 x 轴旋转体体积	旋转体侧面积
直角坐标	$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$	$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$
极坐标	无	$S = 2\pi\int_\alpha^\beta r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$
参数方程	无	$S = 2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{x'^2(t)+y'^(t)}dt$

表 2: 几何量计算公式总结

另有绕 y 轴旋转体体积：

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

1.3 一阶常微分方程 (Ordinary Differential Equations)

处理数学分析 (B1) 中的 ODE，你尽管将方程正确分类，剩下的就交给积分。我们学到的分类有

1. 可分离变量方程
2. 齐次方程
3. 一阶线性方程
4. Bernoulli 方程
5. Riccati 方程
6. 一阶隐式方程

我们往往这个顺序判断方程类型，如果都不是，那就要考虑换元了。

换元具有技巧性，不一定能直接看出来，有时候可能要多次尝试甚至多次换元。以及，微分方程中 x 和 y 的地位相等，有时候可以把 x 写成 y 的函数来解，更多情况下，x 和 y 是无法分离的。“能写出表达式就已经很棒了”。

注 5. *解 ODE 时，对 $\frac{1}{x}$ 的积分往往不加绝对值。多数方程经过正负讨论后，会发现不加绝对值不影响结果，此时为了简便，解题过程中可以不加绝对值。*

2 作业选讲

2.1 习题 4.1.5(10)

这个被积函数比较复杂，也很难一眼看出比较好的换元，而且没法写成两项相乘，所以最直接的尝试就是变出一个 x：

$$\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx = x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \int \frac{x(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})}{x+\sqrt{x^2+1}}dx$$

后一项的被积函数可以分母有理化

$$\begin{aligned}
\frac{x(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})}{x+\sqrt{x^2+1}} &= x\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)(\sqrt{x^2+1}-x) \\
&= x\left(\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}$$

回到原式，我们就可以发现一个可行的换元。令 $t=x^2$，则

$$\begin{aligned}\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx &= x\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\int \frac{x(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})}{x+\sqrt{x^2+1}}dx\\ &= x\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\int \frac{1}{2\sqrt{t+1}}dt\\ &= x\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\sqrt{x^2+1}+C\end{aligned}$$

到这里，这个积分就积出来了。但如果对函数的表达式比较了解，就可以立马注意到被积函数是**双曲正弦函数的反函数**。因此我们得到了另一种巧妙的换元法。

令 $x=\sinh t$，则 $\ln(x+\sqrt{x^2+1})=\ln(\sinh t+\cosh t)$，于是

$$\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx=\int t\cosh t dt = t\sinh t-\int \sinh t dt = t\sinh t-\cosh t+C$$

把 $t=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 带入，可以得到一样的结果。这个方法中间用到了分部积分，那必然也符合题目要求（绝对不是没审题）。

2.2 习题 5.1.7(1)

本题部分同学没有读懂。题中结论换一种表述是：如果积分中值定理中的 ξ 可以取在边界，那么一定也能也能在区间内部找到一个 ζ，使得 $f(\xi)=f(\zeta)$。

证明. 若 ξ 可以取在边界，则不妨设 ξ 可取为 a，即

$$f(a)(b-a)=\int_a^b f(x)dx$$

假设不存在 $\zeta\in(a,b)$，使得 $f(\zeta)=f(a)$，则 $f(x)-f(a)$ 在 (a,b) 上恒正或恒负，由第 4 题知积分不为 0。因此

$$0=\int_a^b f(x)dx-f(a)(b-a)=\int_a^b (f(x)-f(a))\,dx\neq 0$$

矛盾！因此 ζ 一定可以取在内部。 □

2.3 习题 5.1.12(2)

由于取过一次反函数，这里括号里的 0 指的是 $y=0$。部分同学把它当作 $x=0$，带入反函数求导公式得到错误答案 1。

事实上，由于被积函数 e^{-x^2} 恒正，为了 $y=f(x)=0$，只能有积分上下限相同，即 $x=1$。带回求导就有

$$f'(x)=e^{-x^2}\Longrightarrow f'(1)=\frac{1}{e}\Longrightarrow \left(f^{-1}\right)'(0)=e$$

注 6. *涉及反函数的题目，变量关系往往比较绕，建议多想一想。*

2.4 习题 5.1.18(1)

