

INTRODUCTION TO PLASMA PHYSICS

等离子体物理学导论

〔美〕 F.F.Chen 著 林光海 译



科学出版社

等离子体物理学导论

Introduction to Plasma Physics

〔美〕 F. F. Chen 著
林光海 译

科学出版社

北京

图字：01-2016-1752 号

内 容 简 介

本书作者是实验等离子体物理学方面的出色科学家，在等离子体诊断和稳定性、气体放电、粒子束与等离子体相互作用、环形约束、漂移波、Q 装置、反常输运和红外激光器等方面皆有重要贡献。本书是作者在加利福尼亚大学洛杉矶分校多年为大学生讲授等离子体物理课程而在讲义基础上写成的，内容涉及等离子体流体方程、扩散和电阻率、分布函数和动力学方程、等离子体中各类不稳定性 and 朗道阻尼等。

本书可作为理工科大学物理系和电气工程系大学生或研究生学习等离子体物理学的入门教材，亦可供有关科学工作者自学。

Translation from English language edition:

Introduction to Plasma Physics

by Francis F. Chen

Copyright Springer New York 1974

All Rights Reserved

图书在版编目(CIP)数据

等离子体物理学导论/ (美) 陈 (Chen, F. F.) 著; 林光海译. —北京: 科学出版社, 2016. 3

书名原文: Introduction to Plasma Physics

ISBN 978-7-03-047515-2

I. ①等… II. ①陈…②林… III. ①等离子体物理学 IV. ①O53

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 044302 号

责任编辑: 钱 俊 周 涵/责任校对: 张凤琴

责任印制: 肖 兴/封面设计: 耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京通州皇家印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 3 月第 一 版 开本: 720×1000 1/16

2016 年 3 月第一次印刷 印张: 15 3/4

字数: 303 000

定价: 98.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

译者简介



林光海博士 (1942—2009)，生于上海，原籍浙江宁波，1964年毕业于中国科学技术大学化学物理系，物理力学专业。毕业后分配到中国科学院力学研究所工作。1981年8月作为CUSPEA研究生到美国科罗拉多大学学习。1983年取得科罗拉多大学物理学硕士学位，1985年获得该校化学物理学博士学位。后在该大学从事博士后研究。以后相继至德州农工大学，Solarex (BP solar)，Paratek Microwave和XsunX公司工作，担任首席科学家 (Chief Scientist, XsunX)、首席工程师 (Principal Engineer, Paratek Microwave)。一生从事过物理力学、激光、太阳能材料以及微波材料的研究和研发技术工作，公开发表的主要文章有68篇、译著1部和专利3个。

林光海博士的主要工作业绩概要如下：

在国内工作期间，从事过对流放电二氧化碳激光器的特性研究，强红外激光引起三氯化硼可见荧光的动力学和脉冲光-声-光效应研究，用膺势方法计算简单金属的弹性常数、Hugoniot曲线和状态方程，低气压系统流速和微小压差的测量，对流放电二氧化碳激光器的饱和特性等研究。

在研究生学习期间，主要进行用分子束、激光荧光和质谱技术研究离子和分子的电荷转化反应，研究用倍频、三倍频和混频钇铝石榴石激光泵浦各种不同燃料来得到各种波段的激光。

在博士后期间，主要用化学蒸气沉积法、等离子体增强化学蒸气沉积法和热丝沉积法研究和发展无定形硅材料以及它的合金薄膜，并用质谱技术研究材料的生长动力学。

在德州农工大学的八年间，(1) 研制三结式无定形硅太阳能产生氢气装置以及研究氢气和氧气的演变规律，研究光电催化剂以降低电解水的临界电位。(2) 主管由能源部和太阳能研究所提供的太阳能氢气合同下的四个项目和一个外包项目，研究太阳能氢气生产工艺，海水电解法以及有关半导体和电解质界面的课题。(3) 发展稳定的无定形硅合金材料，采用等离子体增强的化学蒸气沉积法研制稳定的掺杂无定形硅太阳能电池。最早提出并运用金属刻蚀方法制成具有纳米结构的化学共振装置。发展新型无毒性的抗腐蚀剂。研究腐蚀机制和铝的腐蚀保护，发展熔融盐氧化技术及废物的电化学氧化处理。

在美国石油公司（后为英国石油公司）太阳能分公司 Solarex (BP solar) 工作期间，管理一平方英尺试点生产线和两个研发薄膜沉积系统。研发新型快速的工艺和流程，用以得到高产量、高成品率及高效稳定的太阳能电池组件。然后推广这种快速工艺和流程到八平方英尺的大生产线。研发用于空间太阳能电池的新流程。改善了前界面（导电玻璃到无定形硅）和后界面（无定形硅到氧化物导电层）的性能，发展了新的快速沉积法和新的隧道结构，提高了太阳能电池效率。通过对流程的数据分析，找出流程对产量、参量和成品率的统计影响。研发在线诊断方法。组装在线残余气体分析仪跟踪和诊断工作气体的情况。统管各种光学仪器，建立了测量量子效率及电压电流关系的工作站。

在 Paratek Microwave 公司期间，领导薄膜研发部门，研发以钛酸钡锶为基体的薄膜陶瓷材料，用于制造微波天线、过滤器、相位转换器、可变频率振荡器和相位延迟器。研发新的低偏压可变电容器，用于便携式微波通信。研发最佳沉积条件和工艺流程。应用脉冲激光沉积法、有机金属沉积法和氩离子溅射沉积法来获得介电薄膜陶瓷材料。采用紫外线和远紫外光印刷蚀刻技术，湿式腐蚀和离子反应干式腐蚀技术来制成不同结构的电压调控可变电容器。在研发中解决了钛酸钡锶薄膜材料的几个关键问题：消除了材料不稳定性和漏电问题，提高了材料的品质因素。这样就为这种材料在微波和视频领域的应用打开了门路。

在 XsunX 公司期间，设计 100MW 无定形硅太阳板生产线，研发试验性生产线和大尺度生产线。

中译本再版序言

《等离子体物理学导论》中译本最初于1980年由人民教育出版社出版。之后不久，译者林光海先生通过中美联合培养物理研究生计划（CUSPEA）到美国攻读博士。大约十年前，有国内朋友告诉他该译本在国内很受读者欢迎，建议他再版译本。于是，他委托北京的朋友去人民教育出版社咨询，出版社希望他稍作修改可以考虑再版。但当时工作太忙，他没有精力考虑这个问题。不幸的是，繁忙的工作使他倒下。2008年10月，他从意大利威尼斯出差回来不到一个月，就被诊断得了癌症，经过一年多的治疗就走了。

近几年，再版的建议又提出来了。作为妻子，我要考虑这个问题。我在网上了解到，该书被国内不少高等院校作为大学生、研究生的参考书在使用，也被不少的科研论文所引用。网上可以下载到本书中译版的电子版。我看到有网友评论本书“等离子体物理经典之作”“很经典的教程”“经典的等离子体书籍”“经典的教材，可惜绝版了”。也有网友提出，“要是有人整理一下就好了”。网友的这些评论鼓舞了我，我决定将它整理再版，决不让它绝版！

我开始和原著者 Francis F. Chen 教授联系，得到了他的大力支持。但是外国版权问题难住了我。我先后向几个国内和香港有关出版社联系。最终在去年，得到了科学出版社钱俊先生的大力支持。在谈到外国版权问题时，我决定自己支付版权费用。最后双方谈妥，由家属出版面费和电子版，书中的图以及编辑工作由科学出版社负责。

今年6月底，我完成了《等离子体物理学导论》的电子版文字录入工作并交给科学出版社编辑。在此首先我要感谢《等离子体物理学导论》原著 *Introduction to Plasma Physics* 作者 Francis F. Chen 教授的大力支持，感谢陈骝教授帮我修改个别翻译的句子，以便从科学上更加通俗易懂。特别要感谢的是网友们的真诚留言，给我出版再版的勇气！感谢读者们复制和下载这本书，使它发挥应有的价值。感谢清华大学、上海东华大学、中国人民解放军防化研究院、河北大学、中科院等离子体物理研究所等高校、研究所以及各位科研工作者多年来传播和使用这本书。在决定再版的同时，母校中国科学技术大学出版社李雅晴老师也表示了支持，如果需要，科大可以考虑出版，成为我的后盾。我的大学同学中科院力学研究所研究员朱如曾、中科院物理研究所副研究员徐丽雯、原中科院物理研究所做受控热核反应研究的同事（现在纽约）张淳沅都给了我很大的支持。他

们指出“这是一件有意义的事，是值得做的。”在制作电子版过程中，密西根州立大学的大学同学黄瑞平自告奋勇帮我制作英文版的照片并寄给我，使我的电子版以及校对工作顺利进行。在此一并表示感谢！

修订再版的书稿基本保留了原来的译本内容，通过科学出版社的文字修饰后，会给大家一个新的再版译本。在此对科学出版社的朋友们表示感谢。

为了纪念译者林光海先生，我们家属在新版译本里加上林先生的简历以及照片，并且由林先生的十岁孙子林杨在老师的帮助下设计了本书新的封面。

总之，我代表我的家人向大家表达深深的谢意！

何木芝

2015年12月15日于休斯顿

前 言

本书由等离子体物理学大学课程的讲课笔记发展而成，在加利福尼亚大学洛杉矶分校已经使用了许多年。随着人们对受控聚变兴趣的增加和等离子体物理学广泛地运用于空间研究和相对论性天体物理学，同热力学和量子力学这些课程一起，等离子体学习成为大学学生的基本经验的一部分就有了意义。虽然本书的主要目的是作为一本大学四年级或三年级学生都能真正理解的教科书，但我希望本书也适用于其他领域（如固体物理或激光物理）的科学家，使他们不用做太大努力就能熟悉等离子体。

本书遵循两条指导原则：不把代数步骤留给读者当练习；不让代数掩盖物理。大都由于等离子体是作为两个相互贯穿的流体来处理的，这两相对抗的宗旨才能在很大程度上得到满足。至少对于低密度等离子体现象，双流体图像要比单流体处理既容易理解又更精确。

本书的前几章对部分学生来说，几乎不需要作什么准备，但后面几章却有意识地联系上了学生的推理能力。在九周或十周的学季中，有可能学完前六章半。这几章经过精心选择，仅保留了必不可少的内容。最后的两章半内容可以用于一学期的课程或作为附加读物。为了清楚地解释朗道阻尼，本书做了相当大的努力——采用了与周线积分知识无关的一种方法。我感谢奥尼尔（Tom O'Neil）和施米脱（George Schmidt）在简化最初由道森（John Dawson）给出的物理图像时所给予的帮助。

某些读者会对使用 cgs 静电单位制感到苦恼。当然，争论单位制是毫无意义的；任何经验丰富的物理学家都能用完整的逻辑为他所爱好的单位制辩护。附录 I 解释了本书使用的单位制，选择这个单位制是为了避免不必要地写出 c ， μ_0 和 ϵ_0 ，并同等离子体物理学的大多数研究报告一致。

我衷心感谢塔特（Lisa Tatar）小姐和布朗（Betty Rae Brown）夫人在辨认我的潦草手稿时所做的富有高度直觉力的工作，感谢兰伯特（Tim Lambert）先生在绘图时所做的同样努力，特别要感谢陈（Ande Chen），她忍受了很多个寂寞之夜。

弗朗西斯 F. 陈
(Francis F. Chen)
1974 年于洛杉矶

目 录

中译本再版序言

前言

| | |
|----------------------------|----|
| 第 1 章 引言 | 1 |
| 1.1 等离子体在自然界的存在 | 1 |
| 1.2 等离子体的定义 | 2 |
| 1.3 温度的概念 | 3 |
| 1.4 德拜屏蔽 | 6 |
| 1.5 等离子体参量 | 8 |
| 1.6 等离子体判据 | 8 |
| 1.7 等离子体物理学的应用 | 10 |
| 第 2 章 单粒子运动 | 13 |
| 2.1 引言 | 13 |
| 2.2 均匀的 E 场和 B 场 | 13 |
| 2.3 非均匀 B 场 | 18 |
| 2.4 非均匀 E 场 | 24 |
| 2.5 随时间变化的 E 场 | 26 |
| 2.6 随时间变化的 B 场 | 27 |
| 2.7 导向中心漂移的概述 | 28 |
| 2.8 绝热不变量 | 29 |
| 第 3 章 作为流体的等离子体 | 34 |
| 3.1 引言 | 34 |
| 3.2 等离子体物理学与普通电磁学的关系 | 35 |
| 3.3 流体运动方程 | 38 |
| 3.4 垂直于 B 的流体漂移 | 45 |
| 3.5 平行于 B 的流体漂移 | 48 |
| 3.6 等离子体近似 | 49 |
| 第 4 章 等离子体中的波 | 50 |
| 4.1 波的代表法 | 50 |
| 4.2 群速度 | 51 |

| | | |
|--------------|-----------------|------------|
| 4.3 | 等离子体振荡 | 52 |
| 4.4 | 电子等离子体波 | 55 |
| 4.5 | 声波 | 60 |
| 4.6 | 离子波 | 61 |
| 4.7 | 等离子体近似的有效性 | 63 |
| 4.8 | 离子波和电子波的比较 | 63 |
| 4.9 | 垂直于 B 的静电电子振荡 | 65 |
| 4.10 | 垂直于 B 的静电离子波 | 70 |
| 4.11 | 下杂化频率 | 72 |
| 4.12 | $B_0=0$ 的电磁波 | 73 |
| 4.13 | 实验应用 | 75 |
| 4.14 | 垂直于 B_0 的电磁波 | 78 |
| 4.15 | 截止和共振 | 81 |
| 4.16 | 平行于 B_0 的电磁波 | 82 |
| 4.17 | 实验结果 | 84 |
| 4.18 | 磁流体波 | 87 |
| 4.19 | 磁声波 | 90 |
| 4.20 | 基本等离子体波的概述 | 92 |
| 4.21 | CMA 图 | 93 |
| 第 5 章 | 扩散和电阻率 | 97 |
| 5.1 | 弱电离气体中的扩散和迁移率 | 97 |
| 5.2 | 扩散引起的等离子体衰变 | 99 |
| 5.3 | 稳恒态解 | 103 |
| 5.4 | 复合 | 105 |
| 5.5 | 穿过磁场的扩散 | 106 |
| 5.6 | 完全电离等离子体中的碰撞 | 111 |
| 5.7 | 单流体 MHD 方程 | 116 |
| 5.8 | 完全电离等离子体中的扩散 | 118 |
| 5.9 | 扩散方程的解 | 119 |
| 5.10 | 玻姆扩散和新经典扩散 | 121 |
| 第 6 章 | 平衡和稳定性 | 126 |
| 6.1 | 引言 | 126 |
| 6.2 | 磁流体平衡 | 127 |
| 6.3 | β 的概念 | 129 |
| 6.4 | 磁场进入等离子体的扩散 | 130 |
| 6.5 | 不稳定性的分类 | 132 |

| | | |
|----------------|----------------------|------------|
| 6.6 | 双流不稳定性 | 133 |
| 6.7 | “重力”不稳定性 | 136 |
| 6.8 | 电阻漂移波 | 139 |
| 第7章 | 动力学理论介绍 | 142 |
| 7.1 | $f(v)$ 的意义 | 142 |
| 7.2 | 动力学理论方程 | 146 |
| 7.3 | 流体方程的推导 | 150 |
| 7.4 | 等离子体振荡和朗道阻尼 | 152 |
| 7.5 | 朗道阻尼的意义 | 156 |
| 7.6 | 朗道阻尼的物理推导 | 163 |
| 7.7 | BGK 和范坎彭模 | 167 |
| 7.8 | 实验证实 | 168 |
| 7.9 | 离子朗道阻尼 | 170 |
| 第8章 | 非线性效应 | 172 |
| 8.1 | 引言 | 172 |
| 8.2 | 鞘层 | 174 |
| 8.3 | 离子声激波 | 178 |
| 8.4 | 有质动力 | 183 |
| 8.5 | 参量不稳定性 | 185 |
| 8.6 | 等离子体回波 | 194 |
| 8.7 | 非线性朗道阻尼 | 197 |
| 第9章 | 受控聚变介绍 | 199 |
| 9.1 | 受控聚变问题 | 199 |
| 9.2 | 磁约束：环 | 202 |
| 9.3 | 磁镜 | 212 |
| 9.4 | 箍缩装置 | 215 |
| 9.5 | 激光骤变 | 219 |
| 9.6 | 等离子体加热 | 221 |
| 9.7 | 聚变技术 | 223 |
| 9.8 | 结束语 | 224 |
| 附录 | | 226 |
| I | 单位制 | 226 |
| II | 有用的常数和公式 | 227 |
| III | 有用的矢量关系 | 228 |
| 英中文对照索引 | | 230 |
| 习题索引 | | 240 |

第 1 章 引 言

1.1 等离子体在自然界的存在

人们经常说，宇宙中物质的 99% 以等离子体状态存在，也就是以带电气体的形式存在，它们的原子离解成正离子和负电子。这种估计也许不是很精确，但鉴于恒星的内部及大气层、气态星云和大量的星际氢都是等离子体，这种估计无疑是合理的。在我们周围，只要一离开地球的大气，就遇到了构成范艾伦辐射带 (Van Allen radiation belts) 和太阳风 (solar wind) 的等离子体。然而，我们日常生活中所遇到的等离子体却只限于几个实例：闪电、极光 (aurora borealis) 的柔和辉光、荧光管或霓虹灯内的导电气体、火箭尾气内的少量电离。我们生活在宇宙的 1% 之中，在我们这里，等离子体并不天然地存在。

从萨哈方程 (Saha equation) 可以看到上述论点的理由，萨哈方程告诉我们，处于热平衡的气体的电离量是

$$\frac{n_i}{n_n} \approx 2.4 \times 10^{15} \frac{T^{3/2}}{n_i} e^{-U_i/KT} \quad (1-1)$$

这里， n_i 和 n_n 分别是已电离原子和中性原子的密度 (每立方厘米的粒子数)， T 是气体温度 (K)， K 是玻尔兹曼常量， U_i 是气体的电离能——使最外层电子离开原子所需的尔格数 (本书用 cgs-esu 单位)。对于室温下的普通空气，我们可以取 $n_n \approx 3 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ (习题 1-1)， $T \approx 300 \text{ K}$ ， $U_i \approx 14.5 \text{ eV}$ (对氮气)，其中 $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-12} \text{ erg}$ ^①。从方程 (1-1) 预期的电离分数 $n_i/(n_n + n_i) \approx n_i/n_n$ 是微乎其微的

$$\frac{n_i}{n_n} \approx 10^{-122}$$

当气体温度升高时，在 KT 达到 U_i 的几分之一以前，它一直保持低电离度。温度再升高， n_i/n_n 急剧增加，气体就处于等离子态。温度的进一步增加，使得 n_n 低于 n_i ，等离子体最终变成完全电离的。这就是在温度达百万度的天体中存在等离子体，而地球上不存在等离子体的理由。生物很难与等离子体共存——至少不能与我们谈到的那类等离子体共存。在高温下等离子体的自然存在是“物质

① $1 \text{ erg} = 1 \times 10^{-7} \text{ J}$ 。

四态”名称的来由。

虽然我们并不想强调萨哈方程，然而应当指出它的物理意义。气体中原子的热能具有一个分布，当原子偶尔受到一次高能（足够打出一个电子）碰撞时，原子就被电离。在冷气体中，由于一个原子必须通过一系列“有利的碰撞”才被加速到远高于平均值的能量，因此这种高能碰撞很少发生。方程 (1-1) 中的指数因子表示快速原子数随 U_i/KT 指数下降。一旦一个原子被电离，它就保持带电直到遇到一个电子时为止；那时，它极可能与一个电子复合而再次变成中性原子。复合率显然依赖于电子密度，我们认为电子密度与 n_i 相等，所以平衡离子密度应当随 n_i 减少，这就是方程 (1-1) 右边出现因子 n_i^{-1} 的原因。恒星际媒质中存在等离子体是由于 n_i 值低（约每 cm^3 一个），因而复合率低。

1.2 等离子体的定义

当然，不是任何电离的气体都能称作等离子体；在任何气体中总会存在某些小电离度。下面是一个有用的定义：

等离子体是带电粒子和中性粒子组成的表现出集体行为的一种准中性气体。

现在，我们必须确定“准中性” (quasineutral) 和“集体行为” (collective behavior) 的意义。准中性的意义将在第 1.4 节清楚地阐述。“集体行为”所包含的意义如下：

考虑作用在一个分子（如普通空气的一个分子）上的力。由于分子是中性的，在分子上不存在净电磁力，而重力是可以忽略的。在这个分子与另一个分子碰撞前，它不受扰动地运动，这些碰撞支配了粒子的运动。作用在中性气体上的宏观力（像扬声器产生的声波）通过碰撞传给单个原子。在有带电粒子的等离子体中，情况则完全不同。当这些电荷到处运动时，它们能引起正电荷或负电荷的局部集中，就产生了电场。电荷的运动也引起电流，因而产生磁场。这些场影响了远处其他带电粒子的运动。

我们考虑等离子体中相距为 r 的两个稍许带电区域的相互影响（图 1-1）。A 和 B 之间的库仑力随 $1/r^2$ 减小而减小。然而，对给定的立体角（即 $\Delta r/r = \text{常数}$ ），B 中能影响 A 的等离子体体积随 r^3 增加而增加。所以，即使相距很远的等离子体元也存在相互作用力。正是这个长程库仑力给出了等离子体种类繁多的可能运动，并且丰富了称作等离子体物理学研究领域。事实上，最有意义的结果是关于所谓“无碰撞”等离子体，在那里长程电磁力与普通局部碰撞引起的力相比是如此之大，以至于可以完全忽略后者。“集体行为”这个词指的是不仅取决于局部条件而且取决于远距离区域等离子体状态的运动。

“等离子体”这个词看来是一个误称，这个词来自希腊文 $\piλάσμα$, $-ατοξ$, $τό$ ，它多少带有塑造或制造的含义。由于集体行为，等离子体并不趋于顺从外界影

响，而经常表现出好像有自己的癖性。

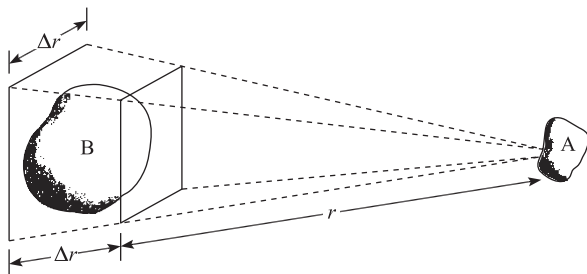


图 1-1 说明等离子体中静电力的长程性

1.3 温度的概念

在进一步讨论问题以前，应评论和扩充我们对“温度”的物理概念。处于热平衡的气体，其粒子有一切速度，这些速度的最可几分布称作麦克斯韦分布。为简单起见，我们考虑一种气体，它的粒子只能在一维上运动（这不是完全无价值的，例如，强磁场可约束电子，使之只能沿着场力线运动）。一维的麦克斯韦分布由方程（1-2）给出

$$f(u) = A \exp\left(-\frac{1}{2}mu^2/KT\right) \quad (1-2)$$

其中， f 是速度在 $u \sim u + du$ 范围内每立方厘米的粒子数， $\frac{1}{2}mu^2$ 是动能， K 是玻尔兹曼常量

$$K = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg/K}$$

密度 n 或每立方厘米的粒子数由方程（1-3）给出（图 1-2）

$$n = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du \quad (1-3)$$

常数 A 与密度 n 的关系是（习题 1-2）

$$A = n \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{1/2} \quad (1-4)$$

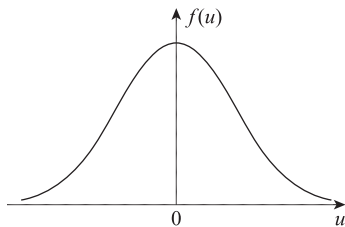


图 1-2 麦克斯韦速度分布

分布的宽度由常数 T 来表征, 我们称 T 为温度. 为了了解 T 的确切意义, 我们可以计算这个分布中粒子的平均动能

$$E_{\text{av}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m u^2 f(u) du}{\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du} \quad (1-5)$$

定义

$$v_{\text{th}} = (2KT/m)^{1/2} \quad \text{和} \quad y = u/v_{\text{th}} \quad (1-6)$$

我们可将方程 (1-2) 写成

$$f(u) = A \exp(-u^2/v_{\text{th}}^2)$$

将方程 (1-5) 写成

$$E_{\text{av}} = \frac{\frac{1}{2} m A v_{\text{th}}^3 \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(-y^2)] y^2 dy}{A v_{\text{th}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy}$$

可用分部积分法求出分子中的积分

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot [\exp(-y^2)] y dy &= \left\{ -\frac{1}{2} [\exp(-y^2)] y \right\}_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2} \exp(-y^2) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy \end{aligned}$$

约去积分后, 得到

$$E_{\text{av}} = \frac{\frac{1}{2} m A v_{\text{th}}^3 \frac{1}{2}}{A v_{\text{th}}} = \frac{1}{4} m v_{\text{th}}^2 = \frac{1}{2} K T \quad (1-7)$$

于是, 平均动能是 $\frac{1}{2} K T$.

我们很容易将这个结果推广到三维, 得到麦克斯韦分布是

$$f(u, v, w) = A_3 \exp\left[-\frac{1}{2} m(u^2 + v^2 + w^2)/KT\right] \quad (1-8)$$

其中

$$A_3 = n \left(\frac{m}{2\pi K T} \right)^{3/2} \quad (1-9)$$

平均动能是

$$E_{\text{av}} = \frac{\iiint_{-\infty}^{\infty} A_3 \frac{1}{2} m(u^2 + v^2 + w^2) \exp\left[-\frac{1}{2} m(u^2 + v^2 + w^2)/KT\right] du dv dw}{\iiint_{-\infty}^{\infty} A_3 \exp\left[-\frac{1}{2} m(u^2 + v^2 + w^2)/KT\right] du dv dw}$$

注意到, 由于麦克斯韦分布是各向同性的, 这个表达式对 u, v, w 都是对称的. 因此分子中三项的每一项与其他项是相同的. 这样一来, 我们只需要计算第一项并乘以 3, 得到

$$E_{av} = \frac{3A_3 \int \frac{1}{2} mu^2 \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{mu^2}{KT}\right] du \iint \exp\left[-\frac{1}{2} m(v^2 + w^2)/KT\right] dv dw}{A_3 \int \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{mu^2}{KT}\right] du \iint \exp\left[-\frac{1}{2} m(v^2 + w^2)/KT\right] dv dw}$$

采用我们前面的结果，就得到

$$E_{av} = \frac{3}{2} KT \quad (1-10)$$

普遍的结果是：每个自由度的平均能量等于 $\frac{1}{2} KT$ 。

既然 T 和 E_{av} 是如此紧密相关，所以在等离子体物理学中，温度通常用能量单位来表示。为了避免在所包含维数上发生混淆，所以不用 E_{av} 而用对应于 KT 的能量来表示温度。对于 $KT = 1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-12} \text{erg}$

$$T = \frac{1.6 \times 10^{-12}}{1.38 \times 10^{-16}} = 11\,600$$

于是转换因子是

$$1\text{eV} = 11\,600\text{K} \quad (1-11)$$

一个 2eV 的等离子体指的是它的 $KT = 2\text{eV}$ ，或者说在三维（空间）中它的 $E_{av} = 3\text{eV}$ 。

等离子体可以同时具有几个温度是颇有意义的。离子和电子经常具有不同温度 T_i 和 T_e 的独立麦克斯韦分布。这是因为离子之间或电子之间的碰撞率大于离子和电子之间的碰撞率。这样，每一种粒子能处于自身的热平衡中，而等离子体也许不能持续足够长时间使两个温度相等。当存在磁场 \mathbf{B} 时，连单一种类粒子（如离子）都可能有两个温度。这是因为沿着 \mathbf{B} 作用在一个离子上的力与垂直 \mathbf{B} 作用在一个离子上的力是不同的（由于洛伦兹力）。这样，垂直于 \mathbf{B} 和平行于 \mathbf{B} 的速度分量可能属于具有温度 T_{\perp} 和 T_{\parallel} 的不同麦克斯韦分布。

在结束对温度概念的评论之前，我们应当消除流行的错误概念，即高温必须意味着大量的热。人们在听到荧光灯管内电子温度大约是 $20\,000\text{K}$ 时，通常感到惊讶：“啊！并不感到那么热呀！”当然，也必须考虑到热容量。在荧光灯管内的电子密度远低于大气压下的气体密度，电子以它们的热速度打击壁而传递到壁的总热量，并不是那么大的。每个人都有这样的经验，知道香烟灰落在手上是不伤手的。虽然其温度高到足够引起燃烧，但包含的总热量是不大的。很多实验室的等离子体具有 $1\,000\,000\text{K}$ (100eV) 量级的温度，但密度只有 $10^{12} \sim 10^{13} \text{cm}^{-3}$ ，因此壁的变热并不是一个需要严重考虑的问题。

习题

1-1 在下列条件下，计算理想气体的密度（以 cm^{-3} 为单位）：

(a) 在 0°C , $760\text{Torr}^{\text{①}}$ 压力下的密度. 这就叫做洛施密特常数 (Loschmidt number).

(b) 在室温 (20°C), 真空度为 10^{-3}Torr 下的密度. 这是实验家所熟知的一个有用的数.

1-2 对于归一化的一维麦克斯韦分布,

$$\hat{f}(u) = A \exp(-mu^2/2KT)$$

使

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(u) du = 1$$

导出常数 A .

1.4 德拜屏蔽

等离子体行为的一个基本特性是它具有屏蔽掉作用于它上面的电势的能力. 假定在等离子体内插入两个和电池相连的带电球, 以试图在等离子体内部引进一个电场 (图 1-3). 球会吸引相反电荷的粒子, 几乎立刻就在负电球周围形成离子云, 在正电球周围形成电子云. (我们假定, 介电层实际上阻止了等离子体在表面上的复合, 或者尽管存在着复合, 但电池容量大到足够保持这个电势.) 倘若等离子体是冷的, 而且不存在热运动, 则云中的电荷刚好与球上的电荷一样多; 屏蔽就是完全的, 在云外面的等离子体内部就会不存在电场. 另外, 如果等离子体温度是有限的, 处在云边缘 (此处的电场弱) 的那些粒子就有足够的热能逃逸出静电势阱. 此时, 云“边缘”出现在势能近似等于粒子热能 KT 的半径上, 而屏蔽是不完全的. KT/e 量级的电势能够漏入等离子体中并引起有限的电场.

下面我们计算这种电荷云的近似厚度. 设想用一个完全透明的栅极, 使 $x=0$ 平面的电势 ϕ 保持在 ϕ_0 值 (图 1-4). 我们希望计算 $\phi(x)$. 为简单起见, 我们假定离子-电子质量比 M/m 是无限大, 所以离子不运动, 而形成均匀正电荷本底. 更确切地说, M/m 足够大, 使得在实验的时间尺度上, 离子的惯性阻止了它们有效地运动. 一维泊松方程为

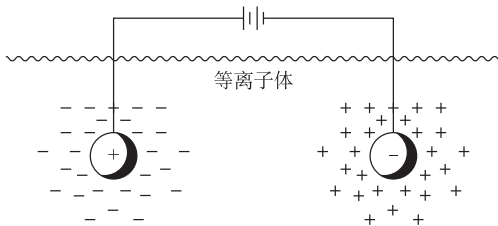


图 1-3 德拜屏蔽

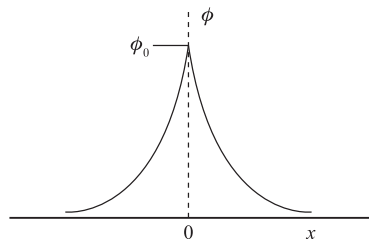


图 1-4 等离子体中接近栅极处的电势分布

① $1\text{Torr}=1\text{mm Hg}=133.3\text{Pa}$.

$$\nabla^2 \phi = \frac{d^2 \phi}{dx^2} = -4\pi e(n_i - n_e) \quad (Z=1) \quad (1-12)$$

如果远处的密度是 n_∞ ，得到

$$n_i = n_\infty$$

在势能 $q\phi$ 存在时，电子分布函数为

$$f(u) = A \exp\left[-\left(\frac{1}{2}mu^2 + q\phi\right)/KT_e\right]$$

在这里，没有必要证明这个式子。此方程所说明的内容是很显然的：在势能大的位置，粒子数较少，因为不是所有粒子具有足够到达那里的能量。对 u 积分 $f(u)$ ，令 $q = -e$ ，并注意 $n_e(\phi \rightarrow 0) = n_\infty$ ，求出

$$n_e = n_\infty \exp(e\phi/KT_e)$$

在 3.5 节，我们将用较完整的物理见解推导这个方程。把 n_i 和 n_e 代入方程(1-12)，得到

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = 4\pi en_\infty \left\{ \exp\left(\frac{e\phi}{KT_e}\right) - 1 \right\}$$

在 $|e\phi/KT_e| \ll 1$ 的区域，式中的指数能用泰勒级数展开

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = 4\pi en_\infty \left[\frac{e\phi}{KT_e} + \frac{1}{2} \left(\frac{e\phi}{KT_e}\right)^2 + \dots \right] \quad (1-13)$$

在接近栅极的区域，不可能作简化，因为在那里 $|e\phi/KT_e|$ 可能是大值。幸好这个区域对云（叫做鞘层）的厚度影响并不大，因为在那个区域中，电势非常迅速地下降。在方程(1-13)中只保留线性项，得到

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{4\pi n_\infty e^2}{KT_e} \phi \quad (1-14)$$

定义

$$\lambda_D \equiv \left(\frac{KT_e}{4\pi n e^2}\right)^{1/2} \quad (1-15)$$

式中， n 代替了 n_∞ ，我们能写出方程(1-14)的解

$$\phi = \phi_0 \exp(-|x|/\lambda_D) \quad (1-16)$$

量 λ_D 称为德拜长度 (Debye length)，它是屏蔽距离或鞘层厚度的量度。

应当注意，当密度增加时，由于每层等离子体包含了较多的电子，所以正如我们所期望的那样， λ_D 减小。此外， λ_D 还随着 KT_e 的增加而增加。倘若没有热骚动，电荷云会收缩成一无限薄层。最后，在 λ_D 定义中使用的是电子温度，因为电子比离子更容易迁移，电子移动时通常会产生负电荷过剩或不足，从而产生屏蔽作用。仅在特殊情况下，才不会这样（习题 1-5）。

下面是方程(1-15)的两种有用形式：

$$\begin{aligned} \lambda_D &= 6.9 (T/n)^{1/2} \text{ cm} && (T \text{ 的单位为 K}) \\ \lambda_D &= 740 (KT/n)^{1/2} \text{ cm} && (KT \text{ 的单位为 eV}) \end{aligned} \quad (1-17)$$

现在我们能够确定“准中性”的意义。如果系统的尺度 L 远大于 λ_D ，那么每当出现电荷的局部集中或者在系统中引入外电势时，它们就在比 L 短的距离内被屏蔽，使等离子体的大部分免受大电势或电场的影响。在壁或一个障碍物的鞘层外面， $\nabla^2\phi$ 是很小的，并且 n_i 近似等于 n_e ，作为一个典型值， n_i 与 n_e 的差别小于 1×10^6 。这样一来，只能有小的电荷不平衡，并引起 KT/e 量级的电势。等离子体是“准中性”的，也就是说，等离子体中性到可以取 $n_i \simeq n_e \simeq n$ （其中 n 是公共密度，称为等离子体密度），但是还没有中性到所有感兴趣的电磁力都消失。

一个电离气体成为等离子体的一个判据是：气体足够稠密，以至于 λ_D 远小于 L 。

在单一属种的系统中（如速调管和磁控管的电子流或回旋加速器的质子束），德拜屏蔽现象也以更改的形式出现。在这种情况下，除非密度非常低（通常是这样的），任何粒子的局部集中都会引起未被屏蔽的强电场。而一个外加电势，（如来自金属丝探针的电势）会通过靠近电极处的密度调整而被屏蔽。单一种类的系统，或非中性等离子体不是严格的等离子体，但是能用等离子体物理学的数学工具来研究这类系统。

1.5 等离子体参量

仅仅当电荷云中有足够的粒子时，上面给出的德拜屏蔽图像才是正确的。很明显，倘若在鞘层区域只存在一个或两个粒子，那么，德拜屏蔽就不是一个统计上正确的概念。用方程 (1-17)，我们能够计算在“德拜球”中的粒子数 N_D ：

$$N_D = n \frac{4}{3} \pi \lambda_D^3 = 1380 T^{3/2} / n^{1/2} \quad (T \text{ 的单位为 K}) \quad (1-18)$$

除了 $\lambda_D \ll L$ ，“集体行为”还要求

$$N_D \gg 1 \quad (1-19)$$

1.6 等离子体判据

我们已经给出了一种电离气体称为等离子体所必须满足的两个条件，而第三个条件是和碰撞有关的。例如，喷管尾气中的弱电离气体，并不能看作一个等离子体，因为带电粒子和中性原子的碰撞是如此频繁，以至于它们的运动受普通流体动力学的力而不是受电磁力所支配。如果 ω 是典型的等离子体振荡频率， τ 是带电粒子与中性原子碰撞的平均时间，则气体的行为像等离子体而不像中性气体的条件是 $\omega\tau > 1$ 。

所以，等离子体必须满足的三个条件是：

$$(1) \lambda_D \ll L.$$

(2) $N_D \gg 1$.

(3) $\omega\tau > 1$.

习题

1-3 在 n_e 对 KT_e 的对数-对数图上 (n_e 从 1cm^{-3} 变到 10^{19}cm^{-3} , KT_e 从 0.01eV 变到 10^5eV), 画出 λ_D 和 N_D 为常数的曲线, 并在这个图上确定以下几个点的位置 (n 以 cm^{-3} 为单位, KT 以 eV 为单位):

(1) 典型的聚变反应堆: $n=10^{15}$, $KT=10\,000$.

(2) 典型的聚变实验: $n=10^{13}$, $KT=100$ (环形装置); $n=10^{17}$, $KT=1000$ (箍缩装置).

(3) 典型的电离层: $n=10^5$, $KT=0.05$.

(4) 典型的辉光放电: $n=10^9$, $KT=2$.

(5) 典型的火焰: $n=10^8$, $KT=0.1$.

(6) 典型的铯等离子体: $n=10^{11}$, $KT=0.2$.

(7) 行星际空间: $n=1$, $KT=0.01$.

并使你自己相信这些是等离子体.

1-4 以大气压 t/ft^2 ^① 为单位, 计算热核等离子体对其容器的压力. 假定 $KT_e = KT_i = 20\text{keV}$, $n = 10^{15}\text{cm}^{-3}$, $p = nKT$, 其中 $T = T_i + T_e$.

1-5 在一个完全稳恒状态, 离子和电子都将遵守玻尔兹曼关系:

$$n_j = n_0 \exp(-q_j \phi / KT_j)$$

对于一个无限大的, 充电到电势 ϕ 的透明栅极, 试证明屏蔽距离近似由下式给出

$$\lambda_D^{-2} = 4\pi n e^2 \left(\frac{1}{KT_e} + \frac{1}{KT_i} \right)$$

并证明 λ_D 由较冷的那类粒子的温度所确定.

1-6 由 λ_D 的另一种推导会进一步看出它的意义. 考虑放在 $x = \pm d$ 的两个无穷大平行板, 其电势 $\phi = 0$. 在它们之间的空间均匀地充满了粒子电荷为 q , 密度为 n 的气体.

(a) 运用泊松方程, 证明板间的电势分布是

$$\phi = 2\pi n q (d^2 - x^2)$$

(b) 对于 $d > \lambda_D$, 试证明从一个板输运一个粒子到中间平面所需要的能量大于粒子的平均动能.

1-7 计算下列情况的 λ_D 和 N_D :

(a) 一种辉光放电, $n = 10^{10}\text{cm}^{-3}$, $KT_e = 2\text{eV}$.

① $1\text{ft}^2 = 0.092\,903\text{m}^2$.

(b) 地球的电离层, $n=10^6 \text{ cm}^{-3}$, $KT_e = 0.1 \text{ eV}$.

(c) 一种角向箍缩装置, $n=10^{17} \text{ cm}^{-3}$, $KT_e = 800 \text{ eV}$.

1.7 等离子体物理学的应用

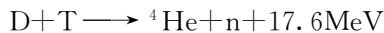
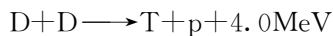
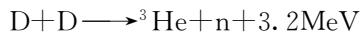
等离子体能用两个参量 n 和 KT_e 来表征. 等离子体的应用涉及极宽的 n 和 KT_e 范围: n 从 1 cm^{-3} 变到 10^{18} cm^{-3} , 变化达 18 个数量级; 而 KT_e 可以从 0.1 eV 变到 10^6 eV , 变化达 7 个数量级. 以下将非常简略地讨论某些应用. 当我们认识到空气和水的密度差别仅为 10^3 , 水和白矮星的密度也仅相差 10^5 时, 就能意识到这个范围多么巨大. 甚至中子星也仅比水稠密 10^{15} 倍. 不过, 由于只需要经典物理学 (非量子力学) 定律, 在 10^{18} 的全部密度范围内的气态等离子体还能用相同的方程组来描述.

1.7.1 气体放电 (气体电子学)

在 20 世纪 20 年代, 朗缪尔 (Langmuir), 汤克斯 (Tonks) 及其共事者最先从事有关等离子体的研究. 发展能载大电流 (因此必须充以电离气体) 的真空管的需要促进了这项研究. 用弱电离辉光放电进行了这项研究, 正柱区 KT_e 的典型值为 $KT_e \simeq 2 \text{ eV}$, $10^8 \text{ cm}^{-3} < n < 10^{12} \text{ cm}^{-3}$. 正是在这里发现屏蔽现象, 人们用眼睛就能看到电极周围有一个像暗层那样的鞘层. 现在, 在水银整流器、氢闸流管、点燃管、火花隙、焊接电弧、霓虹灯、荧光灯和雷闪放电中都遇到了气体放电.

1.7.2 受控热核聚变

现代等离子体物理学大约在 1952 年创立, 当时提出要将氢弹的聚变反应加以受控而建造反应堆. 主要的反应 (包括氘和氚原子) 如下:



只有当入射能量超过 10 keV 时, 这些聚变反应的截面才是可观的. 加速的氘核束打击靶将不起作用, 因为在发生聚变反应之前, 大多数氘核将由于散射而失掉它们的能量. 这就必须产生热能在 10 keV 范围的等离子体. 这种等离子体的加热和约束问题是 1952 年以来等离子体物理科学迅速发展的原因. 这个问题仍然没有解决, 等离子体物理学的大多数活跃的研究就是为了解决这个问题.

1.7.3 空间物理学

等离子体物理学的另一个重要应用是研究空间中地球的环境层. 被称作太阳

风的连续带电粒子流撞击在地球的磁层 (magneto-sphere) 上, 地球的磁层保护我们免受这种辐射的影响, 并在此过程中受太阳风的撞击而变形. 太阳风的典型参量是 $n=5\text{cm}^{-3}$, $KT_i=10\text{eV}$, $KT_e=50\text{eV}$, $B=5\times 10^{-5}\text{G}$ ^①, 漂移速度为 300km/s . 在地球的电离层 (从地球表面以上 50km 高度延续到 10 个地球半径处), 存在着弱电离等离子体, 其密度随高度变化, 可高达 $n=10^6\text{cm}^{-3}$. 它的温度仅为 10^{-1}eV . 范艾伦带是由地球磁场俘获的带电粒子所组成. 它的参量是: $n\leq 10^3\text{cm}^{-3}$, $KT_e\leq 1\text{keV}$, $KT_i\approx 1\text{eV}$, $B\approx 500\times 10^{-5}\text{G}$. 另外, 还存在 $n=10^{-3}\text{cm}^{-3}$ 和 $KT_e=40\text{keV}$ 的一个热组分.

1.7.4 现代天体物理学

恒星内部及其大气层热到足够使它们以等离子体状态存在. 例如, 估计太阳核心的温度是 2keV , 在这个温度下发生的热核反应是造成太阳辐射的原因. 日冕是温度高达 200eV 的稀薄等离子体. 恒星际媒质包含着 $n\approx 1\text{cm}^{-3}$ 的电离氢. 现已用各种等离子体理论来解释宇宙射线的加速. 虽然星系 (galaxy) 的星体是不带电的, 但他们的行为类似于等离子体中的粒子, 而且已经用等离子体动力学理论来推断星系的发展. 射电天文学已经揭示出大量的辐射源, 它们极有可能来自于等离子体. 蟹状星云是等离子体现象的丰富来源, 因为已经知道它包含一个磁场, 同时也包括一个可见的脉冲星. 流行的脉冲星理论把它们描述成迅速旋转的中子星, 它具有从表面发射同步加速器辐射 (synchrotron radiation) 的等离子体.

1.7.5 MHD 能量变换和离子推进

让我们回到地球上讨论等离子体物理学的两个实际应用. 磁流体力学 (magneto-hydrodynamics, MHD) 的能量变换采用稠密等离子体气流穿过磁场的推进来发电 (图 1-5). 洛伦兹力 $qv\times B$ (其中 v 是气流速度) 引起离子向上漂移, 电子向下漂移, 从而使两个电极充电到不同电势; 然后就能从电极引出电流, 从而避免了热循环的低效率.

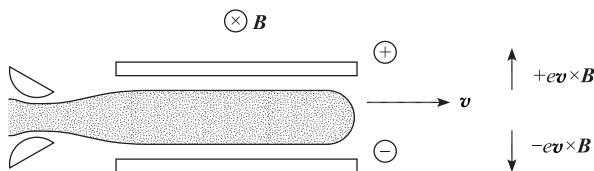


图 1-5 MHD 发电机的原理

同样的原理已经发展了用于远距离星际飞行的离子发动机. 在图 1-6 中, 将电压加在两个电极上, 驱动电流穿过等离子体. $j\times B$ 的力将等离子体抛离火

① $1\text{G}=10^{-4}\text{T}$.

箭，由此产生的反作用力就加速火箭。喷出的等离子体必须始终是中性的，否则，空间飞船将充电到高电势。

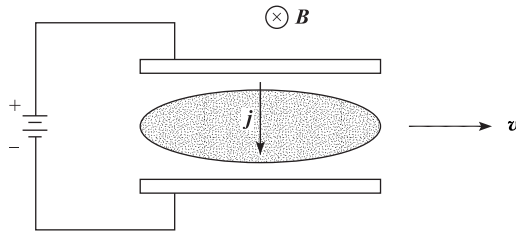


图 1-6 用于宇宙飞船推进的离子发动机原理

1.7.6 固态等离子体

半导体中的自由电子和空穴构成等离子体，它呈现出与气态等离子体同类的振荡和不稳定性。在这些现象的研究中，注入铈化钢的等离子体是特别有用的。因为晶格效应，有效碰撞频率（effective collision frequency）远低于（密度为） $n \approx 10^{23} \text{ cm}^{-3}$ 的固体中所期望的碰撞频率。而且，半导体中空穴的有效质量非常低（低到 $0.01m_e$ ），甚至在中等磁场中，它还具有很高的回旋频率（cyclotron frequency）。如果我们计算固态等离子体的 N_D ，由于它的低温度和高密度， N_D 是小于 1 的。然而，量子力学效应（测不准原理）却给等离子体一个有效温度，此温度高到使 N_D 具有相当大的值。最近，已经发现某些流体（如钠溶于氨中的溶液）也有类似于等离子体的行为。

1.7.7 气体激光器

“泵浦”气体激光器（也就是反转能产生光放大的那些状态的粒子数）的最普通方法是运用气体放电。对于直流激光器，这种气体放电是低压辉光放电；在脉冲激光器中是高压火花放电。氦-氖激光器通常被用于准直和测量。高功率 CO_2 激光器正在作为切割工具和军用仪器而出现。HCN 激光器使得至今尚未达到的远红外区域的研究成为可能。所有这些激光器的运转都依赖于等离子体。

第 2 章 单粒子运动

2.1 引言

等离子体特别难分析的原因是它的密度处于中间范围。像水那样的流体的密度很稠密，以至于没有必要考虑个别分子的运动。这时，碰撞支配了运动，普通流体动力学的简单方程组就足够了。另一种极端情况，即在类似于交变梯度同步加速器那种非常低密度的装置中，只需要考虑单粒子轨道，集体效应通常是不重要的。等离子体行为有时像流体，有时又像个别粒子的集合。研究这种双重个性 (schizophrenic personality)^① 的第一步是了解单个粒子在电场和磁场中具有怎样的行为。本章和第 3 章的不同点在于，本章假定 \mathbf{E} 场和 \mathbf{B} 场是预先确定的，并且不受带电粒子的影响。

2.2 均匀的 \mathbf{E} 场和 \mathbf{B} 场

2.2.1 $\mathbf{E}=\mathbf{0}$

在这种情况下，带电粒子有一个简单的回旋回转 (cyclotron gyration)。运动方程是

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (q, B \text{ 为静电单位}) \quad (2-1)$$

取 z 在 \mathbf{B} 的方向 ($\mathbf{B} = B\mathbf{z}$)，得到

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x &= qBv_y, & m\dot{v}_y &= -qBv_x, & m\dot{v}_z &= 0 \\ \ddot{v}_x &= \frac{qB}{m}\dot{v}_y = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x \\ \ddot{v}_y &= -\frac{qB}{m}\dot{v}_x = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y \end{aligned} \quad (2-2)$$

它描写一个具有回旋频率 (cyclotron frequency) 的简单谐振子，定义回旋频率为

$$\omega_c \equiv \frac{|q| |B|}{m} = \frac{|q| |B_G|}{mc} \quad (2-3)$$

① 直译为精神分裂症的个性。

按照惯例, ω_c 总是取非负值. 当 B 以 G (Gauss) 表示时, 我们把它记为 B_G , 则 $B_G = cB_{esu}$. 这样, 方程 (2-2) 的解为

$$v_{x,y} = v_{\perp} \exp(\pm i\omega_c t + \delta_{x,y})$$

其中, \pm 表示 q 的符号. 我们可以选择相位 δ , 使得

$$v_x = v_{\perp} e^{i\omega_c t} = \dot{x} \quad (2-4a)$$

其中, v_{\perp} 是正的常数, 它表示垂直于 \mathbf{B} 的平面速度. 这样,

$$v_y = \frac{m}{qB} \dot{v}_x = \pm \frac{1}{\omega_c} \dot{v}_x = \pm i v_{\perp} e^{i\omega_c t} = \dot{y} \quad (2-4b)$$

再次积分, 得到

$$x - x_0 = -i \frac{v_{\perp}}{\omega_c} e^{i\omega_c t}, \quad y - y_0 = \pm \frac{v_{\perp}}{\omega_c} e^{i\omega_c t} \quad (2-5)$$

定义拉莫尔半径 (Larmor radius) 是

$$r_L \equiv \frac{v_{\perp}}{\omega_c} = \frac{mv_{\perp}c}{|q|B_G} \quad (2-6)$$

取方程 (2-5) 的实部, 得

$$x - x_0 = r_L \sin \omega_c t, \quad y - y_0 = \pm r_L \cos \omega_c t \quad (2-7)$$

它描述环绕着固定**导向中心**^① (x_0, y_0) 的圆轨道 (图 2-1). 回转总是取这样的方向, 使得带电粒子产生的磁场和外加场相反. 因此, 等离子体粒子倾向于**减小**磁场, 等离子体是**抗磁性的**. 除了这种运动外, 还存在一个沿 \mathbf{B} 向的任意速度 v_z , 它不受 \mathbf{B} 的影响. 一般来讲, 带电粒子在空间的轨道是一条螺旋线.

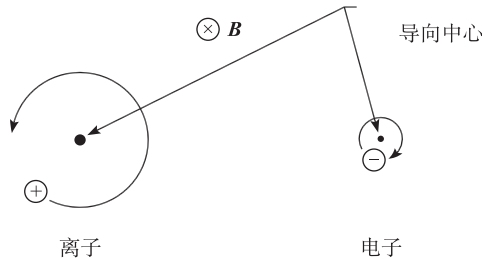


图 2-1 磁场中的拉莫尔轨道

2.2.2 有限 E 场

如果存在一个电场, 我们发现粒子的运动将是两种运动的合成: 通常的圆拉莫尔回转加上导向中心的漂移. 我们可以选 x 轴沿着 \mathbf{E} 的方向, 所以 $E_y = 0$. 和前面一样, 速度的 z 分量和横向分量无关, 可以分开处理. 现在运动方程是

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2-8)$$

^① 导向中心 (guiding center).