由积分定义的函数，往往难以写出表达式，所以整体分析而不是想办法积出来，适用性更强一些。但本体是个例外。事实上，直接计算可得

$$\int_0^x \sin^3 t dt=\int_0^x \frac{3\sin t-\sin 3t}{4}dt=\frac{1}{12}\cos 3x-\frac{3}{4}\cos x-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\sin^4\frac{x}{2}(\cos x+2)$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin^3 t dt}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^4\frac{x}{2}(\cos x+2)}{3x^4}=\frac{1}{4}$$

当然这题更见的一个方法是 L'hospital 法则，一求导积分号消失，就变成了一般的求极限。

最后，由于多项式积分很方便，Taylor 展开也不失为一个巧妙的方法。即

$$\frac{1}{x^4}\int_0^x \sin^3 t dt=\frac{1}{x^4}\int_0^x (t+o(t))^3 dt=\frac{1}{x^4}\int_0^x (t^3+o(t^3))dt=\frac{x^4+o(x^4)}{x^4}\longrightarrow 0$$

2.5 习题 5.1.19

这一题的三个小题各个身怀绝技，尤其是 (2)，尽管书上有提示，还是有同学踩坑。

(1) 和 (2) 都是被积函数里带 n，这时候如果使用中值定理，则 ξ 会与 n 有关，不一定好控制。最快捷的方式就是放缩，利用

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le (b-a)\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

可以直接得到结果。

(3) 的 n 出现在积分限上，这时使用中值定理，ξ 可以被 n 拐到无穷远，所以能放出一个趋于 0 的上界。

2.6 习题 5.1.22(3)

大家在作业中都注意到了这是一个奇函数，但没注意到这是一个广义积分，就直接得到了 0，说明各位很适合学物理（？）。如果积分区域从 $[-a, a]$, $a \in (0,1)$，那么的确可以用奇函数性质秒掉。但是 ± 1 均为瑕点，严格来说，需要判断该积分的收敛性。由于 $x=1$ 附近积分的单增并结合奇函数性质，我们只需要证明 $[0,1]$ 上积分值有限

$$\left|\int_0^1 \cos x \ln(1-x) dx\right| \le -\int_0^1 \ln(1-x)dx = \left((1-x)\ln(1-x)+x\right)\Big|_0^1 = 1 < +\infty$$

到这里，就可以快快乐乐地在结果上写一个 0 了。

3 习题补充 *

3.1 习题 4.1.3(10)

令 $t = x^{\frac{1}{14}}$，则 $x = t^{14}$，进而 $dx = 14t^{13}dt$，于是

$$\int \frac{x^{\frac{1}{7}} + x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{8}{7}} + x^{\frac{1}{14}}} dx = 14 \int \frac{t^{15}+t^{20}}{t^{16}+t} dt = 14 \int \frac{t^{14}}{t^{10}-t^5+t} dt$$

进一步令 $u = t^5 = x^{\frac{5}{14}}$，则 $du = 5t^4 dt$，此时

$$\int \frac{t^{14}}{t^{10}-t^5+t} dt = \frac{1}{5}\int \frac{u^2}{u^2-u+1} du = \frac{1}{5}u + \frac{1}{5}\int \frac{u-1}{u^2-u+1} du$$

再令 $v = u - \frac{1}{2} = x^{\frac{5}{14}} - \frac{1}{2}$，则

$$\int \frac{u-1}{u^2-u+1} du = \int \frac{v}{v^2+\frac{3}{4}} dv - \frac{1}{2}\int \frac{1}{v^2+\frac{3}{4}} dv = \frac{1}{2}\ln\left(v^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}v + C$$

综上

$$\int \frac{x^{\frac{1}{7}} + x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{8}{7}} + x^{\frac{1}{14}}} dx = \frac{14}{5}x^{\frac{5}{14}} + \frac{7}{5}\ln\left(x^{\frac{5}{7}}+1\right) + \frac{14}{5\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x^{\frac{5}{14}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

注 7. 以一个观察尝试得到的换元为嚆矢，滥觞与反复的变量代换中，本题极致地考察了大家的积分能力。

3.2 习题 5.1.18(4)