它的 z 分量为

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{qE_z}{m}$$

或

$$v_z = \frac{qE_z}{m}t + v_{z0} \quad (2-9)$$

这是沿 \mathbf{B} 方向的简单运动. 方程 (2-8) 的横向分量是

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{qE_x}{m} \pm \omega_c v_y \\ \frac{dv_y}{dt} &= 0 \mp \omega_c v_x \end{aligned} \quad (2-10)$$

对这两式微分, 就得到 (对常数 E)

$$\begin{aligned} \ddot{v}_x &= -\omega_c^2 v_x \\ \ddot{v}_y &= \mp \omega_c \left(\frac{qE_x}{m} \pm \omega_c v_y \right) = -\omega_c^2 \left(\frac{E_x}{B} + v_y \right) \end{aligned} \quad (2-11)$$

可将上式写成

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(v_y + \frac{E_x}{B} \right) = -\omega_c^2 \left(v_y + \frac{E_x}{B} \right)$$

所以, 如果用 $v_y - (E_x/B)$ 代替 v_y , 方程 (2-11) 简化成前面的方程 (2-2). 因此, 方程 (2-4) 可用下式代替

$$\begin{aligned} v_x &= v_{\perp} e^{i\omega_c t} \\ v_y &= \pm i v_{\perp} e^{i\omega_c t} - \frac{E_x}{B} \end{aligned} \quad (2-12)$$

拉莫尔运动和以前相同, 但是, 在 $-y$ 方向叠加了一个导向中心漂移 \mathbf{v}_{gc} (对 $E_x > 0$) (图 2-2).

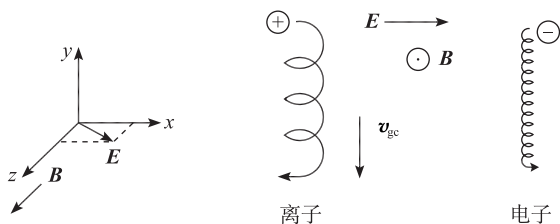


图 2-2 穿过电场和磁场的粒子漂移

为了得到 \mathbf{v}_{gc} 的一般公式, 我们可用矢量形式来解方程 (2-8). 由于我们已经知道 $m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ 项只给出频率为 ω_c 的圆运动, 所以在方程 (2-8) 中可以忽略这一项. 这时, 方程 (2-8) 变成

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (2-13)$$

用 \mathbf{B} 叉乘上式, 得到

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = vB^2 - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \quad (2-14)$$

这个方程的横向分量是

$$\mathbf{v}_{\perp \text{gc}} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2 \equiv \mathbf{v}_E \quad (2-15)$$

我们定义这个横向分量就是 \mathbf{v}_E ，即导向中心的电场漂移。方程 (2-15) 的一种有用形式是

$$v_E = 10^8 \frac{E \text{ (V/cm)} \text{ cm}}{BG \text{ s}} \quad (2-16)$$

注意到 \mathbf{v}_E 与 q ， m 和 v_{\perp} 无关是重要的。从以下的物理图像来看，其理由是很显然的。在图 2-2 中离子轨道的前半周中，离子从电场得到能量并增加 v_{\perp} ，因而 r_L 增加；在后半周中，它损失能量， r_L 减少。轨道左右两边 r_L 的差别引起漂移 \mathbf{v}_E 。负电子在相反的方向回转，可是也在相反方向增加能量，因此它最终和离子以相同方向漂移。对能量相同但质量不同的粒子来说，较轻的粒子具有较小的 r_L ，因而每周漂移较小。然而，它的回转频率也较高，并且两种作用恰好抵消。两个质量相同但能量不同的粒子会有相同的 ω_c 。较慢的粒子将有较小的 r_L ，因而在半周中从 \mathbf{E} 得到能量较少。然而，对给定的一个能量变化，能量较低粒子的 r_L 上的分数变化较大，这两种作用相互抵消（习题 2-2）。

因此空间中的三维轨道为螺距变化的斜螺旋线（图 2-3）。

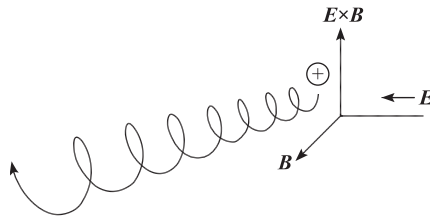


图 2-3 回转粒子在空间的实际轨道

2.2.3 重力场

在运动方程 (2-8) 中，用一般力 \mathbf{F} 代替 $q\mathbf{E}$ ，就能将上述结果用到其他力场。这样， \mathbf{F} 引起的导向中心漂移是

$$\mathbf{v}_f = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (2-17)$$

在特殊情况下，如果 \mathbf{F} 是重力 $m\mathbf{g}$ ，则存在一个漂移

$$\mathbf{v}_g = \frac{m\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{q B^2} \quad (2-18)$$

它与漂移 \mathbf{v}_E 的相似点在于漂移同外力和 \mathbf{B} 垂直，但在一个很重要的方面二者是不同的。漂移速度 \mathbf{v}_g 的方向随粒子电荷符号而改变。在重力的作用下，离子和电子以相反方向漂移，所以等离子体中存在一个净电流密度

$$\mathbf{j} = n(M+m) \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (2-19)$$

这种漂移（图 2-4）的物理原因同样也是因粒子在重力场得到和损失能量时所引起的拉莫尔半径的变化。现在，电子与离子以相反方向回转，但作用在两者上的力是方向相同的，所以漂移是在相反方向。 v_g 的大小通常是可以忽略的（习题 2-4），但是当力线为弯曲时，就存在一个因离心力而引起的有效重力。这种力是不能忽略的，它与质量无关。因此，我们并没有强调方程（2-8）与 m 的依赖性。离心力是一种等离子体不稳定性（称作“重力”不稳定性）的基础，它跟实际重力无关。

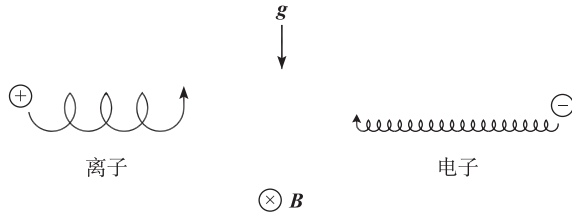


图 2-4 一种回转粒子在重力场的漂移

习题

2-1 如果 v_g 可以忽略，计算下列情况的 r_L ：

- 在 0.5G 的地球磁场中，一个 10keV 的电子。
- $B=5 \times 10^{-5} \text{G}$ ，流速为 300km/s 的一个太阳风质子。
- 在太阳大气层接近太阳黑子处的一个 1keV 的 He^+ ， $B=500\text{G}$ 。

2-2 对两个质量和电荷相同但能量不同的离子，用下面的物理图像（图 2-2）证明 v_E 是相同的。轨道的右边一半用相应于被 \mathbf{E} 场加速后离子能量的半圆来近似，而左边一半用相应于被 \mathbf{E} 场减速后离子能量的半圆来近似。并且可以假定 \mathbf{E} 是弱场，所以 v_{\perp} 上的分数变化是小量。

2-3 假设柱对称等离子体柱中的电子遵循习题 1-5 的玻尔兹曼关系，在这种等离子体中， $n(r)$ 随标度长 λ 变化，即 $\partial n / \partial r \simeq -n / \lambda$ 。

- 运用 $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ ，对给定 λ 求出径向电场。
- 试证明，如果 $v_E = v_{th}$ ，则 $r_L = 2\lambda$ 。
- (b) 的结果对离子正确还是对电子正确？

提示：不要用泊松方程。

2-4 假设所谓的 Q 装置有 2kG 的均匀场并具有 $KT_e = KT_i = 0.2\text{eV}$ 的圆柱等离子体。实验发现密度分布具有形式

$$n = n_0 \exp [\exp(-r^2/a^2) - 1]$$

$a=1\text{cm}$, $n_0=10^{11}\text{cm}^{-3}$. 假定密度服从电子的玻尔兹曼关系 $n=n_0\exp(e\phi/KT_e)$.

- 计算最大 v_E 值.
- 将最大的 v_E 值和地球重力场引起的 v_g 相比较.
- 低到什么样的 B 值才能使钾 ($A=39$) 离子的拉莫尔半径等于 a ?

2.3 非均匀 B 场

确立了导向中心漂移的概念, 我们就能讨论在非均匀 \mathbf{E} 场和 \mathbf{B} 场 (这些场随空间或时间变化) 中粒子的运动. 对于均匀场, 可以获得导向中心漂移的确切表达式. 但只要引入非均匀性, 严格解这个问题就显得太复杂了. 为了得到一个近似结果, 习惯上就用小比值 r_L/L 来展开, 其中 L 是非均匀性的标度长. 我们把这类理论叫做轨道理论 (orbit theory), 它能变得非常复杂. 以下我们将研究几种最简单的情形, 即一次只出现一种不均匀性的情况.

2.3.1 $\nabla B \perp \mathbf{B}$: 梯度 B 漂移场

这里考虑的磁力线是直的, 但它们的密度在 y 方向是增加的 (图 2-5). 用简单的物理图像, 就能够预期其结果. $|B|$ 的梯度使轨道底部的拉莫尔半径大于轨道顶部的拉莫尔半径, 这就引起与 ∇B 和 \mathbf{B} 都垂直的漂移, 这种漂移对离子和电子来说方向是相反的. 漂移速度显然应与 r_L/L 和 v_\perp 成正比.

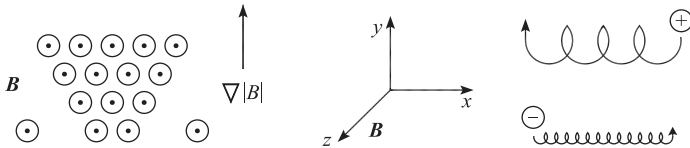


图 2-5 在非均匀磁场中, 一回转粒子的漂移

考虑洛伦兹力 $\mathbf{F}=q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ 对一次回转所作的平均. 很清楚, $\bar{F}_x=0$, 因为粒子向上运动和向下运动用了同样多的时间. 我们希望用一种近似方法, 即用粒子的未扰动轨道求平均来计算 \bar{F}_y . 对于均匀 \mathbf{B} 场, 未扰动轨道由方程 (2-4) 和方程 (2-7) 给出. 取方程 (2-4) 的实数部分, 得到

$$F_y = -qv_x B_z(y) = -qv_\perp (\cos \omega_c t) \left[B_0 \pm r_L (\cos \omega_c t) \frac{\partial B}{\partial y} \right] \quad (2-20)$$

其中我们已经在 $x_0=0$, $y_0=0$ 的点附近对 \mathbf{B} 场作了泰勒展开, 并使用了方程 (2-7)

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \dots \\ B_z &= B_0 + y(\partial B_z / \partial y) + \dots \end{aligned} \quad (2-21)$$

当然这种展开要求 $r_L/L \ll 1$, 其中 L 是 $\partial B_z / \partial y$ 的标度长. 方程 (2-20) 的第一项对一次回转的平均为零, $(\cos \omega_c t)^2$ 的平均是 $1/2$, 所以

$$\bar{F}_y = \mp q v_{\perp} r_L \frac{1}{2} \left(\frac{\partial B}{\partial y} \right) \quad (2-22)$$

这样，导向中心漂移速度为

$$\mathbf{v}_{gc} = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{1}{q} \frac{\bar{F}_y}{|B|} \hat{\mathbf{x}} = \mp \frac{v_{\perp} r_L}{B} \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial y} \hat{\mathbf{x}} \quad (2-23)$$

利用了方程 (2-17)。由于 y 轴的选择是任意的，这个式子可以推广成

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \pm \frac{1}{2} \frac{v_{\perp} r_L}{B^2} \mathbf{B} \times \nabla B \quad (2-24)$$

这个公式包含了我们从物理图像所期望的所有依赖关系，只是因子 $1/2$ （由平均产生）没有被预期到。注意到 \mp 表示电荷的符号，而白体字 B 表示 $|B|$ 。 $\mathbf{v}_{\nabla B}$ 叫做**梯度 B 漂移** (grad- B drift)，对于离子和电子来讲，它的漂移方向是相反的，并引起一个与 \mathbf{B} 垂直的电流。严格计算 $\mathbf{v}_{\nabla B}$ 需要在平均过程中运用包括漂移在内的确切轨道。

2.3.2 弯曲 B 场：曲率漂移

假定磁力线以常曲率半径 R_c 弯曲，并且取 $|B|$ 为常数（图 2-6）。这种场并不遵循真空中的麦克斯韦方程，所以在实际上，梯度 B 漂移将始终加在这里所推出的结果上。当热运动的粒子沿磁力线运动时，它们受到了离心力，而引起导向中心漂移。如果 v_{\parallel}^2 表示沿 \mathbf{B} 方向随机速度分量的均方值，则平均离心力是

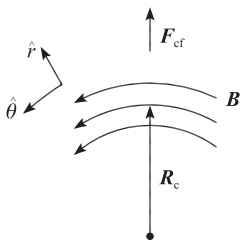


图 2-6 一个弯曲的磁场

$$\mathbf{F}_{cf} = \frac{m v_{\parallel}^2}{R_c} \hat{\mathbf{r}} = m v_{\parallel}^2 \frac{\mathbf{R}_c}{R_c^2} \quad (2-25)$$

按照方程 (2-17)，它引起的漂移为

$$\mathbf{v}_R = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F}_{cf} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{m v_{\parallel}^2}{q B^2} \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2} \quad (2-26)$$

漂移 \mathbf{v}_R 称为**曲率漂移** (curvature drift)。

当我们计及 $|B|$ 随半径减小时，就必须计算与曲率漂移一起出现的梯度 B 漂移。在真空中，有 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ 。在图 2-6 所示的柱坐标中，由于 \mathbf{B} 只有一个 θ 分量，而 ∇B 仅有一个 r 分量，所以 $\nabla \times \mathbf{B}$ 只有 z 分量。这样就有

$$(\nabla \times \mathbf{B})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_{\theta}) = 0, \quad B_{\theta} \propto \frac{1}{r} \quad (2-27)$$

于是

$$|B| \propto \frac{1}{R_c}, \quad \frac{\nabla |B|}{|B|} = -\frac{\mathbf{R}_c}{R_c^2} \quad (2-28)$$

由方程 (2-24) 得到

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \mp \frac{1}{2} \frac{v_{\perp} r_L}{B^2} \mathbf{B} \times \frac{\nabla |B|}{|B|} = \pm \frac{1}{2} \frac{v_{\perp}^2}{\omega_c} \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m}{q} v_{\perp}^2 \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B^2} \quad (2-29)$$

将上式加在 \mathbf{v}_R 上，得到弯曲真空场中的总漂移

$$\mathbf{v}_{\nabla B} + \mathbf{v}_R = \frac{m \mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{q R_c^2 B^2} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \right) \quad (2-30)$$

这些漂移相加是很不幸的事情。因为它意味着，如果人们为了约束热核等离子体，而把磁场弯成环形，则不论怎样改变温度和磁场，粒子都将漂移出环。

2.3.3 $\nabla B \parallel B$: 磁镜

现在，我们考虑一个主要指向 z 方向的磁场，其大小在 z 方向变化。假定磁场是轴对称的，其 $B_{\theta}=0$ ， $\partial/\partial\theta=0$ 。由于磁力线的收敛和发散，就必然存在一个分量 B_r (图 2-7)。我们希望证明这个分量可以引起一个能在磁场中俘获或捕集粒子的力。

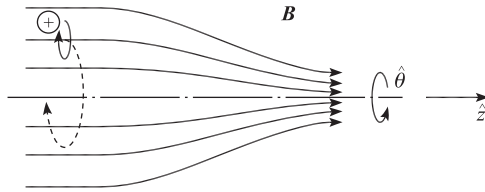


图 2-7 在磁镜场 (magnetic mirror field) 中一粒子的漂移

从 $\nabla \cdot \mathbf{B}=0$ 我们得到 B_r ,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (2-31)$$

如果给出 $\partial B_z / \partial z$ 在 $r=0$ 处的值，并且它随 r 的变化不大，就近似有

$$r B_r = - \int_0^r r \frac{\partial B_z}{\partial z} dr \simeq - \frac{1}{2} r^2 \left[\frac{\partial B_z}{\partial z} \right]_{r=0} \quad (2-32)$$

$$B_r = - \frac{1}{2} r \left[\frac{\partial B_z}{\partial z} \right]_{r=0}$$

$|B|$ 随 r 的变化引起导向中心围绕对称轴的梯度 B 漂移，但不存在径向梯度 B 漂移，因为 $\partial B / \partial \theta = 0$ 。洛伦兹力的分量是

$$F_r = q (v_{\theta} B_z - v_z B_{\theta})$$

①

$$F_{\theta} = q (-v_r B_z + v_z B_r)$$

② ③

$$F_z = q (v_r B_{\theta} - v_{\theta} B_r)$$

④

(2-33)

如果 $B_{\theta}=0$ ，有两项为零，项①和项②给出通常的拉莫尔回转。项③在轴上为零，当它不为零时，这个角方位力就引起一个径向漂移。这种漂移只不过使导向中心

跟着磁力线运动. 项④是我们感兴趣的一项. 用方程 (2-32), 我们得到

$$F_z = \frac{1}{2} q v_\theta r \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \quad (2-34)$$

现在, 我们必须对一次回转作平均. 为了简单起见, 只考虑其导向中心位于轴上的一个粒子. 那么, 在一次回转期间 v_θ 是一个常数, 它等于 $\mp v_\perp$ (取决于 q 的符号). 由于 $r = r_L$, 平均力是

$$\bar{F}_z = \mp \frac{1}{2} q v_\perp r_L \frac{\partial B_z}{\partial z} = \mp \frac{1}{2} q \frac{v_\perp^2}{\omega_c} \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{m v_\perp^2}{B} \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (2-35)$$

我们定义回转粒子的磁矩 (magnetic moment) 为

$$\mu = \frac{1}{2} m v_\perp^2 / B \quad (2-36)$$

因此

$$\bar{F}_z = -\mu (\partial B_z / \partial z) \quad (2-37)$$

这个式子是作用在抗磁性粒子上力的一个特例, 一般来讲, 它可以写作

$$\mathbf{F}_\parallel = -\mu \partial B / \partial s = -\mu \nabla_\parallel B \quad (2-38)$$

其中, ds 是沿着 \mathbf{B} 的线元. 注意到方程 (2-36) 的定义与电流为 I 、面积为 A 的电流环磁矩的通常定义相同, 即 $\mu = IA$. 就带单个电荷的离子而言, I 是由电荷 e 每秒旋转 $\omega_c/2\pi$ 次产生的, 即 $I = e\omega_c/2\pi$. 面积 A 是 $\pi r_L^2 = \pi v_\perp^2 / \omega_c^2$. 因此

$$\mu = \frac{\pi v_\perp^2 e \omega_c}{\omega_c^2 2\pi} = \frac{1}{2} \frac{v_\perp^2 e}{\omega_c} = \frac{1}{2} \frac{m v_\perp^2}{B}$$

当粒子运动进入 \mathbf{B} 较强或较弱的区域时, 它的拉莫尔半径发生变化, 但 μ 保持不变. 为了证明这一点, 我们考虑运动方程沿着 \mathbf{B} 方向的分量

$$m \frac{dv_\parallel}{dt} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s} \quad (2-39)$$

在左边乘上 v_\parallel , 在右边乘上与 v_\parallel 等价的 ds/dt , 就得到

$$m v_\parallel \frac{dv_\parallel}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_\parallel^2 \right) = -\mu \frac{\partial B}{\partial s} \frac{ds}{dt} = -\mu \frac{dB}{dt} \quad (2-40)$$

这里, dB/dt 是在粒子上所看到的 B 的变化; 而 B 本身却是不随时间变化的. 粒子能量必须守恒, 所以

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_\parallel^2 + \frac{1}{2} m v_\perp^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_\parallel^2 + \mu B \right) = 0 \quad (2-41)$$

利用方程 (2-40), 这个式子就变成

$$-\mu \frac{dB}{dt} + \frac{d}{dt} (\mu B) = 0$$

因此

$$\frac{d\mu}{dt} = 0 \quad (2-42)$$

μ 的不变性是等离子体约束的主要方案之一: 磁镜 (magnetic mirror) 方案的

基础。当一个粒子在热运动过程中由弱场区向强场区运动时，从粒子上看， B 是增加的，所以为了保持 μ 为常数，它的 v_{\perp} 必须增加。由于粒子的总能量必须守恒，因此 v_{\parallel} 必定减小。如果在磁镜的“喉”处 B 足够高， v_{\parallel} 最终就变为零，于是粒子被“反射”回到弱场区。当然，正是力 \mathbf{F}_{\parallel} 引起了反射。一对线圈的非均匀场形成了两个磁镜，等离子体在两个磁镜之间被捕集（图 2-8）。这个效应对离子和电子都起作用。

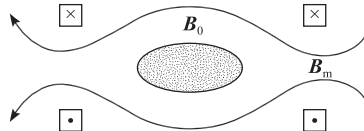


图 2-8 等离子体在磁镜间被捕集

然而，捕集是不完全的。例如， $v_{\perp}=0$ 的一个粒子将没有磁矩，所以它将感受不到任何沿着 \mathbf{B} 方向的力。如果最大场 B_m 不够大，在中间平面 ($B=B_0$) 具有较小 v_{\perp}/v_{\parallel} 的粒子也将逃逸。对于给定的 B_0 和 B_m ，哪些粒子将逃逸呢？在中间平面， $v_{\perp}=v_{\perp 0}$ 和 $v_{\parallel}=v_{\parallel 0}$ 的粒子在它的转向点上将有 $v_{\perp}=v'_{\perp}$ 和 $v_{\parallel}=0$ 。令转向点的场为 B' ，这样， μ 的不变性就给出

$$\frac{1}{2}mv_{\perp 0}^2/B_0 = \frac{1}{2}mv'^2_{\perp}/B' \quad (2-43)$$

能量守恒要求

$$v'^2_{\perp} = v^2_{\perp 0} + v^2_{\parallel 0} \equiv v^2_0 \quad (2-44)$$

由方程 (2-43) 和方程 (2-44)，我们求出

$$\frac{B_0}{B'} = \frac{v^2_{\perp 0}}{v'^2_{\perp}} = \frac{v^2_{\perp 0}}{v^2_0} \equiv \sin^2 \theta \quad (2-45)$$

式中， θ 是在弱场区轨道的俯仰角。 θ 较小的粒子将镜（反）射入 B 较高的区域。如果 θ 太小，以至于 B' 超过 B_m ，粒子就根本不能镜（反）射。在方程 (2-45) 中，用 B_m 代替 B' ，我们看出一个受约束粒子的最小 θ 由下式给出

$$\sin^2 \theta_m = B_0/B_m \equiv 1/R_m \quad (2-46)$$

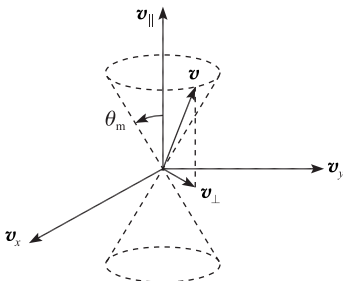


图 2-9 漏泄锥

其中， R_m 是**磁镜比** (mirror ratio)。方程 (2-46) 定义了速度空间一个区域的边界，这个边界具有圆锥的形式，叫做**漏泄锥** (图 2-9)。位于漏泄锥内的粒子是不受约束的。因此，一个磁镜约束的等离子体绝不是各向同性的。应该注意，漏泄锥是与 q 或 m 无关的。如果没有碰撞，离子和电子都能同样地受到约束。当存在碰撞时，一些粒子在碰撞中改变了它们的俯仰角并散射进入到漏泄锥时，这些粒子就损失掉了。一般地说，由于电子有较高的碰撞

频率，它们较易损失。

磁镜首先由费米 (Enrico Fermi) 作为宇宙射线加速的一种机制而提出的。质子在高速相互接近的磁镜间反跳，在每次反跳中它们都能获得能量。如何产生这样的磁镜则是另外的问题。磁镜效应的另一个例子是粒子在范艾伦带中受到约束。地球的磁场是两极强、赤道弱，这就形成了具有相当大 R_m 的天然磁镜。

习题

2-5 假定在地球赤道处的磁场为 $0.3G$ ，并且它像理想的偶极子一样，以 $1/r^3$ 减弱。假设存在 $1eV$ 质子和 $30keV$ 电子以各向同性布居，在赤道平面， $r=5$ 倍的地球半径处，二者的密度都为 $n=10cm^{-3}$ 。

- 计算离子和电子的 ∇B 漂移速度。
- 电子漂移是向东还是向西？
- 一个电子绕地球旋转一次需要多长时间？
- 以 A/cm^2 为单位计算环电流密度。

2-6 一个电子静止地处在携带电流 I 的无限长导线所形成的磁场中。在 $t=0$ 时，忽然将导线充电到正电势 ϕ 而不影响 I 。电子从电场得到能量并开始漂移。

- 画一图表明电子的轨道和 I , B , v_E , $v_{\nabla B}$ 和 v_R 的相对方向。
- 如果 $I=500A$, $\phi=460V$, 导线半径是 $1mm$, 试计算 $1cm$ 半径处这些漂移的大小。假定在 $10cm$ 远的真空室壁上, ϕ 值为 $0V$ 。提示：除了课文中给出的公式外，还需要对运动有一个良好的直观图像。

2-7 在磁镜比 $R_m=5$ 的两个运动磁镜间俘获了一个宇宙射线的质子，它的初始能量 $W=1keV$ ，并且在中间平面处 $v_{\perp}=v_{\parallel}$ 。每个磁镜以速度 $v_m=10km/s$ 向中间平面运动 (图 2-10)。

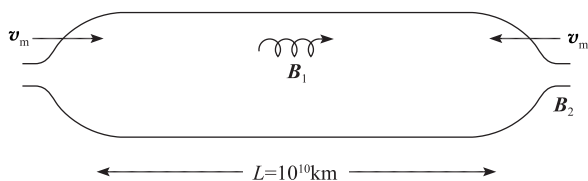


图 2-10 宇宙射线的加速

- 用漏泄锥公式和 μ 的不变性，求出质子逃逸前将加速到多高能量？
 - 到达那个能量需要多长时间？
- ① 将磁镜看成平的活塞并且证明每次反跳得到的速度是 $2v_m$ 。
 - ② 计算所需的反跳数目。
 - ③ 计算那么多次通过 L 所需的时间 T ，计算的允许误差为 200% 。

2.4 非均匀 E 场

现在, 我们令磁场是均匀的, 而电场是非均匀的. 为简单起见, 我们假定 E 在 x 方向上, 并在 y 方向上正弦式地变化 (图 2-11).

$$\mathbf{E} \equiv E_0 (\cos ky) \hat{x} \quad (2-47)$$

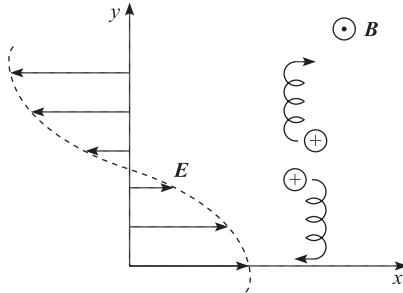


图 2-11 一个回转粒子在非均匀电场中的漂移

这种场分布是电荷正弦分布的结果, 其波长 $\lambda = 2\pi/k$, 我们没有必要详细说明这种电荷分布. 实际上, 这样一个电荷分布可在波 (运) 动期间发生于等离子体之中. 粒子的运动方程是

$$m(d\mathbf{v}/dt) = q [\mathbf{E}(y) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (2-48)$$

它的横向分量是

$$\dot{v}_x = \frac{qB}{m} v_y + \frac{q}{m} E_x(y), \quad \dot{v}_y = -\frac{qB}{m} v_x \quad (2-49)$$

$$\ddot{v}_x = -\omega_c^2 v_x \pm \omega_c \frac{E_x}{B} \quad (2-50)$$

$$\ddot{v}_y = -\omega_c^2 v_y - \omega_c^2 \frac{E_x(y)}{B} \quad (2-51)$$

这里, $E_x(y)$ 是粒子所处位置的电场. 为了估算这个值, 我们需要知道粒子的轨道, 这正是我们首先试图解决的问题. 如果电场弱, 作为一个近似, 我们可以用未扰动轨道来估算 $E_x(y)$. 不存在 E 场时的轨道由方程 (2-7) 给出

$$y = y_0 \pm r_L \cos \omega_c t \quad (2-52)$$

现在, 从方程 (2-51) 和方程 (2-47), 得到

$$\ddot{v}_y = -\omega_c^2 v_y - \omega_c^2 \frac{E_0}{B} \cos k(y_0 \pm r_L \cos \omega_c t) \quad (2-53)$$

预料其结果, 我们找一个解, 这个解是 ω_c 的回转和稳恒漂移 v_E 之和. 由于我们对求出 v_E 的表达式感兴趣, 因而通过对一周求平均就能除掉回转运动. 这样, 方程 (2-50) 给出 $\bar{v}_x = 0$. 在方程 (2-53) 中, 振荡项 \ddot{v}_y 的平均明显是零, 我们得到

$$\ddot{v}_y = 0 = -\omega_c^2 \bar{v}_y - \omega_c^2 \frac{E_0}{B} \overline{\cos k(y_0 \pm r_L \cos \omega_c t)} \quad (2-54)$$

展开余弦, 有

$$\cos k(y_0 \pm r_L \cos \omega_c t) = \cos(ky_0) \cos(kr_L \cos \omega_c t) \mp \sin(ky_0) \sin(kr_L \cos \omega_c t) \quad (2-55)$$

对于处理小拉莫尔半径的情形 ($kr_L \ll 1$), 这个式子就足够了. 利用泰勒展开式

$$\begin{aligned} \cos \epsilon &= 1 - 1/2 \epsilon^2 + \dots \\ \sin \epsilon &= \epsilon + \dots \end{aligned} \quad (2-56)$$

就可以将方程 (2-55) 写成

$$\cos k(y_0 \pm r_L \cos \omega_c t) \approx (\cos ky_0) \left(1 - \frac{1}{2} k^2 r_L^2 \cos^2 \omega_c t\right) \mp (\sin ky_0) kr_L \cos \omega_c t$$

最后一项对时间的平均为零, 由方程 (2-54) 得

$$\bar{v}_y = -\frac{E_0}{B} (\cos ky_0) \left(1 - \frac{1}{4} k^2 r_L^2\right) = \frac{-E_x(y_0)}{B} \left(1 - \frac{1}{4} k^2 r_L^2\right) \quad (2-57)$$

这样, 由于非均匀性, 通常的 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移就修改成

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \left(1 - \frac{1}{4} k^2 r_L^2\right) \quad (2-58)$$

这个修改的物理原因是容易看到的. 导向中心位于 \mathbf{E} 极大值处的一个离子确实在 \mathbf{E} 较弱的区域度过了大量时间. 因此, 它的平均漂移小于用导向中心处 E/B 值所估算的漂移值. 在一个线性变化的 \mathbf{E} 场中, 在轨道的一侧, 离子应当处于较强的场中, 而在另一侧应当处于以等量减弱的较弱的场中, 因而对 \mathbf{v}_E 的修正就相互抵消. 从这点就可清楚地看到, 修正项取决于 \mathbf{E} 的二阶导数. 对于我们采用的正弦分布, 二阶导数相对于 \mathbf{E} 总是负值. 对于一个任意变化的 \mathbf{E} , 我们只需要用 ∇ 代替 ik , 方程 (2-58) 可改写为

$$\mathbf{v}_E = \left(1 + \frac{1}{4} r_L^2 \nabla^2\right) \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (2-59)$$

第二项叫做有限拉莫尔半径效应 (finite-Larmor-radius effect). 这个改动的含义是什么呢? 由于离子的 r_L 远大于电子的 r_L , \mathbf{v}_E 不再与粒子种类无关. 如果在等离子体中出现了密度块区, 电场能引起离子和电子分离, 就产生另一个电场. 倘若存在一个反馈的机制, 使得第二个电场可以增强第一个电场, \mathbf{E} 就无限地增长, 等离子体就是不稳定的. 这样一种不稳定性称为漂移不稳定性 (drift instability), 将在较后的一章讨论. 当然梯度 B 漂移也是一个有限拉莫尔半径效应, 而且也能引起电荷分离. 然而, 按照方程 (2-24), $\mathbf{v}_{\nabla B}$ 正比于 kr_L , 而方程 (2-58) 的修正项却正比于 $k^2 r_L^2$. 因此, 非均匀 \mathbf{E} 场效应对 k 值比较大或者对非均匀性的标度长比较小的情形是重要的. 由于这个理由, 漂移不稳定性属于更普遍的一类不稳定性, 称作微观不稳定性 (microinstability).

2.5 随时间变化的 E 场

现在, 让我们考虑在空间中均匀但却随时间变化的 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} . 首先考虑只有 \mathbf{E} 随时间正弦变化, 并且令 \mathbf{E} 沿着 x 轴方向:

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i\omega t} \hat{\mathbf{x}} \quad (2-60)$$

由于 $\dot{E}_x = i\omega E_x$, 我们可将方程 (2-50) 写成

$$\ddot{\mathbf{v}}_x = -\omega_c^2 \left(\mathbf{v}_x \mp \frac{i\omega \tilde{E}_x}{\omega_c B} \right) \quad (2-61)$$

定义

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}_p &\equiv \pm \frac{i\omega \tilde{E}_x}{\omega_c B} \\ \tilde{\mathbf{v}}_E &\equiv -\frac{\tilde{E}_x}{B} \end{aligned} \quad (2-62)$$

其中加上符号“ \sim ”只是强调漂移是振荡的. 按照习惯, 上面的符号表示正的 q , 下面的符号表示负的 q . 方程 (2-50) 和方程 (2-51) 就变成

$$\begin{aligned} \ddot{v}_x &= -\omega_c^2 (v_x - \tilde{v}_p) \\ \ddot{v}_y &= -\omega_c^2 (v_y - \tilde{v}_E) \end{aligned} \quad (2-63)$$

与方程 (2-12) 相似, 我们尝试一个解, 这个解是漂移和回转运动的叠加

$$\begin{aligned} v_x &= v_{\perp} e^{i\omega_c t} + \tilde{v}_p \\ v_y &= \pm i v_{\perp} e^{i\omega_c t} + \tilde{v}_E \end{aligned} \quad (2-64)$$

对时间微分两次, 得到

$$\begin{aligned} \ddot{v}_x &= -\omega_c^2 v_x + (\omega_c^2 - \omega^2) \tilde{v}_p \\ \ddot{v}_y &= -\omega_c^2 v_y + (\omega_c^2 - \omega^2) \tilde{v}_E \end{aligned} \quad (2-65)$$

除非 $\omega^2 \ll \omega_c^2$, 这个式子与方程 (2-63) 并不相同. 现在, 如果我们作 \mathbf{E} 缓慢变化的假定, 使得 $\omega^2 \ll \omega_c^2$, 那么, 方程 (2-64) 是方程 (2-63) 的近似解.

方程 (2-64) 告诉我们, 导向中心运动有两个分量. 垂直于 \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 的 y 分量, 就是通常所说的 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移, 只是 \mathbf{v}_E 现在以频率 ω 缓慢振荡. x 分量是沿着 \mathbf{E} 方向的一种新漂移, 叫做极化漂移 (polarization drift). 用 $\partial / \partial t$ 代替 $i\omega$, 将方程 (2-62) 普遍化, 并且定义极化漂移为

$$\mathbf{v}_p = \pm \frac{1}{\omega_c B} \frac{d\mathbf{E}}{dt} \quad (2-66)$$

由于对离子和电子来说, \mathbf{v}_p 的方向是相反的, 就存在一个极化电流 (polarization current); 对 $Z=1$, 极化电流为

$$\mathbf{j}_p = ne(\mathbf{v}_{ip} - \mathbf{v}_{ep}) = \frac{ne}{eB^2} (M+m) \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \frac{\rho}{B^2} \frac{d\mathbf{E}}{dt} \quad (2-67)$$

其中, ρ 是质量密度.

引起极化电流的物理原因是简单的(图 2-12). 考虑在磁场中一个静止的离子, 如果突然加上电场 \mathbf{E} , 那么离子所作的第一个反应就是在 \mathbf{E} 方向运动. 只是在离子达到一定的速度 \mathbf{v} 以后, 才感受到洛伦兹力 $e\mathbf{v}\times\mathbf{B}$, 并且在图 2-12 中开始向下运动. 如果现在 \mathbf{E} 保持常数, 就不出现进一步的 \mathbf{v}_p 漂移, 而只有 \mathbf{v}_E 漂移. 然而, 如果使 \mathbf{E} 反向, 则再一次出现瞬时漂移, 这次是向左. 这样, \mathbf{v}_p 是一种由于惯性引起的启动漂移 (startup drift), 并且它出现在每次回转的前半周(在这个时候 \mathbf{E} 变化). 因此, 当 ω/ω_c 为零时, \mathbf{v}_p 变为零.

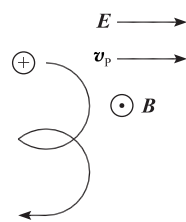


图 2-12 极化漂移

等离子体中的极化效应类似于固体介电质中的极化效应, 在固体介电质中, $\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}$. 等离子体的偶极子是相距为 r_L 的电子和离子. 但是由于离子和电子能到处运动以保持准中性, 因此加入稳定 \mathbf{E} 场不能产生极化场 \mathbf{P} . 然而, 如果 \mathbf{E} 振荡, 由于离子惯性引起的延迟就产生了振荡的电流 \mathbf{j}_p .

2.6 随时间变化的 B 场

最后, 我们让磁场随时间变化. 由于洛伦兹力总是垂直于速度 \mathbf{v} , 所以磁场本身不能将能量传给带电粒子. 然而, 与 \mathbf{B} 相关的电场为

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\dot{\mathbf{B}} \quad (2-68)$$

这个电场能加速粒子. 我们不能再假定场是完全均匀的. 令 $\mathbf{v}_\perp=d\mathbf{l}/dt$ 是横向速度, \mathbf{l} 是沿着粒子轨道(忽略了 v_\parallel)的路径元. 用 \mathbf{v}_\perp 点乘运动方程 (2-8), 得到

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_\perp^2\right)=q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}_\perp=q\mathbf{E}\cdot\frac{d\mathbf{l}}{dt} \quad (2-69)$$

一次回转中的变化从一个周期积分中得到

$$\delta\left(\frac{1}{2}mv_\perp^2\right)=\int_0^{2\pi/\omega_c}q\mathbf{E}\cdot\frac{d\mathbf{l}}{dt}dt$$

如果场缓慢改变, 我们能够用未扰动轨道的线积分来代替时间积分

$$\delta\left(\frac{1}{2}mv_\perp^2\right)=\oint q\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=q\int_S(\nabla\times\mathbf{E})\cdot d\mathbf{S}=-q\int_S\dot{\mathbf{B}}\cdot d\mathbf{S} \quad (2-70)$$

这里 \mathbf{S} 是拉莫尔轨道包围的面, 它的方向由右手定则给出(四指指向 \mathbf{v} 方向). 由于等离子体是抗磁性的, 因而对于离子 $\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}<0$, 而对于电子 $\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}>0$. 这样方程 (2-70) 变成

$$\delta\left(\frac{1}{2}mv_\perp^2\right)=\pm q\dot{B}\pi r_L^2=\pm q\pi\dot{B}\frac{v_\perp^2}{\omega_c}\frac{m}{\pm qB}=\frac{1}{2}\frac{mv_\perp^2}{B}\cdot\frac{2\pi\dot{B}}{\omega_c} \quad (2-71)$$

$2\pi\dot{B}/\omega_c=\dot{B}/f_c$ 恰好是一次回转周期内的改变 δB . 这样

$$\delta\left(\frac{1}{2}mv_\perp^2\right)=\mu\delta B \quad (2-72)$$

由于左边是 $\delta(\mu B)$ ，我们就得到预期的结果

$$\delta\mu = 0 \quad (2-73)$$

在缓慢变化的磁场中，磁矩是不变量。

随着 B 场强度上的变化，拉莫尔轨道扩大和缩小，而粒子则损失和得到横向能量。方程 (2-73) 非常简单地描写了粒子和场之间的这种能量交换。 μ 的不变性使我们很容易证明下面这个熟知的定理：

通过拉莫尔轨道的磁通量是常数。

磁通量 Φ 由 BS 给出， $S = \pi r_L^2$ 。这样

$$\Phi = B\pi \frac{v_{\perp}^2}{\omega_c^2} = B\pi \frac{v_{\perp}^2 m^2}{q^2 B^2} = \frac{2\pi m}{q^2} \frac{1}{2} \frac{m v_{\perp}^2}{B} = \frac{2\pi m}{q^2} \mu \quad (2-74)$$

因此，如果 μ 不变， Φ 为常数。

一个称作绝热压缩 (adiabatic compression) 的等离子体加热方法就用了这种性质。图 2-13 显示了怎样实现这种绝热压缩的示意图。等离子体被注入磁镜 A 和 B 之间的区域，然后在线圈 A 和 B 加上脉冲电流以增加 B ，因而也增加 v_{\perp}^2 。在 A 上加上更大的脉冲，增加那里的磁镜比，就将已加热的等离子体传送到 C-D 区域，然后在线圈 C 和 D 加上脉冲，以进一步压缩和加热等离子体。有时还使用第三级装置。在加利福尼亚利弗莫尔的劳伦斯辐射实验室，规模很大的这类装置已经运转。

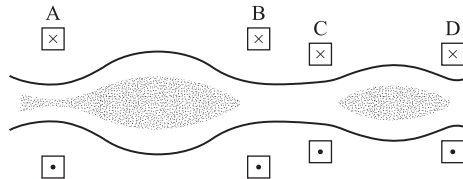


图 2-13 等离子体的两极绝热压缩

2.7 导向中心漂移的概述

一般的力 F :
$$v_f = \frac{1}{q} \frac{F \times B}{B^2} \quad (2-17)$$

电场:
$$v_E = \frac{E \times B}{B^2} \quad (2-15)$$

重力场:
$$v_g = \frac{mg \times B}{q B^2} \quad (2-18)$$

非均匀 E 场:
$$v_E = \left(1 + \frac{1}{4} r_L^2 \nabla^2\right) \frac{E \times B}{B^2} \quad (2-59)$$

非均匀 B 场

$$\text{梯度-}B\text{ 漂移: } \quad \mathbf{v}_{\nabla B} = \pm \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} \quad (2-24)$$

$$\text{曲率漂移: } \quad \mathbf{v}_R = \frac{mv_{\parallel}^2 \mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{q R_c^2 B^2} \quad (2-26)$$

$$\text{弯曲的真空场: } \quad \mathbf{v}_R + \mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{m}{q} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \right) \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B^2} \quad (2-30)$$

$$\text{极化漂移: } \quad \mathbf{v}_p = \pm \frac{1}{\omega_c B} \frac{d\mathbf{E}}{dt} \quad (2-66)$$

2.8 绝热不变量

众所周知, 在经典力学中, 当一个系统具有一个周期运动时, 对一个周期的作用积分 $\oint p dq$ 总是一个运动常数, 这里的 p 和 q 是广义动量和广义坐标, 它们在运动中具有周期性. 如果系统缓慢变化, 致使运动并不完全周期性, 但运动常数并不改变, 于是它就称为**绝热不变量** (adiabatic invariant). 这里的缓慢是指较运动周期缓慢, 所以, 即使 $\oint p dq$ 不再是一个严格的闭路积分, 仍然能够很好地定义 $\oint p dq$. 在等离子体物理学中, 绝热不变量起着重要的作用, 使我们对很多涉及复杂运动的实例, 能得到简单的答案. 绝热不变量有三个, 每一个都对应不同类型的周期运动.

2.8.1 第一个绝热不变量, μ

2.3.3 节中我们谈到了量

$$\mu = mv_{\perp}^2 / 2B$$

而且已证明这个量在空间和时间变化的 \mathbf{B} 场中的不变性. 有关的周期运动当然就是拉莫尔回转. 如果我们取 p 为角动量 $mv_{\perp} r$, dq 为坐标 $d\theta$, 作用积分变成

$$\oint p dq = \oint mv_{\perp} r_L d\theta = 2\pi r_L m v_{\perp} = 2\pi \frac{mv_{\perp}^2}{\omega_c} = 4\pi \frac{m}{|q|} \mu \quad (2-75)$$

只要 q/m 不变化, μ 就是运动常数. 仅在暗中假定 $\omega/\omega_c \ll 1$ 时, 才证明了 μ 的不变性, 其中 ω 用来表征粒子所看到的 B 的变化率的频率. 然而, 也存在证据说明, 甚至当 $\omega \lesssim \omega_c$ 时, μ 也是不变量. 用理论物理学家的语言来说, 就是: “在以 ω/ω_c 为参量的展开式中, 不管到哪一阶, μ 都是不变的量.” 这句话的含义实际上是说, 在一次回转周期内, μ 比 \mathbf{B} 远保持接近于常数.

理解在什么情况下不存在绝热不变量和理解在什么情况下存在绝热不变量是同样重要的. 当 ω 不小于 ω_c 时, 就不存在 μ 的绝热不变性. 我们给出三个这样的例子.

(1) **磁泵浦** (magnetic pumping). 如果在磁镜约束系统中, \mathbf{B} 的强度按正弦变化, 粒子的 v_{\perp} 会振荡, 但它们最终并不会获得能量. 然而, 如果粒子有碰撞, 破坏了 μ 的不变性, 就能加热等离子体. 尤其在压缩相位期间, 发生一次碰撞的一个粒子能将它的部分回转能量转移到 v_{\parallel} 能量中, 而再次恢复到膨胀相位, 这部分能量不再取出.

(2) **回旋加热** (cyclotron heating). 设想 B 场以频率 ω_c 振荡, 那么感应电场将与某些粒子同相旋转, 并连续地加速它们的拉莫尔运动. 这样破坏了 $\omega \ll \omega_c$ 的条件, μ 不守恒, 就能加热等离子体.

(3) **磁会切** (magnetic cusps). 如果在简单的磁镜系统中使一个线圈中的电流反向, 就形成磁会切 (图 2-14). 这种形态除了有通常的磁镜外, 还有在方位角上扩展到整个 360° 的一个纺锤形会切磁镜. 可以设想, 在会切装置中约束的等离子体比普通磁镜约束等离子体具有更好的稳定性. 但不幸的是, 其漏泄锥损失也更大, 部分原因是由于附加的损失区域, 另外一个原因是由于运动是非绝热的. 由于 B 场在对称中心为零, 此处的 ω_c 也为零, 因而 μ 不守恒. 接近中心处的局部拉莫尔半径大于装置尺寸. 在速度空间漏泄锥外的粒子, 一旦它通过非绝热区域, 可以使它的 v_{\perp}/v_{\parallel} 出现在漏泄锥内. 粒子的确切轨道必须用计算机才能求出.

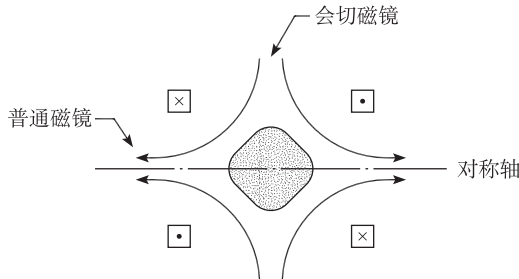


图 2-14 会切磁场中等离子体的约束

2.8.2 第二个绝热不变量, J

考虑在两个磁镜间俘获的一个粒子: 它在磁镜间反跳, 因而以“反跳频率”做周期运动. 这个运动常量由 $\oint m v_{\parallel} ds$ 给出, 其中 ds 是沿着磁力线方向的 (导向中心的) 程长元. 然而, 由于导向中心越过磁力线而漂移, 运动就不是严格周期性的, 而且运动常数变成一个绝热不变量. 它称为**纵向不变量 J** (longitudinal invariant J), 并在两个转向点之间的半周内加以定义 (图 2-15)

$$J = \int_a^b v_{\parallel} ds \quad (2-76)$$

我们将证明在静止、非均匀 B 场中 J 是不变量, 对于随时间缓慢变化的 B 场结果

也是成立的.

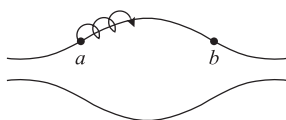


图 2-15 一个粒子在磁镜场转折点 a 和 b 之间的反跳

在着手此稍冗长的证明之前, 我们考虑一典型的例子, 在那里 J 不变性定理会是有用的. 正如我们已经看到的那样, 地(球)磁场磁镜捕集带电粒子, 这些粒子围绕地球在经度变化的方向上缓慢漂移(习题 2-5 和图 2-16). 如果磁场是完全对称的, 粒子最后会漂移回到同一条磁力线. 然而, 实际的场因受诸如太阳风这样的作用而发生变形. 在那种情况下, 一个粒子究竟能否回到同一条磁力线呢? 由于粒子能量是守恒的, 而且在转向点处等于 $\frac{1}{2}mv_{\perp}^2$, μ 的不变性表明, 在转折点处的 $|B|$ 相同. 然而, 在漂移返回同一经度时, 粒子可能会发现自己位于不同纬度的另一条磁力线上. 倘若 J 是守恒的, 则不能发生这种情况. 因为 J 确定了转向点之间的磁力线长度, 而在相同 $|B|$ 的两个点之间, 不能存在有相同长度的两条线. 因此, 即使在稍微非对称的场中, 粒子也回到同一条磁力线.

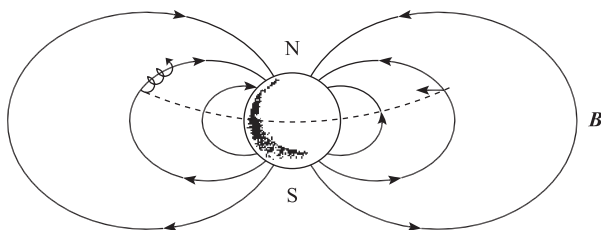


图 2-16 在地球磁场中带电粒子的运动

为了证明 J 的不变性, 我们首先考虑 $v_{\parallel} \delta s$ 的不变性, 其中 δs 是沿着 \mathbf{B} 的一段路程(图 2-17). 因为导向中心漂移, 在时间 Δt 之后, 在 s 上的一个粒子将发现自己处在另一条磁力线 $\delta s'$ 上. $\delta s'$ 的长度由通过 δs 的两个端点作垂直于 \mathbf{B} 的平面加以确定. δs 的长度显然与曲率半径成比例

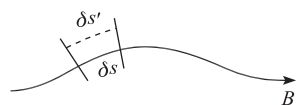


图 2-17 J 不变性的证明

$$\frac{\delta s}{R_c} = \frac{\delta s'}{R_c}$$

所以

$$\frac{\delta s' - \delta s}{\Delta t \delta s} = \frac{R'_c - R_c}{\Delta t R_c} \quad (2-77)$$

v_{gc} 的“径向”分量恰好是

$$\mathbf{v}_{gc} \cdot \frac{\mathbf{R}_c}{R_c} = \frac{R'_c - R_c}{\Delta t} \quad (2-78)$$

从方程 (2-24) 和方程 (2-26), 我们得到

$$\mathbf{v}_{gc} = \mathbf{v}_{VB} + \mathbf{v}_R = \pm \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} + \frac{m v_{\perp}^2 \mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{q R_c^2 B^2} \quad (2-79)$$

最后一项没有沿着 \mathbf{R}_c 方向的分量. 用方程 (2-78) 和方程 (2-79), 可将方程 (2-77) 写成

$$\frac{1}{\delta s} \frac{d}{dt} \delta s = \mathbf{v}_{gc} \cdot \frac{\mathbf{R}_c}{R_c^3} = \frac{1}{2} \frac{m v_{\perp}^2}{q B^3} (\mathbf{B} \times \nabla B) \cdot \frac{\mathbf{R}_c}{R_c^2} \quad (2-80)$$

这就是粒子所看到的 δs 的变化率. 现在, 我们必须给出粒子所看到的 v_{\parallel} 的变化率. 定义平行和垂直能量为

$$\begin{aligned} W &\equiv \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 = \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + \mu B \\ &\equiv W_{\parallel} + W_{\perp} \end{aligned} \quad (2-81)$$

这样, v_{\parallel} 可写成

$$v_{\parallel} = [(2/m)(W - \mu B)]^{1/2} \quad (2-82)$$

这里 W 和 μ 是常量, 只有 B 是变化的. 所以

$$\frac{\dot{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} = -\frac{1}{2} \frac{\mu \dot{B}}{W - \mu B} = -\frac{1}{2} \frac{\mu \dot{B}}{W_{\parallel}} = -\frac{\mu \dot{B}}{m v_{\parallel}^2} \quad (2-83)$$

由于假定 \mathbf{B} 是静止的, 因此仅仅由于导向中心的运动, \dot{B} 才不为零

$$\dot{B} = \frac{dB}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = \mathbf{v}_{gc} \cdot \nabla B = \frac{m v_{\parallel}^2 \mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{q R_c^2 B^2} \cdot \nabla B \quad (2-84)$$

现在, 我们有

$$\frac{\dot{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} = -\frac{\mu}{q} \frac{(\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}) \cdot \nabla B}{R_c^2 B^2} = -\frac{1}{2} \frac{m v_{\perp}^2}{q B} \frac{(\mathbf{B} \times \nabla B) \cdot \mathbf{R}_c}{R_c^2 B^2} \quad (2-85)$$

$v_{\parallel} \delta s$ 的分数变化是

$$\frac{1}{v_{\parallel} \delta s} \frac{d}{dt} (v_{\parallel} \delta s) = \frac{1}{\delta s} \frac{d \delta s}{dt} + \frac{1}{v_{\parallel}} \frac{d v_{\parallel}}{dt} \quad (2-86)$$

从方程 (2-80) 和方程 (2-85), 我们看到这两项是互相抵消的, 所以

$$v_{\parallel} \delta s = \text{常数} \quad (2-87)$$

然而, 它和 J 是常数并不完全相同. 在取转向点之间 $v_{\parallel} \delta s$ 的积分时, 可能会出现在 $\delta s'$ 上的转向点并不与垂直平面的交点相重合 (图 2-17). 然而, 由于这种差异带来 J 的任何误差是可以忽略的, 因为接近转向点时, v 接近于零. 因此我们证明了

$$J = \int_a^b v_{\parallel} \delta s = \text{常数} \quad (2-88)$$

称作**渡越时间磁抽运** (transit-time magnetic pumping) 的等离子体加热方案, 给出了违反 J 不变性的一个例子. 假定把一个振荡电流加到磁镜系统的线圈中, 磁

镜就以接近反跳频率轮流彼此接近和远离。那些正好具有反跳频率的粒子总是看见一个接近的磁镜，因而将获得 v_{\parallel} 。在这种情况下， J 不守恒，因为 \mathbf{B} 的变化发生在不长于反跳时间的时间尺度上。

2.8.3 第三个绝热不变量， Φ

再次参照图 2-16，我们看到一导向中心环绕地球的缓慢漂移构成了第三种类型的周期运动。与这种运动相联系的绝热不变量是漂移表面所包围的总磁通量 Φ 。几乎很明显，当 \mathbf{B} 变化时，粒子将停留在这样一个表面上，使得所包围的磁力线总数保持不变。这个不变量 Φ 几乎没有什么应用，因为 \mathbf{B} 的大多数涨落发生在比漂移周期要短的时间尺度上。作为违反 Φ 不变性的一个例子，我们可引证有关电离层磁流体波激发的某些最近的工作。这些波具有与粒子环绕地球漂移时间相当的长周期。因此，粒子在每次环绕一周时都能碰到同一相位的波。如果相位恰当，波可被粒子漂移能量转换为波动能量所激发。

习题

2-8 用 J 不变性直接推导习题 2-7 (b) 的结果。

(a) 令 $\int v_{\parallel} ds \approx v_{\parallel} L$ 并对时间微分。

(b) 从这个式子得到用 dL/dt 表示的 T 的表达式。为得到答案，令 $dL/dt = -2v_m$ 。

2-9 在绝热压缩的等离子体加热中， μ 不变性要求 KT_{\perp} 随着 B 的增加而增加。然而，磁场不能加速粒子，因为洛伦兹力 $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 总是垂直于速度。试问粒子如何得到能量？

第 3 章 作为流体的等离子体

3.1 引言

在等离子体中，情况远比第 2 章所述的复杂； E 场和 B 场不能事先规定，而应由带电粒子本身的位置和运动来决定。我们必须解一个自恰问题 (self-consistent problem)，即找出这样一组粒子轨道和场模式，使得粒子沿着它们的轨道运动时产生场，而场使粒子在它们的确切轨道上运动。而我们又必须在随时间变化的情况下解出这个问题！

我们已经看到，典型等离子体密度可以达到每立方厘米含 10^{12} 离子-电子对。如果每一个粒子都遵循一条复杂的轨道，并且需要跟踪每一条这样的轨道，则导出等离子体的行为将是一个没有希望的工作。幸好，这种工作通常是不必要的，因为出人意料的是，用一个相当粗糙的模型能解释实际实验中所观察到的大多数（也许多达 80%）等离子体现象。这个模型是流体力学中所用的模型，在那里忽略了个别粒子的本性，而只考虑流体元的运动。当然，在等离子体情形中，流体包含电荷。在一种普通的流体中，粒子间的频繁碰撞使得流体元中的粒子一起运动。令人惊奇的是，这样一个模型适用于一般不发生频繁碰撞的等离子体。但是我们将看到，这种处理是有理由的。

本书的大部分将叙述等离子体流体理论所能研究的内容。更完善的处理方法（等离子体动力学理论 (the kinetic theory of plasma)）需要较多的数学计算，以至于它不宜在入门课程中探讨，第 7 章给出了动力学理论的介绍。

在某些等离子体问题中，流体理论和动力学理论都不足以描述等离子体行为。这时，我们必须返回到跟踪个别粒子轨道这种烦琐的过程。现代计算机能够做到这一点，虽然它们只能存储大约 10^4 粒子的位置和速度分量，而且除了几种情况外，仅能解决一维和二维的问题。甚至在动力学理论也不能很好地解释观察到的现象的那些实例中，计算机模拟却在弥合理论和实验间的差距上逐渐起到了重要的作用。

3.2 等离子体物理学与普通电磁学的关系

3.2.1 麦克斯韦方程组（用静电单位制）^①

在真空中

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\sigma \quad (3-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (3-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3-3)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j} + \dot{\mathbf{E}} \quad (3-4)$$

在介质中

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\sigma \quad (3-5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (3-6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3-7)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j} + \dot{\mathbf{D}} \quad (3-8)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (3-9)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3-10)$$

在方程 (3-5) 和方程 (3-8) 中, σ 和 \mathbf{j} 代表“自由”电荷和电流密度. 由媒质的极化和磁化引起的“束缚”电荷和电流密度包括在量 \mathbf{D} 和 \mathbf{H} 的定义中 (用 ϵ 和 μ 表示). 在等离子体中, 组成等离子体的离子和电子等价于“束缚”电荷和电流. 由于这些电荷的复杂运动, 试图将它们的影响集中为两个常数 ϵ 和 μ 是不实际的. 因此, 在等离子体物理学中, 我们一般使用真空中的方程 (3-1)~方程 (3-4), 而在方程中, σ 和 \mathbf{j} 包括外部和内部的所有电荷和电流.

注意到我们用了真空方程中的 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} , 而不是用当 $\epsilon = \mu = 1$ 时和它们等价的 \mathbf{D} 和 \mathbf{H} . 这是因为甚至在 ϵ 和 μ 不等于 1 时, 力 $q\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ 亦取决于 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} , 而不取决于 \mathbf{D} 和 \mathbf{H} , 而力才是实际的可测量.

3.2.2 磁性材料的经典处理

由于每个回转粒子都有一个磁矩, 看来将等离子体考虑为具有磁导率 μ_m 的磁性材料似乎是合乎逻辑的事情 (我们在磁导率上加上下标 m , 以区别于绝热不变量 μ). 为了了解实际上为什么不这样处理, 先让我们评述通常处理磁性材料的方法.

比如, 具有磁矩 μ_i 的一块铁的磁畴引起单位体积的体磁化为

^① 拘于细节的人坚持认为, 静电单位中的 μ 和 H 要这样规格化, 使得真空中的 μ_0 是 $1/c^2$ 而不是这里所用的 1. 严格地讲, 我们的系统是修正的高斯制, 由于 H 仅在这一节出现, 所以将不出现进一步的混淆.

$$\mathbf{M} = \frac{1}{V} \sum_i \boldsymbol{\mu}_i \quad (3-11)$$

它与束缚电流密度

$$\mathbf{j}_b = c^2 \nabla \times \mathbf{M} \quad (3-12)$$

的作用是相同的. 在真空方程 (3-4) 中, 我们必须在 \mathbf{j} 中包括这个电流和“自由”(或外加的) 电流 \mathbf{j}_f :

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi (\mathbf{j}_f + \mathbf{j}_b) + \dot{\mathbf{E}} \quad (3-13)$$

通过在 \mathbf{H} 定义中包括 \mathbf{j}_b , 把方程 (3-13) 写成简单形式

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j}_f + \dot{\mathbf{E}} \quad (3-14)$$

倘若我们令

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M} \quad (3-15)$$

就能做到这一点. 为了给出 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 之间的简单关系式, 我们假定 \mathbf{M} 正比于 \mathbf{B} 或 \mathbf{H}

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (3-16)$$

常数 χ_m 为磁化率. 我们现在得到

$$\mathbf{B} = (1 + 4\pi \chi_m) \mathbf{H} \equiv \mu_m \mathbf{H} \quad (3-17)$$

因为方程 (3-16) 有线性形式, \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 之间的这种简单关系是可能的.

在具有磁场的等离子体中, 每个粒子有磁矩 $\boldsymbol{\mu}_\alpha$, 量 \mathbf{M} 是 1cm^3 中所有 $\boldsymbol{\mu}_\alpha$ 的和. 但现在

$$\mu_\alpha = \frac{mv_{\perp\alpha}^2}{2B} \propto \frac{1}{B}, \quad M \propto \frac{1}{B}$$

\mathbf{M} 和 \mathbf{H} (或 \mathbf{B}) 之间的关系不再是线性的, 我们就不能写成 $\mathbf{B} = \mu_m \mathbf{H}$ (μ_m 为常数). 因此, 把等离子体考虑为磁介质是没有用的.

3.2.3 电介质的经典处理

单位体积的极化度 \mathbf{P} 是所有电偶极子各极矩 \mathbf{P}_i 的总和. 它引起一个束缚电荷密度

$$\sigma_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (3-18)$$

在真空方程 (3-1) 中, 必须包括束缚电荷和自由电荷

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi (\sigma_f + \sigma_b) \quad (3-19)$$

我们希望通过在 \mathbf{D} 的定义中包括 σ_b , 能将方程 (3-19) 写成下面的简单形式, 即

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \sigma_f \quad (3-20)$$

令

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} \equiv \epsilon \mathbf{E} \quad (3-21)$$

就能做到这一点. 如果 \mathbf{P} 线性正比于 \mathbf{E} , 即

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} \quad (3-22)$$

那么, ϵ 是常数

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e \quad (3-23)$$

因为没有先验理由说, 在等离子体中像方程 (3-22) 这样的关系式不能成立, 所以我们可以尝试给出等离子体中 ϵ 的表达式.

3.2.4 等离子体的介电常数

我们在第 2.5 节已经看到, 一个涨落的 \mathbf{E} 场能引起极化电流 \mathbf{j}_p . 它又由连续性方程

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_p = 0 \quad (3-24)$$

给出极化电荷. 正如我们在前面注意到的那样, 在等离子体中, 极化效应是不出现的 (除非电场随时间变化). 除了这点以外, 方程 (3-24) 和方程 (3-18) 是等价的. 由于我们有 \mathbf{j}_p 的明显表达式, 但 σ_p 则没有, 用第四个麦克斯韦方程 (3-4) 来运算就比较容易

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi(\mathbf{j}_i + \mathbf{j}_p) + \dot{\mathbf{E}} \quad (3-25)$$

我们希望将这个式子写成如下形式

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j}_i + \epsilon \dot{\mathbf{E}} \quad (3-26)$$

如果令

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi\mathbf{j}_p}{\dot{\mathbf{E}}} \quad (3-27)$$

就能做到这一点. 从 \mathbf{j}_p 的方程 (2-67), 我们得到

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi\rho}{B^2} \quad (3-28)$$

这就是横向运动的低频等离子体介电常数 (low frequency plasma dielectric constant for transverse motions). 加上这些形容词是必要的, 因为仅对于 $\omega^2 \ll \omega_c^2$ 和 \mathbf{E} 垂直于 \mathbf{B} 的情况, 我们所用的表达式才是正确的. 当然, ϵ 的一般表达式是非常复杂的, 而且很难在一页中写完.

注意到 $\rho \rightarrow 0$ 时, ϵ 如它所应该的那样接近于它的真空值 1. 当 $B \rightarrow \infty$ 时, ϵ 也接近于 1. 这是因为极化漂移 \mathbf{v}_p 在那时变为零, 粒子并不响应横向电场而运动. 在通常的实验室等离子体中, 方程 (3-28) 中的第二项大于 1. 例如, 如果 $n = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$, $B = 1 \text{ kG}$, (对氢) 就有

$$\frac{4\pi\rho c^2}{B_G^2} = \frac{12.6 \times 10^{10} \times (1.67 \times 10^{-24}) \times (9 \times 10^{20})}{10^6} = 189$$

这说明等离子体中粒子产生的电场极大地改变了外加场. 正像具有小 λ_D 的等离子体屏蔽直流电场一样, 一个具有很大 ϵ 的等离子体屏蔽了交变电场.

习题

3-1 从真空泊松方程 (3-1), 电流连续性方程 (3-24) 和方程 (2-67), 并使 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 0$, 推导均匀等离子体低频介电常数, 即推出方程 (3-28)。

3-2 如果用 Ω_c 表示离子回旋频率, 离子的等离子体频率定义为

$$\Omega_p = (4\pi n e^2 / M)^{1/2}$$

其中, M 是离子质量, 那么在什么情况下, 介电常数 ϵ 近似等于 Ω_p^2 / Ω_c^2 ?

3.3 流体运动方程

麦克斯韦方程告诉我们, 对给定的等离子体态, \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 是什么. 为了解这个自洽问题, 我们也必须有一个方程, 它给出等离子体对给定 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的响应. 在流体近似中, 我们认为等离子体是由两个或更多相互贯穿的流体 (interpenetrating fluids) 所组成 (每个种类算一种流体). 在最简单的情况下, 当只有一种离子时, 我们将需要两个运动方程, 一个是带正电的离子流体方程, 另一个是带负电的电子流体方程. 在部分电离的气体中, 我们还将需要一个中性原子的流体方程. 中性流体仅通过碰撞才同离子和电子相互作用. 而离子和电子流体甚至在无碰撞时彼此也有相互作用, 因为它们产生 \mathbf{E} 场和 \mathbf{B} 场.

3.3.1 运流微商

单粒子的运动方程是

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3-29)$$

首先假定不存在碰撞和热运动, 那时流体元中的所有粒子一起运动, 在流体之中, 粒子的平均速度 \mathbf{u} 和个别粒子速度 \mathbf{v} 是相同的. 简单地用密度 n 乘方程 (3-29), 就可得到流体方程

$$mn \frac{d\mathbf{u}}{dt} = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (3-30)$$

然而, 对使用来讲, 这不是一种方便的形式. 在方程 (3-29) 中, 对时间的微商将在随粒子运动的坐标系中 (in the frame moving with the particle) 取得. 另外, 我们希望得到一个固定在空间中 (fixed in space) 的流体元方程, 因为在其他坐标系中进行运算总是不实际的. 将一杯咖啡中的一滴乳酪作为流体元, 当搅拌咖啡时, 这滴乳酪变形成细丝, 并最后在整个杯子中完全散开, 损失它的本体. 然而, 在杯中一个固定点的流体元, 虽然粒子连续地进入和离开这个流体元, 但始终保持它的本体.

为了变换到固定坐标系中, 考虑 $G(x, t)$ 是一维 x 空间中流体的任何性质. 在随流体运动的坐标系中, \mathbf{G} 随时间的变化是两项之和

$$\frac{d\mathbf{G}(x, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} \quad (3-31)$$

其中, 右边的第一项代表在空间固定点 \mathbf{G} 的变化, 第二项代表当观察者随流体运动进入不同 \mathbf{G} 区域时 \mathbf{G} 的变化. 在三维时, 方程 (3-31) 推广成

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{G} \quad (3-32)$$

这就叫做**运流微商**, 有时也写成 $\frac{D\mathbf{G}}{Dt}$. 注意到 $(\mathbf{u} \cdot \nabla)$ 是一个**标量微分算符**. 由于这项的符号有时会搞乱, 我们给出两个简单的例子.

图 3-1 示出了一个电水加热器, 其中热水上升到顶部, 而冷水下沉到底部. 令 $G(x, t)$ 代表温度 T , 则 ∇G 是朝上的. 考虑一个接近于水箱边缘的流体元, 如果接通加热器, 则当流体元运动时, 它被加热, 就得到 $\frac{dT}{dt} > 0$. 另外, 如果一个搅拌轮形成如图 3-1 所示的流动形式, 由于从底部来的冷水对流而降低了**固定**流体元中的温度. 这时就得到 $\partial T / \partial x > 0$, $u_x > 0$, 因此 $\mathbf{u} \cdot \nabla T > 0$. 固定元中的温度变化由这些影响的平衡而得到

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{dt} - \mathbf{u} \cdot \nabla T \quad (3-33)$$

很清楚, 至少对短时间而言, $\partial T / \partial t$ 可能为零.

作为第二个例子, 我们可以取 \mathbf{G} 为接近河流入海口处水的盐分 S (图 3-2). 如果 x 指向上游方向, 正常时 S 的梯度为 $\partial S / \partial x < 0$. 当潮流来到时, 盐和淡水之间的整个交界面向上游运动, $u_x > 0$. 这样,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -u_x \frac{\partial S}{\partial x} > 0 \quad (3-34)$$

说明在任何给定点盐分增加. 当然, 如果下雨, 盐分处处减少, 这时在方程 (3-34) 的中间部分要加上一个负的 dS/dt .

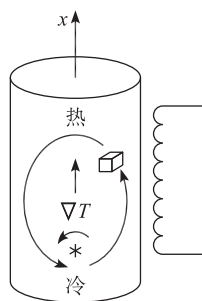


图 3-1 热水加热器中流体元的运动

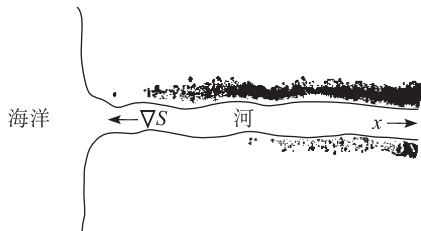


图 3-2 河口处盐分梯度的方向

就等离子体来说, 我们取 \mathbf{G} 代表流体速度 \mathbf{u} , 并把方程 (3-30) 写成

$$m n \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = q n (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (3-35)$$

其中, $\partial \mathbf{u} / \partial t$ 是固定坐标系中的时间导数.

3.3.2 压力张量

当考虑热运动时, 方程 (3-35) 的右边必须加上一个压力. 这个力由流体元内外粒子的无规则运动引起, 它在单粒子方程中并不出现. 令流体元 $\Delta x \Delta y \Delta z$ 的中心位于 $(x_0, \frac{1}{2} \Delta y, \frac{1}{2} \Delta z)$ (图 3-3), 为简单起见, 我们只考虑通过 A 面和 B 面运动的 x 分量. 每秒以速度 v_x 通过面 A 的粒子数是

$$\Delta n_v v_x \Delta y \Delta z$$

其中, Δn_v 是每立方厘米中具有速度 v_x 的粒子数

$$\Delta n_v = \Delta v_x \iiint f(v_x, v_y, v_z) dv_y dv_z$$

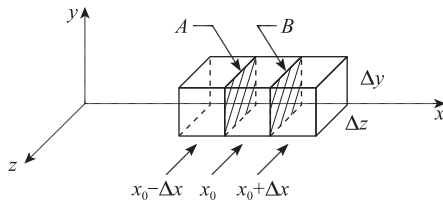


图 3-3 压力张量元的起源

每个粒子携带动量 $m v_x$. 假定每个立方体的密度 n 和温度 KT , 具有相应于立方体中心的值, 则在 x_0 点通过 A 面进入流体元的粒子所带入的动量 P_{A+} 为

$$P_{A+} = \sum \Delta n_v m v_x^2 \Delta y \Delta z = \Delta y \Delta z \left[m \overline{v_x^2} \frac{1}{2} n \right]_{x_0 - \Delta x} \quad (3-36)$$

对 Δn_v 求和, 得到对分布的平均 $\overline{v_x^2}$. 出现因子 $1/2$ 是由于在 $x_0 - \Delta x$ 立方体中只有一半粒子向 A 面运动. 同样, 通过 B 面带走的动量是

$$P_{B+} = \Delta y \Delta z \left[m \overline{v_x^2} \frac{1}{2} n \right]_{x_0}$$

这样, 向右运动的粒子引起 x 方向动量的净增加为

$$\begin{aligned} P_{A+} - P_{B+} &= \Delta y \Delta z \frac{1}{2} m \left([n \overline{v_x^2}]_{x_0 - \Delta x} - [n \overline{v_x^2}]_{x_0} \right) \\ &= \Delta y \Delta z \frac{1}{2} m (-\Delta x) \frac{\partial}{\partial x} (n \overline{v_x^2}) \end{aligned} \quad (3-37)$$

由于向左边运动粒子的贡献, 这个结果将恰好增加一倍, 因为它们携带了负 x 方向动量, 而且相对于 $n \overline{v_x^2}$ 的梯度做反向运动. 因此, 在 x_0 点流体元的动量总变化是

$$\frac{\partial}{\partial t}(nm u_x) \Delta x \Delta y \Delta z = -m \frac{\partial}{\partial x} (n \overline{v_x^2}) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (3-38)$$

令粒子的速度 v_x 分成两部分

$$v_x = u_x + v_{xr}, \quad u_x = \overline{v_x}$$

其中, u_x 是流体速度, 而 v_{xr} 是随机热速度. 对于一维麦克斯韦分布, 从方程(1-7)得到

$$\frac{1}{2} m \overline{v_{xr}^2} = \frac{1}{2} K T \quad (3-39)$$

现在方程 (3-38) 变成

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (nm u_x) &= -m \frac{\partial}{\partial x} [n(\overline{u_x^2} + 2 \overline{u_x v_{xr}} + \overline{v_{xr}^2})] \\ &= -m \frac{\partial}{\partial x} \left[n \left(\overline{u_x^2} + \frac{K T}{m} \right) \right] \end{aligned}$$

由偏微分, 我们能消去两项

$$mn \frac{\partial u_x}{\partial t} + m u_x \frac{\partial n}{\partial t} = -m u_x \frac{\partial (n u_x)}{\partial x} - m n u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (n K T) \quad (3-40)$$

质量守恒方程

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n u_x) = 0 \quad (3-41)$$

允许我们消去方程 (3-40) 中最靠近等号的两项. 定义压力为

$$p \equiv n K T \quad (3-42)$$

最后, 我们就得到

$$mn \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3-43)$$

这是通常的压力-梯度力. 加上电磁力, 并推广到三维, 我们得到流体方程为

$$mn \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = qn (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla p \quad (3-44)$$

我们已经推导出的公式仅是一个特殊情形: x 方向运动所传递 x 方向动量, 而且我们已经假定流体是各向同性的, 所以在 y 方向和 z 方向有同样的结果. 但是, 如 x 方向的运动也可能传递 y 方向动量. 假定 (图 3-3) 在 $x=x_0$ 立方体中 u_y 等于零, 但在两边都是正的, 那么, 当粒子移过平面 A 和平面 B 时, 它们带进的正 y 方向动量比带出的要多, 流体元就得到 y 方向的动量. 这种剪切应力 (shear stress) 不能用标量 p 来表示, 而必须由压力张量 \mathbf{P} 来给出, 它的分量 $P_{ij} = mn \overline{v_i v_j}$ 规定了运动方向及有关的动量分量. 在一般情况下, $-\nabla p$ 用 $-\nabla \cdot \mathbf{P}$ 来代替.

在这里, 我们将只给出两种最简单情况的压力张量. 当分布函数是一个各向同性的麦克斯韦分布时, \mathbf{P} 写成

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (3-45)$$

$\nabla \cdot \mathbf{P}$ 恰好是 ∇p . 在第 1.3 节中我们看到, 当磁场存在时, 等离子体能够具有两个温度 T_{\perp} 和 T_{\parallel} , 这时, 就会有两个压力 $p_{\perp} = nkT_{\perp}$, $p_{\parallel} = nkT_{\parallel}$. 这样, 压力张量为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (3-46)$$

它的第三行或第三列的坐标是 \mathbf{B} 的方向. 这个张量仍然是对角的, 并且在垂直于 \mathbf{B} 平面显示出各向同性.

在普通流体中, \mathbf{P} 的非对角元通常和黏滞性相联系. 当粒子碰撞时, 它们获得了上次碰撞处流体速度 \mathbf{u} 方向的平均速度, 而这个动量在下一次碰撞中传递给另一个流体元. 这样就使得不同点的 \mathbf{u} 趋于相等, 而我们能直观地认为, 对剪切流动所产生的阻力就是黏滞性. 平均自由程越长, 粒子携带更远处的动量, 黏滞性就越大. 在等离子体中, 甚至在无碰撞的情况下, 也能发生类似的效应. 粒子 (特别是离子) 的拉莫尔回转使它们进入等离子体的不同部分, 而使那里的流体速度趋于相等. 是拉莫尔半径而不是平均自由程规定了这类无碰撞黏滞性的尺度. 它是一种有限拉莫尔半径效应, 这种效应出现在碰撞黏滞性效应之外, 并且与非均匀 \mathbf{E} 场的漂移 \mathbf{v}_E (方程 (2-58)) 紧密相关.

3.3.3 碰撞

如果存在一种中性气体, 荷电的流体将由于碰撞而与它交换动量. 每次碰撞损失的动量将正比于相对速度 $\mathbf{u} - \mathbf{u}_0$, 其中 \mathbf{u}_0 是中性流体的速度. 如果碰撞之间的平均自由时间 τ 近似为常数, 所产生的力能粗略地写成 $-mn(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)/\tau$. 运动方程 (3-44) 能推广到包括各向异性压力和包括同中性粒子的碰撞, 写成

$$mn \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \mathbf{P} - \frac{mn(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)}{\tau} \quad (3-47)$$

这个公式没有包括带电粒子间的碰撞. 这种情况将在第 5 章论述.

3.3.4 和普通流体动力学的比较

普通的流体遵循纳维-斯托克斯 (Navier-Stokes) 方程

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \rho \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3-48)$$

这个方程和等离子体方程 (3-47) 是相同的, 只是没有电磁力和种类之间的碰撞 (只有一个类). 黏滞项 $\rho \nu \nabla^2 \mathbf{u}$ (其中 ν 是动力黏滞系数) 恰好是没有磁场时的碰撞部分 $\nabla \cdot \mathbf{P} - \nabla p$. 方程 (3-48) 描述了粒子间有频繁碰撞的一种流体. 然而, 方程 (3-47) 的导出并没有对碰撞率作任何明确的说明. 由于除了 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 外, 两个方程是相同的, 那么方程 (3-47) 能否真实地描述一种等离子体呢? 得到的是谨

慎的肯定回答，其理由将告诉我们流体理论的局限性。

在方程 (3-47) 的推导中，我们实际上已暗中假定了碰撞的存在。当我们取速度分布是麦克斯韦分布时，就在方程 (3-39) 中引入了这个假定。一般地说，出现这样一种分布是频繁碰撞的结果。然而，只是在取 v_x^2 的平均时，才用了这个假定。任何一种具有相同平均的分布都得到同样的结论，所以流体理论对于与麦克斯韦分布的偏离不是很敏感。尽管还存在一些例子，在这些例子中，这些偏离是重要的。那时就必须用动力学理论。

朗缪尔 (Irving Langmuir) 的经验观察支持了流体理论。他用了以他的名字命名的静电探针，发现电子分布函数比起碰撞率所能说明的分布更加接近麦克斯韦分布。这个现象称作朗缪尔佯谬 (Langmuir's paradox)，曾归因于高频振荡。这个怪现象并没有得到令人满意的解决，但是看来这是等离子体物理学中几个自然行为偏袒我们的例子中的一个。

流体模型能用于等离子体的另一个原因是：磁场（当存在一磁场时）在某种意义上起到了碰撞的作用。比方说，当粒子被 \mathbf{E} 场加速时，如果允许粒子自由流动，它会连续地增加速度。当存在频繁的碰撞时，粒子就达到一个与 \mathbf{E} 成正比的极限速度。例如，铜线中的电子一起以速度 $\mathbf{v} = \mu \mathbf{E}$ 漂移，其中 μ 是迁移率。磁场通过迫使粒子以拉莫尔轨道回转，也能限制粒子自由流动。等离子体中的电子也以正比于 \mathbf{E} 的速度一起漂移，即 $\mathbf{v}_E = \mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2$ 。在这个意义上，一个无碰撞等离子体的行为类似于一个有碰撞的流体。当然，沿着磁场方向粒子的确自由流动，对这个方向的运动来说，流体图像并不是特别合适的。对于垂直于 \mathbf{B} 的运动，流体理论是一种很好的近似。

3.3.5 连续性方程

物质守恒要求：只有存在穿过表面 S （包围着体积 V ）的粒子净通量时，才能改变体积 V 中粒子总数 N 。由于粒子通量密度是 $n\mathbf{u}$ ，用斯托克斯定理，我们有

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \int_V \frac{\partial n}{\partial t} dV = - \oint n\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \nabla \cdot (n\mathbf{u}) dV \quad (3-49)$$

由于这个方程对任何体积 V 都必须成立，所以被积函数必须相等

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0 \quad (3-50)$$

对每类粒子都存在这样一个连续性方程 (equation of continuity)。在式子的右边，可加上粒子的任何源或壑。

3.3.6 状态方程

封闭方程系还需要一个方程式。为此，我们能联系 p 和 n 的热力学状态

方程

$$p=C\rho^\gamma \quad (3-51)$$

其中, C 是常数, γ 是比热比 C_p/C_v . 所以, ∇p 为

$$\frac{\nabla p}{p}=\gamma \frac{\nabla n}{n} \quad (3-52)$$

对于等温压缩, 我们得到

$$\nabla p=\nabla(nKT)=KT \nabla n$$

所以很清楚地得到 $\gamma=1$. 对于绝热压缩, KT 也将变化, 给出的 γ 值大于 1. 如果 N 是自由度的数目, γ 为

$$\gamma=(2+N)/N \quad (3-53)$$

状态方程的正确性要求忽略热流, 也就是说, 要有低的热传导率. 另外, 状态方程在垂直于 \mathbf{B} 方向比起平行于 \mathbf{B} 方向显得更正确些. 幸好, 用方程 (3-51) 这个粗糙的假定能充分描述大多数基本现象.

3.3.7 完整的流体方程组

为简单起见, 假定等离子体只有两种: 离子和电子, 推广到更多种是不难的. 这时, 电荷和电流密度为

$$\sigma=n_i q_i+n_e q_e \quad (3-54)$$

$$\mathbf{j}=n_i q_i \mathbf{v}_i+n_e q_e \mathbf{v}_e$$

由于现在不再考虑单粒子运动, 我们可以用 \mathbf{v} 代替流体速度 \mathbf{u} , 将忽略碰撞和黏滞性. 方程 (3-1)~方程(3-4), 方程 (3-44), 方程 (3-50) 和方程 (3-51) 形成下列一组方程

$$\nabla \cdot \mathbf{E}=4\pi(n_i q_i+n_e q_e) \quad (3-55)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}=-\dot{\mathbf{B}} \quad (3-56)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}=0 \quad (3-57)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B}=4\pi(n_i q_i \mathbf{v}_i+n_e q_e \mathbf{v}_e)+\dot{\mathbf{E}} \quad (3-58)$$

$$m_j n_j \left[\frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t}+(\mathbf{v}_j \cdot \nabla) \mathbf{v}_j \right]=q_j n_j (\mathbf{E}+\mathbf{v}_j \times \mathbf{B})-\nabla p_j, \quad j=i, e \quad (3-59)$$

$$\frac{\partial n_j}{\partial t}+\nabla(n_j \mathbf{v}_j)=0, \quad j=i, e \quad (3-60)$$

$$p_j=C(m_j n_j)^{\gamma_j}, \quad j=i, e \quad (3-61)$$

有 16 个未知标量: n_i , n_e , p_i , p_e , \mathbf{v}_i , \mathbf{v}_e , \mathbf{E} 和 \mathbf{B} . 如果将每个矢量方程考虑成三个标量方程, 表面上看有 18 个标量方程. 然而, 麦克斯韦方程中的两个方程是多余的, 因为方程 (3-55) 和方程 (3-57) 能由方程 (3-58) 和方程 (3-56) 的散度 (习题 3-7) 重新获得. 这个方程组有 16 个未知数, 16 个方程, 它们的联立解给出流体近似的一组自洽场和运动.

3.4 垂直于 B 的流体漂移

由于一个流体元由很多个别的粒子所组成，如果个别的导向中心具有垂直于 B 的漂移，则我们会指望流体也有这个方向的漂移。然而，由于 ∇p 项只出现在流体方程中，因此存在一项流体元有而粒子却没有的漂移，它与 ∇p 有关。对于每个属种，就有一个运动方程

$$mn \left[\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{\textcircled{1}} + \underbrace{(v \cdot \nabla) v}_{\textcircled{2}} \right] = qn \underbrace{(E + v \times B)}_{\textcircled{3}} - \nabla p \quad (3-62)$$

考虑项①和项③的比

$$\frac{\textcircled{1}}{\textcircled{3}} \approx \left| \frac{mni\omega v_{\perp}}{qn v_{\perp} B} \right| \approx \frac{\omega}{\omega_c}$$

在这里，我们已取 $\partial/\partial t = i\omega$ ，而且仅与 v_{\perp} 相联系。对于比 ω_c 时标要缓慢的漂移，我们可以忽略项①。我们也将忽略 $(v \cdot \nabla) v$ 项，并且以后将证明是对的。令 E 和 B 是均匀的，但 n 和 p 有一个梯度。在磁约束等离子体柱中，这是很普通的情况（图 3-4）。用 B 叉乘方程 (3-62)，得到（忽略左边）

$$\begin{aligned} 0 &= qn [E \times B + (v_{\perp} \times B) \times B] - \nabla p \times B \\ &= qn [E \times B + B(v_{\perp} \cdot B) - v_{\perp} B^2] - \nabla p \times B \end{aligned}$$

所以

$$v_{\perp} = \frac{E \times B}{B^2} - \frac{\nabla p \times B}{qn B^2} \equiv v_E + v_D \quad (3-63)$$

其中

$$v_E \equiv \frac{E \times B}{B^2} \quad (E \times B \text{ 漂移}) \quad (3-64)$$

$$v_D \equiv -\frac{\nabla p \times B}{qn B^2} \quad (\text{抗磁性漂移}) \quad (3-65)$$

漂移 v_E 与导向中心的漂移相同，但现在存在一个新漂移 v_D ，称作抗磁性漂移 (diamagnetic drift)。由于 v_D 垂直于梯度方向，证明忽略 $(v \cdot \nabla) v$ 是正确的。

用方程 (3-52)，我们将抗磁性漂移写成

$$v_D = \pm \frac{\gamma K T}{eB} \frac{\hat{z} \times \nabla n}{n} \quad (3-66)$$

尤其对图 3-4 结构中的等温等离子体 ($\nabla n = n' \hat{r}$)，我们得到下面的公式

$$\begin{aligned} v_{Di} &= \frac{K T_i n'}{eB n} \hat{\theta} \\ v_{De} &= -\frac{K T_e n'}{eB n} \hat{\theta} \end{aligned} \quad (3-67)$$

这个公式对于在 Q 装置^①上工作的实验家来说是很熟悉的。从方程 (3-68) 很容易计算 v_D 的大小

$$v_D = 10^8 \frac{KT \text{ (eV)} \frac{1}{\Lambda}}{B \text{ (G)}} \quad (3-68)$$

其中, Λ 是密度标度长 n/n' (以厘米为单位)。

从图 3-5 可以看到这种漂移的物理原因。在这里, 我们画出在磁场中离子回转的轨道。存在一个向左边的密度梯度, 在图中由轨道的密度来表示。通过任何固定体积元的向下运动离子比向上运动离子要多, 这是由于向下运动的离子来自于密度较高的区域。因此, 即使导向中心是固定的, 也存在一个垂直于 ∇n 和 \mathbf{B} 的流体漂移。抗磁性漂移的方向随着 q 的符号而改变, 因为 q 的符号不同, 回转的方向也不同。 v_D 的大小不依赖于质量, 因为速度的 $m^{-1/2}$ 依赖与拉莫尔半径的 $m^{1/2}$ 依赖相互抵消——如果质量小, 则在一次回转期间, 抽样的密度梯度也较小。

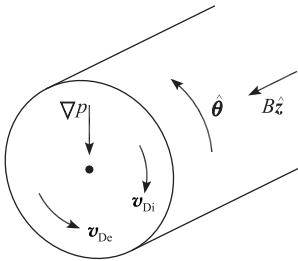


图 3-4 柱形等离子体的抗磁性漂移

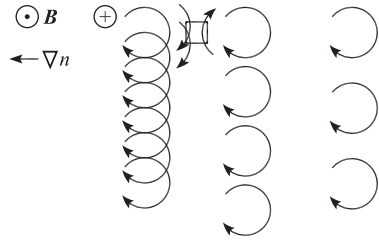


图 3-5 抗磁性漂移的来源

由于离子和电子以相反方向漂移, 就存在一种抗磁性电流。对于 $\gamma = Z = 1$, 抗磁性电流由下式得到

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_D &= ne(\mathbf{v}_{Di} - \mathbf{v}_{De}) \\ &= (KT_i + KT_e) \frac{\mathbf{B} \times \nabla n}{B^2} \end{aligned} \quad (3-69)$$

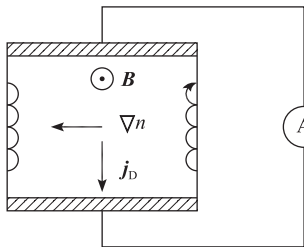


图 3-6 有界等离子体中的粒子漂移, 说明与流体漂移的关系

在粒子图像中, 如果导向中心不漂移, 我们不会期望测量出电流。而在流体图像中, 只要存在压力梯度, 就有电流 \mathbf{j}_D 流过。倘若我们考虑所有实验必须在有限大小的等离子体中进行, 就能调和这两种观点。假定等离子体处于刚性盒中 (图 3-6), 如果我们从单粒子图像来计算电流, 应当考虑在边缘具有摆线路径的粒子。由于左边的粒子比右边的粒子多, 存在一个向下的净电流, 这是和流体图像一致的。从

^① Q 装置是由铯或钾原子打在热钨板上发生热电离而产生的静等离子体 (quiescent plasma)。在 Q 装置中首先测出了抗磁性漂移。

这个例子我们能够看到，用单粒子图像会相当复杂，而直接用流体理论，即使包含了类似于抗磁性漂移的“虚构”漂移，通常也能给出正确的结果。

梯度 B 和曲率漂移怎样出现在单粒子图像中呢？由于如下原因，在流体图像中不能发生这些漂移。按照热力学，我们能够证明磁场并不影响麦克斯韦分布。这是因为洛伦兹力垂直于 \mathbf{v} ，而且不改变任何粒子的能量。没有 \mathbf{B} 场的最可几分布 $f(\mathbf{v})$ 也是有 \mathbf{B} 场的最可几分布。如果在非均匀 \mathbf{B} 场中的 $f(\mathbf{v})$ 保持麦克斯韦分布，并且不存在密度梯度，那么带入到任何固定流体元的净动量是零。即使各个粒子的导向中心有漂移，流体的漂移也不存在；在任何固定的流体元中，粒子的漂移相互抵消。如果存在非均匀 \mathbf{E} 场，就不会有这种情况。那时，2.4 节所讲的有限拉莫尔半径效应既引起导向中心漂移，又引起流体漂移，但是两者是不相同的；事实上，它们有相反的符号。在第 2 章中，计算了粒子漂移，从 \mathbf{P} 的非对角元能计算流体漂移。当考虑有限拉莫尔半径效应时，要使流体图像和粒子图像一致是十分困难的。类似图 3-6 那种简单图像是不行的，因为我们必须考虑诸如下面所述的那种难解之点：密度梯度存在时，导向中心的密度和粒子密度是不同的。

习题

3-3 在均匀的 \mathbf{B} 场中，一个柱对称等离子体柱有

$$n(r) = n_0 \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right), \quad n_i = n_e = n_0 \exp(e\phi/KT_e)$$

- (a) 证明 \mathbf{v}_E 和 \mathbf{v}_{Dc} 的大小相等，方向相反。
 (b) 证明等离子体像固体一样转动。

(c) 在以速度 \mathbf{v}_E 转动的坐标系中，某些等离子体波（漂移波）以相速度 $\mathbf{v}_\phi = 0.5\mathbf{v}_{Dc}$ 传播。请问在实验室坐标系中 \mathbf{v}_ϕ 是什么？在 $r-\theta$ 平面图上，以箭头表示在实验室坐标系中 \mathbf{v}_E ， \mathbf{v}_{Dc} 和 \mathbf{v}_ϕ 的大小和方向。

3-4 在习题 3-3 所讲的等离子体中，抗磁性电流密度（作为半径的函数）是什么？在实验室坐标系中，这个电流是由离子携带还是由电子携带？还是由两者共同来携带？

3-5 在上述问题中，如果 $B = 4\text{kG}$ ， $n_0 = 10^{10}\text{cm}^{-3}$ ， $KT_e = KT_i = 0.25\text{eV}$ ，那么在轴上抗磁性电流使 B 减少多少？提示：你可以对适当的路径用安培电路定律。

3-6 对习题 3-5 给出的参量，画出电子的 ω_c 和 ω_p 作为半径函数的简图，指出在轴上的 ω_c 和 ω_p 值。这是低密度等离子体实验的有代表性的图，这个图以后我们还要提到。

3-7 证明在麦克斯韦方程组中方程 (3-55) 和方程 (3-57) 是重复的。

3-8 证明 j_D 的表达式 (方程 (3-69)) 有电流密度的量纲.

3-9 试证明, 如果对一种盒子的宽度, 从粒子图像 (图 3-6) 计算的电流和从抗磁性漂移计算的电流一致, 则对所有的宽度, 计算的结果也一致.

3.5 平行于 B 的流体漂移

流体运动方程的 z 分量是

$$mn \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_z \right] = qnE_z - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3-70)$$

常忽略对流项, 因为它远小于 $\partial v_z / \partial t$ 项. 这里我们将避免复杂的论证, 并简单地把 v_z 考虑成空间均匀的情况. 由方程 (3-52) 得到

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{q}{m} E_z - \frac{\gamma K T}{mn} \frac{\partial n}{\partial z} \quad (3-71)$$

这就说明, 在静电力和压力梯度力的联合作用下, 流体沿着 B 加速. 将方程(3-71) 用到无质量电子, 能得到一个特别重要的结果. 取极限 $m \rightarrow 0$, 并使 $q = -e$, $E = -\nabla\phi$, 得到

$$qE_z = e \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\gamma K T_e}{n} \frac{\partial n}{\partial z} \quad (3-72)$$

电子是那么容易迁移, 以至于它们的热传导率几乎是无穷大. 我们就可以假定电子是等温的, 并且 $\gamma = 1$. 对方程 (3-72) 积分, 得到

$$e\phi = K T_e \ln n + C$$

或者

$$n = n_0 \exp(e\phi / K T_e) \quad (3-73)$$

这恰好是电子的**玻尔兹曼关系式**.

这个式子的物理意义是: 轻的电子很活跃, 如果有一个净力作用在电子上, 则它们很快被加速到高能量. 自从电子没有留下一个大的粒子电荷而不能一起离开一个区域以来, 作用在电子上的静电力和压力

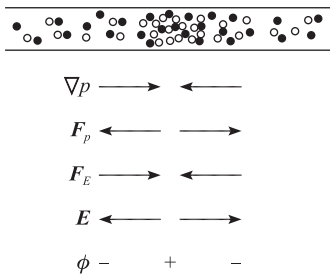


图 3-7 密度和势之间玻尔兹曼关系的物理道理

梯度力必须接近于平衡. 这个条件导致玻尔兹曼关系. 注意方程 (3-73) 能用于**每条磁力线**. 而且除非有这样一种机制使电子能穿过 B 运动, 不同的磁力线才可以充电到任意不同的势. 导体 (磁力线在导体上终止) 就能提供这样一种机制, 实验人员必须仔细地考虑这些终端效应.

图 3-7 形象地说明了当等离子体存在一个局部密度块区时, 会发生什么现象. 令密度梯

度向着图的中心方向，并假定 KT 是常数，这时有一个向着中心方向的压力梯度。由于等离子体是准中性的，对电子和离子流体都存在梯度。考虑作用在电子流体上的压力梯度力 \mathbf{F}_p 。这个力驱动活动的电子离开中心，而把离子留在后面。引起的正电荷就产生一个场 \mathbf{E} ，它作用在电子上的力 \mathbf{F}_E 与 \mathbf{F}_p 方向相反，仅当 \mathbf{F}_E 和 \mathbf{F}_p 大小相等、方向相反时，才达到稳定态。如果 \mathbf{B} 是常数， \mathbf{E} 是一个静电场， $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ ， ϕ 必须在中心大，那里 n 大。这恰好是方程 (3-73) 告诉我们的内容。与严格中性的偏离会自身调节，使得恰好存在足够的电荷，以建立与作用在电子上的力相平衡的 \mathbf{E} 场。

3.6 等离子体近似

上述的例子揭示了等离子体的一个重要特性，这个特性有着广泛的应用。当给定电荷密度 σ 时，我们从泊松方程来解 \mathbf{E} 。在等离子体中，一般用相反的程序。 \mathbf{E} 从运动方程求出，而泊松方程只用来求出 σ 。其原因是等离子体有一个强烈的保持中性的倾向。如果离子运动，电子将跟着它运动。 \mathbf{E} 必须通过它自身的调节，使得电子和离子轨道保持中性。电荷密度具有第二位的重要性，它将通过自身的调节来满足泊松方程。当然，仅对低频运动，这才是正确的，那时电子的惯性不是一个重要的因素。

在等离子体中，经常能同时假定 $n_i = n_e$ 和 $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$ 。我们将把这个假定称为**等离子体近似** (plasma approximation)。它是等离子体的一个基本特性，对初学者来说，理解这个特性是困难的。除了不得已的情况外，不要用泊松方程来求 \mathbf{E} 。这样，在流体方程组 (3-55)~方程(3-61) 中，可以去掉泊松方程，并用 $n_i = n_e = n$ 消去一个未知数。当我们探讨离子波理论时，将回到等离子体近似正确性的问题上来。在那时，我们将清楚地了解，为什么在推导德拜屏蔽时必须用泊松方程。

第 4 章 等离子体中的波

4.1 波的代表法

用傅里叶分析法能将任何一种流体的周期性运动分成具有不同频率 ω 和波长 λ 的正弦振荡的叠加. 这些分量中的任何一个都是一种简单的波. 在小振幅振荡时, 波形一般是正弦的, 并且只有一种组分. 这就是我们将考虑的情况.

任何正弦的振荡量 (如密度 n) 能表示成

$$n = \bar{n} \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad (4-1)$$

在笛卡儿坐标系中

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z \quad (4-2)$$

这里 \bar{n} 是确定波振幅的一个常数, 而 \mathbf{k} 称为传播常数. 如果波在 x 方向传播, \mathbf{k} 只有一个 x 分量, 方程 (4-1) 变成

$$n = \bar{n} e^{i(kx - \omega t)}$$

按照习惯, 指数记法意味着取表达式的实部为可测量. 让我们选择 \bar{n} 是实数, 不久将看到, 这种选择相当于挑选 x 和 t 的原点. 因此, n 的实部是

$$\text{Re}(n) = \bar{n} \cos(kx - \omega t) \quad (4-3)$$

在波上, 恒定相位的点是运动的, 结果是 $(d/dt)(kx - \omega t) = 0$, 或者

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \equiv v_\phi \quad (4-4)$$

这个速度称为**相速度**. 如果 ω/k 是正的, 则波向右运动; 也就是说, 为了使 $kx - \omega t$ 保持常量, x 随 t 的增加而增加. 如果 ω/k 是负的, 波向左运动, 我们也可同样好地将 n 表达成

$$n = \bar{n} e^{i(kx + \omega t)}$$

这时, 正的 ω/k 会具有负相速度的含义. 这是有时使用的一种定法, 但我们不采用它. 从方程 (4-3) 清楚地看到, 使 ω 和 k 都反转符号, 其结果并不改变.

现在, 考虑波中的另一个振荡量, 比如, 考虑电场 \mathbf{E} . 由于我们选择 n 的相位是零, 因此必须让 \mathbf{E} 有一个不同的相位 δ ,

$$\mathbf{E} = \bar{E} \cos(kx - \omega t + \delta) \quad \text{或} \quad \mathbf{E} = \bar{E} e^{i(kx - \omega t + \delta)} \quad (4-5)$$

其中, \bar{E} 是一个不变的实矢量.

通常将相位信息合并到 $\bar{\mathbf{E}}$ 中, 要做到这一点, 就要让 $\bar{\mathbf{E}}$ 为复数, 我们可将 \mathbf{E} 写成

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} e^{i\delta} e^{i(kx - \omega t)} \equiv \bar{\mathbf{E}}_c e^{i(kx - \omega t)}$$

其中, $\bar{\mathbf{E}}_c$ 是一个复振幅. 相位 δ 能从 $\bar{\mathbf{E}}_c$ 求出, 由于 $\text{Re}(\bar{\mathbf{E}}_c) = \bar{E}_c \cos\delta$ 和 $\text{Im}(\bar{\mathbf{E}}_c) = \bar{E}_c \sin\delta$, 因此

$$\tan \delta = \frac{\text{Im}(\bar{\mathbf{E}}_c)}{\text{Re}(\bar{\mathbf{E}}_c)} \quad (4-6)$$

从现在起, 我们将假定所有的振幅都是复数, 并且去掉下标 c . 任何振荡量 \mathbf{g}_1 将写成

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_1 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad (4-7)$$

因此, \mathbf{g}_1 既能代替复振幅, 又能代替整个表达式 (4-7). 这样做不会出现混淆, 因为在线性波理论中, 同一个指数因子会出现在任何方程的两边, 因而能够抵消.

习题

4-1 在“漂移波”中, 振荡密度 n_1 和势 ϕ_1 的关系式为

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{e\phi_1}{KT_e} \frac{\omega^* + ia}{\omega + ia}$$

式中, 我们只需知道除 i 外的所有其他符号代表了正常数.

(a) 求出 ϕ_1 相对于 n_1 的相位 δ 的表达式 (为简单起见, 假定 n_1 是实数).

(b) 如果 $\omega < \omega^*$, ϕ_1 是领先还是落后于 n_1 ?

4.2 群速度

等离子体中波的相速度经常超过光速 c . 这并不违背相对论, 因为一个无限长的恒定振幅的波列不能传递信息. 例如, 无线电波的载波在它调制以前不能传递信息. 调制的信息不是以相速度而是以群速度传播, 而群速总是小于光速 c . 为了说明这一点, 我们可以考虑一个调制波, 它是由两个接近于等频的波的叠加 (“差频”) 形成的. 令这两个波是

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 \cos [(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t] \\ E_2 &= E_0 \cos [(k - \Delta k)x - (\omega - \Delta\omega)t] \end{aligned} \quad (4-8)$$

E_1 和 E_2 的频率差为 $2\Delta\omega$. 由于每个波必须具有与它们在媒质中传播相适应的相速度 ω/k , 因此就必须考虑到传播常数的差 $2\Delta k$. 用简化符号

$$a = kx - \omega t$$

$$b = (\Delta k)x - (\Delta\omega)t$$

就得到

$$\begin{aligned}
 E_1 + E_2 &= E_0 \cos(a+b) + E_0 \cos(a-b) \\
 &= E_0 (\cos a \cos b - \sin a \sin b + \cos a \cos b + \sin a \sin b) \\
 &= 2E_0 \cos a \cos b \\
 E_1 + E_2 &= 2E_0 \cos[(\Delta k)x - (\Delta \omega)t] \cos(kx - \omega t) \tag{4-9}
 \end{aligned}$$

这是一个正弦调制波（图 4-1）。携带波信息的是波的包络线（由 $\cos[(\Delta k)x - (\Delta \omega)t]$ 给出，它以速度 $\Delta \omega / \Delta k$ 传播。取极限 $\Delta \omega \rightarrow 0$ ，我们定义群速度是

$$v_g = d\omega / dk \tag{4-10}$$

它是一个不能超过光速 c 的量。

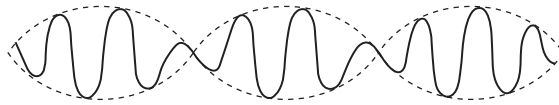


图 4-1 具有频率差的两波的电场空间变化

4.3 等离子体振荡

如果使等离子体中的电子与均匀的离子本底有个位移，将会建立电场，其方向是把电子拉回到它们原先的位置，以恢复等离子体的中性。因为电子的惯性，它们将冲过平衡位置，并以特征频率围绕它们的平衡位置振荡。这个特征频率被认为就是等离子体频率（plasma frequency）。这种振荡是如此之快，以至于重离子没有时间响应振荡场，而可以把它们看成是固定的。在图 4-2 中，空心的矩形表示典型的离子流体元，而阴影的矩形表示交替位移的电子流体元。产生的电荷聚集会在空间形成一个周期性的 E 场，这个场趋向于使电子恢复到它们的中性位置。

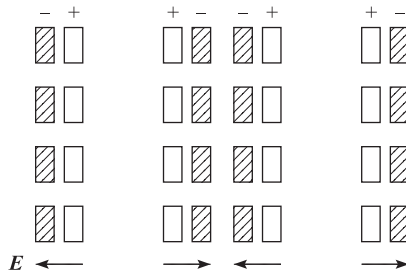


图 4-2 等离子体振荡的机制

我们将在最简单情况下推导等离子体频率 ω_p 的表达式，作以下几个假定：

- ①不存在磁场；
- ②不存在热运动 ($KT=0$)；
- ③离子均匀分布固定在空间中；
- ④等离子体的大小为无限大；
- ⑤电子只在 x 方向运动。作为最后一个假定的结果，就有

$$\nabla = \hat{x} \partial / \partial x, \quad \mathbf{E} = E \hat{x}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (4-11)$$

因此, 不存在涨落磁场; 这是一种静电振荡.