本题的形式看起来就很像一个 Riemann 和（其实就是），在取极限运算下可以得到一个常规的定积分。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n}k^p=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p=\int_0^1 x^p dx=\frac{1}{p+1}$$

3.3 习题 5.1.22(10)

令 $t=\tan x$，则 $dt=\frac{1}{\cos^2 x}$，于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{a^2\tan^2 x+b^2}dx\\&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^2t^2+b^2}dt\\&=\frac{1}{ab}\arctan\frac{at}{b}\bigg|_0^{+\infty}\\&=\frac{\pi}{2ab}\end{aligned}$$

注 8. 这是一道很经典的三角积分。

3.4 第 5 章综合习题 15

本题的做法在课本中已经提示的很详尽，本质思想就是分成“好 + 小”。

这里我们采用 Lebesgue 积分的方法做，展现其强大的性质。注意到 $\{\sin^n x\}_{n=1}^{\infty}$ 是关于 n 的单减函数列，所以由 **单调收敛定理**

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\frac{\pi}{2}]}\sin^n x=\int_{[0,\frac{\pi}{2}]}\lim_{n\to\infty}\sin^n x=\int_{[0,\frac{\pi}{2}]}\chi_{\{\frac{\pi}{2}\}}=0$$

4 拓展：一阶 ODE 解的唯一性

4.1 解不唯一的例子

学完一阶 ODE 的解法，我们遗留了一个问题：算出的特解和通解是否就是 ODE 全部的解？

答案是**否定**的，我们来看下面的例子：

例： 解方程：

$$y' = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$$

证明. 不难看出，$y = 0,\ (x \in (-\infty, +\infty))$ 是原方程的一个特解。

另一方面，$y \neq 0$ 时

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}} \\
\Longrightarrow &\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}dy = dx \\
\Longrightarrow &y^{\frac{2}{3}} = x + C\ (x + C \geq 0) \\
\Longrightarrow &y^2 = (x + C)^3\ (x \geq -C)
\end{aligned}$$

因此，方程的特解是 $y = 0$，通解是 $y^2 = (x + C)^3$ □

至此我们得到了方程的特解和通解。但事实上，它们不是方程全部的解，比如从图像上就能看出

$$y = \begin{cases} 0, & x < -C_0 \\ (x + C_0)^{\frac{3}{2}}, & x > -C_0 \end{cases} \qquad C_0 \in \mathbb{R}$$

也是原方程的解，但却不在特解和通解中。

因此，解出特解和通解不意味着得到了方程的全部解。

注 9. 实际解题时，只需解出特解和通解，或根据要求解出其中之一。题目不会要求解出全部解，也不现实。

4.2 Picard 定理

上面的例子中，我们不光得不到全部解，而且过 x 轴上每一点，解不唯一。实际应用中，我们希望只要给定初值，解就是唯一的，进而得到方程的全部解。事实上，对于一类性质较好的方程，我们的确可以得到存在唯一性结论。

定理 2 (Picard 存在唯一性定理). 设初值问题满足

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

其中 $f(x,y)$ 在一个以 (x_0,y_0) 为中心的矩形区域 $R=[x_0-a,x_0+a]\times[y_0-b,y_0+b]$ 上连续（类似单变量定义），且在矩形 R 中对 y 分量满足 *Lipschitz* 条件，即存在 $M>0$，使得

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq M|y_1-y_2|,\ \forall x\in[x_0-a,x_0+a]$$

则该初值问题的解在 $[x_0,y_0]$ 的一个邻域上存在唯一。

注 10. *若 Picard 定理的条件逐点成立，就说明解在整个区间上存在唯一。*

回忆期中考试的第 6 题

定理 3 (ℝ 上的压缩映像原理)**.** *若存在 $k\in(0,1)$ 使得连续函数 $\psi(t)$ 满足*

$$|\psi(t_1)-\psi(t_2)|<k|t_1-t_2|$$

*（这样的 ψ 称为***压缩映射***）则 ψ 存在唯一不动点。*

接下来我们将直接利用这个结论证明 Picard 定理。

证明. 用变上限积分定义 C^1 函数

$$\psi(y)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y)dt$$

则

$$\begin{aligned}|\psi(y_1)-\psi(y_2)|&=\left|\int_{x_0}^{x}f(t,y_1)dt-\int_{x_0}^{x}f(t,y_2)dt\right|\leq\int_{x_0}^{x}\left|f(t,y_1)dt-\int_{x_0}^{x}f(t,y_2)\right|dt\\&\leq M\int_{x_0}^{x}|y_1-y_2|dt\leq aM|y_1-y_2|\leq\frac{1}{2}|y_1-y_2|\end{aligned}$$