电子的运动方程和连续性方程是

$$m n_e \left[\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e \right] = -e n_e \mathbf{E} \quad (4-12)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = 0 \quad (4-13)$$

我们只需要一个麦克斯韦方程, 就是那个不包含 \mathbf{B} 的方程: 泊松方程. 这种情况是 3.6 节所述的一般规则 (泊松方程不能用来求出 \mathbf{E}) 的一个例外. 这是一种高频振荡; 电子惯性是重要的, 在这种特定情况下, 偏离中性是主要的效应. 因此我们写出

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \partial E / \partial x = 4\pi e (n_i - n_e) \quad (4-14)$$

用线性化的方法不难解出方程 (4-12)~方程(4-14). 线性化就是指振荡的振幅是小量, 而且能忽略包含高价振幅因子的项. 我们首先把因变量分成两部分: 用下标 0 表示“平衡”部分, 用下标 1 表示扰动部分

$$n_e = n_0 + n_1, \quad \mathbf{v}_e = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 \quad (4-15)$$

平衡量表示不存在振荡时的等离子体状态. 由于我们在电子位移前已作了静止的均匀中性等离子体的假定, 我们有

$$\begin{aligned} \nabla n_0 = \mathbf{v}_0 = \mathbf{E}_0 = 0 \\ \frac{\partial n_0}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (4-16)$$

现在, 方程 (4-12) 变为

$$m \left[\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 \right] = -e \mathbf{E}_1 \quad (4-17)$$

项 $(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1$ 被看成是振幅的二次项, 我们将忽略这一项而线性化. 只要 $|\mathbf{v}_1|$ 足够小, 以至于这种二次项确实可以忽略, 线性理论就是正确的. 同样, 方程 (4-13) 变成

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial t} + \nabla \cdot (n_0 \mathbf{v}_1 + n_1 \mathbf{v}_1) = 0 \\ \frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla n_0 = 0 \end{aligned} \quad (4-18)$$

在泊松方程 (4-14) 中, 我们注意到, 在平衡时 $n_{i0} = n_{e0}$, 按照离子是固定的假定, 就有 $n_{i1} = 0$, 因此

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = -4\pi e n_1 \quad (4-19)$$

假定振荡是按正弦变化

$$\begin{aligned}v_1 &= v_1 e^{i(kx - \omega t)} \hat{x} \\n_1 &= n_1 e^{i(kx - \omega t)} \\E &= E e^{i(kx - \omega t)} \hat{x}\end{aligned}\quad (4-20)$$

因此，时间导数 $\partial / \partial t$ 能用 $-i\omega$ 来代替，梯度 ∇ 可用 $ik\hat{x}$ 来代替。方程 (4-17) ~ 方程 (4-19) 就变成

$$-im\omega v_1 = -eE_1 \quad (4-21)$$

$$-i\omega n_1 = -n_0 ik v_1 \quad (4-22)$$

$$ikE_1 = -4\pi en_1 \quad (4-23)$$

消去 n_1 和 E_1 ，方程 (4-21) 变为

$$-im\omega v_1 = -e \frac{-4\pi e - n_0 ik v_1}{ik} = -i \frac{4\pi n_0 e^2}{\omega} v_1 \quad (4-24)$$

如果 v_1 不为零，必须有

$$\omega^2 = 4\pi n_0 e^2 / m$$

因此，等离子体频率是

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi n_0 e^2}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4-25)$$

代入数值后，我们能近似公式

$$f_p \approx 9000 \sqrt{n} \quad (4-26)$$

这个频率仅取决于等离子体密度，它是等离子体的基本参量之一。因为 m 小，等离子体频率通常是很高的。例如，在密度为 $n = 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ 的等离子体中，我们得到

$$f_p \approx 10^4 (10^{12})^{1/2} = 10^{10} \text{ s}^{-1} = 10 \text{ GHz}$$

f_p 的辐射一般处于微波区。我们可将这个频率和另外一个电子频率 ω_c 进行比较。一个有用的数值公式是

$$f_{ce} \approx 2.8 B \text{ GHz/kG} \quad (B \text{ 的单位为 kG}) \quad (4-27)$$

这样，如果 $B \approx 3.5 \text{ kG}$ ， $n \approx 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ ，回旋频率近似等于电子的等离子体频率。

方程 (4-25) 告诉我们，如果发生一个等离子体振荡，它必定有一个只取决于 n 的频率。尤其是 ω 与 k 无关，所以群速度 $d\omega/dk$ 是零，扰动不能传播。用力学模拟能清楚地看到这种情况是如何发生的 (图 4-3)。设想许多重球用弹簧等距离地悬挂在一条线上。假如所有弹簧是相同的，每个球将以同一个频率垂直振荡。要是各个球彼此之间以适当的位相启动，就可使它们形成一个能在任何一个方向传播的波。频率将由弹簧来确定，而波长则能任意选择。在终端的两个未扰动球将不受影响，初始扰动并没有传播。像紧张的绳子一样，行波或者驻波都能产生。然而，绳子上的波必定要传播，因为每段绳子跟邻近各段绳子相连。

这个模拟不是十分确切的，因为等离子体振荡具有 k 方向的运动而不具有垂直于 k 方向的运动。然而，只要电子不与离子或其他电子发生碰撞，它们仍可以被描述成在水平方向运动的独立振子 (图 4-3)。但是，电场怎么样？它能否扩展

到超出初始扰动的区域，并使邻近的等离子体层产生振荡呢？在我们这个简单的例子中是不行的，因为等量的无限大的正负平面电荷层产生的电场为零。在任何有限系统中，等离子体振荡将传播。在图 4-4 中，平面等离子体振荡的正和负（划上阴影）区域被约束在一个圆柱管内。边缘电场引起了一种对邻近层的扰动耦合，振荡就不停留在局部区域。

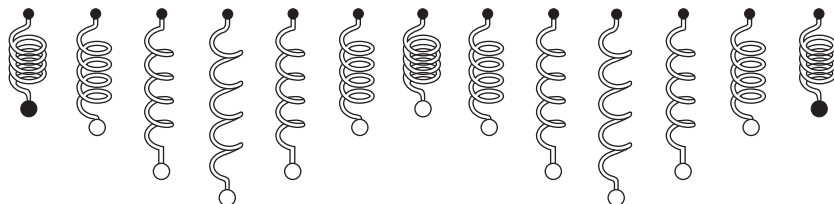


图 4-3 从独立振子系集综合成的波

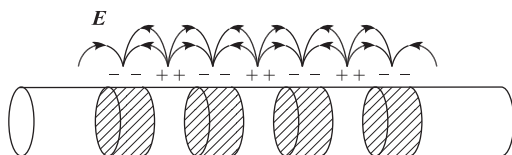


图 4-4 由于边缘场，等离子体振荡在有限媒质中的传播

习题

4-2 计算包含离子运动的等离子体频率，这样就证明我们所作的假定：即离子是固定的。（提示：在泊松方程中包括 n_i 项，并用离子的运动方程和连续方程。）

4-3 对于一个具有固定离子，且空间-时间行为为 $\exp[i(kx - \omega t)]$ 的简单等离子体振荡，如果 n_1 的相位是零，计算 ϕ_1 , E_1 , v_1 的相位 δ 。画出表示 n_1 , ϕ_1 , E_1 和 v_1 的正弦波

(a) 作为 x 的函数；

(b) 对 $\omega/k > 0$ ，作为 t 的函数；

(c) 对 $\omega/k < 0$ ，作为 t 的函数，而且说明它们的相对相位。注意，在适当的方向平移 x 图形就能得到时间图像，好像波通过一个固定的观察者一样。

4-4 把等离子体振荡的简单推导中所用的线性化泊松方程写成如下形式

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 0$$

导出适用于高频纵向运动介电常数 ϵ 的表达式。

4.4 电子等离子体波

存在着另一种能引起等离子体振荡传播的效应，就是热运动。以热速度流入

等离子体邻近层的电子，将携带出现在振荡区域的信息。于是，这种等离子体振荡可正当地称为等离子体波。在运动方程 (4-12) 中加上 ∇p_e 项就很容易处理这个效应。在一维问题中，根据方程 (3-53)， γ 为 3。因此

$$\nabla p_e = 3KT_e \nabla n_e = 3KT_e \nabla(n_0 + n_1) = 3KT_e \frac{\partial n_1}{\partial x} \hat{x}$$

线性化的运动方程是

$$mn_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -en_0 E_1 - 3KT_e \frac{\partial n_1}{\partial x} \quad (4-28)$$

注意在线性化时，我们已经忽略了 $n_1 \partial v_1 / \partial t$ ， $n_1 E_1$ 以及 $(v_1 \cdot \nabla) v_1$ 项。用方程 (4-20)，可将方程 (4-28) 变成

$$-im\omega n_0 v_1 = -en_0 E_1 - 3KT_e ik n_1 \quad (4-29)$$

E_1 和 n_1 仍然由方程 (4-23) 和 (4-22) 给出，得到

$$\begin{aligned} im\omega n_0 v_1 &= \left[en_0 \left(\frac{-4\pi e}{ik} \right) + 3KT_e ik \right] \frac{n_0 ik}{i\omega} v_1 \\ \omega^2 v_1 &= \left(\frac{4\pi n_0 e^2}{m} + \frac{3KT_e k^2}{m} \right) v_1 \\ \omega^2 &= \omega_p^2 + \frac{3}{2} k^2 v_{th}^2 \end{aligned} \quad (4-30)$$

其中， $v_{th}^2 \equiv 2KT_e/m$ 。现在，频率与 k 有关，群速度是有限的

$$\begin{aligned} 2\omega d\omega &= \frac{3}{2} v_{th}^2 2k dk \\ v_g &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2} \frac{k}{\omega} v_{th}^2 = \frac{3}{2} \frac{v_{th}^2}{v_\phi} \end{aligned} \quad (4-31)$$

从方程 (4-30) 的图 4-5，能很容易看到 v_g 总是小于 c 。图 4-5 是由方程 (4-30) 给出的色散关系 $\omega(k)$ 图。在曲线上任何一点 P ，从原点到 P 点所画直线的斜率给出相速度 ω/k ，而在 P 点处曲线的斜率给出群速度。很清楚，群速度总是小于 $(3/2)^{1/2} v_{th}$ ，而在非相对论性理论中，它是远小于 c 的。注意，在大的 k 值（小的 λ 值）时，信息实质上以热速度传播。在小的 k 值（大的 λ 值）时，即使 v_ϕ 大于 v_{th} ，信息也以远小于 v_{th} 的速度传播。这是因为在 λ 大时密度梯度小，热运动几乎不携带什么净动量进入到邻近层中。

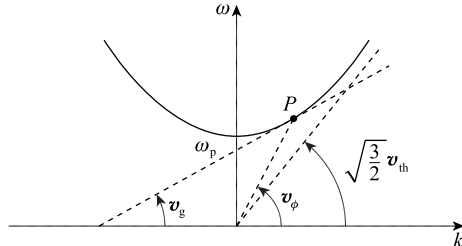


图 4-5 电子等离子体波（玻姆-格罗斯波）的色散关系

从朗缪尔时代起（20世纪20年代），人们就已经知道等离子体振荡的存在。直到1949年，玻姆（Bohm）和格罗斯（Gross）提出了一个详细的理论，才告诉人们波怎样传播以及波怎样激发。激发等离子体波的简便方法是将一个振荡电势加到等离子体中的一个栅极或一组栅极上；然而在那时，GHz范围的振荡器一般还没有使用。作为替代方法，我们必须用一个电子束来激发等离子体波。如果束中的电子被聚集，使得它们以频率 f_p 通过任何固定点，它们会产生具有那种频率的电场，并且激发等离子体振荡。这并不需要预先就将电子聚集，因为一旦发生等离子体振荡，它们将聚集电子，而振荡将通过一个正反馈机制增长。在1954年，卢尼（Looney）和布朗（Brown）首先做出了验证这个理论的实验。他们使用的装置全部安装在直径大约为10cm的玻璃球内（图4-6）。在低的水银蒸气压力（ 3×10^{-3} Torr）下，阴极K和阳极环A之间的放电形成了充满这个球的等离子体。电子束在一个侧管中产生，侧管中有一个负偏置的灯丝。发射的电子加速到200V并通过小孔射入等离子体中。用一个可移动的细探针丝拾取振荡信号，这个探针与无线电接收器相连接。图4-7示出了关于 f^2 与放电电流关系的实验结果，放电电流一般正比于密度。实验点显示了线性关系，和方程（4-26）大致符合。与直线的偏离可归因于方程（4-30）中的 $k^2 v_{th}^2$ 项。然而，并不能观察到所有的频率； k 只能取这样一些值，使得半波长的整数倍恰好为等离子体柱长度。在图4-7的左边示出了驻波图形。在这个实验中不能看到所预期的等离子体行波，也许是因为电子束是那么细，以至于热运动使电子离开电子束，从而消耗了振荡能量。电子聚集并不在等离子体中完成，而是在等离子体柱末端的振荡鞘中完成。在这个早期实验中，我们发现再现均匀等离子体理论中所假定的条件需要相当的技巧。

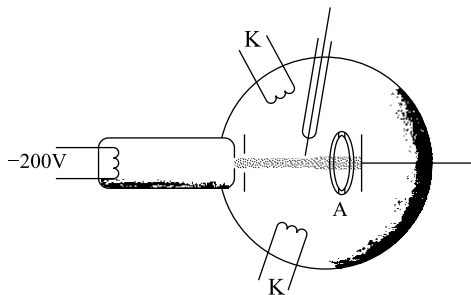


图4-6 等离子体振荡的卢尼-布朗实验简图

大量的新实验已经精确地证明了玻姆-格罗斯色散关系（方程（4-30）），作为现代实验技术的一个例子，我们示出了巴雷特（Barrett）、琼斯（Jones）和富兰克林（Franklin）的结果。图4-8是他们的装置简图。通过热钨板上（未示出）铯原子的热电离，在Q装置中产生了静等离子体圆柱。一个强磁场约束电子沿着柱运动。波由一个振荡器激励的金属丝探针所激起，并由第二个可移动的探针来检

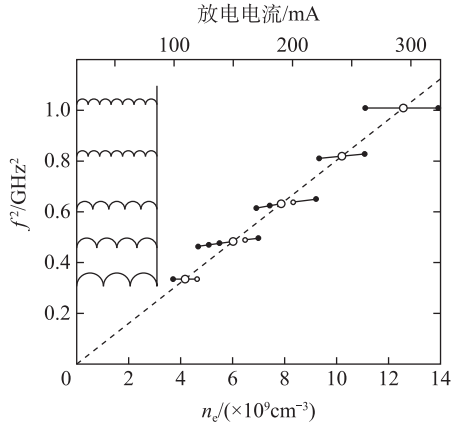


图 4-7 观察到的频率平方对等离子体密度的关系图

等离子体密度一般正比于放电电流。插图显示了观察到的振荡强度的空间分布，说明对每组实验点，存在着不同的驻波花样 [引自 D. H. Looney and S. C. Brown, Phys. Rev. **93**, 965 (1954)]

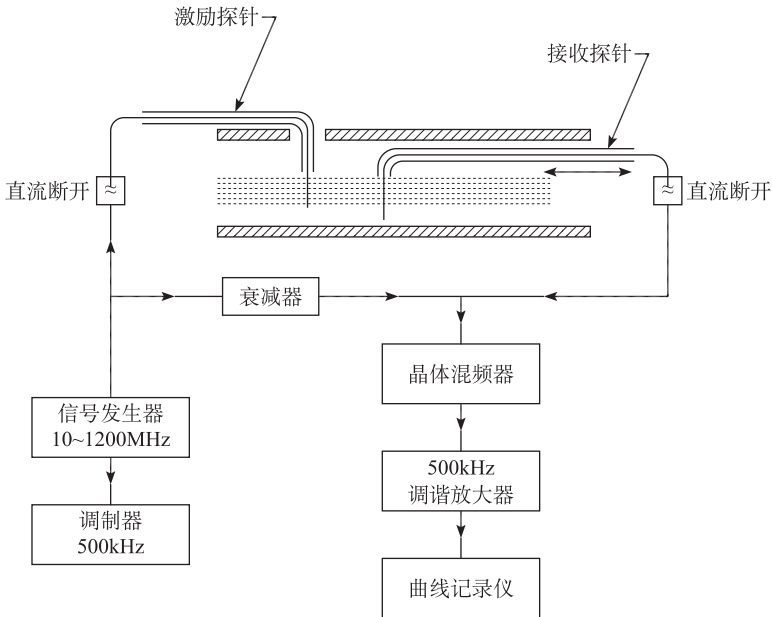


图 4-8 测量等离子体波的实验简图

[引自 P. J. Barrett, H. G. Jones and R. N. Franklin, Plasma Physics, **10**, 911 (1968)]

测。围绕着等离子体的金属屏蔽，阻止了探针间因普通的微波（电磁波）传播而引起的构通，因为对所使用的频率，屏蔽构成了超出截止点的波导。行波的波形由干涉仪来描述：发射和接收信号用晶体来检测，当两个信号同相时，晶体给出了一个大的直流输出；当它们相差 90° 时，输出为零。合成信号作为沿柱位置的

函数示于图 4-9. 用同步检波来抑制噪声水平. 激励信号以 500kHz 断续, 接收信号也应该调制到 500kHz. 通过只探测接收信号的 500kHz 分量, 就消除了具有其他频率的噪声. 图 4-9 的轨迹给出 k 的测量. 当振荡器频率 ω 变化时, 就得到 $(\omega/\omega_p)^2$ 对 ka 的色散关系图, 其中 a 是柱的半径 (图 4-10). 不同的曲线由不同的 $\omega_p a/v_{th}$ 值来标明. 对 $v_{th}=0$, 我们得到用 ∞ 标明的曲线, 它对应着色散关系 $\omega=\omega_p$. 对于有限的 v_{th} , 则曲线与图 4-5 的曲线相对应. 实验点和理论曲线之间的

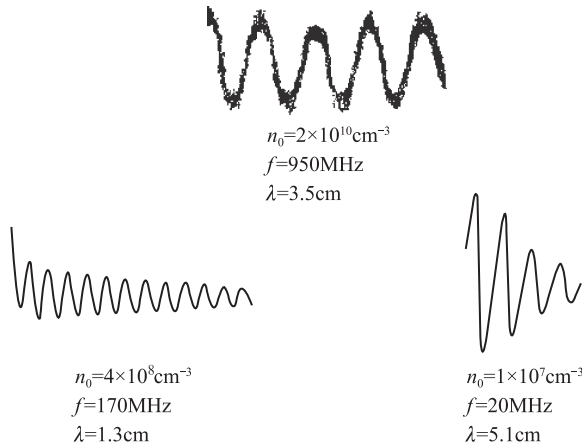


图 4-9 等离子体波中扰动密度的空间变化 (由于干涉仪测出), 它放大了来自两个探针的瞬时密度信号而加以时间平均

干涉仪调谐到波频率, 波频率随密度而变化. 低密度时的明显阻尼由等离子体中的噪声所引起

[引自 Barrett, Jones and Franklin, 同上述引用文]

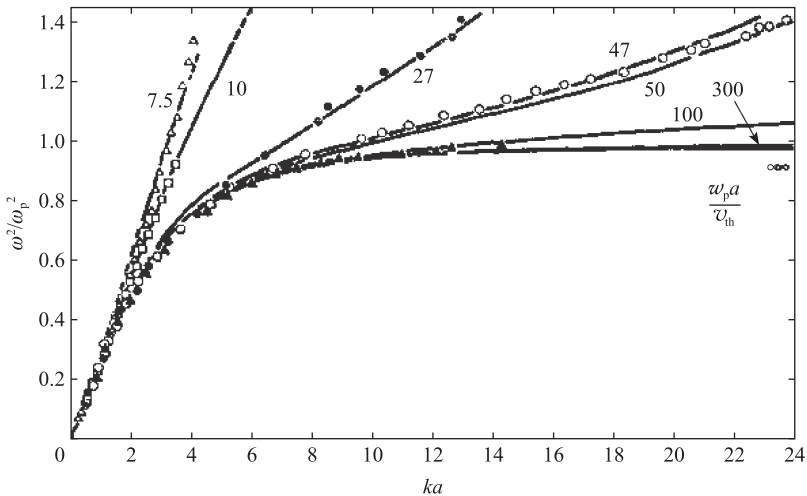


图 4-10 在半径为 a 的柱中, 电子等离子体波的测量和计算色散关系的比较

[引自 Barrett, Jones and Franklin, 同上述引用文]

一致性很好. 在 ka 较小时, ω 的减小是图 4-4 所示的有限几何效应. 在这特定的实验中, 那种效应可用另一种方式来解释. 为了满足由导体屏蔽而强加的边界条件, 即在导体上 $E=0$, 等离子体波必须与磁场成一个角度传播. 以 k 的径向分量向外传播的波和向内传播的波之间的相消干涉使得边界条件得到满足. 然而, 与 B 成一个角度传播的波有波峰和波谷, 相隔的距离大于 $\lambda/2$ (图 4-11). 由于电子只能沿 B 运动 (如果 B 非常大), 它们受到了较小的加速, 频率降至 ω_p 以下.

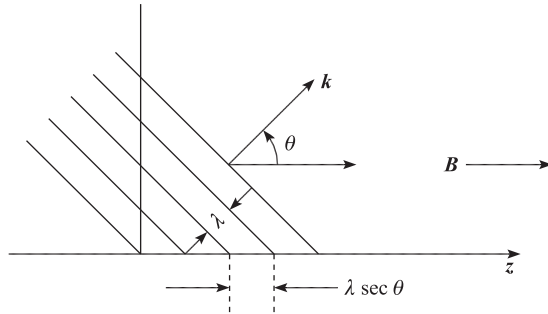


图 4-11 与磁场成一个角度传播的波阵面, 在场的方向上以大于波长 λ 的距离被分开

习题

4-5 (a) 通过在电子运动方程中加上一项 $(-m\nu_c v)$, 并且重新导出 $T_e=0$ 的色散关系, 计算碰撞阻尼对朗缪尔波传播的影响.

(b) 写出 $\text{Im}(\omega)$ 的明显表达式, 并且证明它的符号表示波随时间增加而被阻尼.

4.5 声波

作为离子波的一个引言, 让我们简短地回顾普通空气中的声波理论. 忽略黏滞性, 我们可把描述这些波的纳维-斯托克斯方程 (3-48) 写成

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right] = -\nabla p = -\frac{\gamma p}{\rho} \nabla \rho \quad (4-32)$$

连续性方程是

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad (4-33)$$

对具有均匀 p_0 和 ρ_0 值的稳态平衡点线性化, 我们有

$$-i\omega \rho_0 v_1 = -\frac{\gamma p_0}{\rho_0} i k \rho_1 \quad (4-34)$$

$$-i\omega \rho_1 + \rho_0 i k \cdot v_1 = 0 \quad (4-35)$$

其中我们再次采用了下列形式的波

$$\exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$$

对于 $\mathbf{k} = k\hat{x}$ 和 $\mathbf{v} = v\hat{x}$ 的平面波, 消去 ρ_1 , 我们发现

$$-i\omega\rho_0 v_1 = -\frac{\gamma p_0}{\rho_0} ik \frac{\rho_0 ik v_1}{i\omega}$$

$$\omega^2 v_1 = k^2 \frac{\gamma p_0}{\rho_0} v_1$$

或者

$$\frac{\omega}{k} = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma K T}{M} \right)^{1/2} \equiv c_s \quad (4-36)$$

这就是中性气体中声波速度 c_s 的表达式. 这个波是由于空气分子间的碰撞而从一层传播到下一层的压力波. 在没有中性气体和几乎没有碰撞的等离子体中, 发生了一种类似的现象. 这就叫做离子声波 (ion acoustic wave), 或简单地叫做离子波 (ion wave).

4.6 离子波

在无碰撞时, 普通声波不会发生. 然而, 离子由于它们的电荷仍然能互相传播振动; 声波能够经电场的媒介而发生. 由于涉及质量重的离子运动, 这些波将是低频的振荡, 我们将用 3.6 节描述的等离子体近似. 所以, 我们假定 $n_i = n_e = n$, 并且不用泊松方程. 无磁场时, 离子的流体方程是

$$Mn \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i \right] = en\mathbf{E} - \nabla p = -en \nabla \phi - \gamma_i K T_i \nabla n \quad (4-37)$$

我们已经假定了 $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ 并用了状态方程. 线性化并假定是平面波, 我们得到

$$-i\omega M n_0 v_{i1} = -en_0 ik \phi_1 - \gamma_i K T_i ik n_1 \quad (4-38)$$

就电子而论, 我们可以假定 $m=0$, 并应用 3.5 节有关沿 \mathbf{B} 运动的论证, 来考虑现在的 $\mathbf{B}=0$ 情况. 所以, 电子上力的平衡要求

$$n_e = n = n_0 \exp\left(\frac{e\phi_1}{K T_e}\right) = n_0 \left(1 + \frac{e\phi_1}{K T_e} + \dots\right)$$

因此, 电子密度以及离子密度的扰动是

$$n_1 = n_0 \frac{e\phi_1}{K T_e} \quad (4-39)$$

这里玻尔兹曼关系式的 n_0 也代替了平衡等离子体的密度, 在平衡等离子体中, 因为我们已经假定 $\mathbf{E}_0=0$, 因而我们能选 $\phi_0=0$. 使方程 (4-39) 线性化时, 我们已经去掉了泰勒指数展开式中的高阶项.

还需要的一个方程是线性化的离子连续性方程. 从方程 (4-22) 可得到

$$i\omega n_1 = n_0 ik v_{i1} \quad (4-40)$$

在方程 (4-38) 中, 我们可以用方程 (4-39) 和 (4-40) 的 v_{i1} 来代替 ϕ_1 和 n_1 , 得到

$$\begin{aligned} i\omega M n_0 v_{i1} &= \left(en_0 ik \frac{KT_e}{en_0} + \gamma_i K T_i ik \right) \frac{n_0 ik v_{i1}}{i\omega} \\ \omega^2 &= k^2 \left(\frac{KT_e}{M} + \gamma_i \frac{KT_i}{M} \right) \\ \frac{\omega}{k} &= \left(\frac{KT_e + \gamma_i K T_i}{M} \right)^{1/2} \equiv v_s \end{aligned} \quad (4-41)$$

这是离子声波的色散关系. 其中, v_s 是等离子体中的声速. 因为在我们已假定的平面波中离子受到了一维压缩, 在这里我们可以令 $\gamma_i = 3$. 相对于这些波来讲, 电子的运动是那么的快, 以至于它们有时间到处等化他们的温度; 因此, 电子是等温的, $\gamma_e = 1$. 换句话说, 因子 γ_e 应当出现在方程 (4-11) 中 KT_e 的前面.

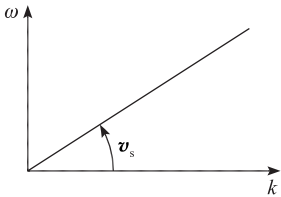


图 4-12 在小德拜长度的极限下, 离子声波的色散关系

离子波的色散曲线 (图 4-12) 和电子波的色散曲线 (图 4-5) 有一个基本不同的特性. 等离子体振荡基本上是具有热运动修正的恒频波. 离子波基本上是恒速波并且仅仅存在于有热运动存在时. 对于离子波, 群速度等于相速度. 下面, 通过描述有关的物理机制可以看到这种差别的缘由. 在电子等离子体振荡中, 其他种粒子 (即离子) 实质上保持固定. 在离子声波中, 其他种粒子

(即电子) 就远不是固定的; 事实上, 电子随离子一起被拉动并趋向于屏蔽由离子的聚集而产生的电场. 然而, 这个屏蔽是不完全的, 正如我们在 1.4 节中看到的那样, 由于电子的热运动, 能漏出 KT_e/e 量级的电势. 接下来发生什么现象呢? 正如在普通声波中一样, 离子形成压缩区和稀疏区. 压缩区由于以下两个原因趋向于向稀疏区扩展. 第一个原因, 离子热运动使离子扩展; 这个效应引起了方程 (4-41) 平方根中的第二项. 第二个原因, 离子的聚集带正电荷, 由于产生的电场而趋向于分散. 这个电场受到电子很强的屏蔽, 仅仅只有正比于 KT_e 的一部分电场作用在聚集的离子上. 这个效应引起了方程 (4-41) 平方根中的第一项. 由于离子本身的惯性, 使它的扩展运动超过平衡位置, 压缩和稀疏被再生而形成波.

上面提到的第二个效应引起了异常的现象. 当 KT_i 变成零时, 离子波仍然存在. 这种现象在中性气体中并不发生 (方程 (4-36)). 那时, 声速由下式给出

$$v_s = (KT_e/M)^{1/2} \quad (4-42)$$

这种现象常常能在实验室等离子体中观察到, 在那里, 通常出现 $T_i \ll T_e$ 的条件. 声速 v_s 取决于电子温度 (因为电场正比于电子温度) 和离子质量 (因为流体的惯性正比于离子质量).

4.7 等离子体近似的有效性

在推导离子波的速度中，我们用了中性条件 $n_i = n_e$ ，但却允许 \mathbf{E} 是有限量。为了研究在这个过程中引进了多少误差，我们让 n_i 与 n_e 不相同，并用线性化的泊松方程

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = k^2 \phi_1 = 4\pi e (n_{i1} - n_{e1}) \quad (4-43)$$

电子密度由线性化玻尔兹曼关系 (4-39) 给出

$$n_{e1} = \frac{e\phi_1}{KT_e} n_0 \quad (4-44)$$

把它代入方程 (4-43)，得到

$$\phi_1 \left(k^2 + \frac{4\pi n_0 e^2}{KT_e} \right) = 4\pi e n_{i1} \quad (4-45)$$

$$\phi_1 (k^2 \lambda_D^2 + 1) = 4\pi e n_{i1} \lambda_D^2$$

离子密度由线性化的离子连续性方程 (4-40) 给出

$$n_{i1} = \frac{k}{\omega} n_0 v_{i1} \quad (4-46)$$

把方程 (4-45) 和 (4-46) 代入离子运动方程 (4-38)，我们发现

$$i\omega M n_0 v_{i1} = \left(e n_0 i k \frac{4\pi e \lambda_D^2}{1 + k^2 \lambda_D^2} + \gamma_i K T_i i k \right) \frac{k}{\omega} n_0 v_{i1} \quad (4-47)$$

$$\omega^2 = \frac{k^2}{M} \left(\frac{4\pi n_0 e^2 \lambda_D^2}{1 + k^2 \lambda_D^2} + \gamma_i K T_i \right)$$

$$\frac{\omega}{k} = \left(\frac{KT_e}{M} \frac{1}{1 + k^2 \lambda_D^2} + \frac{\gamma_i K T_i}{M} \right)^{1/2} \quad (4-48)$$

除了因子 $1 + k^2 \lambda_D^2$ 外，它和我们以前得到的方程 (4-41) 是相同的。假定 $n_i = n_e$ 引起了 $k^2 \lambda_D^2 = (2\pi \lambda_D / \lambda)^2$ 量级的误差。由于在大多数实验中， λ_D 是非常小的，除了对最短波长的波以外，等离子体近似都是正确的。

4.8 离子波和电子波的比较

如果我们考虑这些短波长的波（取 $k^2 \lambda_D^2 \gg 1$ ），方程 (4-47) 变成

$$\omega^2 = k^2 \frac{4\pi n_0 e^2}{M k^2} = \frac{4\pi n_0 e^2}{M} \equiv \Omega_p^2 \quad (4-49)$$

为简单起见，我们也取了 $T_i \rightarrow 0$ 的极限。这里 Ω_p 是离子等离子体频率，对于高频率（短波长），离子声波变成恒频波。这样，在电子等离子体波和离子声波之间存在一种互补的形状：前者基本上是恒频的，但在大的 k 值时变成恒速的；而后者基本上是恒速的，但在大的 k 值时却变成恒频的。在图 4-13 中示出了这种比较。

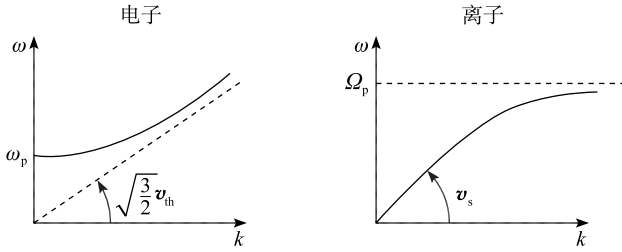


图 4-13 电子等离子体波和离子声波色散曲线的比较

王 (Wong), 莫特利 (Motley) 和德·安吉洛 (D'Angelo) 首先从实验证明了离子波的存在. 图 4-14 示出了他们所用的装置, 这又是一个 Q 装置. (我们如此经常地使用 Q 装置并不是偶然的, 仅仅在获得静等离子体的方案被发现之后, 才可能对等离子体理论进行细致的实验检验.) 通过插入等离子体的栅极发射和探测波.

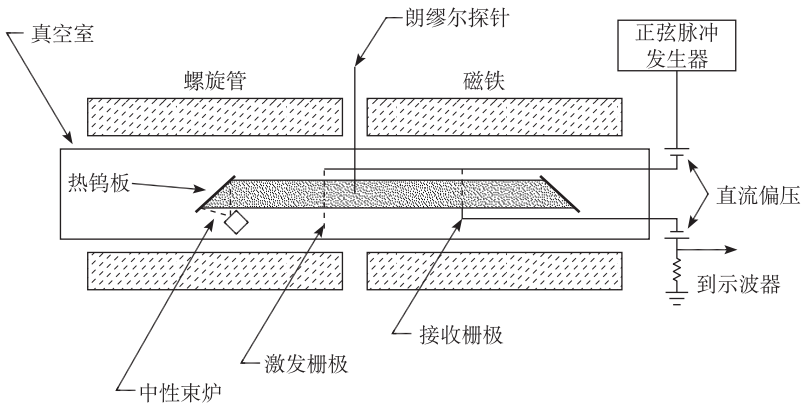


图 4-14 探测离子波的 Q 装置实验简图

[引自 A. Y. Wong, R. W. Motley and N. D'Angelo, Phys. Rev. **133**, A936 (1964)]

图 4-15 示出发射和接收信号的示波器扫迹. 从相位移动, 我们能求出相速度

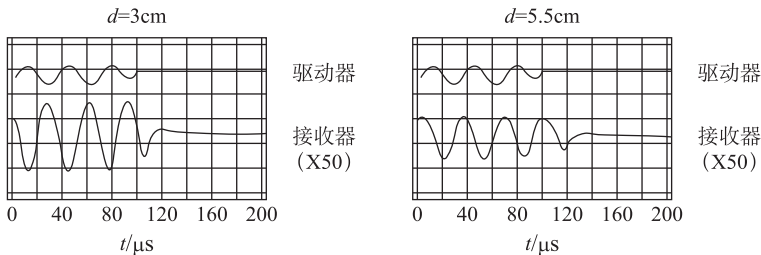


图 4-15 激励栅极信号和接收栅极信号的示波器图形, 两个栅极相距为 d , 显示了表示行波的延迟

[引自 Wong, Motley and D'Angelo, 同上述引用文]

(在此情形它与群速度相同)。在图 4-16 中, 对 $3 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3}$ 的等离子体密度, 画出了作为距离函数的相位移。对两种质量和不同的等离子体密度 n_0 , 在图 4-17 中画出了这种曲线的斜率, 它给出相速度。 v_s 不随 ω 和 n_0 变化从实验上得到证明, 而对钾和铯等离子体的两组点显示了对 M 的固有依赖关系。

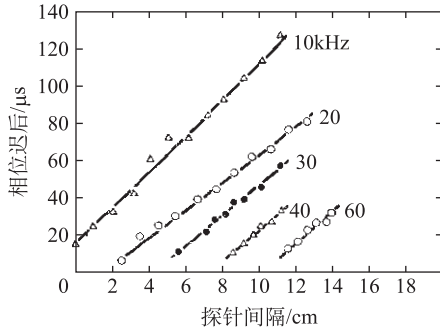


图 4-16 在不同的波激励器频率下, 延迟对探针间隔的实验测量。线的斜率给出了相速度

[引自 Wong, Motley and D'Angelo, 同上述引用文]

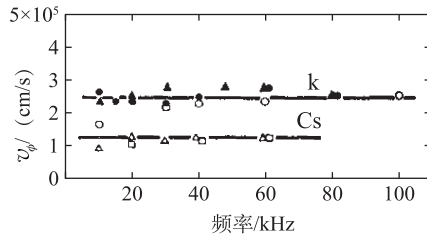


图 4-17 在钾和铯等离子体中, 实验测出作为频率函数的离子波的相速度。不同组的测量值对应于不同的等离子体密度

[引自 Wong, Motley and D'Angelo, 同上述引用文]

4.9 垂直于 B 的静电电子振荡

迄今为止, 我们已经假定了 $B=0$. 当存在磁场时, 可能有更多形式的波。我们仅考查最简单的情形, 从垂直于磁场传播的高频, 静电电子振荡着手。首先, 我们应当定义垂直、平行、纵向、横向、静电和电磁等术语。平行和垂直将被用来表示 k 相对于未扰动磁场 B_0 的方向。纵向和横向是指 k 相对于振荡电场 E_1 的方向。如果振荡磁场 B_1 是零, 波是静电波; 否则, 就是电磁波。最后两组术语由麦克斯韦方程相联系

$$\nabla \times E_1 = -\dot{B}_1 \quad (4-50)$$

或

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1 = \omega \mathbf{B}_1 \quad (4-51)$$

如果波是纵向的, $\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1$ 变零, 波也为静电波; 如果波是横向的, \mathbf{B}_1 为有限的值, 波为电磁波. 当然, \mathbf{k} 可能与 \mathbf{B}_0 或 \mathbf{E}_1 成任意角度. 于是, 应当有这里所列出的主模的混合.

回到垂直于 \mathbf{B}_0 的电子振荡, 我们将假定, 离子太重以至于不能以所包含的频率运动, 它们就形成一个固定、均匀的正电荷本底. 我们也将忽略热运动并且令 $KT_e = 0$. 平衡等离子体照例有恒定和均匀的 n_0 , \mathbf{B}_0 , 并且 \mathbf{E}_0 和 \mathbf{v}_0 为零. 那时, 电子运动受下列线性化方程所支配

$$m \frac{\partial \mathbf{v}_{e1}}{\partial t} = -e (\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_{e1} \times \mathbf{B}_0) \quad (4-52)$$

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_{e1} = 0 \quad (4-53)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = -4\pi e n_{e1} \quad (4-54)$$

我们将只考虑 $\mathbf{k} \parallel \mathbf{E}_1$ 的纵波. 我们可选择 x 轴指向 \mathbf{k} 和 \mathbf{E}_1 方向, z 轴指向 \mathbf{B}_0 方向 (图 4-18), 这样做无损于普遍性. 这样, $k_y = k_z = E_y = E_z = 0$, $\mathbf{k} = k\hat{x}$, $\mathbf{E} = E\hat{x}$. 去掉下标 1 和 e, 并将方程 (4-52) 写成分量形式, 我们得到

$$-i\omega m v_x = -eE - e v_y B_0 \quad (4-55)$$

$$-i\omega m v_y = e v_x B_0 \quad (4-56)$$

$$-i\omega m v_z = 0$$

解出方程 (4-56) 中的 v_y , 并代入方程 (4-55), 就有

$$\begin{aligned} i\omega m v_x &= eE + eB_0 \frac{ieB_0}{m\omega} v_x \\ v_x &= \frac{eE/im\omega}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \end{aligned} \quad (4-57)$$

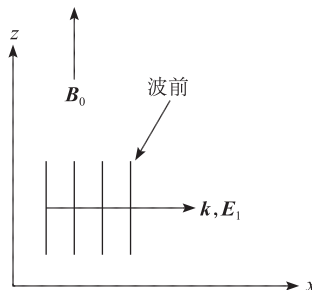


图 4-18 纵向平面波与 \mathbf{B}_0 成直角传播的几何图

应当注意, 在回旋共振时 ($\omega = \omega_c$), v_x 变成无穷大. 这正是所期望的, 因为电场随着 v_x 改变符号, 因而, 连续不断地加速电子. (当 $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ 和 ∇p 项两者都忽略时, 流体方程和单粒子方程是相同的; 所有粒子一起运动.) 从方程 (4-53) 的线性化形式, 我们得到

$$n_1 = \frac{k}{\omega} n_0 v_x \quad (4-58)$$

将方程 (4-54) 线性化, 并用最后两个结果, 可得到

$$ikE = -4\pi e \frac{k}{\omega} n_0 \frac{eE}{im\omega} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} \\ \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) E = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} E \quad (4-59)$$

因此, 色散关系是

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 \equiv \omega_h^2 \quad (4-60)$$

频率 ω_h 称为上杂化频率 (upper hybrid frequency). 穿过 \mathbf{B} 传播的静电电子波具有这个频率, 而沿着 \mathbf{B} 传播的那些波通常是 $\omega = \omega_p$ 的等离子体振荡. 只要忽略热运动, 群速度再次为零.

这个振荡的物理图像在图 4-19 中示出. 像在等离子体振荡中一样, 平面波中的电子形成压缩和稀疏的区域. 然而, 现在有一 \mathbf{B} 场垂直于运动, 洛伦兹力使轨道变成椭圆. 作用在电子上有两个恢复力: 静电力和洛伦兹力. 恢复力的增加使频率大于等离子体振荡的频率. 当磁场趋向于零时, 方程 (4-60) 中的 ω_c 趋向于零, 就又回到等离子体振荡. 当等离子体密度趋向零, ω_p 趋向于零, 由于静电力随密度趋于零而消失, 我们得到一个简单的拉莫尔回转.

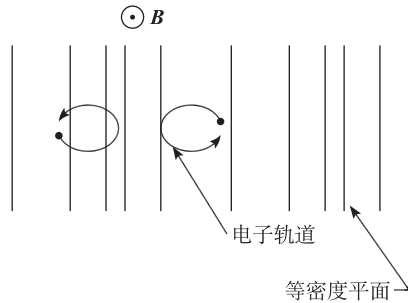


图 4-19 上杂化振荡中的电子运动

由穿过磁场的微波透射, 已经从实验上证明了上杂化频率的存在. 当改变等离子体密度, 在 ω_h 等于外加频率所对应的密度时, 通过等离子体的透射急剧下降. 这是因为上杂化振荡被激发, 并从束中吸收能量. 从方程 (4-60), 我们求出 ω_c^2/ω^2 和密度之间的线性关系

$$\frac{\omega_c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 1 - \frac{4\pi n e^2}{m\omega^2}$$

由图 4-20 的实验点得到这种线性关系, 其中画出了 ω_c^2/ω^2 对放电电流的图, 后者与 n 成比例.

现在, 如果我们考虑与 \mathbf{B} 成一个 θ 角的传播, 将得到两种可能的波. 一种类似于等离子体振荡, 另一种类似于上杂化振荡, 但两者都将因传播角而有所变

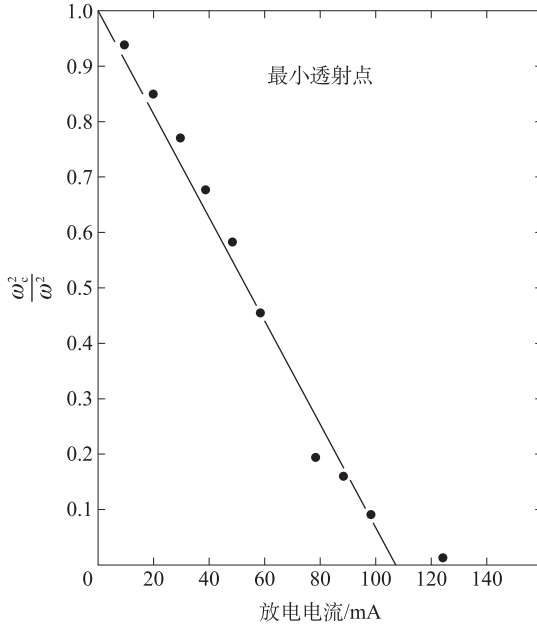


图 4-20 通过标明穿过磁场传送的微波能量的最大吸收条件（最小透射）而探测到上杂化频率存在的实验结果。画出了出现这种条件时的场（表达成 ω_c^2/ω^2 ）对放电电流（正比于等离子体密度）的图

[引自 R. S. Harp, Proceedings of Seventh International Conference on Phenomena in Ionized Gases, Belgrade, 1965, II, 294 (1966)]

化。其细节作为练习（习题 4-7）而留下。图 4-21 简略地示出了在固定 k_x 时这两种波的 $\omega-k_z$ 图，其中 $k_x/k_z = \tan\theta$ 。因为方程 (4-60) 的对称性， $\omega_c > \omega_p$ 的情况和 $\omega_p > \omega_c$ 的情况在交换下标后是相同的。对于大的 k_z ，波平行于 \mathbf{B}_0 传播。一种波是 $\omega = \omega_p$ 的等离子体振荡；另一种波，当 $k_z \rightarrow \infty$ 时，在 $\omega = \omega_c$ 处是一个假根。对于小的 k_z ，我们得到在本节讨论的 $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$ 的情况。下面一支消失，而上面一支趋近于 $\omega = \omega_h$ 的杂化振荡。特里维尔皮斯 (Trivelpiece) 和古尔德 (Gould) 首先计

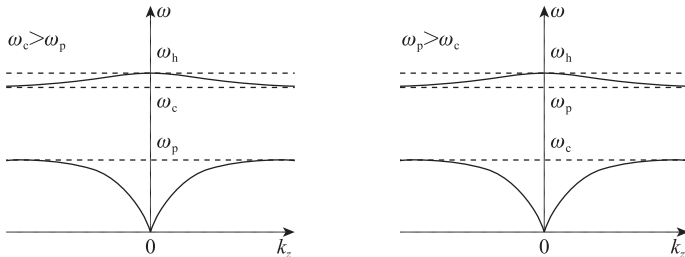


图 4-21 在充满均匀等离子体并具有同轴磁场的导体柱中，静电电子波的特里维尔皮斯-古尔德色散曲线

[引自 A. W. Trivelpiece and R. W. Gould, Appl. Phys. 30, 1784 (1959)]

算了这些曲线，并且也从实验上证实了这些曲线（图 4-22）。特里维尔皮斯-古尔德实验是在圆柱形等离子体柱中完成的；实验证明，在这种情况下，改变 k_z 等价于同 \mathbf{B}_0 成不同夹角传播的平面波。

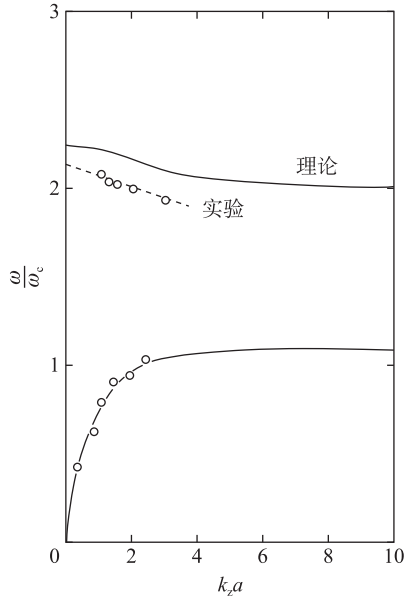


图 4-22 特里维尔皮斯-古尔德曲线的实验证明，说明向后传播的波存在，即群速度（由色散曲线的斜率所表示）的方向和相速度相反的波
[引自 Trivelpiece and Gould, 同上述引用文]

习题

4-6 对于上杂化振荡，证明椭圆轨道（图 4-19）总是在 \mathbf{k} 方向被拉长。（提示：从运动方程推导用 ω/ω_c 来表示的 v_x/v_y 的表达式。）

4-7 求出与 \mathbf{B}_0 成任意角度 θ 传播的静电电子波的色散关系。提示：选择 x 轴，使 \mathbf{k} 和 \mathbf{E} 位于 $x-z$ 平面(图 4-23)。于是

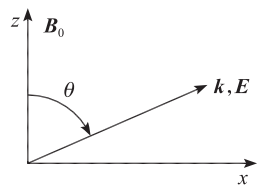


图 4-23

$$E_x = E_1 \sin\theta, \quad E_z = E_1 \cos\theta, \quad E_y = 0$$

对 \mathbf{k} 也有类似的表达式。在均匀 n_0 和 $\mathbf{v}_0 = \mathbf{E}_0 = 0$ 时，可用通常的方法解出运动方程、连续性方程和泊松方程。

(a) 证明答案

$$\omega^2(\omega^2 - \omega_h^2) + \omega_c^2 \omega_p^2 \cos^2 \theta = 0$$

(b) 写出这个 ω^2 二次方程的两个解，并且证明在 $\theta \rightarrow 0$ 和 $\theta \rightarrow \pi/2$ 的极限时，

重新出现我们以前得到的结果. 证明在这些极限时, 两个解中的一个没有物理意义的假根.

(c) 配成平方, 证明上面方程是一个椭圆方程:

$$\frac{(y-1)^2}{1^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

其中, $x = \cos\theta$, $y = 2\omega^2/\omega_h^2$, $a = \omega_h^2/2\omega_c\omega_p$.

(d) 对 $\omega_p/\omega_c = 1, 2$ 和 ∞ 画出椭圆图.

(e) 试证明, 如果 $\omega_c > \omega_p$, ω 下面的根总是小于 ω_p (对任何 $\theta > 0$), 上面的根总是位于 ω_c 和 ω_h 之间; 而如果 $\omega_p > \omega_c$, 下面的根低于 ω_c , 上面的根是在 ω_p 和 ω_h 之间.

4.10 垂直于 B 的静电离子波

下面我们考虑当 \mathbf{k} 垂直于 \mathbf{B}_0 时, 离子声波会发生什么情况. 令 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0$ 精确等于零是诱人的, 但是这会导出这样一种结果 (4.11 节), 它在数学上虽然是正确的, 但不能描述在真实等离子体中通常发生的现象. 作为一种替代, 我们将假定 \mathbf{k} 几乎垂直于 \mathbf{B}_0 ; 在后面将清楚地给出“几乎”的含义. 我们将假定通常为无限的

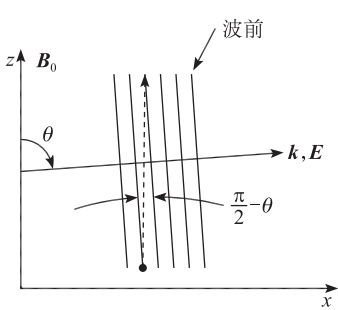


图 4-24 与 \mathbf{B}_0 近于垂直传播的静电离子回旋波几何图

的等离子体处于平衡中, 它具有定常和均匀的 n_0 和 \mathbf{B}_0 , 并且 $\mathbf{v}_0 = \mathbf{E}_0 = 0$. 为简单起见, 我们将取 $T_i = 0$; 这样做不会丢失任何重要的效应, 因为我们知道即使 $T_i = 0$, 声波仍然存在. 我们还假定静电波具有 $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = 0$, 所以 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. 其几何结构在图 4-24 中示出. 角度 $\frac{1}{2}\pi - \theta$ 取成如此之小, 以至于就离子运动

而言, 我们可以取 $\mathbf{E} = E_1 \hat{x}$ 和 $\nabla = ik\hat{x}$. 然而, 对于电子来说, $\frac{1}{2}\pi - \theta$ 为零还是为小而有限的值会带来很

大的不同. 电子有如此小的拉莫尔半径, 使得它们不能沿着 x 方向运动来保持电荷的中性, \mathbf{E} 的作用是使电子在 y 方向来回漂移. 然而, 如果 θ 并不确切地等于 $\pi/2$, 电子就能沿着图 4-24 中的虚线 (沿 \mathbf{B}_0) 运动, 从波的负区域携带电荷到波的正区域, 并实现德拜屏蔽. 离子不能有效地这样做, 因为离子的惯性使它们不能在一个波周期内运动这么长的距离. 这就是为什么对离子我们能忽略 k_z . 临界角 $\chi = \frac{1}{2}\pi - \theta$ 正比于离子与电子的平行速度之比:

$\chi \simeq (m/M)^{1/2}$ (以弧度为单位). 对于大于这个值的角度 χ , 以下处理是正确的; 而对小于这个值的角度 χ , 4.11 节的处理是正确的.

经过这段很长的介绍之后, 我们开始简短地推导结果. 对离子运动方程, 我

们有

$$M \frac{\partial \mathbf{v}_{\parallel}}{\partial t} = -e \nabla \phi_1 + e \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}_0 \quad (4-61)$$

假定平面波在 x 方向传播并分成两个分量

$$\begin{aligned} -i\omega M v_{\text{ix}} &= -eik\phi_1 + ev_{\text{iy}}B_0 \\ -i\omega M v_{\text{iy}} &= -ev_{\text{ix}}B_0 \end{aligned} \quad (4-62)$$

像以前那样解方程，得到

$$v_{\text{ix}} = \frac{ek}{M\omega} \phi_1 \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} \quad (4-63)$$

式中， $\Omega_c = eB_0/M$ 是离子回旋频率，离子的连续性方程照例是

$$n_{\text{il}} = n_0 \frac{k}{\omega} v_{\text{ix}} \quad (4-64)$$

假定由于有限的角 χ ，电子能沿着 \mathbf{B}_0 运动，我们能用电子的玻尔兹曼关系。其线性化形式为

$$\frac{n_{\text{e1}}}{n_0} = \frac{e\phi_1}{KT_e} \quad (4-65)$$

现在，等离子体近似 $n_i = n_e$ 就封闭了方程组。用方程 (4-64) 和 (4-65) 能将方程 (4-63) 写成

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right) v_{\text{ix}} &= \frac{ek}{M\omega} \frac{KT_e n_0 k}{en_0 \omega} v_{\text{ix}} \\ \omega^2 - \Omega_c^2 &= k^2 \frac{KT_e}{M} \end{aligned} \quad (4-66)$$

由于我们已经取 $KT_i = 0$ ，所以能把这个式子写成

$$\omega^2 = \Omega_c^2 + k^2 v_s^2 \quad (4-67)$$

这就是静电离子回旋波的色散关系。

这些波的物理解释非常类似于图 4-19 中上杂化波的物理解释。离子经历了一个声型的振荡，但是洛伦兹力构成了一个新的恢复力，引起了方程 (4-67) 中的 Ω_c^2 项。如果电子提供德拜屏蔽，声色散关系 $\omega^2 = k^2 v_s^2$ 才是正确的。在这种情况下，电子通过沿着 \mathbf{B}_0 流动长距离来实现德拜屏蔽。

莫特利和德·安吉洛还是在一个 Q 装置 (图 4-25) 中首先观察到静电离子回旋波。波穿过磁场径向向外传播，并且被沿着轴的电流所激励 (电流接到小的辅助电极上)。激发的原因相当复杂，将不在这里给出。图 4-26 给出他们得到的波

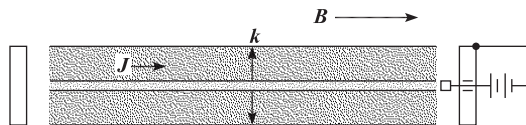


图 4-25 有关静电离子回旋波 Q 装置实验的简图

[引自 R. W. Motley and N. D'Angelo, Phys. Fluid, 6, 296 (1963)]

频率对磁场的结果. 在这个实验中, $k^2 v_s^2$ 项比 Ω_c^2 项要小, 测量到的频率仅仅稍微高于 Ω_c 值.

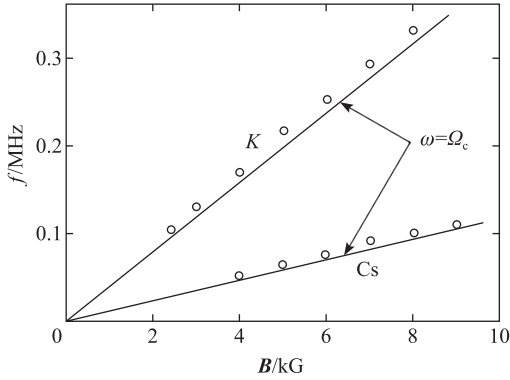


图 4-26 静电离子回旋波的频率对磁场的测量结果
[引自 Motley and D'Angelo, 同上述引用文]

4.11 下杂化频率

现在, 我们考虑当 θ 精确为 $\pi/2$ 时会发生什么现象, 电子不允许通过沿磁力线的流动来保持电荷中性. 电子将不遵守玻尔兹曼关系, 而服从全运动方程 (3-62). 如果我们保留有限电子质量, 即使我们假定 $T_e=0$ 和去掉 ∇p_e 项, 这个方程仍然是非平凡的; 因此, 为了简单起见, 我们将按以下方法做. 在方程 (4-63) 中, 离子运动方程不变

$$v_{ix} = \frac{ek}{M\omega} \phi_1 \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} \quad (4-68)$$

在方程 (4-68) 中将 e 变成 $-e$, M 变成 m , Ω_c 变成 $-\omega_c$, 我们能写出解方程 (3-62) 的结果 (对电子来讲, $T_e=0$)

$$v_{ex} = -\frac{ek}{m\omega} \phi_1 \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} \quad (4-69)$$

连续性方程为

$$n_{i1} = n_0 \frac{k}{\omega} v_{i1}, \quad n_{e1} = n_0 \frac{k}{\omega} v_{e1} \quad (4-70)$$

那时, 等离子体近似 $n_i = n_e$ 要求 $v_{i1} = v_{e1}$. 令方程 (4-68) 和 (4-69) 二式相等, 我们得到

$$M \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right) = -m \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)$$

$$\omega^2 (M+m) = m\omega_c^2 + M\Omega_c^2 = e^2 B^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)$$

$$\omega^2 = \frac{e^2 B^2}{Mm} = \Omega_c \omega_c$$

$$\omega = (\Omega_c \omega_c)^{1/2} \equiv \omega_1 \quad (4-71)$$

这叫做下杂化频率。它是 θ 精确等于 $\pi/2$ 时静电离子振荡所具有的频率。因为 θ 很难在所需的精确度内保持这个值，就很难观察到频率 $\omega = \omega_1$ 。

4.12 $B_0 = 0$ 的电磁波

下一个比较复杂的波是 $\mathbf{B}_1 \neq 0$ 的波。它们是横向电磁波——通过等离子体传播的光波或无线电波。我们从简单地复习真空中的光波开始。由于真空中 $j=0$ 和 $\epsilon = \mu = 1$ ，有关的麦克斯韦方程是

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\dot{\mathbf{B}}_1 \quad (4-72)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B}_1 = \dot{\mathbf{E}}_1 \quad (4-73)$$

取方程 (4-73) 的旋度，并代入到方程 (4-72) 的时间微商中，就得到

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}_1) = \nabla \times \dot{\mathbf{E}}_1 = -\dot{\mathbf{B}}_1 \quad (4-74)$$

再次假定平面波以 $\exp[i(kx - \omega t)]$ 变化，得到

$$\omega^2 \mathbf{B}_1 = -c^2 \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1) = -c^2 [\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_1) - k^2 \mathbf{B}_1] \quad (4-75)$$

由于从另一个麦克斯韦方程得到 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_1 = -i \nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$ ，结果是

$$\omega^2 = k^2 c^2 \quad (4-76)$$

c 是光波的相速度 ω/k 。

在 $\mathbf{B}_0 = 0$ 的等离子体中，方程 (4-72) 不变，但是考虑到一阶带电粒子运动引起的电流，我们必须在方程 (4-73) 中加上 $4\pi \mathbf{j}_1$ 项，则

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B}_1 = 4\pi \mathbf{j}_1 + \dot{\mathbf{E}}_1 \quad (4-77)$$

这个式子对时间的微商是

$$c^2 \nabla \times \dot{\mathbf{B}}_1 = 4\pi \frac{\partial \mathbf{j}_1}{\partial t} + \dot{\mathbf{E}}_1 \quad (4-78)$$

而方程 (4-72) 的旋度是

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_1) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_1) - \nabla^2 \mathbf{E}_1 = -\nabla \times \dot{\mathbf{B}}_1 \quad (4-79)$$

消去 $\nabla \times \dot{\mathbf{B}}_1$ ，并假定波有 $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ 关系，我们有

$$-\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1) + k^2 \mathbf{E}_1 = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \mathbf{j}_1 + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_1 \quad (4-80)$$

按照横波的意义，有 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1 = 0$ ，所以上式变成

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E}_1 = -4\pi i \omega \mathbf{j}_1 \quad (4-81)$$

如果我们考虑光波或微波，它们将具有如此高的频率，以至于离子可考虑成固定的。于是电流 \mathbf{j}_1 完全来自电子运动

$$\mathbf{j}_1 = -n_0 e \mathbf{v}_{e1} \quad (4-82)$$

从线性化的电子运动方程，(对 $KT_e=0$) 得到

$$m \frac{\partial v_{e1}}{\partial t} = -eE$$

$$v_{e1} = \frac{eE_1}{im\omega}$$
(4-83)

现在，方程 (4-81) 可写成

$$(\omega^2 - c^2 k^2) E_1 = 4\pi i \omega n_0 e \frac{eE_1}{im\omega} = \frac{4\pi n_0 e^2}{m} E_1$$
(4-84)

式中的右边项可以认为是 ω_p^2 的表达式，结果为

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$$
(4-85)

这是在没有直流磁场的等离子体中传播的电磁波的色散关系。可以看到，真空中的关系式 (4-76) 被一个描述等离子体振荡的 ω_p^2 项所修改。等离子体中光波的相速度大于光速

$$v_\phi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2} > c^2$$
(4-86)

然而，群速度不能超过光速。从方程 (4-85)，我们求得

$$\frac{d\omega}{dk} = v_g = \frac{c^2}{v_\phi}$$
(4-87)

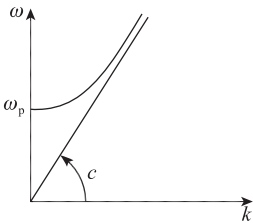


图 4-27 在没有直流磁场的等离子体中，电磁波的色散关系

v_ϕ 总是大于 c ，所以 v_g 小于 c 。色散关系 (4-85) 在图 4-27 中示出。这个图与等离子体波的图 4-5 相似，但是色散关系实际上是非常不同的，因为图 4-27 中的渐近速度 c 远大于图 4-5 中的热速度 v_{th} 。更重要的是在波阻尼上存在差别。具有大 $k v_{th}$ 的等离子体波被高度阻尼，这点我们将从第 7 章的动力学理论中得到。另外，在大的 kc 时，电磁波变成普通的光波，而在这种极限下，它不因等离子体的存在而阻尼。

类似于方程 (4-85) 的色散关系显示出一种称作截止 (cutoff) 的现象。如果我们通过等离子体发送一个给定频率 ω 的微波束，在等离子体中的波长 $2\pi/k$ 将取方程 (4-85) 所规定的值。当增加等离子体密度，也就是 ω_p^2 上升时， k^2 必定会减少，波长变得越来越长；最后，将达到使 k^2 为零的密度。对大于这个值的密度，方程 (4-85) 对任何实数 k 都不能满足，波不能传播。这个截止条件发生在 $\omega = \omega_p$ 的临界密度 n_c ，也就是 (从方程 (4-25) 得到)

$$n_c = m\omega^2 / 4\pi e^2$$
(4-88)

如果 n 太大或 ω 太小，一个电磁波不能通过等离子体。当这种情况发生时，方程 (4-85) 告诉我们 k 是虚数

$$ck = (\omega^2 - \omega_p^2)^{1/2} = i |\omega_p^2 - \omega^2|^{1/2}$$
(4-89)

由于波有空间的依赖性 $\exp(ikx)$ ，如果 k 是虚数，它将指数衰减。趋肤深度 δ 可按如下方法得到

$$e^{ikx} = e^{-|k|x} = e^{-x/\delta}, \quad \delta = |k|^{-1} = \frac{c}{(\omega_p^2 - \omega^2)^{1/2}} \quad (4-90)$$

对大多数实验室等离子体，截止频率处于微波区域。

4.13 实验应用

截止现象提出一个测量等离子体密度的简便方法。由速调管产生的微波束通过喇叭形天线发射到等离子体中（图 4-28）。透过束被另一个喇叭形天线所收集，并由一个晶体来检测。当频率或等离子体密度变化时，每当条件（4-88）在等离子体的某处被满足，检出信号将消失。这个过程就给出最大密度。这不是一种很方便的或多方面适用的方案，因为单个微波发生器产生的频率范围是有限的。

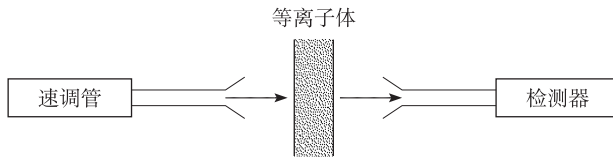


图 4-28 用透过信号的截止进行等离子体密度的微波测量

广泛运用的密度测量方法依赖于方程（4-85）给出的色散关系或折射率的变化。折射率 \tilde{n} 定义成

$$\tilde{n} \equiv c/v_p = ck/\omega \quad (4-91)$$

很清楚，折射率随 ω 而变化，而等离子体是一个色散的媒质。用一个微波干涉仪来测量密度（图 4-29），其物理原理与迈克耳孙（Michelson）干涉仪相同。从速调管来的信号分离成两路。一部分信号通过“参考支路”到检测器。其余部分用喇叭天线送入等离子体。检测器对两个接收信号的振幅之和的均方起响应。在没有等离子体时，使用衰减器和移相器，调节两个信号使它们振幅相等，相位差

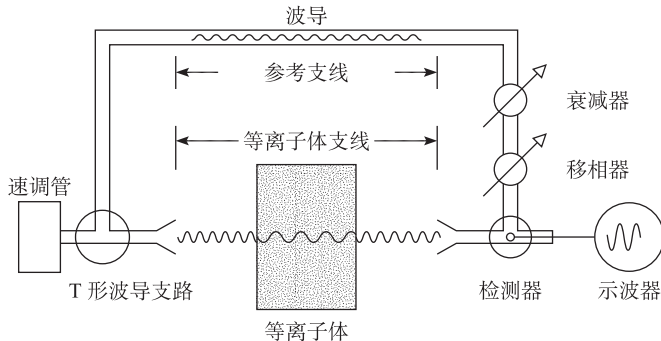


图 4-29 用于等离子体密度测量的微波干涉仪

180°，所以检测器的输出为零。当加上等离子体时，随波长的增加而改变了等离子体支路中的信号相位（图 4-30）。于是，检测器给出一个有限的输出信号。当密度增加时，相移每改变 360°，检测器输出经历一个极大和极小。从这种干涉条纹移动的数目可求出等离子体的平均密度。实际上，人们通常运用足够高的频率，使得干涉条纹移动保持小量。于是，密度线性地正比于干涉条纹移动（习题 4-11）。在低密度时，这个技术的灵敏度受到了参考支路对振动和热膨胀的稳定性的限制，同时也必须对因碰撞而引起的衰减以及有限大小等离子体引起的衍射和折射进行修正。

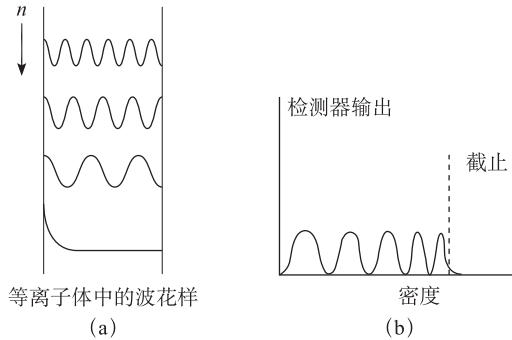


图 4-30 当等离子体密度增加时，从干涉仪观察到的信号（(b) 图）和在等离子体中相应的波形（(a) 图）

等离子体折射率小于 1 具有某些有意义的结果。一个凸的等离子体透射镜（图 4-31）是发散的而不是收敛的。在脉冲气体激光器的运转中，这个效应作为一个重要的机制而提出。图 4-32 示出了一个由环电极之间的脉冲放电而激励的 HCN 激光器。在接近轴处等离子体是稠密的，而在接近壁处等离子体不怎么稠密，从而形成负透镜。设想有曲率的反射镜将光线约束到图 4-32 中勾画出轮廓的区域中，但是，如果密度太高，则等离子体的散焦效应破坏了光腔。在等离子体密度衰减到临界值之前，不能射出激光。这个效应能解释这类激光器中电脉冲和光脉冲之间的延迟。HCN 激光器在 $\lambda = 337\mu\text{m}$ 或 0.0337cm 运转，对应于频率

$$f = \frac{c}{\lambda} \approx \frac{3 \times 10^{10}}{3 \times 10^{-2}} = 10^{12} \text{ Hz}$$

从方程 (4-88) 得到的临界密度是

$$n_c = m\pi f^2 / e^2 = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$$

然而，因为涉及长程长，甚至在 $n = 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ （初始等离子体密度量级）时，散焦效应也是明显的。在 $10.6\mu\text{m}$ 运转的二氧化碳激光器有 $n_c \approx 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ，它并不遇到这个困难。

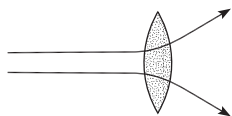


图 4-31 由于折射率小于 1，等离子体透镜具有异常的光学性质

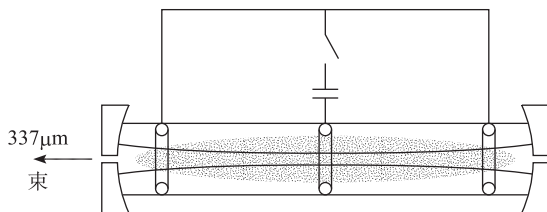


图 4-32 发射 $337\mu\text{m}$ 辐射的脉冲氰化氢激光器在甲烷和氮气的混合物中，由一个电容通过环状电极放电而产生等离子体

也许最熟悉的等离子体截止效应对短波无线电通信的应用。当无线电波达到电离层的一个高度，那里的等离子体密度足够高，波就被反射（图 4-33），使得围绕地球发送信号成为可能。如果我们取最大密度是 10^6cm^{-3} ，临界频率具有 10MHz 的量级（参看方程（4-26））。为了穿过电离层，与空间飞船通信必须用高于此临界值的频率。然而，在空间飞船再入大气层期间，由于强烈的热摩擦产生等离子体。它就引起等离子体截止，导致再入期间的通信中断（图 4-33）。

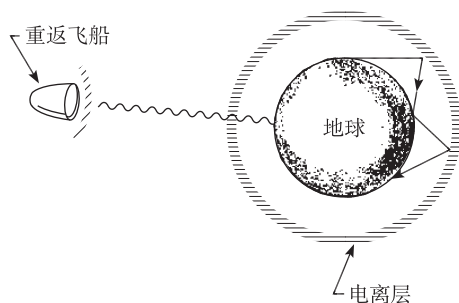


图 4-33 地球电离层的夸张图，说明等离子体对无线电通信的影响

习题

4-8 获得诺贝尔奖金的第一个等离子体物理学家阿尔芬（Hannes Alfvén）曾提出，也许原始的宇宙在物质和反物质之间是匀称的。假定宇宙曾经是均匀的质子、反质子、电子和正电子的混合物，每种密度为 n_0 。

(a) 求高频电磁波在这种等离子体中的色散关系，可以忽略碰撞、湮没和热效应。

(b) 用泊松方程求出离子波的色散关系。可以忽略 T_i （但不能忽略 T_e ），并且假定所有的轻子遵守玻尔兹曼关系。

4-9 对于电磁波，证明折射率等于适当的等离子体介电常数的平方根（参考习题 4-4）。

4-10 在 Q 装置的钾等离子体中，分数为 κ 的电子能被负的氯离子所代替。因此，每 cm^3 的等离子体中有 n_0 个钾正离子 K^+ ， κn_0 个氯负离子 Cl^- 和 $(1-\kappa)n_0$ 个电子。如果 $\kappa=0.6$ ，求出截止 3cm 波长微波束的 n_0 的临界值。

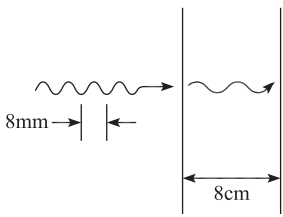


图 4-34

4-11 在 8cm 厚的无限大平面平行的等离子体片上，用一个 8mm 微波干涉仪（图 4-34）。

(a) 如果等离子体密度是均匀的，观察到 $1/10$ 个干涉条纹的相移，则密度是多少？（注意，一个干涉条纹对应 360° 的相移）。

(b) 试证明：如果相移是小量，则相移正比于密度。

4.14 垂直于 B_0 的电磁波

现在，我们考虑存在磁场时电磁波的传播。首先，我们处理垂直传播的情况， $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$ 。如果我们选取横波， $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}_1$ ，仍然存在两种选择： \mathbf{E}_1 可平行于 \mathbf{B}_0 或垂直于 \mathbf{B}_0 （图 4-35）。

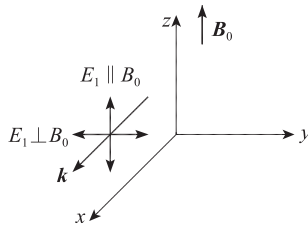


图 4-35 电磁波与 B_0 成直角传播的几何图

4.14.1 寻常波， $E_1 \parallel B_0$

如果 E_1 平行于 B_0 ，我们能选取 $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$ ， $\mathbf{E}_1 = E_1 \hat{z}$ ， $\mathbf{k} = k \hat{x}$ 。在真实的实验中，用 B_0 向的窄尺寸波导管把一束微波入射到等离子体柱中，可以近似实现这种几何结构（图 4-36）。

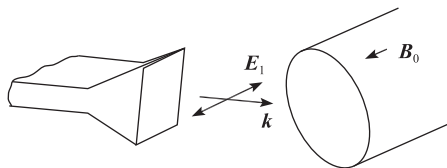


图 4-36 从一个波导管天线向磁化等离子体柱发射的寻常波

有关此情形的波动方程仍由方程 (4-81) 给出

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E}_1 = -4\pi i \omega \mathbf{j}_1 = 4\pi i n_0 e \omega \mathbf{v}_{e1} \quad (4-92)$$

由于 $\mathbf{E}_1 = E_1 \hat{\mathbf{z}}$, 我们只需要 v_{ez} 分量. 它由下面的运动方程给出

$$m \frac{\partial v_{ez}}{\partial t} = -e E_z \quad (4-93)$$

由于这个方程和 $\mathbf{B}_0 = 0$ 的方程相同, 结果也就与前面 \mathbf{B}_0 的结果相同

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \quad (4-94)$$

这种 $\mathbf{E}_1 \parallel \mathbf{B}_0$ 的波称为寻常波. 寻常和非寻常波的术语来自于晶体光学; 然而, 地位已经被交换. 在等离子体物理学中, 令“寻常波”是一种不受磁场影响的波更有意义些. 用晶体光学来严格分析就需要把它称作“非寻常波”.

4.14.2 非寻常波, $\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{B}_0$

如果 \mathbf{E}_1 垂直于 \mathbf{B}_0 , 电子运动将受到 \mathbf{B}_0 的影响, 色散关系就会改变. 为了处理这种情况, 人们会企图取 $\mathbf{E}_1 = E_1 \hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{k} = k \hat{\mathbf{x}}$ (图 4-35). 然而, 具有 $\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{B}_0$ 的波趋于椭圆偏振而不是平面偏振. 也就是说, 当这样一种波传播进入等离子体时, 产生沿 \mathbf{k} 方向分量 E_x , 这样, 变成部分为纵波和部分为横波. 为了更适当地处理这个模, 我们必须让 \mathbf{E}_1 具有 x 和 y 两个分量 (图 4-37)

$$\mathbf{E}_1 = E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}} \quad (4-95)$$

现在, 线性化的电子运动方程 ($KT_e = 0$) 是

$$-im\omega \mathbf{v}_{e1} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_{e1} \times \mathbf{B}_0) \quad (4-96)$$

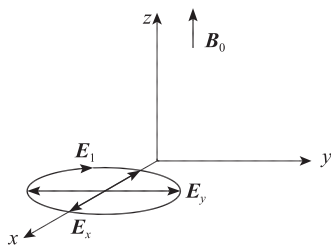


图 4-37 非寻常波的 \mathbf{E} 矢量是椭圆偏振的, 分量 E_x 和 E_y 以位相差 90° 振荡, 所以总电场矢量 \mathbf{E}_1 矢尖在每个波周期沿椭圆运动一次

只有 x 分量和 y 分量是非零的, 它们是

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{-ie}{m\omega} (E_x + v_y B_0) \\ v_y &= \frac{-ie}{m\omega} (E_y - v_x B_0) \end{aligned} \quad (4-97)$$

下标 1 和 e 已经去掉. 像通常那样解 v_x 和 v_y , 我们得到

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{e}{m\omega} \left(-iE_x - \frac{\omega_c}{\omega} E_y \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1} \\v_y &= \frac{e}{m\omega} \left(-iE_y + \frac{\omega_c}{\omega} E_x \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1}\end{aligned}\quad (4-98)$$

波动方程由方程 (4-80) 给出, 现在我们必须在那个式子中保留纵向项 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1 = kE_x$:

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E}_1 + c^2 k E_x \mathbf{k} = -4\pi i \omega \mathbf{j}_1 = 4\pi i n_0 e \omega \mathbf{v}_{e1} \quad (4-99)$$

把这个式子分解成 x 分量和 y 分量, 并用方程 (4-98), 我们得到

$$\begin{aligned}\omega^2 E_x &= -4\pi i \omega n_0 e \frac{e}{m\omega} \left(iE_x + \frac{\omega_c}{\omega} E_y \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1} \\(\omega^2 - c^2 k^2) E_y &= -4\pi i \omega n_0 e \frac{e}{m\omega} \left(iE_y - \frac{\omega_c}{\omega} E_x \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1}\end{aligned}\quad (4-100)$$

引入 ω_p 的定义, 可以将这组方程写成

$$\begin{aligned}\left[\omega^2 \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) - \omega_p^2 \right] E_x + i \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega} E_y &= 0 \quad \text{Ⓐ} \\ \left[(\omega^2 - c^2 k^2) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) - \omega_p^2 \right] E_y - i \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega} E_x &= 0 \quad \text{Ⓑ}\end{aligned}\quad (4-101)$$

这是 E_x 和 E_y 的两个联立方程, 仅当系数行列式为零时, 方程才能相容而有非零解

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = 0 \quad (4-102)$$

由于系数 A 是 $\omega^2 - \omega_h^2$, 其中 ω_h 是方程 (4-60) 定义的上杂化频率, 条件 $AD=BC$ 能写成

$$\begin{aligned}(\omega^2 - \omega_h^2) \left[\omega^2 - \omega_h^2 - c^2 k^2 \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) \right] &= \left(\frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega} \right)^2 \\ \frac{c^2 k^2}{\omega^2} &= \frac{\omega^2 - \omega_h^2 - \left[(\omega_p^2 \omega_c / \omega)^2 / (\omega^2 - \omega_h^2) \right]}{\omega^2 - \omega_c^2}\end{aligned}\quad (4-103)$$

经过一些代数运算能简化这个式子. 用 $\omega_c^2 + \omega_p^2$ 代替上式右边的第一个 ω_h^2 项, 并在分子分母上同时乘 $\omega^2 - \omega_h^2$, 得到

$$\begin{aligned}\frac{c^2 k^2}{\omega^2} &= 1 - \frac{\omega_p^2 (\omega^2 - \omega_h^2) + (\omega_p^4 \omega_c^2 / \omega^2)}{(\omega^2 - \omega_c^2) (\omega^2 - \omega_h^2)} \\ &= 1 - \frac{\omega_p^2 \omega^2 (\omega^2 - \omega_h^2) + \omega_p^2 \omega_c^2}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_c^2) (\omega^2 - \omega_h^2)} \\ &= 1 - \frac{\omega_p^2 \omega^2 (\omega^2 - \omega_c^2) - \omega_p^2 (\omega^2 - \omega_c^2)}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_c^2) (\omega^2 - \omega_h^2)} \\ \frac{c^2 k^2}{\omega^2} &= \frac{c^2}{v_p^2} = 1 - \frac{\omega_p^2 (\omega^2 - \omega_p^2)}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_h^2)}\end{aligned}\quad (4-104)$$

这就是非寻常波的色散关系. 它是一种部分横向, 部分纵向的电磁波, 传播方向垂直于 \mathbf{B}_0 , 且 \mathbf{E}_1 与 \mathbf{B}_0 垂直.

4.15 截止和共振

非寻常波的色散关系远比我们至今遇到的任何一种色散关系要复杂. 为了分析它的意义, 定义**截止**和**共振**这些术语是有益的. 当折射率变零时, 由于 $\tilde{n} = ck/\omega$, 也就是波长变成无穷大时, 在等离子体中出现**截止**. 当折射率变为无穷大时, 也就是波长变为零时, 等离子体中发生**共振**. 当一种波通过 ω_p 和 ω_c 正在变化的区域传播时, 可能会碰到截止和共振. 一般地说, 波在截止点被反射, 在共振点被吸收.

令方程 (4-104) 中的 k 等于无穷大, 能得到非寻常波的共振. 对任何有限的 ω 值, $k \rightarrow \infty$ 意味着 $\omega \rightarrow \omega_h$, 因此, 共振就发生在等离子体中满足下列条件的点

$$\omega_h^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 = \omega^2 \quad (4-105)$$

很容易认出这个式子是穿过 \mathbf{B}_0 传播的静电波的色散关系 (方程 (4-60)). 当给定 ω 的波接近于共振点时, 其相速度和群速度都趋于零, 波的能量被转化成上杂化振荡. 非寻常波是部分电磁和部分静电的波; 在共振点时, 很容易证明 (习题 4-12), 这种波损失了它的电磁特性而变成一种静电振荡.

令方程 (4-104) 中的 k 等于零, 就求出非寻常波的截止. 除以 $\omega^2 - \omega_p^2$, 我们将 ω 的方程写成

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{1 - [\omega_c^2 / (\omega^2 - \omega_p^2)]} \quad (4-106)$$

用几个巧妙的代数步骤就能得到 ω 的简单表达式

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2 - \omega_p^2} &= \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \\ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} &= \frac{\omega_c^2 / \omega^2}{1 - (\omega_p^2 / \omega^2)} \\ \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^2 &= \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \\ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} &= \pm \frac{\omega_c}{\omega} \\ \omega^2 \mp \omega\omega_c - \omega_p^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4-107)$$

两个符号各给出一个不同的截止频率, 我们称它们为 ω_R 和 ω_L . 两个二次式的根是

$$\begin{aligned} \omega_R &= \frac{1}{2} [\omega_c + (\omega_c^2 + 4\omega_p^2)^{1/2}] \\ \omega_L &= \frac{1}{2} [-\omega_c + (\omega_c^2 + 4\omega_p^2)^{1/2}] \end{aligned} \quad (4-108)$$

每种情况的平方根前面都取了正号，因为我们习惯于 ω 总是取正值；在 $-x$ 方向行进的波将用 $-k$ 来描述。截止频率 ω_R 和 ω_L 分别称为右旋截止和左旋截止 (right-hand and left-hand cutoffs)，其原因在 4.16 节将会清楚看到。

截止和共振频率把色散图分成传播区域和非传播区域。用相速度对频率的图，或者更确切地讲，用 $\omega^2/c^2k^2 = 1/\tilde{n}^2$ 对 ω 的图 (图 4-38) 来代替通常的 $\omega-k$ 图就更具有启发性。为了解释这张图，设想 ω_c 是固定的，具有固定频率 ω 的波从外面送入到等离子体。当波遇到密度增加的区域时，频率 ω_L ， ω_p ， ω_h 和 ω_R 全都增加，在图中就向右移动。这和固定密度逐步减少频率 ω 的情况是相同的。采用后面的观点，我们看到，在 ω 高 (或密度低) 时，相速度接近于光速。当波进一步传播时， v_ϕ 增加直到遇见右旋截止频率为止。在那里， v_ϕ 变成无穷大。在 $\omega = \omega_R$ 和 $\omega = \omega_h$ 层之间， ω^2/k^2 为负值，不存在可能的传播。在 $\omega = \omega_h$ ，存在着共振

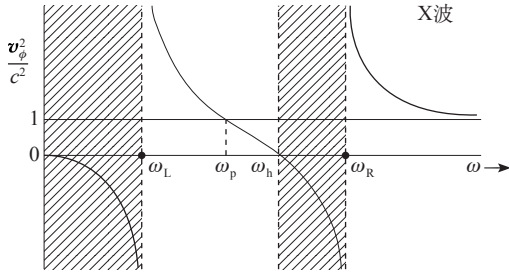


图 4-38 从相速度随频率变化的形状看非寻常 X 波的色散。在阴影区域，波不传播

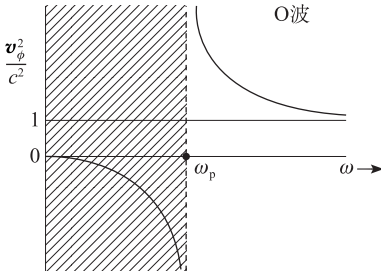


图 4-39 寻常 O 波的相似色散图

点， v_ϕ 变零。在 $\omega = \omega_h$ 和 $\omega = \omega_L$ 之间，传播又是可能的。在这个区域，波的传播或是比光速快，或是比光速慢，取决于 ω 小于还是大于 ω_p 。从方程 (4-104) 很清楚看到，当 $\omega = \omega_p$ 时，波以速度 c 传播。对于 $\omega < \omega_L$ ，又出现另一个不能传播波的区域。所以，非寻常波有两个传播区域，它们由一个截止带所分开。

作为比较，我们在图 4-39 示出了寻常波的同类曲线。这种色散关系只有一个截止并且没有共振。

4.16 平行于 B_0 的电磁波

现在，我们令 k 沿着 z 轴并让 E_1 有两个横向分量 E_x 和 E_y

$$k = k\hat{z}, \quad E_1 = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} \tag{4-109}$$

倘若我们简单地将 \mathbf{k} 从 $k\hat{x}$ 变到 $k\hat{z}$ ，仍然能用非寻常波的波方程 (4-99)。从方程 (4-100)，分量为

$$\begin{aligned}(\omega^2 - c^2 k^2)E_x &= \frac{\omega_p^2}{1 - (\omega_c^2/\omega^2)} \left(E_x - \frac{i\omega_c}{\omega} E_y \right) \\(\omega^2 - c^2 k^2)E_y &= \frac{\omega_p^2}{1 - (\omega_c^2/\omega^2)} \left(E_y + \frac{i\omega_c}{\omega} E_x \right)\end{aligned}\quad (4-110)$$

用缩写符号

$$\alpha \equiv \frac{\omega_p^2}{1 - (\omega_c^2/\omega^2)} \quad (4-111)$$

我们能把 E_x 和 E_y 的联立方程写成

$$\begin{aligned}(\omega^2 - c^2 k^2 - \alpha)E_x + i\alpha \frac{\omega_c}{\omega} E_y &= 0 \\(\omega^2 - c^2 k^2 - \alpha)E_y - i\alpha \frac{\omega_c}{\omega} E_x &= 0\end{aligned}\quad (4-112)$$

令系数行列式等于零，我们得到

$$(\omega^2 - c^2 k^2 - \alpha)^2 = (\alpha\omega_c/\omega)^2 \quad (4-113)$$

$$\omega^2 - c^2 k^2 - \alpha = \pm \alpha\omega_c/\omega \quad (4-114)$$

这样

$$\begin{aligned}\omega^2 - c^2 k^2 &= \alpha \left(1 \pm \frac{\omega_c}{\omega} \right) = \frac{\omega_p^2}{1 - (\omega_c^2/\omega^2)} \left(1 \pm \frac{\omega_c}{\omega} \right) \\&= \omega_p^2 \frac{1 \pm (\omega_c/\omega)}{[1 + (\omega_c/\omega)][1 - (\omega_c/\omega)]} \\&= \frac{\omega_p^2}{1 \mp (\omega_c/\omega)}\end{aligned}\quad (4-115)$$

符号 \mp 表明方程 (4-112) 有两种可能的解，对应于能沿 B_0 传播的两种不同的波。它们的色散关系是

$$\tilde{n}^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 - (\omega_c/\omega)} \quad (\text{R 波}) \quad (4-116)$$

$$\tilde{n}^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 + (\omega_c/\omega)} \quad (\text{L 波}) \quad (4-117)$$

R 波和 L 波可以证明是圆偏振的，符号 R 和 L 分别指的是右旋圆偏振和左旋圆偏振（习题 4-14）。其几何在图 4-40 中示出。从沿着 B_0 的方向观察，R 波的电场矢量随时间顺时针旋转，对 L 波则相反。由于方程 (4-116) 和 (4-117) 仅与 k^2 有关， E 矢量的旋转方向与 k 的符号无关；对于在相反方向传播的波，偏振是相同的。概括地讲：沿着 B_0 传播的主要的电磁波是右旋 (R) 和左旋 (L) 圆偏振波；穿

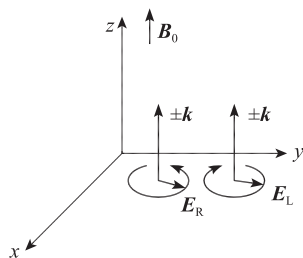


图 4-40 沿 B_0 传播的右旋圆偏振和左旋圆偏振波的几何图

过 B_0 传播的主电磁波是平面偏振波 (O 波) 和椭圆偏振波 (X 波)。

下面, 我们考虑 R 波和 L 波的截止和共振. 对于 R 波, 在 $\omega = \omega_c$ 时, k 变成无穷大; 那时波与电子的回旋运动共振. 偏振平面的旋转方向和电子的回转方向相同; 在不断加速电子的过程中, 波损失了它的能量因而不能传播. 另外, L 波不能与电子回旋共振, 因为它在相反的方向旋转, 从方程 (4-117) 很容易看到, 对于正 ω 值 L 波没有共振. 如果在我们的处理中已经包括了离子运动, 将会发现 L 波在 $\omega = \Omega_c$ 有一共振, 因为在那时它会在离子回转的方向转动.

在方程 (4-116) 和方程 (4-117) 中, 令 $k=0$ 就得到截止. 这时, 我们得到的方程与 X 波截止的方程 (4-107) 是相同的. 这样, 截止频率和以前也相同. R 波, 在方程 (4-116) 和方程 (4-107) 中取负号, 具有由方程 (4-108) 所给出的较高的截止频率 ω_R ; L 波, 取正号, 具有较低的截止频率 ω_L . 这就是前面选取 ω_R , ω_L 符号的原因. R 波和 L 波的色散图在图 4-41 中示出. L 波在低频时有一个截止带, 除了截止发生在 ω_L 而不是 ω_p 外, 它的行为和 O 波相类似. R 波在 ω_R 和 ω_c 之间有一个截止带, 但是存在着第二个传播带, 其频率低于 ω_c , 速度 $v_\phi < c$. 在这个低频区域的波称为**啸波模** (whistler mode), 对研究电离层现象极为重要.

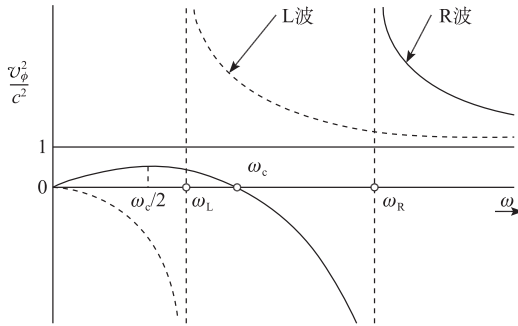


图 4-41 L 波和 R 波的 v_ϕ^2/c^2 对 ω 图

非传播区域 ($v_\phi^2/c^2 < 0$) 没有用阴影表示; 因为对两种波来说, 非传播区域是不同的

4.17 实验结果

4.17.1 啸波模

早期的电离层无线电发射研究者通过研究音频区域不同啸波声而获得酬报. 图 4-42 示出了作为时间函数而接收到的射频图. 存在着一组典型的下降滑音, 通过扬声器能听到它. 这种现象很容易用 R 波的色散特性来解释. 当南半球发生一次闪电时, 产生了所有频率的射频噪声. R 波是在电离层和磁层的等离子体中产生的波, 它沿着地球的磁场传播. 这些波由场力线引导, 并由在加拿大的观察者所探测到. 然而, 不同的频率在不同的时间到达. 从图 4-41 能够看到, 对于

$\omega < \omega_c/2$, 相速度随频率增加 (习题 4-15). 同样, 也能证明 (习题 4-16) 群速度随频率增加. 这样, 低的频率到达较晚, 引起了下降的音调. 因为这些波能沿着不同磁力线管 A、B、C 传播 (图 4-43), 一个闪电能产生几个啸波. 由于波具有 $\omega < \omega_c$, 这些波的频率必须低于沿着磁力线管的最低回旋频率 (大约在 100kHz). 啸波或是直接位于音频区域或是由于外差作用, 很容易转化成音频信号.

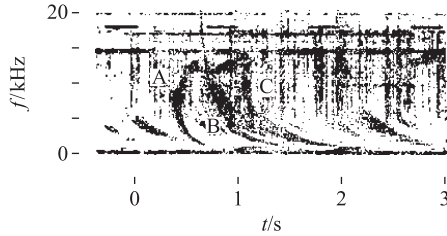


图 4-42 啸波信号的实际频谱图, 显示了由 R 波色散关系的低频分支 (图 4-41) 所引起的弯曲. 在每个时间 t , 接收器迅速在 0~20kHz 的频率范围扫描, 勾画出垂直线. 在每个频率, 记录器打出黑度正比于信号强度的斑点. 因此, 暗斑点随时间向下运动表明下降音 [承蒙 D. L. Carpenter 的允许, J. Geophys. Res. 71, 693 (1966)]

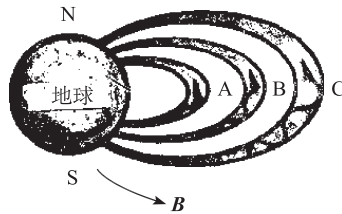


图 4-43 说明如何产生啸波的图
通道 A、B、C 与图 4-42 中标记的信号有关

4.17.2 法拉第旋转

在等离子体中, 沿着磁场送入一个平面偏振波, 它的偏振平面将发生旋转 (图 4-44). 利用 R 波和 L 波相速度的差别能理解这种现象. 从图 4-41 很清楚地看到, 对于大的 ω 值, R 波比 L 波传播快. 考虑平面偏振波是一个 R 波和一个 L 波的叠加 (图 4-45), 两个波当然具有相同的频率. 在 N 个周期之后, E_L 和 E_R

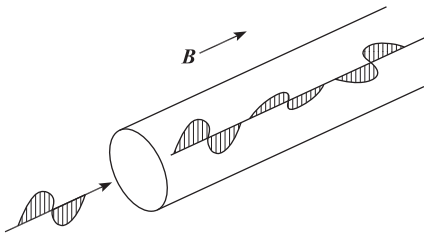


图 4-44 沿 B_0 传播的电磁波偏振平面的法拉第旋转

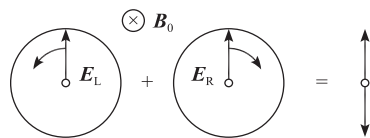


图 4-45 平面偏振波作为左旋和右旋圆偏振波的叠加

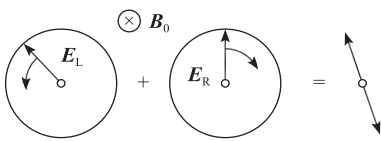


图 4-46 在穿过等离子体以后，相对于 R 波来说，L 波在相位上超前，就旋转了偏振面

矢量将返回到原先的位置。然而，在传播过给定距离 d 之后，R 波和 L 波将经历不同的周期数，因为两个波走过这段距离所需要的时间是不同的。由于 L 波传播较慢，在 R 波已经历了 N 周期的位置上，L 波将经历 $N + \epsilon$ 个周期。于是，矢量具有图 4-46 所示的位置。可以看到，偏振面已经旋转。用微波喇叭测量这个旋转能给出 ω_p^2 值，因而给出密度值（习题 4-18）。已经用实验证实了

法拉第旋转效应，但是，它并不像微波干涉仪那样成为密度测量的有用方法，因为在等离子体柱末端取数通常是困难的。

在恒星际空间中，通道的长度是如此之长，以至于在非常低密度时法拉第旋转都是重要的。已经用这个效应来解释新星形成期间，由 OH 或 H_2O 分子云中的微波激射作用所产生的微波辐射的偏振。

习题

4-12 证明在共振点非寻常波是纯粹的静电波。提示：把 E_y/E_x 比表达为 ω 的函数，并令 ω 等于 ω_h 。

4-13 证明图 4-38 的临界点次序安排是正确的，即 $\omega_L < \omega_p < \omega_h < \omega_R$ 。

4-14 按下列途径证明，R 波和 L 波是右旋圆和左旋圆偏振波：

(a) 证明 E_x 和 E_y 的联立方程能写成下列形式

$$F(\omega)(E_x - iE_y) = 0, \quad G(\omega)(E_x + iE_y) = 0$$

其中，对于 R 波 $F(\omega) = 0$ ，对于 L 波 $G(\omega) = 0$ 。

(b) 对 R 波来讲， $G(\omega) \neq 0$ ；因此 $E_x = -iE_y$ ，回想起 \mathbf{E} 随时间的指数关系，证明 \mathbf{E} 在电子回转的方向旋转。对 L 波来讲，证明 \mathbf{E} 以相反的方向旋转。

(c) 对于 R 波，在 (i) $k_z > 0$ 和 (ii) $k_z < 0$ 的情况下，画出在给定的时间， E 矢尖在空间的螺旋线轨迹。注意，如果在固定位置看螺旋线通过，则两种情况的 \mathbf{E} 以相同的方向旋转。

4-15 试证明啸波模在 $\omega = \omega_c/2$ 有最大相速度，并证明最大相速度小于光速。

4-16 试证明，如果 $\omega \ll \omega_c$ ，啸波模的群速度正比于 $\omega^{1/2}$ 。

4-17 试证明，在电子偶（等量的正电子和负电子）等离子体中不存在法拉第旋转。

4-18 在 1kG 磁场的均匀等离子体中，测量了波长为 8mm 微波束的法拉第旋转，发现在穿过 100cm 的等离子体之后，偏振面旋转了 90° 。请问等离子体密度是多少？

4-19 在高于截止密度 n_c 时，不能用寻常波中使用的微波干涉仪。要测量较

高的密度，我们能利用非寻常波。

(a) 写出 X 波截止密度 n_{cx} 的表达式。

(b) 在 v_{ϕ}^2/c^2 对 ω 的图上，示出干涉仪可能工作的 X 波色散关系的分支。

4.18 磁流体波

基本等离子体波概述的最后一部分涉及存在磁场时的低频离子振荡。我们仅仅将讨论许多可能模中的两种：沿 \mathbf{B}_0 传播的磁流体波或阿尔芬波以及磁声波。阿尔芬波在平面几何中具有沿着 \mathbf{B}_0 的 \mathbf{k} ，且 \mathbf{E}_1 和 \mathbf{j}_1 垂直于 \mathbf{B}_0 ， \mathbf{B}_1 和 \mathbf{v}_1 垂直 \mathbf{B}_0 和 \mathbf{E}_1 两者（图 4-47）。像通常那样，从麦克斯韦方程得到

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_1 &= -\mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1) + k^2 \mathbf{E}_1 \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_1 + \frac{4\pi i \omega}{c^2} \mathbf{j}_1\end{aligned}\quad (4-118)$$

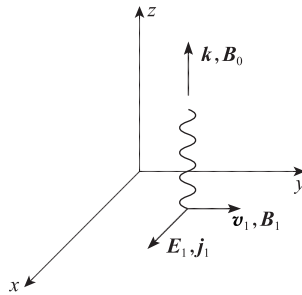


图 4-47 沿 \mathbf{B}_0 传播的阿尔芬波的几何形状图

由于按照假定 $\mathbf{k} = k\hat{z}$ ， $\mathbf{E}_1 = E_1\hat{x}$ ，这个方程只有 x 分量是非零的。现在，由于我们正在考虑低频，电流 \mathbf{j}_1 包括来自离子和电子的贡献。方程 (4-118) 的 x 分量变为

$$(\omega^2 - c^2 k^2) E_1 = -4\pi i \omega n_0 e (v_{ix} - v_{ex}) \quad (4-119)$$

对于这种波，热运动是不重要的，因此我们可以用之前方程 (4-63) 得到的 $T_i = 0$ 的离子运动方程解。为完整起见，我们在这里包括了分量 v_{ij} （在以前，没有明显地写出过它）：

$$\begin{aligned}v_{ix} &= \frac{ie}{M\omega} \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} E_1 \\ v_{iy} &= \frac{e}{M\omega} \frac{\Omega_c}{\omega} \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} E_1\end{aligned}\quad (4-120)$$

通过令 $M \rightarrow m$ ， $e \rightarrow -e$ ， $\Omega_c \rightarrow -\omega_c$ ，然后取极限 $\omega_c^2 \gg \omega^2$ ，就得到对应的电子运动方程的解

$$v_{ex} = \frac{ie\omega^2}{m\omega\omega_c^2} E_1 \rightarrow 0 \quad (4-121)$$

$$v_{ey} = -\frac{e\omega_c\omega^2}{m\omega^2\omega_c^2} E_1 = -\frac{E_1}{B_0}$$

在这个极限下，忽略了电子的拉莫尔回转，电子在 y 方向具有简单的 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移。把这些解代入方程 (4-119)，我们得到

$$(\omega^2 - c^2 k^2) E_1 = -4\pi i \omega n_0 e \frac{ie}{M\omega} \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} E_1 \quad (4-122)$$

仅仅对以后要给的物理图像才需要 v_1 的 y 分量。用离子等离子体频率 Ω_p 的定义 (方程 (4-49))，我们有

$$\omega^2 - c^2 k^2 = \Omega_p^2 \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} \quad (4-123)$$

现在，我们必须作进一步的假定 $\omega^2 \ll \Omega_c^2$ ；磁流体波具有远比离子回旋共振低的频率。在这种极限下，方程 (4-123) 变成

$$\begin{aligned} \omega^2 - c^2 k^2 &= -\omega^2 \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c^2} = -\omega^2 \frac{4\pi n_0 e^2 M^2}{M e^2 B_0^2} \\ &= -\omega^2 \frac{4\pi\rho}{B_0^2} \\ \frac{\omega^2}{k^2} &= \frac{c^2}{1 + (4\pi\rho/B_0^2)} \end{aligned} \quad (4-124)$$

式中， ρ 是质量密度 $n_0 M$ 。因为方程 (4-124) 右边的分母可以被认为是低频垂直运动的介电常数 (方程 (3-28))，则这个答案并不意外。方程 (4-124) 简单地给出了电介质中电磁波的相速度

$$\text{对于 } \mu=1, \quad \frac{\omega}{k} = \frac{c}{(\epsilon\mu)^{1/2}} = \frac{c}{\epsilon^{1/2}}$$

正如我们以前所看到的那样，对大多数实验室等离子体来讲， ϵ 远大于 1，所以，能近似将方程 (4-124) 写成

$$\frac{\omega}{k} = v_\phi = \frac{cB_0}{(4\pi\rho)^{1/2}} \equiv v_A \quad (4-125)$$

这些磁流体波以恒速 v_A (称为阿尔芬速度) 沿 \mathbf{B}_0 传播。在高斯单位制中，阿尔芬速度是

$$v_A \equiv B_0 / (4\pi\rho)^{1/2} \quad (4-126)$$

这是磁力线扰动传播的特征速度。现在，方程 (3-28) 的介电常数能写成

$$\epsilon = 1 + (c^2/v_A^2) \quad (4-127)$$

注意到对具有足够密度的发展充分的等离子体来讲， v_A 是小量，因此 ϵ 是大值。

为了理解在阿尔芬波中物理上能发生什么，我们回想起这是一个具有涨落磁场 \mathbf{B}_1 的电磁波， \mathbf{B}_1 由下式给出

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\dot{\mathbf{B}}_1, \quad E_x = (\omega/k) B_y \quad (4-128)$$

小分量 B_y 加到 \mathbf{B}_0 时, 就引起磁力线的正弦涟波, 我们夸张地把它显示在图 4-48 中. 在图上所示出的点, B_y 在正 y 方向, 所以根据方程 (4-128), 如果 ω/k 在 z 方向, 则 E_x 在正 x 方向. 电场 E_x 引起等离子体在 $-y$ 方向有一个 $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0$ 漂移. 由于我们已经取极限 $\omega^2 \ll \Omega_c^2$, 根据方程 (4-120) 和 (4-121), 离子和电子都将有相同的漂移 v_y . 这样, 如原先在图 4-47 所表示的那样, 流体在 y 方向向上和向下运动. 这个速度的大小是 $|E_x/B_0|$. 由于场的涟波正在以靠近相速度 ω/k 的速度运动, 在图 4-48 示出的点上, 磁力线也向下运动. 磁力线向下运动的速度是 $(\omega/k) |B_y/B_0|$, 按照方程 (4-128), 它刚好等于流体速度 $|E_x/B_0|$. 这样, 流体和场力线一块振荡, 就像粒子粘着在磁力线上一样. 磁力线就好像是张力作用下的有质量加载弦, 而阿尔芬波能看成由拨动弦产生的传播着的扰动. 等离子体冻结在磁力线上, 并随磁力线运动的概念有助于理解很多低频等离子体现象. 可以证明, 只要不存在沿 \mathbf{B} 的电场, 这种说法是准确的.