最后一步只要取 $a<\frac{1}{2M}$，则 ψ 是一个压缩映射，即存在唯一 y 使得

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y)dt$$

求导知，存在唯一满足初值条件。y，使得

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

这个 y 在 $x\in[x_0-a,x_0+a]$ 上存在唯一。 □

注 11. *若删去 f 的 Lipschitz 条件，我们无法再保证解的唯一性，但只要 f 连续，依然可以保证解的存在性，此即* ***Peano* 存在性定理**。

定理 4 (Peano 存在性定理). 设初值问题满足

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

其中 $f(x,y)$ 在一个以 (x_0, y_0) 为中心的矩形区域 $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ 上连续，则该初值问题在 x_0 的某个邻域上至少有一个解。

5 拓展：积分能做到的还有什么

5.1 分层蛋糕表示 (Layer Cake Representation)*

1902 年，Lebesgue 在他的博士论文中提出了一个天才的想法：**定义积分时，既然能竖着切，为什么不能横着切呢？**

这个开创性的工作就是 **Lebesgue 积分**，Lebesgue 将它称为“分层蛋糕表示”。它标志着实分析以及现代概率论的诞生，也意味着“分析”这一学科被公理化。

下面我们来看，对于一个**非负有界函数**，如何通过“横切”定义积分。

按照“分割、求和、取极限”的步骤，对于分割

$$0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = M$$

其中 $f(x) < M$。我们用“长乘宽”计算小矩形的面积和

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} f(x)dx &= \sum_{i=1}^{n} m\left(\{x | y_{i-1} \le f(x) \le y_i\}\right) y_{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} m\left(f^{-1}[y_{i-1}, y_i]\right) y_{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} m\left(f^{-1}(y_{i-1}, +\infty) - f^{-1}(y_i, +\infty)\right) y_{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} m\left(f^{-1}(y_{i-1}, +\infty)\right) y_{i-1} - \sum_{i=1}^{n} m\left(f^{-1}(y_i, +\infty)\right) y_{i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} m\left(f^{-1}(y_i, +\infty)\right) y_i - \sum_{i=1}^{n} m\left(f^{-1}(y_i, +\infty)\right) y_{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} m\left(f^{-1}(y_i, +\infty)\right) (y_i - y_{i-1}) = \int_0^M m\left(f^{-1}[0, y_i]\right) dy
\end{aligned}$$

这里 $m(E)$ 表示集合 E 的总长度，它称为 **Lebesgue 测度**，满足

1. $m(\varnothing) = 0$；
2. $m(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} m(E_n)$；
3. $m([a,b]) = m((a,b)) = b - a$。

事实上，不是所有集合都能定义“总长度”。

定义 2 (可测集). *若集合 $m(E)$ 可以定义（包括正无穷大），则称 E 为可测集。*

显而易见，开集和闭集都是可测集，特别地，区间是可测集。

注 12. *满足前两条性质的非负值映射称为**测度**，除了 Lebesgue 测度外，常见的还有点测度（Dirac 测度）δ_x、概率测度 P、计数测度等。其中概率测度是现代概率论的根基，计数测度可以将级数转化为积分来研究。*

从分层蛋糕表示可以看出，如果想要定义积分，就需要 $f^{-1}(y_i, +\infty)$ 有意义。为达到这个目的，我们定义一类新的函数。

定义 3 (可测函数). *若任何一个开集，它在 f 下的原像是可测集，则称 f 是可测函数。*

注 13. *开集是可测集，所以连续函数是可测函数。*

不难发现，可测集 E 的特征函数

$$\chi_E = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

是可测函数。进一步，**简单函数（阶梯函数）**，即特征函数的**有限**线性组合是可测函数。

注 14. *取整函数 $f(x) = [x]$ 不是简单函数。*

为了能对可测函数定义积分，我们还需要一个定理：

定理 5 (可测函数逼近定理). *f 是非负可测函数当且仅当 f 可以由一列单增简单函数逐点逼近。*

最后，我们终于可以定义 Lebesgue 积分。这里只定义 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 积分，若要定义 f 在区间 I 上积分，只需考虑 $f\chi_I$。