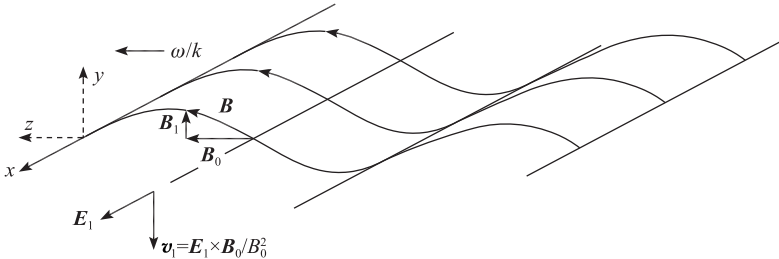
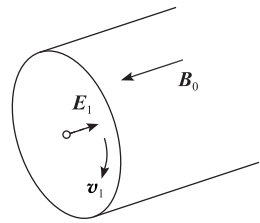


图 4-48 阿尔芬波中振荡量之间的关系和夸大的磁力线畸变

对我们来讲, 留下的问题是了解由什么来维持电场 E_x , 这个电场是由我们预先假定的. 当 \mathbf{E}_1 涨落时, 离子的惯性使它们落在电子后面, 并且在 \mathbf{E}_1 方向上存在一个极化漂移 v_p . 这个漂移 v_{tr} 由方程 (4-120) 给出, 并且引起在 x 方向流动的电流 \mathbf{j}_1 . 所产生作用在流体上的力 $\mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0$ 是在 y 方向上, 并且与速度 v_1 相位差 90° . 这个力使振荡继续下去, 这种情况正像力的相位超前于速度的任一振子一样. 当然, 引起过冲和持续振荡的总是离子的惯性, 但是在等离子体中, 动量通过电磁力以复杂的途径来传递.



在一个对实验更实用的几何中, \mathbf{E}_1 总是在径向, 而 v_1 则在角向 (图 4-49). 那时, 等离子体的运动是不可压缩的. 这就是在运动方程中能忽略 $\nabla \rho$ 项的理由. 这个模叫做阿尔芬扭波 (torsional Alfvén wave). 列纳尔特 (B. Lehnert) 在液体钠中首先产生了这种波.

在 1959 年, 加利福尼亚伯克利的艾伦 (Allen), 贝克 (Baker), 派尔 (Pyle) 和威尔科克斯 (Wilcox) 及英国的叶甫柯特 (Jephcott) 首先在等离子体

中产生和检测到了阿尔芬波. 在氢等离子体中进行了这项工作, 氢等离子体是在沿磁场排列的两个电极中进行“慢收缩”放电产生的(图 4-50). 一个慢放电电容器组 A 的放电产生等离子体. 然后, 接到金属壁的快放电电容器组 B 放电, 产生一个垂直于 \mathbf{B}_0 的电场 \mathbf{E}_1 . 电容器的冲击激励产生一个波, 这个波在一段时间延迟后被探针 P 探测到. 图 4-51 示出了相速度对磁场的测量结果, 说明了方程 (4-126) 预期的线性依赖关系.

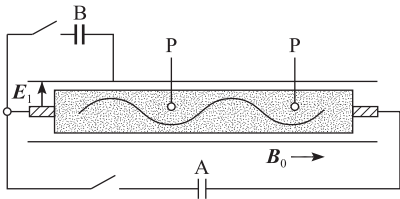


图 4-50 探测阿尔芬波的一种实验简图
[引自 J. M. Wilcox, F. I. Boley and A. W. DeSilva, Phys. Fluids 3, 15 (1960)]

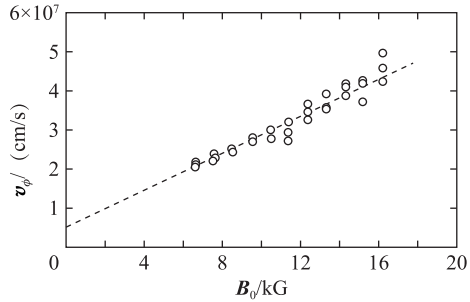


图 4-51 测到的阿尔芬相速度对磁场的关系图
[引自 Wilcox, Boley and DeSilva, 同上述引用文]

这是一个困难的实验, 因为克服阻尼需要 10kG 的大磁场. 由于 \mathbf{B}_0 大, 因此, 除非密度很高外, v_A (因而就是波长) 就变得太大了. 在威尔科克斯等的实验中, 用 $6 \times 10^{15} \text{cm}^{-3}$ 的密度来达到 $2.8 \times 10^7 \text{cm/s}$ 的低阿尔芬速度. 注意, 用一个较重的原子是不可能增加 ρ 的. 频率 $\omega = kv_A$ 正比于 $M^{-1/2}$, 而回旋频率 Ω_c 正比于 M^{-1} , 因此 ω/Ω_c 正比于 $M^{1/2}$. 用较重原子不可能满足条件 $\omega^2 \ll \Omega_c^2$.

4.19 磁声波

最后, 我们考虑穿过 \mathbf{B}_0 传播的低频电磁波. 我们可以再次取 $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$, $\mathbf{E}_1 = E_1 \hat{x}$, 但是令 $\mathbf{k} = k \hat{y}$ (图 4-52). 现在, $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0$ 漂移沿着 \mathbf{k} 方向, 所以在振荡过程中, 等离子体将被压缩和放松. 因此, 必须在运动方程中保留 ∇p 项. 对于离子, 我们得到

$$Mn_0 \frac{\partial \mathbf{v}_{i1}}{\partial t} = en_0 (\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_{i1} \times \mathbf{B}_0) - \gamma_i K T_i \nabla n_1 \quad (4-129)$$

由于 \mathbf{E}_1 和 \mathbf{k} 的选择, 就变成

$$v_{ix} = \frac{ie}{M\omega} (E_x + v_{iy} B_0) \quad (4-130)$$

$$v_{iy} = \frac{ie}{M\omega} (v_{ix} B_0) + \frac{k \gamma_i K T_i n_1}{\omega M n_0} \quad (4-131)$$

连续性方程得出

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{k}{\omega} v_{iy} \quad (4-132)$$

因此, 方程 (4-131) 变为

$$v_{iy} = -\frac{ie}{M\omega} v_{ix} B_0 + \frac{k^2 \gamma_i K T_i}{\omega^2 M} v_{iy} \quad (4-133)$$

用简写符号

$$A \equiv \frac{k^2 \gamma_i K T_i}{\omega^2 M}$$

方程 (4-133) 就变成

$$v_{iy}(1-A) = \frac{-i\Omega_c}{\omega} v_{ix} \quad (4-134)$$

把方程 (4-134) 与方程 (4-130) 结合起来, 得到

$$v_{ix} = \frac{ie}{M\omega} E_x + \frac{i\Omega_c}{\omega} \left(\frac{-i\Omega_c}{\omega} \right) (1-A)^{-1} v_{ix} \quad (4-135)$$

$$v_{ix} \left(1 - \frac{\Omega_c^2/\omega^2}{1-A} \right) = \frac{ie}{M\omega} E_x$$

这就是我们所需要的 v_{i1} 的唯一分量, 因为波动方程 (4-81) 的唯一不为零的分量是

$$(\omega^2 - c^2 k^2) E_x = -4\pi i \omega n_0 e (v_{ix} - v_{ex}) \quad (4-136)$$

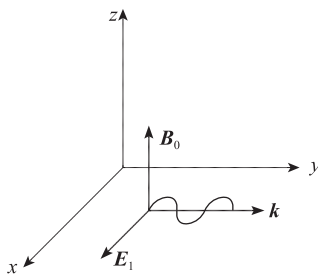


图 4-52 与 B_0 成直角传播的磁声波的几何图

要得到 v_{ex} , 我们只需对方程 (4-135) 作适当变化, 并且取小电子质量极限, 所以, $\omega^2 \ll \omega_c^2$, $\omega^2 \ll k^2 v_{the}^2$.

$$v_{ex} = \frac{ie}{M\omega\omega_c^2} \left(1 - \frac{k^2 \gamma_e K T_e}{\omega^2 m} \right) E_x \rightarrow \frac{-ik^2 \gamma_e K T_e}{\omega B_0^2} e E_x \quad (4-137)$$

把方程 (4-135), (4-136) 和 (4-137) 联立在一起, 我们得到

$$(\omega^2 - c^2 k^2) E_x = -4\pi i \omega n_0 e \left\{ \frac{ie}{M\omega} E_x \left[\frac{1-A}{1-A - (\Omega_c^2/\omega^2)} \right] + \frac{ik^2 M \gamma_e K T_e}{\omega B_0^2} e M E_x \right\} \quad (4-138)$$

我们将再次假定 $\omega^2 \ll \Omega_c^2$, 因此相对于 Ω_c^2/ω^2 能忽略 $1-A$. 用 Ω_p 和 v_A 的定义, 有

$$\begin{aligned}
 (\omega^2 - c^2 k^2) &= -\frac{\Omega_p^2}{\Omega_c^2} \omega^2 (1-A) + \frac{k^2 c^2 \gamma_e K T_e}{v_A^2 M} \\
 \omega^2 - c^2 k^2 \left(1 + \frac{\gamma_e K T_e}{M v_A^2}\right) + \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c^2} \left(\omega^2 - k^2 \frac{\gamma_i K T_i}{M}\right) &= 0
 \end{aligned} \tag{4-139}$$

由于

$$\Omega_p^2 / \Omega_c^2 = c^2 / v_A^2 \tag{4-140}$$

方程 (4-139) 变成

$$\omega^2 \left(1 + \frac{c^2}{v_A^2}\right) = c^2 k^2 \left(1 + \frac{\gamma_e K T_e + \gamma_i K T_i}{M v_A^2}\right) = c^2 k^2 \left(1 + \frac{v_s^2}{v_A^2}\right) \tag{4-141}$$

其中, v_s 是声速. 最后, 我们得到

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c^2 \frac{v_s^2 + v_A^2}{c^2 + v_A^2} \tag{4-142}$$

这就是垂直于 \mathbf{B}_0 传播的磁声波的色散关系. 它是一种声波, 在该声波中, 产生压缩和稀疏不是由于沿着 \mathbf{E} 的运动, 而是由于垂直于 \mathbf{E} 的 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移. 在极限 $\mathbf{B}_0 \rightarrow 0$, $v_A \rightarrow 0$ 时, 磁声波变成一个普通的离子声波. 在极限 $K T \rightarrow 0$, $v_s \rightarrow 0$, 压力梯度力消失, 变成了一个已变阿尔芬波 (modified Alfvén wave). 磁声模的相速度几乎总是大于 v_A . 由于这个原因, 经常简单地把它称为“快”磁流体波.

4.20 基本等离子体波的概述

电子波 (静电)

$$\mathbf{B}_0 = 0 \text{ 或 } \mathbf{k} // \mathbf{B}_0: \omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3}{2} k^2 v_{th}^2 \quad (\text{等离子体振荡}) \tag{4-143}$$

$$\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0: \omega^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 = \omega_h^2 \quad (\text{上杂化振荡}) \tag{4-144}$$

离子波 (静电)

$$\mathbf{B}_0 = 0 \text{ 或 } \mathbf{k} // \mathbf{B}_0: \omega^2 = k^2 v_s^2 = k^2 \frac{\gamma_e K T_e + \gamma_i K T_i}{M} \quad (\text{声波}) \tag{4-145}$$

$$\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0: \omega^2 = \Omega_c^2 + k^2 v_s^2 \quad (\text{静电离子回旋波}) \tag{4-146}$$

$$\text{或者 } \omega^2 = \omega_c^2 = \Omega_c \omega_c \quad (\text{下杂化振荡}) \tag{4-147}$$

电子波 (电磁)

$$\mathbf{B}_0 = 0: \omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2 \quad (\text{光波}) \tag{4-148}$$

$$\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0, \mathbf{E}_1 // \mathbf{B}_0: \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (\text{O 波}) \tag{4-149}$$

$$\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0, \mathbf{E}_1 \perp \mathbf{B}_0: \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2 \omega^2 - \omega_c^2}{\omega^2 \omega^2 - \omega_h^2} \quad (\text{X 波}) \tag{4-150}$$

$$\mathbf{k} // \mathbf{B}_0, \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2 / \omega^2}{1 - (\omega_c / \omega)} \quad (\text{R 波}) \quad (\text{啸波模}) \tag{4-151}$$

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2 / \omega^2}{1 + (\omega_c / \omega)} \quad (\text{L 波}) \quad (4-152)$$

离子波 (电磁)

$\mathbf{B}_0 = 0$: 无

$$\mathbf{k} // \mathbf{B}_0: \quad \omega^2 = k^2 v_A^2 \quad (\text{阿尔芬波}) \quad (4-153)$$

$$\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0: \quad \frac{\omega^2}{k^2} = c^2 \frac{v_s^2 + v_A^2}{c^2 + v_A^2} \quad (\text{磁声波}) \quad (4-154)$$

这组色散方程是一组大大简化的关系, 它仅仅包括主要的传播方向, 然而, 这是一组非常有用的方程, 要作为讨论更复杂的波运动的参照系而记在心中. 通常能把一个复杂的情况理解为这些基本振荡模式的变态或者叠加.

4.21 CMA 图

当传播与磁场成一个角度时, 相速度随角度变化. 上面列出的某些 $\mathbf{k} // \mathbf{B}_0$, $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$ 模彼此连续地互变; 另一些模在一个临界角时简单地消失. 通过克莱莫 (Clemmow) - 马拉利 (Mullaly) - 艾利斯 (Allis) (CMA) 图相当大地澄清了这种复杂的情况, 所以, 斯蒂克斯 (T. H. Stix) 用它的共同发明者来命名这张图. 在图 4-53 中示出了这种图. 然而, 仅对 $T_i = T_e = 0$ 的冷等离子体, CMA 图才是正确的. 扩展到有限温度时引起了如此大的复杂性, 以至于这张图不再有用.

图 4-53 是一张 ω_c / ω 对 ω_p^2 / ω^2 的图, 或者等价地说, 是一张磁场对密度图. 对给定频率 ω , 由 ω_p 和 ω_c 所表征的任何实验情况由图上的一个点来表示. 总的空间被我们已经遇到的不同截止线和共振线分成若干区域. 例如, 非寻常波在 $\omega^2 = \omega_c^2 + \omega_p^2$ 的截止是一个 ω_c / ω 和 ω_p^2 / ω^2 间的二次关系式, 可以认为所得到的抛物线就是在图 4-53 上标有“上杂化共振”的曲线. 这些截止和共振曲线把图分成各种波的传播区域和非传播区域, 所以能在不同区域中存在的这组波将是各种各样的.

在每个区域中的小图不仅指明存在着哪些波, 而且指明相速度如何定性地随角度变化. 设想磁场是在图上的垂直方向. 以一个角度 θ 从中心到椭圆或“8”字形上任何一点的距离正比于与磁场成 θ 角度传播的波的相速度. 例如, 在图 4-53 上标有“*”的三角形区域中, 我们看到, 当 θ 从 0 变到 $\pi/2$ 时, L 波变成了 X 波. R 波的速度小于 L 波, 而且当 θ 从 0 变到 $\pi/2$ 时, 它就消失了. 它不能变成 O 波, 因为在那个区域中, $\omega^2 < \omega_p^2$, 因此 O 波不存在.

CMA 图的上部区域对应于 $\omega \ll \omega_c$. 在这里发现了低频离子波. 由于在这个图上已经忽略了热速度, 所以静电离子波并不出现; 它们只在热等离子体中传播. 我们能把 CMA 图看成一个“等离子体池” (plasma pond). 落在每个区域的小石将发出类似于所示形状的那种涟漪.

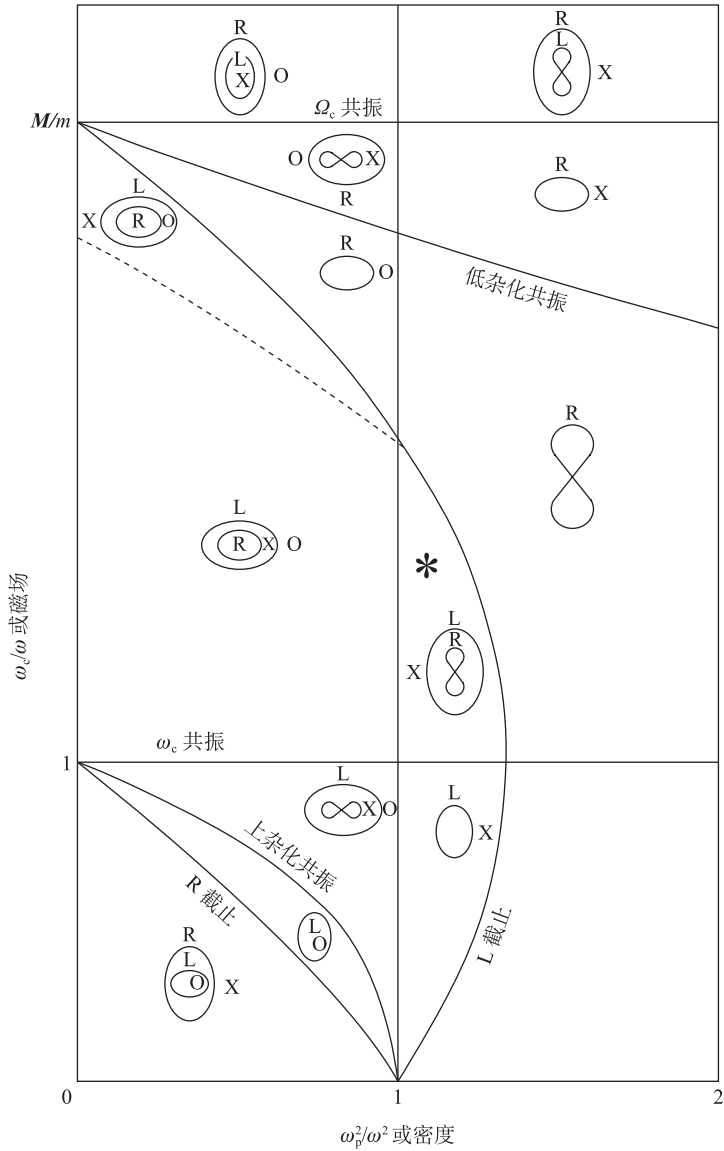


图 4-53 冷等离子体中各类波的克莱莫-马拉利-艾利斯图

习题

4-20 假定你已经产生密度 $n=10^9 \text{ cm}^{-3}$ 和 $B=10^2 \text{ G}$ 的实验室等离子体。你把一个 160MHz 的信号发生器接在插入等离子体的探针上。

- (a) 画出 CMA 图，并且指明实验落在哪个区域。
- (b) 在这个等离子体中会激发和传播什么样的电磁波？

4-21 假定你希望设计一个实验, 在这个实验中, 阿尔芬驻扭波在圆柱形等离子体柱中产生, 所以, 驻波在中间平面有最大的振幅, 在末端为波节. 为了满足条件 $\omega \ll \Omega_c$, 取 $\omega = 0.1\Omega_c$.

(a) 如果你能产生 $n = 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, $B = 10 \text{ kG}$ 的氢等离子体, 等离子体柱必须有多长?

(b) 如果你试图用 3.1 kG Q-装置做这个实验, 在装置中带单个电荷的铯离子具有原子量 133 和密度 $n = 10^{12} \text{ cm}^{-3}$, 等离子体应该有多长? 提示: 求出换算因子和运用 (a) 的结果.

4-22 一个脉冲星发出一个宽带电磁辐射, 并被一个调谐到 $f = 80 \text{ MHz}$ 邻域接收器所检出. 因为群速度的色散由恒星际等离子体所引起, 在每个脉冲期间, 观察到的频率以速率 $df/dt = -5 \text{ MHz/s}$ 漂移.

(a) 如果恒星际磁场可以忽略, 并且 $\omega^2 \gg \omega_p^2$, 证明

$$\frac{df}{dt} \approx -\frac{c}{x} \frac{f^3}{f_p^2}$$

其中, f_p 是等离子体频率, x 是脉冲星的距离.

(b) 如果空间中平均电子密度是 0.2 cm^{-3} , 脉冲星离我们有多远? (用秒差距 (parsec) 为单位, $1 \text{ parsec} = 3 \times 10^{18} \text{ cm}$).

4-23 三组分等离子体电子密度为 n_0 , 质量 M_1 的离子密度为 $(1-\epsilon)n_0$, 质量 M_2 的离子密度为 ϵn_0 . 令 $T_{11} = T_{22} = 0$, $T_c \neq 0$.

(a) 推导静电离子回旋波的色散关系.

(b) 当 ϵ 为小量时, 求出 ω^2 的简单表达式.

4-24 对一个朗缪尔等离子体振荡, 证明每立方厘米对时间平均的电子动能等于电场能量密度 $\langle E^2 \rangle / 8\pi$.

4-25 对阿尔芬波, 证明每立方厘米对时间平均的离子动能等于磁波能 $\langle B_1^2 \rangle / 8\pi$.

4-26 图 4-54 示出一个在 $\lambda = 337 \mu\text{m}$ 运转的远红外激光器. 当 $B_0 = 0$, 每当

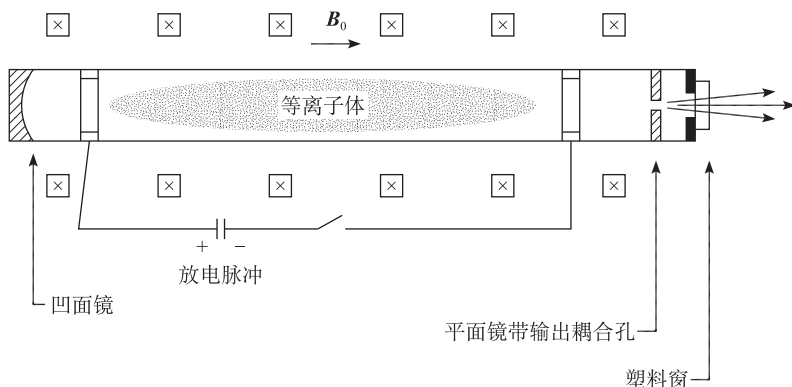


图 4-54 脉冲 HCN 激光器简图

ω_p 小于 ω_1 或 $n < n_c = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ 时, 此辐射很容易穿透等离子体. 然而, 由于长程长, 等离子体的散焦效应 (图 4-31) 破坏了光腔, 密度就由条件 $\omega_p^2 < \epsilon \omega^2$ 来限制, 其中 $\epsilon \ll 1$. 为了增加极限密度, 因而增加激光输出功率, 就要加磁场 B_0 .

- (a) 如果 ϵ 不变, 证明如果传播左旋圆偏振波, 则能增加极限密度.
- (b) 如果 n 加倍, B_0 必须要多大?
- (c) 证明等离子体对啸波模是聚焦透镜.
- (d) 人们能否用啸波模, 并因此能否用更高的密度?

第 5 章 扩散和电阻率

5.1 弱电离气体中的扩散和迁移率

在第 4 章为平衡条件所假定的无限均匀等离子体当然是高度理想化的。任何真实的等离子体都有密度梯度，等离子体将倾向于向低密度区域扩散。受控热核反应的中心问题是用磁场来阻碍扩散的速率。但在处理磁场问题之前，我们将考虑无磁场时的扩散。如果我们假定等离子体是弱电离的，带电粒子主要和中性原子相碰而不是彼此相碰，就会导致更大的简化。完全电离等离子体的情况推迟到较后面一节来讲，因为它导致一个非线性方程，这个非线性方程几乎不存在简单的可作为例证的解。总之，部分电离气体并不罕见：高压电弧和电离层等离子体属于这一类，有关气体放电的大多数早期工作是以中性粒子为主的，其分数电离 (fractional ionization) 在 $10^{-3} \sim 10^{-6}$ 。

因此，这种图像就是：在稠密的中性粒子背景中具有非均匀分布的离子和电子 (图 5-1)。当等离子体由于压力梯度和电场力而散布开时，个别粒子经历了一种随机游动，它频繁地和中性原子碰撞。我们先从原子理论对定义作简短的回顾。

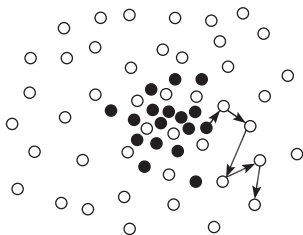


图 5-1 气体原子因随机碰撞而引起的扩散

5.1.1 碰撞参数

当一个电子和一个中性原子碰撞时，随它回跳的角度不同，可以损失它初始动量的任何分数。和一个重原子正面碰撞时，由于碰撞后速度改变符号，电子损失了它 2 倍的初始动量。如果原子是动量的完全吸收体，就可以将动量损失的几率用原子应具有等效截面 σ 来表达。

在图 5-2 中，电子入射到面积为 A ，厚度为 dx 的板片上，每立方厘米的板片

含有 n_n 个中性原子. 设想原子是截面积为 σ 的不透明球, 即每当电子进入被原子阻塞的面积时, 电子就损失它所有的动量. 在板片中的原子数是

$$n_n A dx$$

板片中被原子阻塞的一部分是

$$n_n A \sigma dx / A = n_n \sigma dx$$

如果通量为 Γ 的电子入射到板片上, 在板片另一边穿出的通量是

$$\Gamma' = \Gamma(1 - n_n \sigma dx)$$

这样, Γ 随距离变化是

$$d\Gamma/dx = -n_n \sigma \Gamma$$

或

$$\Gamma = \Gamma_0 e^{-n_n \sigma x} \equiv \Gamma_0 e^{-x/\lambda_m} \quad (5-1)$$

在距离 λ_m 处, 通量应减少到它初始值的 $1/e$. 量 λ_m 是碰撞的平均自由程

$$\lambda_m = 1/n_n \sigma \quad (5-2)$$

在传播距离 λ_m 之后, 一个粒子应当具有进行一次碰撞的充分几率. 对于速度为 v 的粒子, 碰撞之间的平均时间为

$$\tau = \lambda_m / v$$

平均碰撞频率是

$$\tau^{-1} = v/\lambda_m = n_n \sigma v \quad (5-3)$$

现在, 如果我们对麦克斯韦分布中所有速度 v 的粒子取平均, 得到通常被称为碰撞频率的 ν .

$$\nu = n_n \overline{\sigma v} \quad (5-4)$$

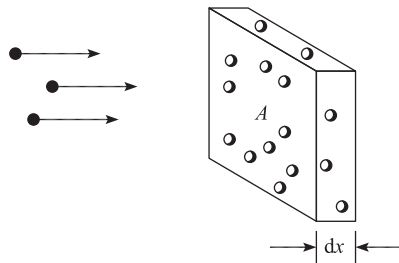


图 5-2 截面定义的说明

5.1.2 扩散参数

包括碰撞的流体运动方程是 (对任何一种)

$$mm \frac{d\mathbf{v}}{dt} = mm \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \pm en\mathbf{E} - \nabla p - mm\nu\mathbf{v} \quad (5-5)$$

其中, \pm 再次表示电荷的符号. 用于计算 ν 的平均过程使得方程 (5-5) 正确, 我们没有必要涉及这个计算的细节. 然而, 为了使方程 (5-5) 有用, 必须假定 ν 是

一个常数. 我们将考虑 $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$ 的一个稳恒态. 如果 v 足够小 (或 v 足够大), 在一次碰撞的时间内, 流体元将不会运动到不同 \mathbf{E} 和 ∇p 的区域, 运流导数 $d\mathbf{v}/dt$ 也将为零. 令方程 (5-5) 的左边为零, 对于等温等离子体来讲, 我们有

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m n \nu} (\pm en\mathbf{E} - KT \nabla n) = \pm \frac{e}{m\nu} \mathbf{E} - \frac{KT}{m\nu} \frac{\nabla n}{n} \quad (5-6)$$

上面的系数被称为**迁移率**和**扩散系数**

$$\mu \equiv |q| / m\nu \quad (\text{迁移率}) \quad (5-7)$$

$$D \equiv KT / m\nu \quad (\text{扩散系数}) \quad (5-8)$$

对于不同种, μ , D 值将不相同. 要注意, D 是以 cm^2/s 为单位. 输运系数 μ 和 D 由爱因斯坦关系相联系

$$\mu = |q| D / KT \quad (5-9)$$

用这些定义, 第 j 种粒子的通量 $\mathbf{\Gamma}_j$ 能写成

$$\mathbf{\Gamma}_j = n \mathbf{v}_j = \pm \mu_j n \mathbf{E} - D_j \nabla n \quad (5-10)$$

扩散的**菲克 (Fick) 定律**是上式的一种特殊情形, 出现在 $\mathbf{E} = 0$ 或是粒子不带电时, 使得 $\mu = 0$:

$$\mathbf{\Gamma} = D \nabla n \quad (\text{菲克定律}) \quad (5-11)$$

这个方程仅表示扩散是一种随机游动的过程, 在这过程中, 从稠密区域到较不稠密区域的净通量的发生仅因为较多的粒子在稠密区域中出发. 这个通量显然正比于密度梯度. 在等离子体中, 菲克定律不一定得到满足. 由于存在有组织运动的可能性 (等离子体波), 等离子体可以不完全随机的方式散布开.

5.2 扩散引起的等离子体衰变

5.2.1 双极性扩散

现在, 我们考虑在容器中产生的等离子体是怎样由于扩散到壁而衰变的. 一旦离子和电子到达壁, 它们将在那里复合, 所以接近壁处的密度基本为零. 流体的运动方程和连续性方程决定了等离子体行为, 但是, 如果衰变很慢, 我们只需要在连续性方程中保留对时间的导数. 如果碰撞频率 ν 大, 则在运动方程 (5-5) 中将忽略对时间的导数. 这样, 我们得到

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_j = 0 \quad (5-12)$$

$\mathbf{\Gamma}_j$ 由方程 (5-10) 给出. 很清楚, 如果 $\mathbf{\Gamma}_i$ 和 $\mathbf{\Gamma}_e$ 不相等, 会立即引起严重的电荷不平衡. 如果等离子体远大于德拜长度, 它必定是准中性的; 人们就期望离子和电子的扩散速率会以某种方式进行自身调整, 使两种粒子以相同的速率离开. 这个现象如何发生是容易看到的. 较轻的电子有较高热速度, 倾向于首先离开等离子体. 正电荷被留在后面, 就建立了这样一种极性的电场, 它推迟电子的损失并加

速离子的损失. 令 $\Gamma_i = \Gamma_e = \Gamma$, 可求出所需要的 \mathbf{E} 场. 从方程 (5-10), 我们能写出

$$\Gamma = \mu_i n \mathbf{E} - D_i \nabla n = -\mu_e n \mathbf{E} - D_e \nabla n \quad (5-13)$$

$$\mathbf{E} = \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{\nabla n}{n} \quad (5-14)$$

于是, 公共通量 Γ 由下式给出

$$\begin{aligned} \Gamma &= \mu_i \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \nabla n - D_i \nabla n \\ &= \frac{\mu_i D_i - \mu_i D_e - \mu_i D_i + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \nabla n \\ &= -\frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \nabla n \end{aligned} \quad (5-15)$$

这就是具有一个新扩散系数

$$D_a \equiv \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \quad (5-16)$$

的非克定律, 这个系数称为**双极扩散系数** (ambipolar diffusion coefficient). 如果它是常数, 方程 (5-12) 简单地变成

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_a \nabla^2 n \quad (5-17)$$

如果我们取 $\mu_e \gg \mu_i$, 则能估计 D_a 的大小. 从方程 (5-17) 能看到这种估计是正确的. 由于 ν 正比于热速度, 而热速度正比于 $m^{-1/2}$, 则 μ 正比于 $m^{-1/2}$. 方程 (5-16) 和 (5-9) 就给出

$$D_a \approx D_i + \frac{\mu_i}{\mu_e} D_e = D_i + \frac{T_e}{T_i} D_i \quad (5-18)$$

对于 $T_e = T_i$, 我们有

$$D_a \approx 2 D_i \quad (5-19)$$

双极性电场的影响使离子的扩散加大一倍, 而两种粒子在一起的扩散率主要由较慢的一种粒子来控制.

5.2.2 在板片中的扩散

用分离变量法不难解出扩散方程 (5-17). 我们令

$$n(\mathbf{r} \cdot t) = T(t)S(\mathbf{r}) \quad (5-20)$$

因此, 方程 (5-17) 变成

$$S \frac{dT}{dt} = DT \nabla^2 S \quad (5-21)$$

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{D}{S} \nabla^2 S \quad (5-22)$$

由于左边只是时间的函数, 而右边只是空间的函数, 它们必须都等于同一常数,

称为 $-1/\tau$. 因此, 函数 T 遵守方程

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{T}{\tau} \quad (5-23)$$

其解为

$$T = T_0 e^{-t/\tau} \quad (5-24)$$

空间部分 S 遵守方程

$$\nabla^2 S = -\frac{1}{D\tau} S \quad (5-25)$$

在板片的几何形状中, 它变成

$$\frac{d^2 S}{dx^2} = -\frac{1}{D\tau} S \quad (5-26)$$

其解为

$$S = A \cos \frac{x}{(D\tau)^{1/2}} + B \sin \frac{x}{(D\tau)^{1/2}} \quad (5-27)$$

我们应当期望在壁处密度接近于零 (图 5-3), 而在中间有一个或几个峰值. 最简单的解是具有单个极大值的解. 由于对称性, 我们可去掉方程 (5-27) 中的奇数项 (正弦项). 那么, 在 $x = \pm L$ 处的边界条件 $S = 0$ 就要求

$$\frac{L}{(D\tau)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} \quad \text{或者} \quad \tau = \left(\frac{2L}{\pi}\right)^2 \frac{1}{D} \quad (5-28)$$

联立方程 (5-20), 方程 (5-24), 方程 (5-27) 和方程 (5-28), 我们得到

$$n = n_0 e^{-t/\tau} \cos \frac{\pi x}{2L} \quad (5-29)$$

这叫做**最低 (阶) 扩散模** (lowest diffusion mode). 密度分布是余弦形的, 峰值密度随时间指数地衰减. 正如所期望的那样, 时间常数 τ 随 L 的增加而增加, 随 D 的增加而减少.

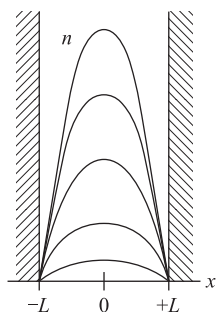


图 5-3 当等离子体由于向壁扩散而衰减时, 不同时刻的等离子体密度

当然, 存在着峰值多于一个的较高 (阶) 扩散模. 假定初始密度由图 5-4 中的上面一条曲线所示出. 这样一个任意分布可展开成傅里叶级数

$$n = n_0 \left[\sum_l a_l \cos \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)\pi x}{L} + \sum_m b_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] \quad (5-30)$$

我们已经选择了指数 l, m , 使得 $x = \pm L$ 处的边界条件自动满足. 为了处理时间依赖, 我们试探如下形式的解

$$n = n_0 \left[\sum_l a_l e^{-l/\tau_l} \cos \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)\pi x}{L} + \sum_m b_m e^{-l/\tau_m} \sin \frac{m\pi x}{L} \right] \quad (5-31)$$

把上式代入扩散方程 (5-17) 中, 我们看到每个余弦项给出形式为

$$-\frac{1}{\tau_l} = -D \left[\left(l + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L} \right]^2 \quad (5-32)$$

的关系式, 对正弦项有相似的式子. 这样, 给出了第 l 阶模的衰变时间常数为

$$\tau_l = \left[\frac{L}{\left(l + \frac{1}{2}\right)\pi} \right]^2 \frac{1}{D} \quad (5-33)$$

密度分布的细粒结构 (fine-grained structure) (对应于大 l 数) 具有较小的时间常数 τ_l , 衰变较快. 等离子体的衰变将按如图 5-4 所示的那样进行. 首先, 精细结构因扩散而消失; 然后, 将达到最低阶扩散模, 如图 5-3 所示的简单余弦分布; 最后, 峰值密度连续衰变, 而等离子体密度的分布却保持同样的形状.

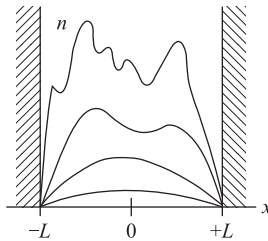


图 5-4 初始非均匀等离子体的衰变, 显示了较高 (阶) 扩散模的迅速消失

5.2.3 在圆柱体中的扩散

在圆柱形几何形状中, 扩散方程 (5-25) 的空间部分可写成

$$\frac{d^2 S}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dS}{dr} + \frac{1}{D\tau} S = 0 \quad (5-34)$$

这个方程和方程 (5-26) 的差别在于加了中间项, 它仅由坐标的变化引起. 在图 5-5 中简单地说明了附加项的必要性. 如果在图 5-5 (a) 中的等离子体薄片向 x 大的方向运动而又不允许膨胀, 密度将保持常数. 另外, 如果在图 5-5 (b) 中等离子体的壳层 (壳层厚度保持不变) 向 r 大的方向运动, 密度必定随着 $1/r$ 减少而减少. 因此期望方程 (5-34) 的解类似于一个阻尼的余弦 (图 5-6). 这个函数

叫做零阶贝塞尔函数，而方程 (5-34) 称为 (零阶) 贝塞尔方程。给出了符号 J_0 ，它代替了余弦符号。函数 $J_0(r/(D\tau)^{1/2})$ 是方程 (5-34) 的一个解，就像 $\cos [x/(D\tau)^{1/2}]$ 是方程 (5-26) 的一个解一样。 $\cos(kx)$ 和 $J_0(kr)$ 两者都能用无穷级数来表示，而且可以在数学表中查到。

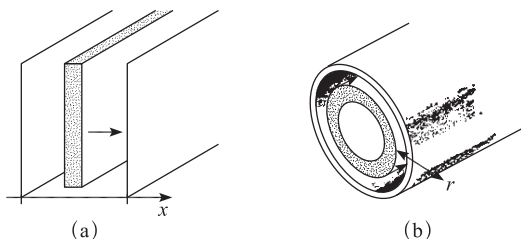


图 5-5 在直线的和圆柱的几何形状中，等离子体板片的运动，说明了余弦函数和贝塞尔函数之间的差别

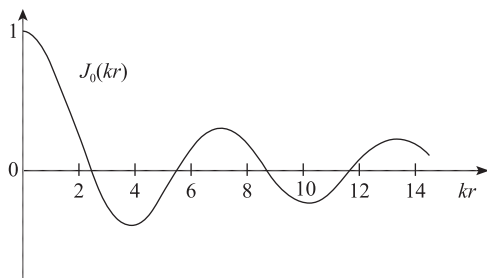


图 5-6 零阶贝塞尔函数

为了满足在 $r=a$ 处的边界条件 $n=0$ ，我们必须令 $a/(D\tau)^{1/2}$ 等于 J_0 的第一个零值；即 2.4，这就得到衰变时间常数 τ 。因为扩散方程 (5-23) 的时间部分并不改变，等离子体再次指数式地衰变。我们已描述了圆柱体中的最低 (阶) 扩散模。较高 (阶) 扩散模 (在圆柱体中具有不止一个极大值) 将用较高阶贝塞尔函数给出，这与板片几何情形类似。

5.3 稳恒态解

在许多实验中，用连续电离和等离子体注入来补偿损失，以维持等离子体处于稳恒态。为了计算这种情况下的密度分布，我们必须在连续性方程中加上一个源项

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D \nabla^2 n = Q(r) \quad (5-35)$$

符号是这样选择，使得当 Q 是正时，它代表一个源，且 $\partial n / \partial t$ 是正的。在稳恒态时，我们令 $\partial n / \partial t = 0$ ，就留下一个有关 $n(r)$ 的泊松型方程。

5.3.1 恒定电离函数

在许多弱电离气体中，电离由麦克斯韦分布尾部的高能电子所产生。在这种情况下，源项 Q 正比于电子密度 n 。令 $Q=Zn$ ，其中 Z 是“电离函数”，我们得到

$$\nabla^2 n = -(Z/D)n \quad (5-36)$$

这个方程和关于 S 的方程 (5-25) 是相同的。因此，密度分布是余弦函数或贝塞尔函数，这与衰变等离子体的情况一样，不过在这种情况下，密度保持常数。通过任何热源使电子温度保持它的常值，并通过中性原子的小量流入以补充被电离的那些原子，可以使等离子体克服扩散损失而维持。

5.3.2 平面源

下面，我们考虑如果在 $x=0$ 面有一个定域源，则在板片几何中会得到什么样的分布。例如，这样的源也许是强度足够电离中性气体的缝隙准直的紫外光束。因此，稳恒态扩散方程为

$$\frac{d^2 n}{dx^2} = -\frac{Q}{D}\delta(0) \quad (5-37)$$

除了 $x=0$ 处外，密度必须满足 $\partial^2 n / \partial x^2 = 0$ 。它显然有下面这种解 (图 5-7)

$$n = n_0 \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \quad (5-38)$$

等离子体有一种线性分布。在源处，斜率的不连续性是 δ 函数源的特征。

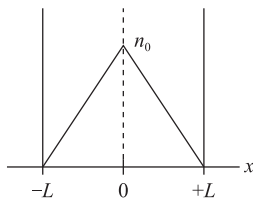


图 5-7 有扩散时，由平面源引起的三角形密度分布

5.3.3 线源

最后，我们考虑在轴上有源的一个圆柱形等离子体。例如，这样的一种源也许是能沿着轴产生电离的高能电子束。除了 $r=0$ 以外，密度必须满足

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n}{\partial r} \right) = 0 \quad (5-39)$$

在 $r=a$ 处为零的解是

$$n = n_0 \ln(a/r) \quad (5-40)$$

在 $r=0$ 处密度变成无穷大 (图 5-8)；不考虑源的有限宽度，要精确地决定接近于

轴处的密度是不可能的。

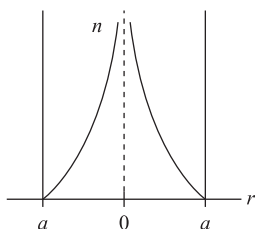


图 5-8 有扩散时，线源引起的对数密度分布

5.4 复合

当一个离子和一个电子碰撞时，特别是当相对速度低时，它们具有有限的几率复合成中性原子。为使动量守恒，必须存在第三者。如果这第三者是一个发射出来的光子，这种过程叫做**辐射复合**（radiative recombination）。如果它是一个粒子，这种过程叫做**三体复合**（three-body recombination）。由复合引起的等离子体损失在连续性方程中可以用负源项来代表。很清楚，这一项将正比于 $n_e n_i = n^2$ 。扩散项不存在时，连续性方程就变成

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\alpha n^2 \quad (5-41)$$

比例常数 α 称为复合系数（recombination coefficient），它的单位为 cm^3/s 。方程（5-41）是有关 n 的非线性方程。这说明直接采用解的线性叠加来满足初始条件和边界条件的方法是不适合的。幸好方程（5-41）是这样简单的非线性方程，以至于能用观察法来求解。其解为

$$\frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} = \frac{1}{n_0(\mathbf{r})} + \alpha t \quad (5-42)$$

其中， $n_0(\mathbf{r})$ 是初始密度分布。很容易证明，它满足方程（5-41）。在密度降到远低于其初始值以后，它随时间**倒数衰变**

$$n \propto \frac{1}{\alpha t} \quad (5-43)$$

这是一种与扩散情况根本不同的行为，在那里随时间变化是指数式的。

图 5-9 示出了在弱电离 H 等离子体的余辉中密度衰变的测量结果。当密度高时，正比于 n^2 的复合占优势，密度随时间倒数地衰变。在密度达到一个低值之后，变成了扩散为主，从那时起，衰变是指数式的。

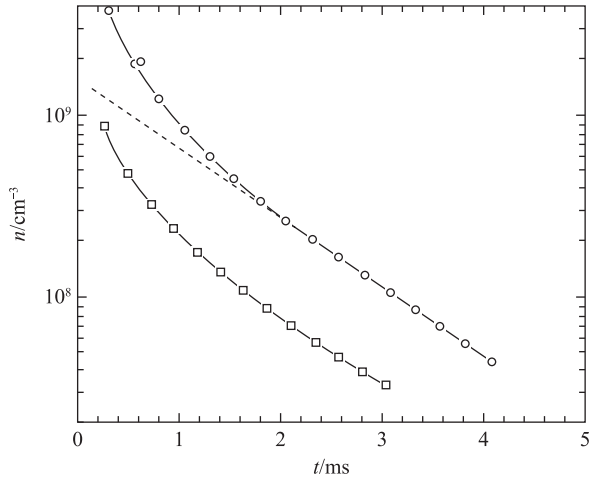


图 5-9 在复合和扩散的情况下，弱电离等离子体的密度衰变曲线

[引自 S. C. Brown, Basic Data of plasma physics, John Wiley and Sons, New York, 1959]

5.5 穿过磁场的扩散

磁场可减小等离子体的扩散损失率，这就是在受控聚变研究中的约束问题。考虑在磁场中的一弱电离等离子体（图 5-10），由于 \mathbf{B} 不影响平行方向的运动，按照方程（5-10），带电离子由于扩散和迁移而沿 \mathbf{B} 运动。这样，对每一种，我们有

$$\Gamma_z = \pm \mu n E_z - D \frac{\partial n}{\partial z} \quad (5-44)$$

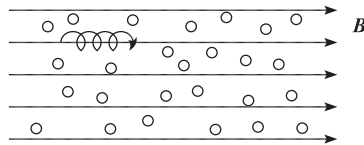


图 5-10 磁场中的一个带电粒子在碰撞之前
将围绕同一条磁力线回转

如果不存在碰撞，粒子在垂直方向会完全不扩散——它们会连续地围绕同一个磁力线回转。当然，因为有电场或 \mathbf{B} 的梯度，存在着越过 \mathbf{B} 的粒子漂移，但是这种漂移可处理成平行于壁。例如，在完全对称的圆柱体中（图 5-11），梯度完全是径向的，所以导向中心的漂移是角向的。因此漂移就会是无害的。

当存在碰撞时，粒子沿着梯度越过 \mathbf{B} 迁移到壁。粒子由于随机游动过程而实现这种运动（图 5-12）。比如，当一个离子和中性原子碰撞时，经过碰撞，离子

向不同方向移动. 它连续地围绕磁场以相同的方向回转, 但是它的回转相位却不连续地改变. (拉莫尔半径也可能改变, 但是让我们假定, 平均来讲离子并不得到或损失能量). 所以, 导向中心在一次碰撞后移动了位置并经历了随机游动. 粒子将在同 ∇n 相反的方向扩散. 随机游动的步长不再是无磁场扩散时的 λ_m , 而代之以拉莫尔半径 r_L 的大小. 因此, 越过 \mathbf{B} 的扩散由于 r_L 减小(通过增加 \mathbf{B})而变慢.

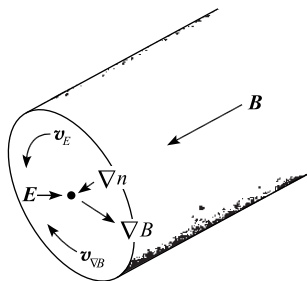


图 5-11 在柱对称等离子体柱中, 粒子漂移并不引起损失

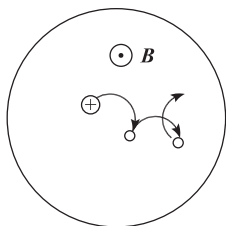


图 5-12 和中性原子碰撞而引起回转粒子的扩散

为了看到这种情况是如何发生的, 我们对每一种粒子写出流体运动方程的垂直分量如下

$$m\nu \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \pm en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}) - KT \nabla n - m\nu \mathbf{v} = 0 \quad (5-45)$$

我们已经再次假定等离子体是等温的, 并且假定 ν 大到足以忽略 $\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt}$ 项. x 和 y 分量为

$$\begin{aligned} m\nu v_x &= \pm en E_x - KT \frac{\partial n}{\partial x} \pm en v_y B \\ m\nu v_y &= \pm en E_y - KT \frac{\partial n}{\partial y} \mp en v_x B \end{aligned} \quad (5-46)$$

运用 μ 和 D 的定义, 我们得到

$$\begin{aligned} v_x &= \pm \mu E_x - \frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial x} \pm \frac{\omega_c}{\nu} v_y \\ v_y &= \pm \mu E_y - \frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial y} \mp \frac{\omega_c}{\nu} v_x \end{aligned} \quad (5-47)$$

代入 v_x , 我们可以解出 v_y

$$v_y(1 + \omega_c^2 \tau^2) = \pm \mu E_y - \frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial y} - \omega_c^2 \tau^2 \frac{E_x}{B} \pm \omega_c^2 \tau^2 \frac{KT}{eB} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} \quad (5-48)$$

其中, $\tau = \nu^{-1}$. 同样 v_x 由下式给出

$$v_x(1 + \omega_c^2 \tau^2) = \pm \mu E_x - \frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial x} + \omega_c^2 \tau^2 \frac{E_y}{B} \mp \omega_c^2 \tau^2 \frac{KT}{eB} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} \quad (5-49)$$

这些方程的最后两项包含 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移和抗磁性漂移

$$\begin{aligned} v_{Ex} &= \frac{E_y}{B}, & v_{Ey} &= -\frac{E_x}{B} \\ v_{Dx} &= \mp \frac{KT}{eB} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y}, & v_{Dy} &= \pm \frac{KT}{eB} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} \end{aligned} \quad (5-50)$$

通过定义垂直迁移率和垂直扩散系数可简化前两项

$$\mu_{\perp} = \frac{\mu}{1 + \omega_c^2 \tau^2}, \quad D_{\perp} = \frac{D}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \quad (5-51)$$

利用方程 (5-50) 和方程 (5-51), 我们能把方程 (5-48) 和方程 (5-49) 写成

$$\mathbf{v}_{\perp} = \pm \mu_{\perp} \mathbf{E} - D_{\perp} \frac{\nabla n}{n} + \frac{\mathbf{v}_E + \mathbf{v}_D}{1 + (\nu^2 / \omega_c^2)} \quad (5-52)$$

从这个式子, 任一种粒子的垂直速度显然由两部分组成. 第一, 存在着通常的 \mathbf{v}_E 和 \mathbf{v}_D 漂移, 它们垂直于势梯度和密度梯度. 这些漂移由于和中性粒子的碰撞而变慢, 当 $\nu \rightarrow 0$ 时, 阻曳因子 $1 + (\nu^2 / \omega_c^2)$ 变成 1. 第二, 存在着平行于势梯度和密度梯度的迁移率和扩散漂移. 这些漂移同 $\mathbf{B} = 0$ 的情形具有相同的形式, 但是系数 μ 和 D 减小了 $(1 + \omega_c^2 \tau^2)$ 倍.

乘积 $\omega_c \tau$ 在磁约束中是一个重要的量. 当 $\omega_c^2 \tau^2 \ll 1$, 磁场对扩散几乎没有影响. 当 $\omega_c^2 \tau^2 \gg 1$, 磁场显著地放慢了越过 \mathbf{B} 的扩散时率. 很容易证明 $\omega_c \tau$ 有下列可供选择的形式

$$\omega_c \tau = \frac{\omega_c}{\nu} = \mu B \cong \frac{\lambda_m}{r_L} \quad (5-53)$$

在 $\omega_c^2 \tau^2 \gg 1$ 的极限下, 我们有

$$D_{\perp} = \frac{KT}{m\nu} \frac{1}{\omega_c^2 \tau^2} = \frac{KT\nu}{m\omega_c^2} \quad (5-54)$$

和方程 (5-8) 相比较, 我们看到碰撞频率 ν 的作用已经反过来了. 在平行于 \mathbf{B} 的扩散中, 由于碰撞延缓了运动, D 正比于 ν^{-1} . 在垂直于 \mathbf{B} 的扩散中, 因为碰撞对于越过磁场的迁移是必要的, D_{\perp} 正比于 ν . 对 m 的关系也反过来了. 记住 ν 正比于 $m^{-\frac{1}{2}}$, 我们看到 $D \propto m^{-\frac{1}{2}}$, 而 $D_{\perp} \propto m^{\frac{1}{2}}$. 在平行于 \mathbf{B} 的扩散中, 因为电子有较高的热速度, 电子动得比离子快; 在垂直于 \mathbf{B} 的扩散中, 因为电子的拉莫尔半径较小, 它逃逸更慢.

去掉数量级为 1 的数字因子, 我们可以将方程 (5-8) 写成

$$D = \frac{KT}{m\nu} \sim v_{th}^2 \tau \sim \frac{\lambda_m^2}{\tau} \quad (5-55)$$

这种形式（长度平方对时间的比）说明扩散是具有步长为 λ_m 的随机游动过程。方程(5-54)可写成

$$D_{\perp} = \frac{KT_{\perp}}{m \omega_c^2} \sim v_{th}^2 \frac{r_L^2}{v_{th}^2} \nu \sim \frac{r_L^2}{\tau} \quad (5-56)$$

这个式子说明垂直扩散是具有步长为 r_L 而不是 λ_m 的随机游动过程。

5.5.1 越过 B 的双极性扩散

因为扩散系数和迁移率系数在磁场存在时是各向异性的，双极性扩散问题就不像 $B=0$ 情况那样简单直接。考虑垂直于 B 的粒子通量(图5-13)。通常，由于 $\Gamma_{e\perp}$ 小于 $\Gamma_{i\perp}$ ，会建立横向电场，以便帮助电子扩散并阻碍离子扩散。然而，这个电场能够被沿 B 方向通量的不平衡所短路。也就是说， $\Gamma_{e\perp} < \Gamma_{i\perp}$ 产生的负电荷能够由于电子沿着场线的逃逸而被消耗。虽然总的扩散必定是双极性的，损失的垂直部分不一定是双极性的。离子主要在径向扩散而电子主要沿 B 方向扩散。这种情况在实际中是否发生取决于特定的实验。在场线终止于导体板上的短等离子体柱中，应当指望双极性电场被短路。于是，每个属种以不同速率径向扩散。在长的端接绝缘板的稀薄等离子体柱中，应当期望径向扩散是双极性的，因为沿 B 方向的逃逸是很难的。

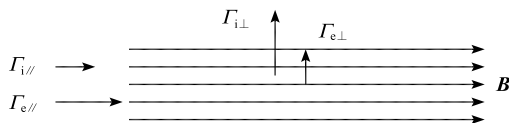


图 5-13 磁场中平行和垂直的粒子通量

数学上的问题是联立解离子和电子的连续性方程(5-12)。不是使离子和电子的通量 Γ_i 而是使它们的散度 $\nabla \cdot \Gamma_j$ 必须彼此相等。把 $\nabla \cdot \Gamma_j$ 分成垂直分量和平行分量，我们有

$$\nabla \cdot \Gamma_i = \nabla_{\perp} \cdot (\mu_{i\perp} n \mathbf{E}_{\perp} - D_{i\perp} \nabla n) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu_{i\parallel} n E_z - D_{i\parallel} \frac{\partial n}{\partial z}) \quad (5-57)$$

$$\nabla \cdot \Gamma_e = \nabla_{\perp} \cdot (-\mu_{e\perp} n \mathbf{E}_{\perp} - D_{e\perp} \nabla n) + \frac{\partial}{\partial z} (-\mu_{e\parallel} n E_z - D_{e\parallel} \frac{\partial n}{\partial z})$$

使 $\nabla \cdot \Gamma_i = \nabla \cdot \Gamma_e$ 所得到的方程不容易被分离成一维的方程。而且，答案敏感地依赖于场线末端的边界条件。除了等离子体是如此之长以至于能完全忽略平行于 B 的扩散外，对越过磁场的双极性扩散问题不存在简单的答案。

5.5.2 实验检验

一个磁场是否按照方程(5-51)减少横向扩散成为许多研究的课题。第一个实验是瑞典的列纳尔特(Lehnert)和霍(Hoh)进行的，他们在足够长的管子中进行实验，以至于能忽略向终端的扩散。他们使用了直径大约为1cm、长3.5m

的氦正柱区 (图 5-14)。在这种等离子体中, 电子由于径向扩散到壁而连续地损失, 并且因中性气体被处于速度分布尾部的电子所电离而得到补充, 这些快速电子又由于纵向电场的加速而得到补充。因此, 人们期望 E_z 会大致正比于横向扩散率。插入放电管壁内的两个探针用来测量 B 发生变化时的 E_z 。 $E_z(B)$ 对 $E_z(0)$ 的比值作为 B 的函数在图 5-15 中示出。在低 B 场时, 实验点接近理论预言的曲线, 即根据方程 (5-52) 计算的曲线。然而, 在大约 1kG 的临界场 B_c 处, 实验点偏离理论值, 事实上, 显示出扩散随 B 而增加。临界场 B_c 随压力而增加, 就暗示包含一个 $\omega_c \tau$ 的临界值, 并且暗示当 $\omega_c \tau$ 太大时, “经典” 扩散理论的某些东西变得不正确了。

上述困难不久就由苏联的卡多姆采夫 (Kadomtsev) 和涅多斯帕索夫 (Nedospasov) 解决了。这两位理论家发现在高磁场时不稳定性会发展, 也就是等离子体波会被 E_z 场激发, 而且发现这个波会增强径向损失。这个理论正确地预期了 B_c 值。随后, 美国伯克利实验室的艾伦 (Allen)、波利卡斯 (Paulikas) 和派尔 (Pyle) 在实验中直接看到了这个波, 它以等离子体柱的螺旋畸变的形式出现。正柱区的这种螺旋形不稳定性是第一个明确解释越过磁场 “反常扩散” 的例子, 但是这个解释只能应用于弱电离气体。在聚变研究的完全电离等离子体中, 反常扩散是一个更难以解决的问题。

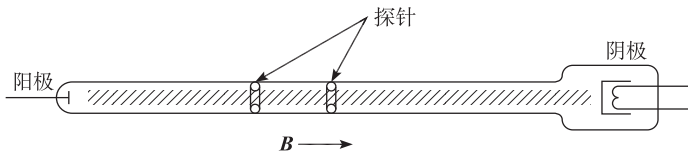


图 5-14 在弱电离气体中, 检验磁场对扩散影响的列纳尔特-霍实验

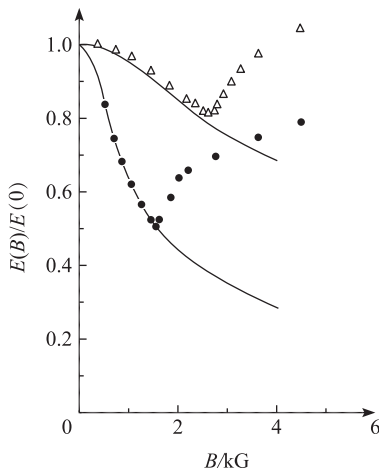


图 5-15 在两个不同压力下测量得到归一化纵向电场与 B 的函数关系, 为了比较也示出了理论曲线

[引自 F. C. Hoh and B. Lehnert, Phys. Fluids, **3**, 600 (1960)]

习题

5-1 氦气中 2eV 电子的电子-中性粒子碰撞截面大约是 $6\pi a_0^2$ ，其中 $a_0 = 0.53 \times 10^{-8} \text{cm}$ 是氢原子第一玻尔轨道半径。一个没有磁场的正柱区有 $p = 1 \text{Torr}$ 的 He 气，其 $KT_e = 2\text{eV}$ 。

(a) 假定对速度分布的平均 $\overline{\sigma v}$ 等于 2eV 电子的 σv ，计算电子扩散系数（以 cm^2/s 为单位）。

(b) 如果沿柱的电流密度是 $200 \text{mA}/\text{cm}^2$ ，等离子体密度是 10^{10}cm^{-3} ，沿柱的电场有多大？

5-2 平面几何形状的一个弱电离等离子体板片具有密度分布

$$n(x) = n_0 \cos(\pi x/2L), \quad -L \leq x \leq L$$

等离子体由于扩散和复合而衰变。如果 $L = \pi \text{cm}$ ， $D = 4000 \text{cm}^2/\text{s}$ ， $a = 10^{-9} \text{cm}^3/\text{s}$ ，在密度等于多少时，扩散引起的损失率将等于复合引起的损失率？

5-3 一个长圆柱形正柱区有 $B = 2\text{kG}$ ， $KT_i = 0.1\text{eV}$ 以及与习题 5-1 中相同的其余参量。密度分布是

$$n(r) = n_0 J_0(r / (D\tau)^{1/2})$$

在 $r = a = 1\text{cm}$ 处，边界条件为 $n = 0$ 。注意，在 $x = 2.4$ 时 $J_0(z) = 0$ 。

(a) 证明用于上面条件的双极性扩散系数能由 $D_{e\perp}$ 来近似。

(b) 忽略复合和柱末端的损失，计算约束时间 τ 。

5.6 完全电离等离子体中的碰撞

当等离子体仅由离子和电子组成时，所有碰撞都是在带电粒子间的库仑碰撞。然而，在同类粒子间的碰撞（离子-离子或电子-电子碰撞）和不同类粒子间的碰撞（离子-电子或电子-离子碰撞）之间有明显的不同。考虑两种相同粒子的碰撞（图 5-16）。如果是一次（对）正（碰）撞，粒子就倒转了它们的速度；它们只不过简单地交换它们的轨道，并且两个导向中心保持在相同的位置。这种结果和一个掠碰撞相同，在掠碰撞中，轨道几乎不受扰动。能够出现的最不利结果是 90° 碰撞，那时，速度方向改变了 90° 。碰撞后的轨道将是虚线圆，而导向中心将发生位移。然而很清楚，两个导向中心的“质心”位置保持固定。由于这个原因，同类粒子间的碰撞几乎不引起扩散。这种情况和离子与中性原子碰撞的情况是不同的。在那里，中性粒子的最后速度是无关紧要的，离子则离开它的初始位置随机游动。然而，在离子-离子碰撞的情形，在每次碰撞中存在一个细致的平衡；对向外运动的每个离子，作为碰撞的结果存在另一个向内运动的离子。

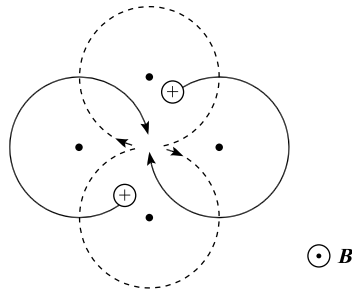


图 5-16 一次 90°碰撞后，两个同类粒子的导向中心位移

然而，当两个电荷相反的粒子碰撞时，情况就完全不同了（图 5-17）。现在最不利的情況是 180°碰撞，在这种碰撞中，粒子以其倒转了的速度射出。由于粒子按照它的本性必须连续地围绕磁力线回转，两个导向中心将以相同方向运动。不同类粒子碰撞引起扩散。由于离子和电子质量上的悬殊，它们的物理图像是有些不同的。电子从几乎静止不动的离子弹离并以通常的方式随机游动。离子则在每次碰撞中稍微被推撞，并由于电子频繁轰击的结果而来回运动。然而，由于每次碰撞的动量守恒，正如我们将要证明的那样，离子和电子的扩散率是相同的。

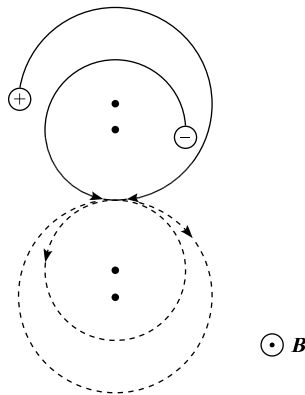


图 5-17 180°碰撞后，两个电荷相反的粒子的导向中心位移

5.6.1 等离子体电阻率

包括带电粒子碰撞影响的流体运动方程可以写成（参见方程（3-47））

$$\begin{aligned}
 Mn \frac{dv_i}{dt} &= en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) - \nabla p_i - \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_i + \mathbf{P}_{ie} \\
 \frac{dv_e}{dt} &= -en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - \nabla p_e - \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_e + \mathbf{P}_{ei}
 \end{aligned}
 \tag{5-58}$$

项 \mathbf{P}_{ie} 和 \mathbf{P}_{ei} 分别表示与电子碰撞引起的离子流体动量增加和与离子碰撞引起的电子

流体动量增加. 压力张量 \mathbf{P}_j 已分离成各向同性部分 p_j 及各向异性的黏滞张量 π_j . 同类粒子碰撞(在每种流体中分别产生压力)包括在 π_j 中. 由于这些碰撞不引起多大扩散,我们将忽略 $\nabla \cdot \pi_j$ 项. 至于项 \mathbf{P}_{ei} 和 \mathbf{P}_{ie} (它们表示了两种流体间的摩擦力),动量守恒要求

$$\mathbf{P}_{ie} = -\mathbf{P}_{ei} \quad (5-59)$$

用通常的方式,我们可用碰撞频率来写出 \mathbf{P}_{ei}

$$\mathbf{P}_{ei} = mm(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \nu_{ei} \quad (5-60)$$

对 \mathbf{P}_{ie} 有类似的式子. 由于是库仑碰撞,我们应当期望 \mathbf{P}_{ei} 正比于库仑力(对带单个电荷的离子,库仑力正比于 e^2). 而且, \mathbf{P}_{ei} 必须正比于电子密度 n_e 和散射中心密度 n_i ,当然 n_i 等于 n_e . 最后, \mathbf{P}_{ei} 应正比于两种流体的相对速度. 于是,根据物理上的理由,我们能写出 \mathbf{P}_{ei}

$$\mathbf{P}_{ei} = \eta e^2 n^2 (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \quad (5-61)$$

其中, η 是比例常数. 比较方程(5-61)和方程(5-60),我们看出

$$\nu_{ei} = \frac{n e^2}{m} \eta = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \eta \quad (5-62)$$

常数 η 是等离子体的比电阻率,不久将清楚地看到,比电阻率的意义和通常的电阻率相一致.

5.6.2 库仑碰撞的机制

当一个电子和中性原子碰撞时,在电子以原子大小的尺度靠近到原子以前,它不受到力;这种碰撞类似于台球的碰撞. 当一个电子和离子碰撞时,由于离子的长程库仑场,电子逐渐地偏转. 然而,对于这类碰撞,我们能导出一个等效截面. 对我们来讲,给出截面数量级的估计就足够了. 在图5-18中,一个速度 v 的电子接近于电荷 e 的固定离子. 在没有库仑力时,电子会有一个最接近的距离 r_0 ,叫做**碰撞参量**(impact parameter). 存在库仑吸引力时,电子将偏转角 χ (χ 和 r_0 有关),库仑力是

$$F = -\frac{e^2}{r^2} \quad (5-63)$$

在电子处于离子附近的这段时间内,它才感受到这个力,这段时间粗略计为

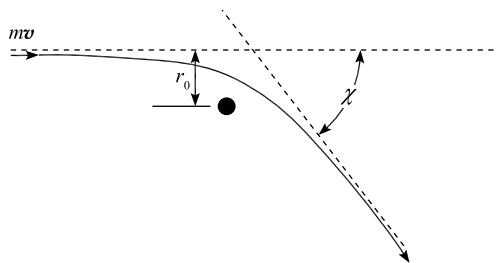


图 5-18 和一个离子发生一次库仑碰撞的电子轨道

$$T \approx \frac{r_0}{v} \quad (5-64)$$

所以，电子的动量变化近似为

$$\Delta(mv) = |FT| \approx \frac{e^2}{r_0 v} \quad (5-65)$$

我们希望估计大角度碰撞 ($\chi \geq 90^\circ$) 的截面. 对于一次 90° 碰撞, mv 的变化具有 mv 本身的量级. 这样

$$\Delta(mv) \cong mv \cong \frac{e^2}{r_0 v}, \quad r_0 = \frac{e^2}{m v^2} \quad (5-66)$$

于是, 截面为

$$\sigma = \pi r_0^2 = \frac{\pi e^4}{m^2 v^4} \quad (5-67)$$

所以, 碰撞频率是

$$\nu_{ei} = n \sigma v = \frac{n \pi e^4}{m^2 v^3} \quad (5-68)$$

而电阻率是

$$\eta = \frac{m}{n e^2} \nu_{ei} = \frac{\pi e^2}{m v^3} \quad (5-69)$$

对于麦克斯韦分布的电子, 为了估计数量级可以用 KT_e/m 代替 v^2 :

$$\eta = \frac{\pi e^2 m^{1/2}}{(KT_e)^{3/2}} \quad (5-70)$$

方程 (5-70) 是基于只有大角度碰撞时的电阻率. 在实际上, 因为库仑力的长程性, 小角碰撞更加频繁, 结果许多小角度偏转的累积影响大于大角度碰撞的影响. 斯必泽 (Spitzer) 证明, 方程 (5-70) 应当乘上一个因子 $\ln \Lambda$:

$$\eta \approx \frac{\pi e^2 m^{1/2}}{(KT_e)^{3/2}} \ln \Lambda \quad (5-71)$$

其中

$$\Lambda = \frac{\lambda_D}{r_0} \quad (5-72)$$

这个因子代表了以 r_0 为单位 (由方程 (5-66) 给出) 的最大碰撞参量对麦克斯韦分布的平均. 最大的碰撞参量取成 λ_D , 因为在较大距离时, 德拜屏蔽抑制了库仑场. 虽然 Λ 与 n 和 KT_e 有关, 但对数的对等离子体参量的确切值是不敏感的. $\ln \Lambda$ 的典型值由表 5-1 给出.

表 5-1 $\ln \Lambda$ 的典型值

| KT_e/eV | n/cm^{-3} | $\ln \Lambda$ |
|-----------|-------------|---------------|
| 10^{-1} | 10^{12} | 6 (Q 装置) |
| 10^2 | 10^{13} | 15 (典型环) |
| 10^4 | 10^{15} | 17 (聚变反应堆) |

很明显, 当等离子体参量变化许多数量级时, $\ln\Lambda$ 仅变化 3 倍. 对大多数的用途来说, 不管所涉及的等离子体是什么类型, 取 $\ln\Lambda=10$ 将足够精确.

5.6.3 η 的物理意义

假定在等离子体中存在电场 \mathbf{E} , 并且电场激励的电流完全由电子携带 (电子的可动性远比离子大). 令 $B=0$, $K T_e=0$, 因此 $\nabla \cdot \mathbf{P}_e=0$. 于是, 稳态电子运动方程 (5-58) 简化为

$$en\mathbf{E} = \mathbf{P}_{ei} \quad (5-73)$$

由于 $\mathbf{j}=en(\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_e)$, 方程 (5-61) 能写成

$$\mathbf{P}_{ei} = \eta en\mathbf{j} \quad (5-74)$$

所以方程 (5-73) 变成

$$\mathbf{E} = \eta \mathbf{j} \quad (5-75)$$

这就是简单的欧姆定律, 常数 η 恰好是比电阻率, 由方程 (5-71) 或方程 (5-69) 给出的等离子体中 η 的表达式有几个值得指出的特性.

(1) 在方程 (5-71) 中, 我们看到 η 与密度无关 (除了 $\ln\Lambda$ 对密度的弱依赖性外). 这是一个相当意外的结果, 因为它意味着, 如果场 \mathbf{E} 加于等离子体, 由方程 (5-75) 给出的电流 \mathbf{j} 与载流子的数目无关. 其原因是, 虽然 \mathbf{j} 随 n_e 增加, 但对离子的摩擦阻力也随 n_i 增加. 由于 $n_e=n_i$, 这两种影响抵消, 从方程 (5-68) 和方程 (5-69) 可看出这种抵消. 碰撞频率 ν_{ei} 确实正比于 n , 但是在 η 中因子 n 被约掉. 在这方面, 完全电离等离子体的行为与弱电离等离子体的行为非常不同. 在弱电离等离子体中, 我们有 $\mathbf{j}=-ne\mathbf{v}_e$, $\mathbf{v}_e=-\mu_e\mathbf{E}$, 所以, $\mathbf{j}=ne\mu_e\mathbf{E}$. 由于 μ_e 仅依赖于中性粒子密度, 电流正比于等离子体密度 n .

(2) 方程 (5-71) 说明 η 比例于 $(K T_e)^{-3/2}$. 当加热等离子体时, 库仑截面减小, 电阻率随温度的增加而相当迅速地下降. 处于热核温度 (几十 keV) 的等离子体基本上是无碰撞的, 这就是对无碰撞等离子体作那么多理论研究的原因. 当然, 总是必须存在某些碰撞, 不然任何聚变反应也不会发生. 加热等离子体的一种简便途径是简单地使电流通过等离子体. 于是 I^2R (或 $j^2\eta$) 损失就转化成电子温度的增加. 这就叫做欧姆加热. 然而, η 的 $(K T_e)^{-3/2}$ 依赖关系不允许将这个使用方法使用到热核温度. 在温度高于 1keV 时, 等离子体变成这样好的一个良导体, 以至于在那个范围, 欧姆加热是一个非常缓慢的过程.

(3) 方程 (5-68) 说明 ν_{ei} 随 v^{-3} 变化. 在速度分布尾部的快速电子几乎不发生碰撞. 所以, 主要由这些电子而不是位于分布主体中的大多数电子来携带电流. 对 v 的强依赖性有另一个感兴趣的结果. 如果一个电场突然加到等离子体, 能发生叫做电子逃逸 (electron runaway) 的现象. 当加上电场时, 碰巧在 $-\mathbf{E}$ 方向运动快的一些电子, 在它们碰到一个离子之前, 将获得如此多的能量, 以至于它们只能发生一种掠碰撞, 这就允许它们从电场中拾取更多的能量并更进一步减小它

们的碰撞截面。如果 E 足够大，截面下降如此快以至于这些逃逸电子从不发生碰撞，它们形成了加速的电子束而与分布的主体分离。

5.6.4 η 的数值

斯必泽首先给出了 η 的确切计算，这个计算考虑到在每次碰撞中离子的反冲，并对电子分布作了适当的平均。下列有关氢的结果（我们以不同单位给出）有时称作斯必泽电阻率：

$$\begin{aligned}\eta_{\parallel} &= 7.3 \times 10^{-9} \frac{Z \ln \Lambda}{T^{3/2}(\text{K})} \quad (\text{静电单位}) \\ &= 5.8 \times 10^{-15} \frac{Z \ln \Lambda}{T^{3/2}(\text{eV})} \quad (\text{静电单位}) \\ &= 5.2 \times 10^{-3} \frac{Z \ln \Lambda}{T^{3/2}(\text{eV})} \quad (\text{欧姆-厘米})\end{aligned} \quad (5-76)$$

这里， Z 是离子电荷数，在本书别的地方，已经取 Z 等于 1。由于对 M 的依赖是弱的，其他气体也能用这些值。下标 \parallel 表示这个 η 值适用于平行于 \mathbf{B} 的运动。对垂直于 \mathbf{B} 的运动，应当用下式给出的 η_{\perp} 值

$$\eta_{\perp} = 3.3 \eta_{\parallel} \quad (5-77)$$

它并不表示沿 \mathbf{B} 的导电率只比越过 \mathbf{B} 的导电率好 2 倍。仍然需要考虑类似 $\omega_c^2 \tau^2$ 的因子。因子 3.3 来自于电子分布中不同速度的权重差别。在垂直运动中，有小拉莫尔半径的慢电子对电阻率的贡献比起平行运动中的贡献来要大。

对于 $KT_e = 100\text{eV}$ ，从方程 (5-76) 得到

$$\eta = 5 \times 10^{-5} \quad \text{欧姆-厘米}$$

它能与不同的金属导体相比较：

$$\text{铜: } \eta = 2 \times 10^{-6} \quad \text{欧姆-厘米}$$

$$\text{不锈钢: } \eta = 7 \times 10^{-5} \quad \text{欧姆-厘米}$$

$$\text{水银: } \eta = 10^{-4} \quad \text{欧姆-厘米}$$

所以，100eV 的等离子体具有一个类似于不锈钢的电阻率。

5.7 单流体 MHD 方程

现在，我们探讨完全电离等离子体中的扩散问题。由于耗散项 \mathbf{P}_{ei} 包括速度差 $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e$ ，这样，用离子和电子方程的线性组合，使得未知数是 $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e$ 而不是 \mathbf{v}_i 或 \mathbf{v}_e ，计算就比较简单。迄今为止，我们已经把等离子体考虑成由两个相互贯穿的流体所组成。而我们将要选择的线性组合将把等离子体描述成一个类似于液体汞的单流体，它具有质量密度 ρ 和电导率 $1/\eta$ 。这些方程就是磁流体动力学 (MHD) 方程。

对带单个电荷离子的准中性等离子体，我们能把质量密度 ρ 、质量速度 \mathbf{v} 和电流密度 \mathbf{j} 定义如下：

$$\rho \equiv n_i M + n_e m \approx n(M+m) \quad (5-78)$$

$$\mathbf{v} \equiv \frac{1}{\rho}(n_i M \mathbf{v}_i + n_e m \mathbf{v}_e) \approx \frac{M \mathbf{v}_i + m \mathbf{v}_e}{M+m} \quad (5-79)$$

$$\mathbf{j} \equiv e(n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e) \approx ne(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \quad (5-80)$$

在运动方程中，我们将加上重力项 Mng 。这一项能用来表示作用在等离子体上的任何非电磁力。离子和电子方程能写成

$$Mn \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) - \nabla p_i + Mng + \mathbf{P}_{ie} \quad (5-81)$$

$$Mn \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} = -en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - \nabla p_e + Mng + \mathbf{P}_{ei} \quad (5-82)$$

为了简单起见，像过去所做的那样，我们忽略了黏滞性张量 π 。如果拉莫尔半径远小于各种量变化的标度，这种忽略不会引起大的误差。我们也已忽略了 $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ 项，因为不这样做，就会使推导变得不必要地复杂。证明这种简化的正确性是比较困难的。为了避免冗长的讨论，我们将简单地假定 \mathbf{v} 是如此之小，使得可以忽略这个二次项。

现在，我们把方程 (5-81) 和方程 (5-82) 相加，得到

$$n \frac{\partial}{\partial t}(M \mathbf{v}_i + m \mathbf{v}_e) = en(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \times \mathbf{B} - \nabla p + n(M+m)\mathbf{g} \quad (5-83)$$

电场已经抵消，碰撞项 $\mathbf{P}_{ei} = -\mathbf{P}_{ie}$ 也抵消，我们已经引入了总压力的表示式

$$p = p_i + p_e \quad (5-84)$$

用方程 (5-78) ~ 方程 (5-80)，能简单地把方程 (5-83) 写作

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (5-85)$$

这就是描述质量流的单流体运动方程。因为流体是中性的，电场并不明显地出现。在右边的三种体力确实是人们所指望的力。

取双流体方程的不同线性组合，可得到一个不那么显而易见的方程。用 m 乘方程 (5-81)，用 M 乘方程 (5-82)，并且从前一个方程减去后一个方程，结果为

$$\begin{aligned} Mmn \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) &= en(M+m)\mathbf{E} + en(m\mathbf{v}_i + M\mathbf{v}_e) \times \mathbf{B} \\ &\quad - m \nabla p_i + M \nabla p_e - (M+m)\mathbf{P}_{ei} \end{aligned} \quad (5-86)$$

用方程 (5-78)，方程 (5-80) 和方程 (5-61)，则方程 (5-86) 变成

$$\begin{aligned} \frac{Mmn}{e} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{j}}{n} \right) &= e\rho \mathbf{E} - (M+m)ne\eta \mathbf{j} - m \nabla p_i + M \nabla p_e \\ &\quad + en(m\mathbf{v}_i + M\mathbf{v}_e) \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (5-87)$$

最后一项能简化成

$$\begin{aligned} m\mathbf{v}_i + M\mathbf{v}_e &= M\mathbf{v}_i + m\mathbf{v}_e + M(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) + m(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \\ &= \frac{\rho}{n}\mathbf{v} - (M-m)\frac{\mathbf{j}}{ne} \end{aligned} \quad (5-88)$$

将方程 (5-87) 除以 $e\rho$, 得到

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{j} = \frac{1}{e\rho} \left[\frac{Mmn}{e} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{j}}{n} \right) + (M-m) \mathbf{j} \times \mathbf{B} + m \nabla p_i - M \nabla p_e \right] \quad (5-89)$$

在极限 $m/M \rightarrow 0$, 它变成

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} + \frac{1}{en} (\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p_e) \quad (5-90)$$

这是我们的第二个方程, 称为广义欧姆定律. 它描述导电流体的电性质. $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ 项叫做霍尔 (Hall) 电流项. 霍尔项和方程 (5-90) 的最后一项经常是足够小以至于常常被忽略, 于是欧姆定律简化成

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} \quad (5-91)$$

从离子和电子的连续性方程之和与差很容易得到质量 ρ 和电荷 σ 的连续性方程. 这样, MHD 方程组表达如下

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (5-85)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} \quad (5-91)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (5-92)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (5-93)$$

这组方程加上麦克斯韦方程组常用来描述等离子体平衡态. 它也能用于推导等离子体波, 但是, 它的精确性比我们已用过的双流体方程的精确性更差. 对于涉及电阻率的问题来说, MHD 方程的简单性比起它的缺点来更重要. 天体物理学家已广泛地把 MHD 方程用于研究宇宙电动力学, 流体力学家则广泛地用于研究 MHD 能量转换, 而聚变理论家则用 MHD 方程研究复杂的磁形态.

5.8 完全电离等离子体中的扩散

在没有重力时, 稳恒态等离子体方程 (5-85) 和方程 (5-91) 变成

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p \quad (5-94)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} \quad (5-95)$$

后一个方程的平行分量仅是

$$E_{\parallel} = \eta j_{\parallel}$$

这就是普通欧姆定律. 用 \mathbf{B} 叉乘就可找出垂直分量:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} + (\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \eta_{\perp} \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \eta_{\perp} \nabla p$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} - \mathbf{v}_{\perp} B^2 = \eta_{\perp} \nabla p$$

$$\mathbf{v}_{\perp} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} - \frac{\eta_{\perp}}{B^2} \nabla p \quad (5-96)$$

第一项恰好是两属种粒子一起的 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移. 第二项是在 $-\nabla p$ 方向的扩散速度. 例如, 在轴对称的圆柱等离子体中, E 和 ∇p 处于径向, 应当有

$$v_\theta = -\frac{E_r}{B}, \quad v_r = -\frac{\eta_\perp}{B^2} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (5-97)$$

与扩散有关的通量是

$$\Gamma_\perp = n \mathbf{v}_\perp = -\frac{\eta_\perp n (K T_i + K T_e)}{B^2} \nabla n \quad (5-98)$$

它具有菲克定量 (方程 (5-11)) 的形式, 其扩散系数为

$$D_\perp = \frac{\eta_\perp n \sum KT}{B^2} \quad (5-99)$$

这就是完全电离气体的所谓“经典”扩散系数. 在计算 D_\perp 时, 记住 η_\perp 和 B 都用静电单位 (或都用电磁单位), KT 以 erg 为单位.

注意 D_\perp 与 $1/B^2$ 成比例, 这种情况恰好与弱电离气体一样. 这种依赖性 is 经典扩散的特征, 并最终能追溯到具有步长 r_L 的随机游动过程. 然而, 方程 (5-99) 在三个本质方面与部分电离气体方程 (5-54) 不同. 第一, 在完全电离气体中, D_\perp 不是常数; 它正比于 n . 这是因为散射中心密度并不被中性原子密度所固定, 而是等离子体密度本身. 第二, 由于 η 比例于 $(KT)^{-3/2}$, 在完全电离等离子体中, D_\perp 随温度的增加而减小. 在部分电离气体中, 则有相反的情况. 出现这种差别的原因是库仑截面与速度的依赖性. 第三, 在完全电离气体中 (只要忽略同类粒子的碰撞), 扩散自动成为双极性的. 在方程 (5-99) 中的 D_\perp 是全流体的系数; 因为两种粒子以相同的速率扩散, 没有双极电场发生. 这是在离子-电子碰撞中动量守恒的结果. 如果用双流体方程, 这一点就更清楚了 (习题 5-7).

最后, 我们想要指出, 在完全电离气体中, 不存在横向迁移. \mathbf{v}_\perp 的方程 (5-96) 不包含与 \mathbf{E} 有关的 \mathbf{E} 向分量. 如果横向 \mathbf{E} 场加到均匀等离子体中, 两种粒子以 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 速度一起漂移. 由于在两种粒子间不存在相对漂移. 因而它们不碰撞, 而且不存在 \mathbf{E} 方向的漂移. 当然, 碰撞会由于热运动而存在. 这种简单的结果仅是一种近似. 之所以有这种结果是由于我们忽略了: ① 同类粒子碰撞; ② 电子质量; ③ 欧姆定律 (方程 (5-90)) 的最后两项.

5.9 扩散方程的解

由于在完全电离气体中, D_\perp 不是常数, 我们定义一个不变的量 A

$$A \equiv \eta K \cdot T/B^2 \quad (5-100)$$

我们已经假定 KT 和 B 是均匀的, 并且可以忽略 η 对 n (通过因子 $\ln \Lambda$) 的依赖关系, 于是对于 $T_i = T_e$, 就有

$$D_\perp = 2nA \quad (5-101)$$

现在，连续性方程 (5-92) 能写成

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t} &= \nabla \cdot (D_{\perp} \nabla n) = A \nabla \cdot (2n \nabla n) \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= A \nabla^2 n^2\end{aligned}\quad (5-102)$$

这是一个关于 n 的非线性方程，几乎不存在简单解。

5.9.1 时间关系

如果我们通过令

$$n = T(t)S(r)$$

来分离变量，就能把方程 (5-102) 写成

$$\frac{1}{T^2} \frac{dT}{dt} = \frac{A}{S} \nabla^2 S^2 = -\frac{1}{\tau} \quad (5-103)$$

其中， $-1/\tau$ 是分离常数。这个方程的空间部分是很难求解的，但是时间部分和我们在复合问题中遇到的方程 (5-41) 是相同的。所以，方程解是

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_0} + \frac{t}{\tau} \quad (5-104)$$

在长的时间 t ，像复合的情况一样，密度以 $1/t$ 衰变。这种倒数衰变是对完全电离等离子体经典扩散所应预期的结果。弱电离气体的指数衰变是一种显然不同的行为。

5.9.2 与时间无关的解

有一种情形能简单地解出扩散方程。设想轴上有源的一个长等离子体柱 (图 5-19)，当等离子体因径向扩散和复合而损失时，它保持一个稳恒态。源区域外边的密度分布将由扩散和复合之间的竞争所确定。如果扩散小，复合大，密度的衰减距离就短，在相反的情况，衰减距离就长。在源外边的区域中，连续性方程是

$$-A \nabla^2 n^2 = -\alpha n^2 \quad (5-105)$$

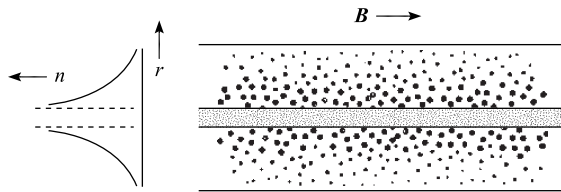


图 5-19 完全电离的圆柱形等离子体越过磁场的扩散

这个方程是 n^2 的线性方程，并很容易求解。在圆柱形几何情形，解是一个贝塞尔函数。在平面几何情形，方程 (5-105) 为

$$\frac{\partial^2 n^2}{\partial x^2} = \frac{\alpha}{A} n^2 \quad (5-106)$$

具有解

$$n^2 = n_0^2 \exp [-(\alpha/A)^{1/2} x] \quad (5-107)$$

标度距离是

$$l = (A/\alpha)^{1/2} \quad (5-108)$$

由于 A 随磁场变化, 而 α 保持常数, 所以 l 随 B 变化就构成了一种对经典扩散的检验. 实际上在 Q 装置中尝试过这种实验, Q 装置提供一个完全电离的等离子体. 但是很不幸, 不对称 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移的存在导致了另一种类型的损失 (通过对流), 使实验没有得到结果.

最后, 我们希望指出一个定标律, 它适用于任何完全电离的稳恒态等离子体 (由均匀 \mathbf{B} 场中恒定源 Q 来维持). 那时, 连续性方程为

$$-A \nabla^2 n^2 = -\eta K T \nabla^2 (n^2/B^2) = Q \quad (5-109)$$

由于 n 和 B 仅以组合 n/B 出现, 当改变 B 时, 密度分布将保持不变, 而密度本身将随 B 线性增加:

$$n \propto B \quad (5-110)$$

由于 $D_{\perp} \propto B^{-2}$, 人们也许会期望平衡密度 n 定标为 B^2 , 但必须记住, D_{\perp} 本身正比于 n .

5.10 玻姆扩散和新经典扩散

虽然很早就已经知道了由库仑碰撞得到的扩散理论, 但是直到最近几年, 所有的实验室实验都不能在完全电离的等离子体中证实 D_{\perp} 的 $1/B^2$ 依赖性. 在几乎所有的以前实验中, D_{\perp} 定标成 B^{-1} 而不是 B^{-2} , 并且发现等离子体随时间指数衰变, 而不是倒数衰变. 另外, D_{\perp} 的绝对值远大于方程 (5-99) 所给出的值. 1946 年, 玻姆 (Bohn)、伯霍普 (Burhop)、梅西 (Massey) 首先注意到这种异常差的磁约束, 当时他们正在发展一个用于铀同位素分离的磁弧. 玻姆给出半经验公式

$$D_{\perp} = \frac{1}{16} \frac{K T_c}{e B} \equiv D_B \quad (5-111)$$

这个公式在非常多的不同实验中都得到满足. 遵守这个定律的扩散称为**玻姆扩散**. 由于 D_B 与密度无关, 因此随时间衰变是指数的. 在半径为 R , 长度为 L 的圆柱中, 时间常数可由下式估计:

$$\tau \approx \frac{N}{dN/dt} = \frac{n\pi R^2 L}{\Gamma_r 2\pi R L} = \frac{nR}{2\Gamma_r}$$

其中, N 是等离子体中离子-电子对的总数. 用菲克定律和玻姆公式给出的通量 Γ_r , 我们得到

$$\tau \approx \frac{nR}{2 D_B \partial n / \partial r} \approx \frac{nR}{2 D_B n / R} = \frac{R^2}{2 D_B} \equiv \tau_B \tag{5-112}$$

量 τ_B 常称为**玻姆时间**。

也许证明玻姆公式最广泛的一组实验是在普林斯顿称作仿星器的 6 个装置中进行的。仿星器是一个环形磁约束器，它具有扭曲的磁力线以达到（第 2.3 节所描述的）平均掉梯度 B 漂移和曲率漂移。图 5-20 示出了十多年来在 C 型仿星器中对许多不同放电类型所得到的数据汇编。 τ 的测量值靠近代表玻姆时间 τ_B 的直线。和玻姆扩散接近一致会对受控聚变方案带来严重的后果。方程（5-111）说明 D_B 随温度增加而不是减少，并且虽然它随 B 减少，但比期望的减少要慢。从绝对大小看， D_B 也远大于 D_{\perp} 。例如，对于在 10kG 场中的 100eV 等离子体，我们得到

$$D_B = \frac{1}{16} 10^8 \frac{(KT_e)_{eV}}{B_G} = \frac{10^8}{16} \frac{10^2}{10^4} = 6 \times 10^4 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$$

如果密度是 10^{13}cm^{-3} ，经典扩散系数是

$$\begin{aligned} D_{\perp} &= \frac{2nKT \eta_{\perp}}{B_G^2 / c^2} = \frac{(2)(10^{13})(10^2)(1.6 \times 10^{-12})(3.3)(5.8 \times 10^{-17})}{(10^4)^2 / (3 \times 10^{10})^2} \\ &= 5.5 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \end{aligned}$$

上面两个值相差有 4 个数量级。

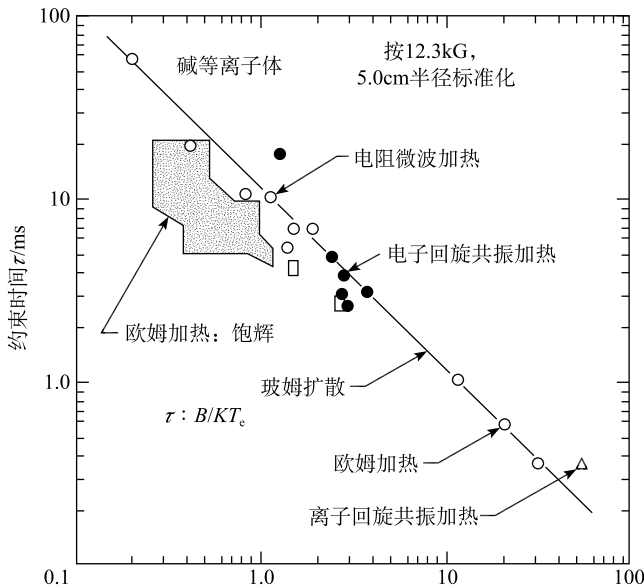


图 5-20 在 C 型仿星器中，对不同放电类型约束时间测量结果的概述，显示出与玻姆扩散定律一致

[蒙美国原子能委员会支持的普林斯顿大学等离子体物理实验室格罗夫 (D. J. Grove) 的允许]

对玻姆扩散已经提出了几种解释。首先，可能有磁场误差。在用于聚变研究

的复杂位形中，磁力线是相互接近还是停留在室中并不总是很清楚的。由于平均自由程是如此之长，只要磁场线圈结构稍许不对称，不发生碰撞就能使电子向壁漂移出。于是，双极性电场将把离子拉出。其次，存在不对称电场的可能性。这种不对称能由嵌入等离子体的障碍物、由真空室的不对称性或者由产生及加热等离子体方法的不对称性所产生。于是，直流 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移不一定平行于壁，通过 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 对流能把离子和电子一块带到壁上。这种称为**对流单元**（convective cell）的漂移结构已经被观察到。最后，还存在由不稳定等离子体波所引起的振荡电场的可能性。如果这些涨落场是随机的， $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移构成一个无碰撞的随机游动过程。即使振荡场是一个纯粹正弦波，它也能导致增大损失，因为 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移能有这种相位，使得在任何密度涨落为正之时漂移总是向外。人们可以把这个情况看作正在运动的对流单元模（convective cell pattern）。当存在反常扩散时，常观察到涨落电场，但是在许多情况下，可以看到场并不是造成所有损失的原因。在完全电离等离子体的实验中，所有三种反常损失机制可同时存在。

每当损失由稳定或振荡的 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移所引起时，不难看出 D_B 与 $K T_e$ 和 B 的定标是固有的。令逃逸通量正比于 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移速度

$$\Gamma_{\perp} = n v_{\perp} \propto n E / B \quad (5-113)$$

由于德拜屏蔽，等离子体中的最大势由式（5-114）给出：

$$e \phi_{\max} \approx K T_e \quad (5-114)$$

如果 R 是等离子体的特征标度长（具有等离子体半径的量级），于是，最大电场是

$$E_{\max} \approx \frac{\phi_{\max}}{R} \approx \frac{K T_e}{e R} \quad (5-115)$$

它引起的通量 Γ_{\perp} 为

$$\Gamma_{\perp} \approx \gamma \frac{n K T_e}{R e B} \approx -\gamma \frac{K T_e}{e B} \nabla n = -D_B \nabla n \quad (5-116)$$

其中， γ 是某个小于 1 的分数。这样， D_B 正比于 $K T_e / e B$ 就不奇怪了。 $\gamma = \frac{1}{16}$ 没有理论上的根据，而是和大多数实验一致的经验值（误差在 200%~300%）。

最近的环形装置实验已经达到了 $100 \tau_B$ 量级的约束时间。这是通过仔细地消除振荡和不对称性而达到的。然而，在环形装置中，出现了其他增强碰撞扩散的效应。图 5-21 示出了具有螺旋形磁力线的环。需要用扭曲场来消除单向梯度 B 漂移和曲率漂移。当粒子跟随磁力线运动时，在接近环的内壁，粒子看到较大的 $|B|$ ，而在接近环的外壁，粒子看到较小的 $|B|$ 。因此，某些粒子被磁镜效应所俘获并且不再围绕环的所在通道环流。当这些俘获粒子连续通过给定的截面时，它们的导向中心轨迹为香蕉性轨道（图 5-21）。当一个粒子发生碰撞时，它连续地变成俘获的和不再俘获的，并且从一个香蕉形轨道跑到另一个香蕉形轨道。因此，随机游动步长是香蕉轨道宽度而不是 γ_L ，就增加了“经典”扩散系数。它

称为**新经典扩散** (neoclassical diffusion) . D_{\perp} 与 ν 的依赖关系表示在图 5-22 中 . 在 ν 小的区域, 香蕉形扩散大于经典扩散 . 在 ν 大的区域, 存在着经典扩散, 但它受到沿 B 方向电流的修正 . 在加利福尼亚的奥卡瓦 (Ohkawa) 和拉乔拉 (La Jolla) 已经用实验观察到新经典扩散的理论曲线 .

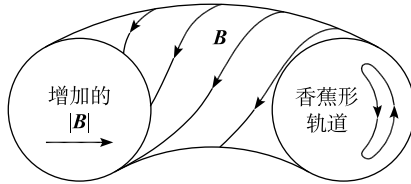


图 5-21 在环形约束装置的扭曲磁场中约束的一个粒子的香蕉形轨道
“轨道”实际上是粒子穿过纸平面点的轨迹

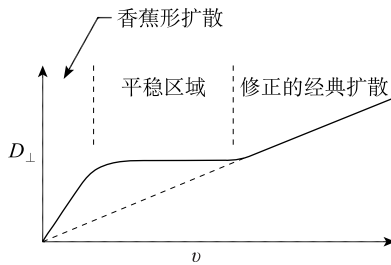


图 5-22 新经典扩散系数随碰撞频率 ν 的变化形状

习题

5-4 试证明电子-离子碰撞的平均自由程 λ_{ei} 正比于 T_e^2 .

5-5 托卡马克是一种环形等离子体约束装置, 在这个装置中, 由沿 B 方向所加电场来驱动完全电离等离子体中的电流 (图 5-23) . 在 $KT_e = 500\text{eV}$ 和截面积为 75cm^2 的等离子体中要得到驱动总电流 200kA , 需要加上多少 V/cm 的电场?