1. 特征函数：
$$\int \chi_E = m(E)$$
2. 非负简单函数：
$$\int \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i m(E_i)$$
3. 非负可测函数
$$\int f = \sup\left\{ \int \varphi \middle| \varphi \le f, \varphi\text{简单} \right\}$$
4. 一般可测函数
$$\int f = \int f^+ - \int f^- = \int \max\{f, 0\} - \int \max\{-f, 0\}$$

注 15. *只有 $\int f^+$ 和 $\int f^-$ 中至少一个有限，才能定义 f 的 Lebesgue 积分。*

现在，我们得到

定义 4 (Lebesgue 可积函数类). *f 是 Lebesgue 可积的当且仅当 f 可测、$\int f$ 可被定义且 $\int |f| < +\infty$。$\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 可积函数的全体记为 $L(\mathbb{R})$。*

注 16. *Dirichlet 函数是 Riemann 不可积函数，却是 Lebesgue 可积函数。这是因为根据定义，Lebesgue 积分可以忽略任意一个零测集（函数在零测集上的积分为 0），因此 $D(x)$ 和 $f(x) = 0$ 在积分意义下相同*

5.2 微积分基本定理的推广

相较于 Riemann 积分，Lebesgue 积分具有诸多优势，例如：

- Riemann 可积的函数一定 Lebesgue 可积；
- L^1 是完备的，即对极限运算封闭，而 $R[a,b]$ 不完备；
- 积分号与极限号的交换条件较简单（单调收敛、控制收敛、Fubini）。

定理 6 (单调收敛定理 (MCT)). *若一列可积函数 $\{f_n\}$ 关于 n 单调且收敛于可积函数 f，则*
$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n$$

此外，数学分析中的微积分基本定理告诉我们 $C[a,b]$ 和 $C^1[a,b]$ 可以通过求导和积分互逆。而我们知道，可积函数不一定连续，这个版本的微积分基本定理不够令人满意。Lebesgue 积分意义下，我们有更强的微积分基本定理。

定义 5 (绝对连续函数)**.** 称 $f(x)$ 绝对连续是指 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，任意有限个区间 $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^n$，有

$$\sum_{i=1}^n (b_i-a_i)<\delta \Longrightarrow \sum_{i=1}^n |f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$$

绝对连续比连续更强，“长度小于 δ 的区间”弱化为“总长度小于 δ 的区间”。

定理 7 (推广的微积分基本定理)**.** 任意 $f(x)\in AC[a,b]$，有 $f'(x)\in L^1[a,b]$ 且

$$\int_a^x f'(t)dt=f(t)-f(a)$$

任意 $g(x)\in L^1[a,b]$，有 $\int_a^x g(t)dt\in AC[a,b]$，且

$$\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)dt=g(x)$$

这里的求导是几乎处处的（在后面会解释）。其中 $AC[a,b]$ 称为 $[a,b]$ 上的绝对连续函数。

注 17. *Lebesgue* 框架下的微积分基本定理还有另一种形式，即 *Lipschitz* 函数和 L^∞ （几乎处处有界）函数在求导（几乎处处意义下）和积分下互逆。

5.3 Riemann 可积的充要条件

该定理在数学分析 (B1) 中不学，但极其优美，即

定理 8 (Riemannn 可积的充要条件)**.** 设 $f(x)$ 有界,则 $f(x)$ 在 I 上 *Riemann* 可积当且仅当 $f(x)$ 有界且几乎处处连续。

该定理在 Riemann 框架的的证明极其复杂，下面我们在 Lebesgue 框架下给出一个简单的证明。

证明. 定义

$$\overline{S}=\sum_{i=1}^{n}\sup_{\xi\in[x_{i-1},x_i]}f(\xi)(x_i-x_{i-1})\qquad \underline{S}=\sum_{i=1}^{n}\inf_{\xi\in[x_{i-1},x_i]}f(\xi)(x_i-x_{i-1})$$

再定义两个简单函数

$$L_n=\sum_{i=1}^{n}\sup_{\xi\in[x_{i-1},x_i]}f(\xi)\chi_{(x_i,x_{i-1})}\qquad R_n=\sum_{i=1}^{n}\inf_{\xi\in[x_{i-1},x_i]}f(\xi)\chi_{(x_i,x_{i-1})}$$

于是由夹逼定理以及简单函数积分的定义，并结合单调收敛定理

$$\begin{aligned}
f(x)\in R[a,b] &\Longleftrightarrow \lim_{\|\pi\|\to 0}\underline{S}=\lim_{\|\pi\|\to 0}\overline{S}\\
&\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}L_n=\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}R_n\\
&\Longleftrightarrow \int_{[a,b]}\lim_{n\to\infty}(L_n-R_n)=0\\
&\Longleftrightarrow \left(\lim_{n\to\infty}L_n-\lim_{n\to\infty}R_n\right)=0,\ a.e.\\
&\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}L_n=\lim_{n\to\infty}R_n,\ a.e.\\
&\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\sup_{|x-y|<\frac{1}{n}}f(y)=\lim_{n\to\infty}\inf_{|x-y|<\frac{1}{n}}f(y),\ a.e.\ x\\
&\Longleftrightarrow \lim_{y\to x}f(y)=f(x),\ a.e.\ x
\end{aligned}$$

□

5.4 集合的大小

说到“几乎处处”一词，有些同学会认为是“除有限个点之外”。实际上，几乎处处不一定是“除有限个点外”，甚至不一定是“除可数个点外”。

事实上，几乎处处指的是“除一个零测集外”，也就是除一个“测度小的集合”外，而不是除一个“势（基数）小的集合”外。这也是说，**测度的大**和**势的大**不同。

定义 6 (集合的势)**.** *若 A 是有限集，则 A 的势即为 A 的元素个数；若 A 为无限集，则势为无穷大。特别地，$\mathbb{Z}$ 的势记为 $\aleph_0$，$\mathbb{R}$ 的势记为 $\aleph_1$ 或 c。*

定义 7 (等势)**.** *若存在从 A 到 B 的双射，则 A 与 B 等势。*

下面，我们将构造一个与 $\mathbb{R}$ 等势的零测集。

定义 8 (Cantor 三分集)**.** 记 $C_0 = [0,1]$；将 C_0 的线段三等分，挖去中间的开区间得到 $C_1 = [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$；将 C_1 的两条线段均三等分，各自挖去中间的开区间得到 $C_2 = [0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1]$。以此类推最终得到的集合 $\mathcal{C}$ 称为 *Cantor* 集。

不难发现，Cantor 集的测度为

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

为了说明等势性，我们构造一个双射。

定义 9 (Cantor-Lebesgue 函数)**.** 考虑 $[0,1]$ 中小数的三进制表示。特别地，不允许从某一位之后全是 0，例如，$\frac{1}{3}$ 应该表示为 $0.02222\cdots(3)$ 而不是 $0.1(3)$。这时候由 *Cantor* 集的构造方式知

$$x \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow x\text{的三进制小数表示中没有数字1}$$

由此，我们构造函数

$$\begin{aligned} f : \mathcal{C} &\longrightarrow [0,1] \\ 0.2a_1 2a_2 2a_3\cdots(3) &\longmapsto 0.a_1a_2a_3\cdots(2) \end{aligned}$$

它将一个三进制小数映为一个二进制小数，容易验证这是一个严格单增的双射。

由于 $[0,1]$ 和 $\mathbb{R}$ 等势，所以 $\mathcal{C}$ 的势为 $\aleph_1$。

注 18. *Cantor-Lebesgue* 函数可以延拓成 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 的满射，注意到每个被挖掉的开区间左端点的函数值不大于右端点函数值，所以可以把它们用水平线连起来。由于 $m(\mathcal{C}) = 0$，故延拓得到的函数 $\tilde{f}$ 导数几乎处处为 0，故

$$\int_{[0,1]} \tilde{f} = 0 \neq 1 = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$$

即 $\tilde{f}$ 不满足微积分基本定理。事实上 $\tilde{f}$ 不是绝对连续的。

$\tilde{f}$ 导数几乎处处为 0，函数值却从 0 增到了 1。像极了一些大佬，平时几乎处处不学习，最后却能考 100 分。