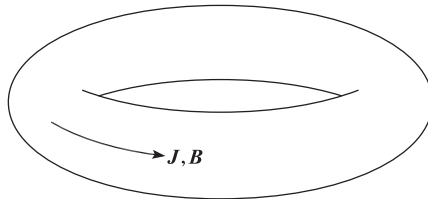


图 5-23

5-6 假定聚变反应堆中的等离子体是直径 1.2m , 长 100m 的圆柱 . 除了在

末端短的磁镜区域（我们可以忽略这个区域）外，有均匀的 50kG 磁场。其余参量是 $KT_i = 20\text{keV}$, $KT_e = 10\text{keV}$, $n = 10^{15}\text{cm}^{-3}$ 。实验发现的密度分布近似地在图 5-24 中画出。

- 假定为经典扩散，计算 $r = 50\text{cm}$ 处的 D_{\perp} 。
- 计算 dN/dt ，即每秒沿径向离开中心区域的离子-电子对的总数。
- 用 $\tau = N / (dN/dt)$ 来估算约束时间 τ 。注意在这类问题中，能指望得到的所有值都是一个粗略的估计，分布明显地受到经典扩散以外过程的影响。

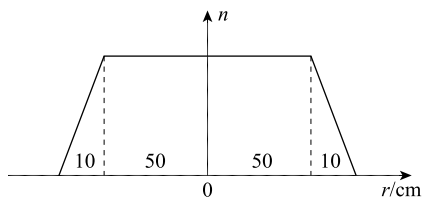


图 5-24 密度分布

5-7 考虑 $\mathbf{E} = E_r \hat{\mathbf{r}}$ 和 $\nabla p_i = \nabla p_e = \hat{\mathbf{r}} \partial p / \partial r$ 的轴对称圆柱等离子体。如果我们忽略 $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ 项（相当于忽略离心力），稳恒态双流体方程能写成如下形式

$$\begin{aligned} en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) - \nabla p_i - e^2 n^2 \eta (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) &= 0 \\ -en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - \nabla p_e + e^2 n^2 \eta (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) &= 0 \end{aligned}$$

- 从这些方程的 θ 分量，证明 $v_{ir} = v_{er}$ 。
- 从 r 分量，证明 $v_{j\theta} = v_E + v_{Dj}$ ($j = i, e$)。
- 求出 v_{ir} 的表达式，说明 v_{ir} 与 E_r 无关。

5-8 在环形仿星器中的等离子体由沿 B 方向的 $10\text{A}/\text{cm}^2$ 电流进行欧姆加热。密度均匀 ($n = 10^{13}\text{cm}^{-3}$) 并且不改变。焦耳热 ηj^2 给予电子。在 $KT_e = 10\text{eV}$ 时，计算 KT_e 的增加率（以 $\text{eV}/\mu\text{s}$ 为单位）。

5-9 从单流体方程 (5-85) 和方程 (5-91)，麦克斯韦方程组 (4-72) 和 (4-77)，推导阿尔芬波的色散关系，从而计算它的电阻阻尼。在推导中，作了线性化并忽略重力、位移电流和 ∇p 。

- 证明

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{4\pi} \left(\frac{B_0^2}{\rho_0} - i\omega\eta \right)$$

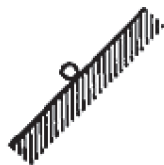
- 当 ω 是实数， η 是小量时，求出 $\text{Im}(k)$ 的明确表达式。

第 6 章 平衡和稳定性

6.1 引言

如果我们只考虑个别粒子的运动，设计用来约束无碰撞等离子体的磁场就会很容易。我们只需要确保磁力线不与真空壁相碰，并且这样安排系统的对称性，使得所有粒子的漂移 v_E ， $v_{\nabla B}$ 等都平行于壁。然而，从宏观流体的观点来看，弄清楚为包含个别粒子而设计的磁场是否将约束等离子体是不容易的。不论怎样安排外场，等离子体都能产生影响它运动的内场。例如，电荷聚集能产生 E 场，引起向壁的 $E \times B$ 漂移。等离子体中的电流能产生 B 场，引起向外的梯度 B 漂移。

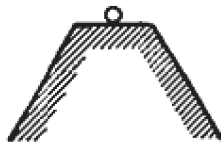
我们能武断地把约束问题分成两部分：平衡问题和稳定性问题。平衡和稳定性之间的差别可以用力学模拟得到最好的说明。图 6-1 示出了静止在硬表面的一个弹子的不同情况。平衡是指所有力都抵消的一种状态，所以可能有与时间无关的解。根据小扰动是否被阻尼或被放大来决定平衡是稳定或是不稳定。在 (f) 情形，只要不把弹子推出太远，它就处于稳定平衡。一旦运动超过阈值，它就处于不稳定态。这叫做“爆发性不稳定性”。在 (g) 情形，弹子处于不稳定状态，但是不能作非常大的偏移。如果运动振幅的非线性范围不大，这样一种不稳定性不是很危险。在平衡和稳定性这两个问题中，稳定性较容易处理。对偏离平衡态的小偏移，我们能够将运动方程线性化。于是得到了线性方程，这恰好同等离子体波的情况一样。另外，平衡问题是一种类似于扩散的非线性问题。在复杂的磁场几何情形，平衡计算是一个冗长的过程。



(a) 不平衡



(b) 随遇稳定



(c) (亚稳定) 平衡

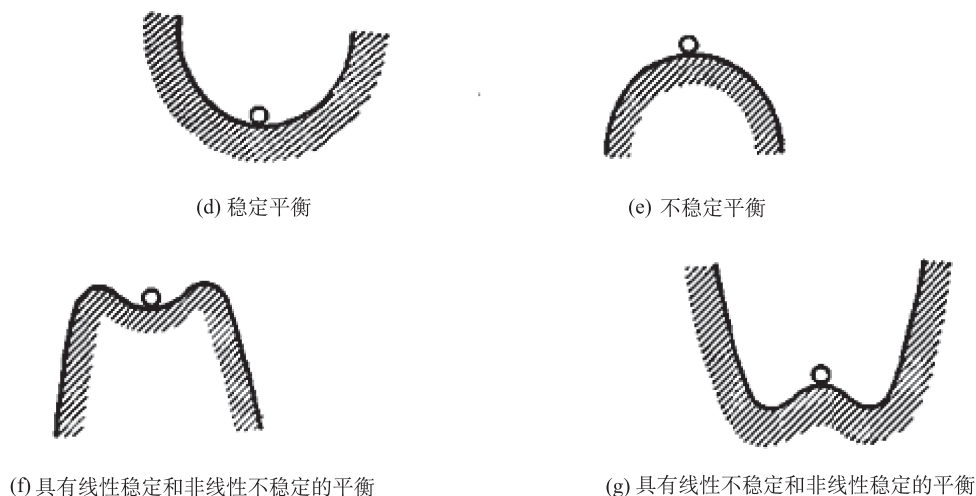


图 6-1 不同平衡类型的力学模拟

6.2 磁流体平衡

虽然一般平衡问题是复杂的，然而，从 MHD 方程很容易发现几个物理概念，对于 $\partial/\partial t=0$ 和 $g=0$ 的稳恒态，等离子体必须满足（方程 (5-85)）

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (6-1)$$

和

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j} \quad (6-2)$$

从简单的方程 (6-1)，我们已经能给出几点看法。

(1) 方程 (6-1) 表明，在压力梯度力和洛伦兹力之间存在力的平衡。它是怎样发生的呢？考虑一个圆柱等离子体，其 ∇p 指向轴（图 6-2）。为了抵消向外的膨胀力，就必须在所示方向存在一个角向电流。用 \mathbf{B} 叉乘方程 (6-1) 可求出所需电流的大小

$$\mathbf{j}_\perp = \frac{\mathbf{B} \times \nabla p}{B^2} = (K T_i + K T_e) \frac{\mathbf{B} \times \nabla n}{B^2} \quad (6-3)$$

它恰好是我们在前面方程 (3-69) 求出的抗磁性电流！从单粒子观点来看，抗磁性电流由粒子的拉莫尔回转速度所产生，当存在密度梯度时，回转速度的平均不为零。从 MHD 的流体观点来看，抗磁性电流由越过 \mathbf{B} 的 ∇p 力所产生，产生的电流恰好足以平衡作用在每个流体元上的力，并停止流体元的运动。

(2) 方程 (6-1) 明显地告诉我们 \mathbf{j} 和 \mathbf{B} 都垂直于 ∇p 。当人们考虑到场形状可能非常复杂时，这种陈述就不是无足轻重的。设想一种环形等离子体，它存在一个光滑的径向密度梯度，所以，常密度（实际上是常数 p ）面为互相套入的环面（图 6-3）。由于 \mathbf{j} 和 \mathbf{B} 都垂直于 ∇p ，它们必须处在等压面上。一般来讲，磁力线

和电流线可以这样和那样扭曲，但它们必定不穿过等 p 面。

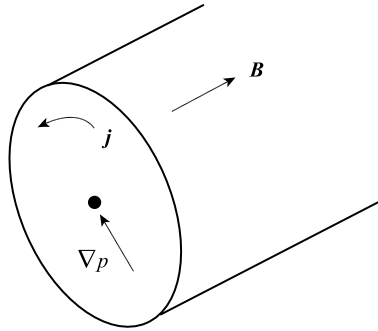


图 6-2 在稳态中，抗磁性电流的 $j \times B$ 力与压力梯度力平衡

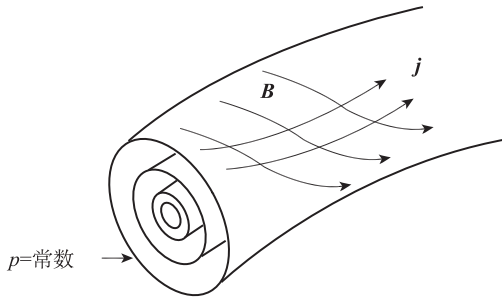


图 6-3 j 和 B 矢量都在等压面上

(3) 考虑方程 (6-1) 沿 B 方向的分量，即

$$\partial p / \partial s = 0 \tag{6-4}$$

其中， s 是沿磁力线的坐标。对于恒定的 KT ，这就意味着，在磁流体平衡中，沿磁力线的密度是常数。乍看起来，这个结论似乎必定是错误的。为此，我们考虑注入到磁镜中的等离子体（图 6-4）。当等离子体循着磁力线流过时，它膨胀然后收缩，很清楚，沿磁力线的密度不是常数。然而，这种情况并不满足静态平衡条件。在这里，我们忽略的 $(v \cdot \nabla) v$ 项（沿途）并不等于零。我们必须考虑 $v=0$ 的静止等离子体。在那种情况下，粒子在磁镜中被俘获，接近磁镜中间平面所俘获的粒子多于接近磁镜末端所俘获的粒子，这是因为中间平面的磁镜比较大。这个效应恰好与中间平面的较大截面相补偿，并且最后的结果是沿磁力线的密度为常数。

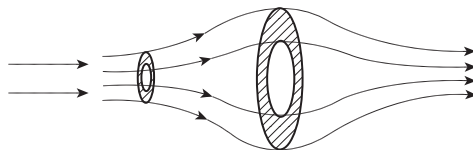


图 6-4 等离子体流入磁场的膨胀

6.3 β 的概念

现在，把方程 (6-2) 代入方程 (6-1) 得到

$$\nabla p = \frac{c^2}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \frac{c^2}{4\pi} \left[(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2 \right] \quad (6-5)$$

或者

$$\nabla \left(p + \frac{B_G^2}{8\pi} \right) = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B}_G \cdot \nabla) \mathbf{B}_G \quad (6-6)$$

在很多感兴趣的情形 (如一个直圆柱)，右边项为零；沿着 \mathbf{B} 的方向， \mathbf{B} 不改变。而在其他许多情形，右边项是小量。于是，方程 (6-6) 表明

$$p + \frac{B_G^2}{8\pi} = \text{常数} \quad (6-7)$$

由于 $B_G^2/8\pi$ 是磁场压力，所以粒子压力和磁场压力之和是一个常数。在具有密度梯度的等离子体中 (图 6-5)，密度高处的磁场小，密度低处的磁场大。等离子体内磁场的减小当然是由抗磁性电流所引起的。抗磁性效应的大小由方程 (6-7) 中两项的比来表示。这个比值通常用 β 表示！

$$\beta = \frac{n \sum KT}{B_G^2/8\pi} = \frac{\text{粒子压力}}{\text{磁压力}} \quad (6-8)$$

迄今为止，我们已经暗中考虑了低 β 等离子体，其 β 值是在 $10^{-3} \sim 10^{-6}$ 。因此，抗磁性效应是非常小的。这就是在等离子体波分析中能假定均匀 B_0 场的原因。在高 β 等离子体中，平衡问题会更复杂。在空间和 MHD 能量转换的研究中，高 β 等离子体是很普遍的。为了降低成本，聚变反应堆必须要有超过 1% 的 β 值，因为产生的能量正比于 n^2 ，而磁约束器的费用随 B 的某次方而增加。

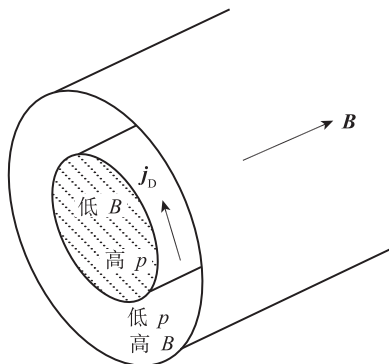


图 6-5 在一个有限 β 值的等离子体中，抗磁性电流显著地减少磁场，使得磁压和粒子压力的和保持常数

原则上，人们能得到 $\beta=1$ 的等离子体，其抗磁性电流产生的场与外部产生的

均匀场恰恰大小相等，方向相反。于是就存在两个区域：无场的等离子体区域和无等离子体的场区域。如果外部场线是直的，这种平衡似乎是不稳定的，因为它类似于同拉长的橡胶带连在一起的一团冻胶。剩下的问题是这种 $\beta=1$ 的等离子体能否在任何时候被达到。在某些磁场位形中，等离子体内的真空场具有零点，此处的 β 局部值应当是无穷大。例如，仅在靠近大等离子体表面的地方加上场时，就能发生这种情况。因此，通常把 β 定义成最大粒子压力和最大磁压力之比，在这种意义上，具有 $\beta>1$ 的磁约束等离子体是不可能的。

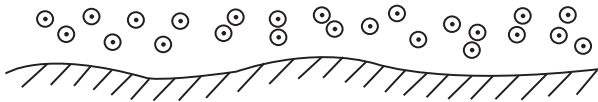
6.4 磁场进入等离子体的扩散

在天文物理学中，经常提出的一个问题是磁场进入等离子体的扩散。如果在无场等离子体区域和无等离子体场区域之间存在一条边界（图 6-6），倘若等离子体没有电阻率，这两个区域将保持分离，由于同样的原因，磁通量不能穿透超导体。任何运动磁力线引起的电动势将产生无穷大的电流，而这是不可能的。所以，当等离子体到处运动时，它推动磁力线并且能弯曲和扭曲磁力线。这也许是蟹状星云中气体丝状结构的成因。然而，如果电阻率是有限的，等离子体能穿过场运动，反之亦然。这种扩散需要有一定时间，如果运动足够慢，气体运动不一定使磁力线变形。从下面方程（参看方程（5-91））很容易计算扩散时间

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (6-9)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} \quad (6-10)$$

仅有 \mathbf{B}



仅有等离子体

图 6-6 在完全导电的等离子体中，等离子体区域和磁场区域能由明显的边界来分开
表面上的电流排除了进入到等离子体的场

为简单起见，让我们假定等离子体处于静止，而场线正进入等离子体运动。因此， $\mathbf{v}=0$ ，我们得到

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = -\nabla \times \eta \mathbf{j} \quad (6-11)$$

由于 \mathbf{j} 由方程（6-2）得到，方程（6-11）变成

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{B} / \partial t &= -\frac{\eta c^2}{4\pi} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= -\frac{\eta c^2}{4\pi} [\nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}] \end{aligned} \quad (6-12)$$

由于 $\nabla \cdot \mathbf{B}=0$ ，我们得到了在第 5 章遇到的那类扩散方程

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\eta c^2}{4\pi} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (6-13)$$

这个方程照例能用分离变量法解出. 为了得到粗略的估计, 我们取 L 为 \mathbf{B} 空间变化的标度长, 得到

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\eta c^2}{4\pi L^2} \mathbf{B} \quad (6-14)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{\pm t/\tau} \quad (6-15)$$

式中

$$\tau = 4\pi L^2 / \eta c^2 \quad (6-16)$$

这就是磁场穿入等离子体中的特征时间.

时间 τ 也能被解释成磁场的湮没时间. 当场线通过等离子体运动时, 感应电流引起等离子体的欧姆加热. 这个能量来自于场的能量. 在时间 τ 内, 每 cm^3 的能量损失是 $\eta j^2 \tau$. 因为从忽略位移电流的麦克斯韦方程

$$\mathbf{j} = \frac{c^2}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} \approx \frac{c^2 \mathbf{B}}{4\pi L} \quad (6-17)$$

能量耗散是

$$\eta j^2 \tau = \eta \left(\frac{c^2 B}{4\pi L} \right)^2 \frac{4\pi L^2}{\eta c^2} = \frac{c^2 B^2}{4\pi} = 2 \left(\frac{B_G^2}{8\pi} \right) \quad (6-18)$$

这样, 在本质上 τ 是场能量耗散成焦耳热的时间.

习题

6-1 考虑一个具有矩形密度分布的无限长的等离子体圆柱, 它在均匀 \mathbf{B}_0 场中产生 (图 6-7). 如果 $\beta=1$, 按如下的步骤证明在轴上 B 等于零.

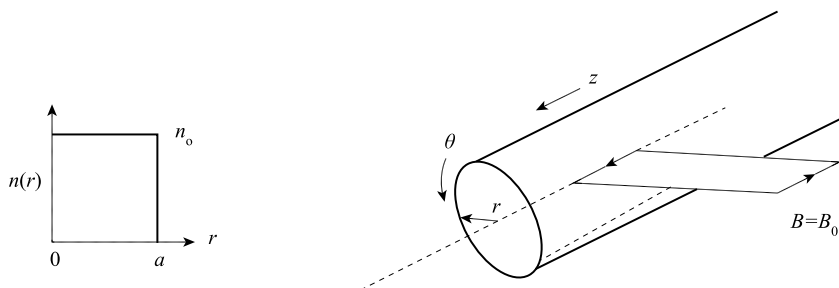


图 6-7

- 用 MHD 方程, 对于 $KT = \text{常数}$, 求出稳态的 j 值.
- 用 $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j}$ 和斯托克斯定理, 对图示的环面积分得到

$$B_{ax} - B_0 = \frac{4\pi}{c^2} \sum KT \int_0^\infty \frac{\partial n / \partial r}{B(r)} dr, \quad B_{ax} \equiv B_{r=0}$$

(c) 注意到 $\partial n / \partial r$ 是一个 δ 函数而求出积分, 所以, 在 $r=a$ 处的 $B(r)$ 是 B_{ax} 和 B_0 之间的平均值.

6-2 抗磁环是一种用探测抗磁效应来测量等离子体压力的装置 (图 6-8). 当等离子体产生时, 抗磁电流增加, 在等离子体内 B 减小, 环所围绕的磁通量 Φ 减少, 感应出一个电压, 然后, 由 RC 回路对它进行时间积分 (图 6-9).

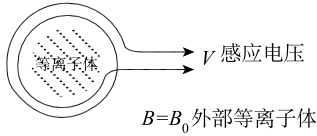


图 6-8

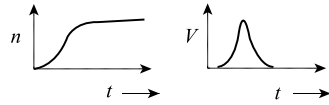


图 6-9

(a) 证明 $\int_{\text{loop}} V dt = -N \Delta \phi = -N \int \mathbf{B}_d \cdot d\mathbf{S}, B_d \equiv B - B_0$.

(b) 用前面习题 (6-1) 求 $B_d(r)$ 的方法, 但现在假定 $n(r) = n_0 \exp [-(r/r_0)^2]$. 假设 $\beta \ll 1$, 则在积分中 B 可用 B_0 来近似, 求出积分.

(c) 证明 $\int V dt = \frac{1}{2} N \pi r_0^2 \beta B_0$, 式中 β 如方程 (6-8) 所定义.

6.5 不稳定性的分类

在等离子体波的分析中, 我们假定了一个未扰动态, 它是一种理想的热力学平衡: 粒子具有麦克斯韦速度分布, 密度和磁场是均匀的. 在这样一种熵最大的状态中, 不存在可用来激发波的自由能, 我们必须考虑由外部方法激发的波. 现在, 我们考虑不处于理想热力学平衡的状态, 虽然在所有力抵消及可能有与时间无关的解这种意义上, 它们是处于平衡的. 可利用的自由能引起波的自激发; 因此, 平衡是一种不稳定的平衡. 不稳定性总是一种减少自由能的运动, 并且使等离子体更接近于真实的热力学平衡.

不稳定性可以按照用来驱动它的自由能类型来分类. 有四种主要类型的不稳定性.

(1) **川流不稳定性**. 在这种情况下, 或是一束高能粒子穿过等离子体或是驱动一个电流穿过等离子体, 使得不同种粒子具有彼此之间的相对漂移. 漂移能量用于激发波, 并以消耗未扰动态的漂移能量为代价而获得振荡能量.

(2) **瑞利-泰勒不稳定性**. 在这种情况下, 等离子体有一个密度梯度或一个锐边界, 因此它是不均匀的. 另外, 还有一个外部的非电磁力加在等离子体上. 正是这个力驱动了不稳定性. 倒置玻璃杯中的水可用作模拟这类不稳定性的例子 (图 6-10). 虽然水和空气的交界面是处于平衡态, 在那里空气的压力支撑了水的重量, 但它是一种不稳定的平衡. 在表面上的任何一个涟漪以消耗重力场势能为

代价而趋于增长. 正像在流体动力学中熟知的那样, 每当一个重流体由轻流体来支持时就出现这种情况.



图 6-10 由一个轻流体支持重流体的流体动力学瑞利-泰勒不稳定性

(3) **普遍不稳定性**. 甚至不存在明显的驱动力 (如电场或重力场) 时, 只要等离子体被约束, 则它就不处于理想的热力学平衡. 等离子体压力使等离子体趋于膨胀, 而膨胀能量能驱动一种不稳定性. 在任何有限等离子体中, 总是存在这种类型的自由能, 产生的波称作**普遍不稳定性**.

(4) **动力不稳定性**. 在流体理论中, 假定速度分布是麦克斯韦的. 如果在实际上分布不是麦克斯韦的, 就存在与热力学平衡的偏离, 速度分布的各向异性就能驱动不稳定性. 例如, 如果 T_{\parallel} 和 T_{\perp} 不同, 能发生一种不稳定性, 叫做修正哈里斯 (Harris) 不稳定性. 在磁镜装置中, 由于损失锥, 就缺少都具有大 v_{\parallel}/v_{\perp} 的粒子; 这种各向异性引起“损失锥不稳定性”.

在以后的各节中, 对前三类不稳定性的每一个我们都给出一个简单的例子. 由各向异性驱动的不稳定性不能用流体理论来描述, 它超出了本书的范围.

对等离子体约束来讲, 并不是所有不稳定性都具有同等的危险性. 例如, 接近 ω_p 的高频不稳定性不能影响重离子的运动. 然而, 具有 $\omega \ll \Omega_c$ 的低频不稳定性通过 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移能引起反常的双极性损失. $\omega \simeq \Omega_c$ 的不稳定性并不能有效地越过 \mathbf{B} 运输粒子, 但在磁镜装置中, 它是危险的, 在那里粒子由于在速度空间扩散进入了损失锥而损失掉.

6.6 双流不稳定性

作为川流不稳定性的一个简单例子, 考虑离子固定, 电子相对于离子有速度 v_0 的一个均匀等离子体. 也就是, 观察者处在随离子“流”运动的坐标系中. 假定等离子体是冷的 ($K T_e = K T_i = 0$), 并且不存在磁场 ($B_0 = 0$). 则线性化的运动方程是

$$M n_0 \frac{\partial v_{1\parallel}}{\partial t} = e n_0 \mathbf{E}_1 \quad (6-19)$$

$$m n_0 \left[\frac{\partial v_{e\perp}}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_{e\perp} \right] = -e n_0 \mathbf{E}_1 \quad (6-20)$$

由于我们假定 \mathbf{v}_0 是均匀的, 所以在方程 (6-20) 中已经丢掉了 $(\mathbf{v}_{e1} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0$ 项. 在方程 (6-19) 中不出现 $(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1$ 项是因为我们已经取 $\mathbf{v}_{i0} = 0$. 我们研究下列形式的静电波

$$\mathbf{E}_1 = E e^{i(kx - \omega t)} \hat{\mathbf{x}} \quad (6-21)$$

其中 $\hat{\mathbf{x}}$ 是 \mathbf{v}_0 和 \mathbf{k} 的方向, 方程 (6-19) 和 (6-20) 变成

$$-i\omega M n_0 v_{i1} = e n_0 \mathbf{E}_1, \quad v_{i1} = \frac{ie}{M\omega} E \hat{\mathbf{x}} \quad (6-22)$$

$$m n_0 (-i\omega + ik v_0) v_{e1} = -e n_0 \mathbf{E}_1, \quad v_{e1} = -\frac{ie}{m\omega - k v_0} \frac{E \hat{\mathbf{x}}}{\omega} \quad (6-23)$$

速度 v_{j1} 是在 x 方向, 我们可以省略下标 x . 离子的连续性方程给出

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_{i1} = 0, \quad n_{i1} = \frac{k}{\omega} n_0 v_{i1} = \frac{ie n_0 k}{M \omega^2} E \quad (6-24)$$

注意到由于 $\nabla n_0 = \mathbf{v}_{01} = 0$, $\nabla \cdot (n \mathbf{v}_i)$ 中的其余项都为零. 电子连续性方程是

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} = n_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_{e1} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) n_{e1} = 0 \quad (6-25)$$

$$(-i\omega + ik v_0) n_{e1} + ik n_0 v_{e1} = 0 \quad (6-26)$$

$$n_{e1} = \frac{k n_0}{\omega - k v_0} v_{e1} = -\frac{iek n_0}{m (\omega - k v_0)^2} E \quad (6-27)$$

由于不稳定波是高频等离子体振荡, 我们可以不用等离子体近似, 但必须用泊松方程

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = 4\pi e (n_{i1} - n_{e1}) \quad (6-28)$$

$$ikE = 4\pi e (ie n_0 k E) \left[\frac{1}{M \omega^2} + \frac{1}{m (\omega - k v_0)^2} \right] \quad (6-29)$$

除以 ikE 就求出色散关系

$$1 = \omega_p^2 \left[\frac{m/M}{\omega^2} + \frac{1}{(\omega - k v_0)^2} \right] \quad (6-30)$$

让我们查看具有实数 k 的振荡是稳定的还是不稳定的. 用公共的分母来乘, 就会得到 ω 的四阶方程. 如果所有根 ω_j 是实数, 则每个根表示一个可能的振荡

$$\mathbf{E}_1 = E e^{i(kx - \omega_j t)} \hat{\mathbf{x}}$$

如果某些根是复数, 它们将以复数共轭对出现. 假定这些复数根写成

$$\omega_j = \alpha_j + i \gamma_j \quad (6-31)$$

其中, α 和 γ 分别是 $\text{Re}(\omega)$ 和 $\text{Im}(\omega)$. 现在与时间的关系由下式给出

$$\mathbf{E}_1 = E e^{i(kx - \alpha_j t)} e^{\gamma_j t} \hat{\mathbf{x}} \quad (6-32)$$

正 $\text{Im}(\omega)$ 表示一种指数增长波; 负 $\text{Im}(\omega)$ 表示一种阻尼波. 由于根 ω_j 以共轭对出现, 除了所有根是实数以外, 总有一个根是不稳定的. 阻尼根不能被自激发, 它是没有意义的.

实际上, 不用解出四阶方程就能分析色散关系 (6-30). 我们定义

$$x \equiv \omega/\omega_p, \quad y \equiv k v_0/\omega_p \quad (6-33)$$

于是方程 (6-30) 就变成

$$1 = \frac{m/M}{x^2} + \frac{1}{(x-y)^2} \equiv F(x, y) \quad (6-34)$$

对于任何给定的 y 值, 我们能画出作为 x 函数的 $F(x, y)$ 图. 这个函数在 $x=0$ 和 $x=y$ 有奇点 (图 6-11). 这个曲线和 $F(x, y) = 1$ 直线的交点给出了满足色散关系的 x 值. 在图 6-11 的例子中, 存在着四个交点, 所以有四个实根 ω_j . 然而, 如果我们选择较小的 y 值, 曲线图会像在图 6-12 中所看到的那样. 现在只存在两个交点, 所以只有两个实根. 其他两个根必定是复根, 而其中的一个必定对应一个不稳定波. 这样, 对足够小的 $k v_0$, 等离子体是不稳定的. 对于任何给定的 v_0 , 等离子体对长波长的振荡总是不稳定的. 由方程 (6-30) 预期的最大增长率是

$$\text{Im}\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right) \approx \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \quad (6-35)$$

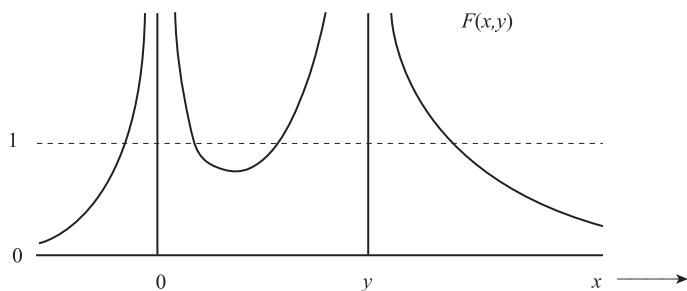


图 6-11 当等离子体稳定时, 双流不稳定性中的函数 $F(x, y)$

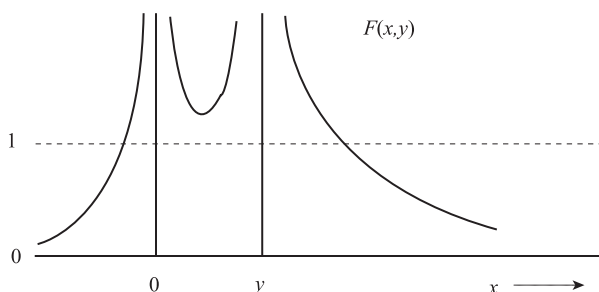


图 6-12 当等离子体不稳定时, 双流不稳定性中的函数 $F(x, y)$

由于不稳定性要求 $k v_0$ 是小值, 所以人们能够说, 对于给定 k 值, 不稳定性的 v_0 必须足够小. 由于 v_0 是驱动不稳定性的能量来源, 这种说法并不构成什么物理意义. 这个困难来自于我们使用的流体方程. 任何真实的等离子体具有一个有限的温度, 热效应将由动力学理论处理来考虑. 对于 $v_0 \lesssim v_{th}$, 将发生一种称作朗道阻尼的现象 (第 7 章), 如果 v_0 太小, 将不给出不稳定性.

这种束-等离子体不稳定性 (beam-plasma instability, 有时这样称呼) 有如下的物理解释. 在电子流体中, 固有的振荡频率是 ω_p , 离子流体中固有的振荡频率是 $\Omega_p = (m/M)^{1/2} \omega_p$. 由于运动电子流体中 ω_p 振荡的多普勒位移, 如果 kv_0 有适当的值, 在实验室坐标系中, 这两个频率能重合. 于是离子和电子的密度涨落就满足泊松方程. 此外, 电子振荡显示出具有负能量. 那就是说, 有振荡时的电子总动能小于没有振荡时的电子总动能. 在未扰动束中, 每 cm^3 的动能是 $\frac{1}{2} m n_0 v_0^2$. 当存在一个振荡时, 动能是 $\frac{1}{2} m (n_0 + n_1) (v_0 + v_1)^2$. 因为根据连续性方程, 在 n_1 和 v_1 之间要求有相位关系, 所以它对空间的平均小于 $\frac{1}{2} m n_0 v_0^2$. 因此电子振荡有负能量, 离子振荡有正能量. 两种波能一块增长, 而保持系统的总能量守恒. 在速调管中, 使用了这种类型的不稳定性来产生微波. 由于 E_1 的速度调制使电子形成聚束. 当这些聚束通过微波共振腔时, 能使它们激发振荡的本征模, 并产生微波功率.

习题

6-3 在固定离子本底中, 当存在 v_0 大小相同、方向相反的两个冷电子束时, 导出双流不稳定性的色散关系. 每束流的密度为 $\frac{1}{2} n_0$.

6.7 “重力”不稳定性

在等离子体中, 能发生瑞利-泰勒不稳定性, 因为磁场的作用像支撑重流体 (等离子体) 的轻流体一样. 在弯曲的磁场中, 由于粒子沿弯曲磁力线运动, 作用在等离子体的离心力起了等价“重力”的作用. 为了处理最简单的情况, 考虑等离子体边界位于 $y-z$ 平面 (图 6-13). 假定 $-x$ 方向有一个密度梯度 ∇n_0 , 重力场 g 在 x 方向. 为简单起见, 我们可以令 $KT_i = KT_e = 0$ 并处理 B_0 是均匀的低 β 情况. 在平衡态, 离子遵守方程

$$M n_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = e n_0 \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0 + M n_0 \mathbf{g} \quad (6-36)$$

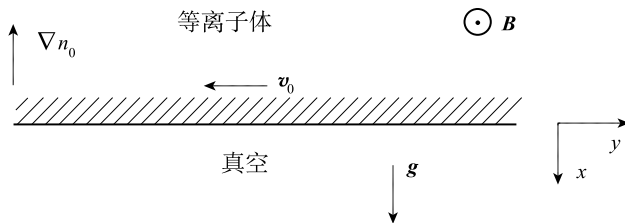


图 6-13 等离子体表面受重力不稳定性的影响

如果 \mathbf{g} 是常数, v_0 也将是常数, 而 $(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0$ 为零. 将方程 (6-36) 与 \mathbf{B}_0 叉乘, 我们求出 (如第 2.2 节一样)

$$\mathbf{v}_0 = \frac{M\mathbf{g} \times \mathbf{B}_0}{e B_0^2} = -\frac{g}{\Omega_c} \hat{y} \quad (6-37)$$

电子有一个相反的漂移, 它在极限 $m/M \rightarrow 0$ 时能忽略. 因为 $KT=0$, 不存在抗磁性漂移, 并且, 因为 $\mathbf{E}_0=0$, 不存在 $\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0$ 漂移.

如果作为无规则热涨落的结果, 在交界面会发展一个涟漪, 则漂移 \mathbf{v}_0 将引起涟漪增长 (图 6-14). 离子漂移就在涟漪的侧面建立起电荷, 并且产生了一个电场, 这个电场随着它从扰动的峰到谷的移动而改变符号. 正像从图 6-14 能看到的那样, 在界面向上运动的区域, $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0$ 漂移总是向上, 而在界面向下运动的区域, $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0$ 漂移总是向下. 涟漪作为这些有适当相位 $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0$ 漂移的结果而增长.

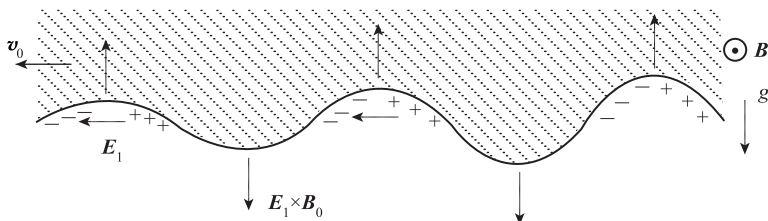


图 6-14 重力不稳定性的物理机制

为了求出增长速率, 对于在 y 方向传播的波: $\mathbf{k} = k\hat{y}$, 我们能作通常的线性化波分析. 扰动的离子运动方程是

$$M(n_0 + n_1) \left[\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1) + (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1) \cdot \nabla (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1) \right] \\ = e(n_0 + n_1) [\mathbf{E}_1 + (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1) \times \mathbf{B}_0] + M(n_0 + n_1) \mathbf{g} \quad (6-38)$$

用 $1 + (n_1/n_0)$ 乘方程 (6-36) 得到

$$M(n_0 + n_1) (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = e(n_0 + n_1) \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0 + M(n_0 + n_1) \mathbf{g} \quad (6-39)$$

从方程 (6-38) 中减去方程 (6-39) 并忽略二阶项, 我们得到

$$Mn_0 \left[\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 \right] = en_0 (\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) \quad (6-40)$$

注意 \mathbf{g} 已经消去. 不过, 关于 \mathbf{g} 的信息仍包含在 \mathbf{v}_0 中, 对于 $\exp[i(ky - \omega t)]$ 形式的扰动, 我们得到

$$M(\omega - k v_0) \mathbf{v}_1 = ie(\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) \quad (6-41)$$

它和方程 (4-96) 是一样的, 只不过 ω 由 $(\omega - k v_0)$ 来代替, 而电子量由离子量来代替. 所以, 这个解由经过适当变化的方程 (4-98) 所给出. 对于 $E_x=0$ 和

$$\Omega_c^2 \gg (\omega - k v_0)^2 \quad (6-42)$$

解为

$$v_{1x} = \frac{E_y}{B_0}, \quad v_{1y} = -i \frac{\omega - k v_0}{\Omega_c} \frac{E_y}{B_0} \quad (6-43)$$

后一个量是在离子坐标系中的极化漂移. 相应的电子量在极限 $m/M \rightarrow 0$ 时变为零. 所以对电子就有

$$v_{ex} = E_y/B_0, \quad v_{ey} = 0 \quad (6-44)$$

扰动的离子连续性方程是

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial t} + \nabla \cdot (n_0 \mathbf{v}_0) + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) n_1 + n_1 \nabla \cdot \mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) n_0 + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 \\ + \nabla \cdot (n_1 \mathbf{v}_1) = 0 \end{aligned} \quad (6-45)$$

由于 \mathbf{v}_0 垂直于 ∇n_0 , 零阶项为零, 而如果 \mathbf{v}_0 是常数, 则 $n_1 \nabla \cdot \mathbf{v}_0$ 项为零. 因此一阶方程是

$$-i\omega n_1 + ik v_0 n_1 + v_{ix} n'_0 + ik n_0 v_{iy} = 0 \quad (6-46)$$

其中, $n'_0 = \partial n_0 / \partial x$. 因为 $v_{e0} = 0$ 和 $v_{ey} = 0$, 电子遵循一个较简单的方程

$$-i\omega n_1 + v_{ex} n'_0 = 0 \quad (6-47)$$

应当注意, 我们已经用了等离子体近似并假定 $n_{i1} = n_{e1}$. 因为不稳定波具有低的频率 (这一点将在后面证实), 这种做法是可能的. 由方程 (6-43) 和方程 (6-46) 得到

$$(\omega - k v_0) n_1 + i \frac{E_y}{B_0} n'_0 + ik n_0 \frac{\omega - k v_0}{\Omega_c} \frac{E_y}{B_0} = 0 \quad (6-48)$$

由方程 (6-44) 和方程 (6-47) 得到

$$\omega n_1 + i \frac{E_y}{B_0} n'_0 = 0, \quad \frac{E_y}{B_0} = \frac{i\omega n_1}{n'_0} \quad (6-49)$$

把它代入方程 (6-48), 可得

$$\begin{aligned} (\omega - k v_0) n_1 - \left(n'_0 + k n_0 \frac{\omega - k v_0}{\Omega_c} \right) \frac{\omega n_1}{n'_0} = 0 \\ \omega - k v_0 - \left(1 + \frac{k n_0}{\Omega_c} \frac{\omega - k v_0}{n'_0} \right) \omega = 0 \end{aligned} \quad (6-50)$$

$$\omega(\omega - k v_0) = -v_0 \Omega_c n'_0 / n_0 \quad (6-51)$$

用方程 (6-37) 中的 v_0 来代替, 我们得到 ω 的二次方程

$$\omega^2 - k v_0 \omega - g (n'_0 / n_0) = 0 \quad (6-52)$$

其解为

$$\omega = \frac{1}{2} k v_0 \pm \left[\frac{1}{4} k^2 v_0^2 + g (n'_0 / n_0) \right]^{1/2} \quad (6-53)$$

如果 ω 是复数, 也就是说, 如果

$$-g n'_0 / n_0 > \frac{1}{4} k^2 v_0^2 \quad (6-54)$$

则存在一种不稳定性. 从方程 (6-54), 我们看到不稳定性要求 g 和 n'_0 / n_0 有相反的符号. 这恰好就是轻流体支撑着重流体的说法; 相反, ω 是实数, 等离子体是稳定的. 对于足够小的 k (长波), 增长速率由下式给出

$$\gamma = \text{Im}(\omega) \approx [-g(n'_0/n_0)]^{1/2} \quad (6-55)$$

由于下述理由，这种具有 $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$ 的不稳定性有时称为“槽纹”不稳定性。在圆柱体中，如果力在 r 方向，则波在 θ 方向传播。于是等密度表面类似于有希腊风格的带槽纹柱子（图 6-15）。

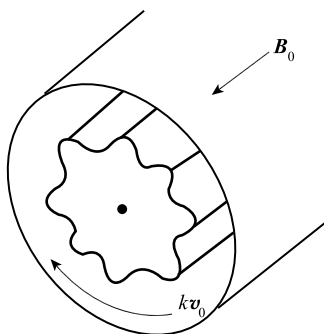


图 6-15 “槽纹”不稳定性

6.8 电阻漂移波

普遍不稳定性的一个简单例子是电阻漂移波。和重力槽纹模相反，漂移波有一个小而有限的 \mathbf{B}_0 向 \mathbf{k} 分量，因此等密度表面类似于稍微螺旋扭曲的槽纹（图 6-16）。如果我们放大图 6-16 中长方形所包围的截面并把它拉直变成笛卡儿的几何，就会出现如图 6-17 所示的形状。仅有的不稳定性驱动力是压力梯度 $KT \nabla n$ 。（为简单起见，假定 $KT = \text{常数}$ ）。在这种情况下，第零阶漂移（对 $\mathbf{E}_0 = 0$ ）是

$$\mathbf{v}_{i0} = \mathbf{v}_{Di} = \frac{K T_i n'_0}{e B_0 n_0} \hat{\mathbf{y}} \quad (6-56)$$

$$\mathbf{v}_{e0} = \mathbf{v}_{De} = \frac{-K T_e n'_0}{e B_0 n_0} \hat{\mathbf{y}} \quad (6-57)$$

从关于槽纹不稳定性的经验来看，我们也许期望漂移波具有 v_{Di} 或 v_{De} 量级的相速度。我们将证明 ω/k_y 近似等于 v_{De} 。

由于漂移波具有有限的 k_z ，电子能沿 \mathbf{B}_0 流动以建立它们之间的热力学平衡（参见第 4.10 节的讨论）。于是它们将遵守玻尔兹曼关系（3.5 节）

$$n_1/n_0 = e \phi_1 / K T_e \quad (6-58)$$

在图 6-17 中的 A 点密度大于平衡值， n_1 是正值，所以 ϕ_1 也是正的。同样，在 B 点， n_1 和 ϕ_1 都是负值。电势的差别意味着在 A 和 B 之间存在一个电场 \mathbf{E}_1 。正如槽纹不稳定性那样， \mathbf{E}_1 引起 x 方向的漂移 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0 / B_0^2$ 。当 y 方向传播的波通过时，在 A 点的观察者将看到 n_1 和 ϕ_1 随时间振荡。漂移 \mathbf{v}_1 也将随时间振荡，事实上，正是 \mathbf{v}_1 引起了密度振荡。由于在 $-x$ 方向存在梯度 ∇n_0 ，漂移 \mathbf{v}_1 将带着不同密度的等离子体到达固定的观察者 A。因此，尽管漂移波在 y 方向传播，这个波

有一种使流体在 x 方向来回移动的运动.

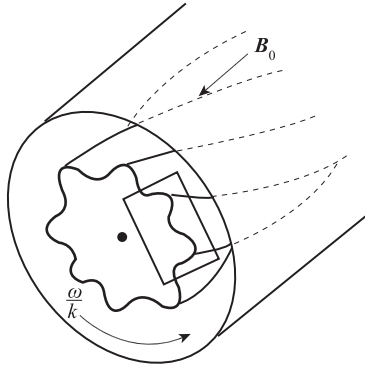


图 6-16 圆柱体中漂移不稳定性的几何图
矩形区域在图 6-17 中详细地示出

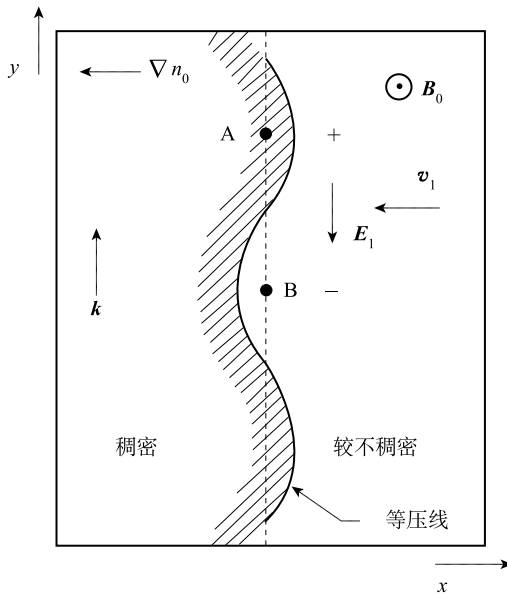


图 6-17 漂移波的物理机制

更定量一些, v_{1x} 的大小由下式给出

$$v_{1x} = E_y / B_0 = -i k_y \phi_1 / B_0 \tag{6-59}$$

我们将假定 v_{1x} 不随 x 变化, 并且 k_x 远小于 k_y , 也就是说, 在 x 方向流体不可压缩地振荡. 现在, 在固定点 A 考虑进入 1cm^3 中的导向中心数目. 它显然为

$$\partial n_1 / \partial t = -v_{1x} \partial n_0 / \partial x \tag{6-60}$$

它恰好是导向中心的连续性方程, 它当然不具有流体漂移 v_D . 按我们原先的假定, 项 $n_0 \nabla \cdot v_1$ 为零. 在导向中心密度和粒子密度 n_1 之间的差别给出对方程 (6-60) 的

修正, 这种修正是较高阶的, 并且在这里可以忽略. 用方程 (6-59) 和方程 (6-58), 我们能把方程 (6-60) 写为

$$-i\omega n_1 = \frac{ik_y \phi_1}{B_0} n'_0 = -i\omega \frac{e \phi_1}{K T_e} n_0 \quad (6-61)$$

这样, 我们得到

$$\frac{\omega}{k_y} = -\frac{K T_e n'_0}{e B_0 n_0} = v_{De} \quad (6-62)$$

因此, 这些波以电子抗磁性漂移速度传播并称为漂移波. 这是在 y 方向, 或者说在角向的速度. 此外, 还有在 z 方向的 k 分量. 依据没有在这里给出的原因, 这个分量必须满足条件

$$k_z \ll k_y, \quad v_{thi} \ll \omega/k_z \ll v_{the} \quad (6-63)$$

为什么漂移波是不稳定的呢? 为了了解这一点, 我们必须认识到, 对于离子来讲, v_{1z} 的确不是 E_y/B_0 . 存在着由于极化漂移 (方程 (2-66)) 和非均匀 \mathbf{E} 漂移 (方程 (2-59)) 所带来的修正. 这些漂移的结果总是使电势分布 ϕ_1 落在密度分布 n_1 之后 (习题 4-1). 这个相位改变使得已经向外漂移的等离子体的 \mathbf{v}_1 向外, 反过来也是这样, 因此扰动增长. 不存在相位改变时, n_1 和 ϕ_1 会异相 90° (图 6-17), 漂移波就会是纯振荡的.

由于电场 \mathbf{E}_1 必定不会由于沿 \mathbf{B}_0 的电子流动而短路, 所以电阻率起到了作用. 电子-离子碰撞以及波峰和波谷之间的长距离 $\frac{1}{2}\lambda_z$, 就使漂移波可能具有电阻性的电势降和有限的 \mathbf{E}_1 值. 电阻漂移波的色散关系近似为

$$\omega^2 + i\sigma_{\parallel}(\omega - \omega^*) = 0 \quad (6-64)$$

其中

$$\omega^* \equiv k_y v_{De} \quad (6-65)$$

和

$$\sigma_{\parallel} \equiv \frac{k_z^2}{k_y^2} \Omega_e (\omega_c \tau_{ei}) \quad (6-66)$$

如果 σ_{\parallel} 比 ω 大, 仅当 $\omega = \omega^*$ 时, 方程 (6-64) 才能满足. 在那种情况下, 我们可以用 ω^* 代替第一项中的 ω . 解出 ω , 我们就得到

$$\omega \approx \omega^* + (i\omega^{*2}/\sigma_{\parallel}) \quad (6-67)$$

这说明 $\text{Im}(\omega)$ 总是正值, 并且比例于电阻率 η . 因此漂移波是不稳定的, 并且将最终发生在任何具有密度梯度的等离子体中. 幸而, 增长率相当小, 而且存在使它完全停止的方法 (使 B_0 非均匀).

注意槽纹不稳定性的方程 (6-52) 和漂移不稳定性的方程 (6-64) 具有不同的结构. 对前者, 系数是实数, 当二次判别式为负数时, ω 是复数, 这是一个典型的正反馈不稳定性. 对后者, 系数是复数, 所以 ω 总是复数, 这是一个典型的耗散不稳定性.

第 7 章 动力学理论介绍

7.1 $f(v)$ 的意义

到目前为止，流体理论是等离子体的最简单描述；幸运的是，这种近似能够精确地描述大多数观察到的现象。然而，存在着某些不适用于流体处理的现象。对于这些现象，我们必须对每个属种考虑其速度分布函数 $f(v)$ ，这种处理称为动力学理论 (kinetic theory)。在流体理论中，应变变量仅是四个独立变量 x, y, z 和 t 的函数。其所以可能是因为假定每个属种的速度分布到处都是麦克斯韦分布，因而，只用一个数 (温度 T)，分布就能唯一地确定。由于在高温等离子体中碰撞是稀少的，与热平衡的偏离能保持相对长的时间。作为一个例子，考虑在一维系统中的两个速度分布 $f_1(v_x)$ 和 $f_2(v_x)$ (图 7-1)。这两个分布将具有完全不同的形状，但是只要曲线下面的面积是相同的，流体理论就不能区分两者。

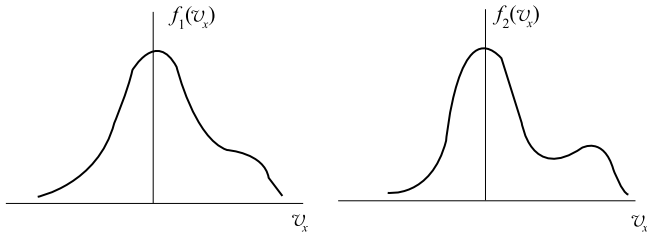


图 7-1 非麦克斯韦分布函数的例子

密度是四个标量变量的函数： $n=n(\mathbf{r}, t)$ 。当我们考虑速度分布时，有 7 个独立变量： $f=f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 。 $f=f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 所指的意义是：在时间 t ，位置 \mathbf{r} ，速度分量在 v_x 和 $v_x + dv_x$ ， v_y 和 $v_y + dv_y$ ， v_z 和 $v_z + dv_z$ 之间每 cm^3 的粒子数目是

$$f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) dv_x dv_y dv_z$$

它的积分可用几种等效的方式写出

$$n(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 \mathbf{v}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (7-1)$$

请注意 $d\mathbf{v}$ 不是矢量，它代替了速度空间中的三维体积元。如果 f 按下式归一化

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = 1 \quad (7-2)$$

它就是几率，我们用 \hat{f} 来表示。这样

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = n(\mathbf{r}, t) \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (7-3)$$

注意到 \hat{f} 仍然是 7 个变量的函数，因为分布的形状同密度一样能随空间和时间变化。从方程 (7-2) 很清楚看到， \hat{f} 具有 $(\text{cm/s})^{-3}$ 的量纲。因此从方程 (7-3) 得知 f 具有量纲 $\text{s}^3 \cdot \text{cm}^{-6}$ 。

一个特别重要的分布函数是麦克斯韦分布

$$\hat{f}_m = (m/2\pi KT)^{3/2} \exp(-v^2/v_{\text{th}}^2) \quad (7-4)$$

其中

$$v \equiv (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2} \quad \text{和} \quad v_{\text{th}} \equiv (2KT/m)^{1/2} \quad (7-5)$$

用定积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi} \quad (7-6)$$

很容易证明 \hat{f}_m 对 $dv_x dv_y dv_z$ 的积分为 1。

一个麦克斯韦分布有几种常用的平均速度。在 1.3 节中，我们看到均方根速度为

$$(\overline{v^2})^{1/2} = (3KT/m)^{1/2} \quad (7-7)$$

速度的平均大小 $|\overline{v}|$ (或简单用 \overline{v}) 可按下式求出

$$\overline{v} = \int_{-\infty}^{\infty} v \hat{f}_m(\mathbf{v}) d^3v \quad (7-8)$$

由于 \hat{f}_m 是各向同性的，在 v 空间，用球坐标很容易作出积分 (图 7-2)。因为每个球壳的体积元是 $4\pi v^2 dv$ ，我们得到

$$\overline{v} = (m/2\pi KT)^{3/2} \int_0^{\infty} v [\exp(-v^2/v_{\text{th}}^2)] 4\pi v^2 dv \quad (7-9)$$

$$= (\pi v_{\text{th}}^2)^{-3/2} 4\pi v_{\text{th}}^4 \int_0^{\infty} [\exp(-y^2)] y^3 dy \quad (7-10)$$

用分部积分求出定积分的值为 $\frac{1}{2}$ 。这样

$$\overline{v} = 2\pi^{-1/2} v_{\text{th}} = 2(2KT/\pi m)^{1/2} \quad (7-11)$$

在单个方向的速度分量，比如 v_x ，它具有不同的平均。当然对各向同性分布， $\overline{v_x}$

等于零，但是 $\overline{|v_x|}$ 不为零

$$\overline{|v_x|} = \int |v_x| \hat{f}_m(\mathbf{v}) d^3v \quad (7-12)$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \exp\left(-\frac{v_y^2}{v_{th}^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \exp\left(-\frac{v_z^2}{v_{th}^2}\right) \int_0^{\infty} 2v_x \exp\left(-\frac{v_x^2}{v_{th}^2}\right) dv_x \quad (7-13)$$

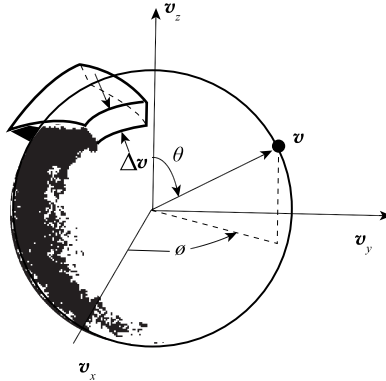


图 7-2 三维速度空间

从方程 (7-6) 可见，前面两个积分的每一个都有值 $\pi^{1/2}v_{th}$ 。最后一个积分是简单的，其值为 v_{th}^2 。这样，我们得到

$$\overline{|v_x|} = (\pi v_{th}^2)^{-3/2} \pi v_{th}^4 = \pi^{-1/2} v_{th} = (2KT/\pi m)^{1/2} \quad (7-14)$$

从假想平面的一边穿到另一边的无规则运动通量为

$$\Gamma_{\text{random}} = \frac{1}{2} n \overline{|v_x|} = \frac{1}{4} n \bar{v} \quad (7-15)$$

这里，我们已经用了方程 (7-11)，并且用了下面的事实：在任何方向，只有一半粒子穿过这个平面。概括地讲，对于麦克斯韦分布

$$v_{\text{rms}} = (3KT/m)^{1/2} \quad (7-7)$$

$$\overline{|v|} = 2(2KT/\pi m)^{1/2} \quad (7-11)$$

$$\overline{|v_x|} = (2KT/\pi m)^{1/2} \quad (7-14)$$

$$\bar{v}_x = 0 \quad (7-16)$$

对于类似麦克斯韦的各向同性分布，我们能定义另一个函数 $g(v)$ ，它是 v 标量值的函数

$$\int_0^{\infty} g(v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{v}) d^3v \quad (7-17)$$

对于麦克斯韦分布，从方程 (7-9) 我们看到

$$g(v) = 4\pi n (m/2\pi KT)^{3/2} v^2 \exp(-v^2/v_{th}^2) \quad (7-18)$$

图 7-3 说明了 $g(v)$ 和一维麦克斯韦分布 $f(v_x)$ 之间的差别。虽然 $f(v_x)$ 在 $v_x =$

0 是极大, $g(v)$ 在 $v=0$ 却是零. 这恰好是 $v=0$ 处相空间 (图 7-2) 体积为零的结果. 有时轻率地用 $f(v)$ (区别于 $f(\mathbf{v})$) 来表示 $g(v)$; 但是 $g(v)$ 与其宗量和 $f(v)$ 与其宗量的函数关系是不同的. 从方程 (7-18), $g(v)$ 显然具有 s/cm^4 的量纲.

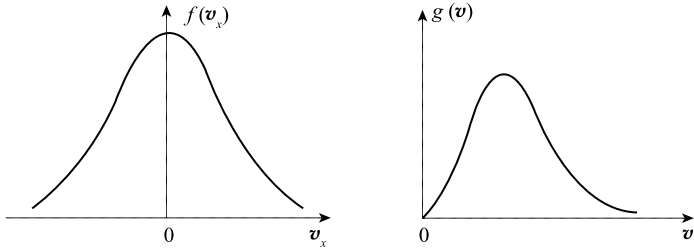


图 7-3 一维和三维麦克斯韦速度分布

如果我们不减少维数, 要在给定时间 t 画出 $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ 的图是不可能的. 在一维系统中, $f(x, v_x)$ 能被描述为一个曲面 (图 7-4). 这个曲面和 $x = \text{常数}$ 平面的交线是速度分布 $f(v_x)$. 这个面和 $v_x = \text{常数}$ 平面的交线给出了有给定 v_x 的粒子密度分布. 如果所有曲线 $f(v_x)$ 碰巧有相同的形状, 通过峰值的曲线应当表示密度分布. 图 7-4 的虚线是曲面和 $f = \text{常数}$ 平面的交线, 它们是水平曲线或常 f 曲线. 这些曲线在 $x-v_x$ 平面上的投影将给出 f 的拓扑映射图. 这样的图对于获得等离子体具有怎样行为的初步观念是很有用的, 其例子将在 7.2 节给出.

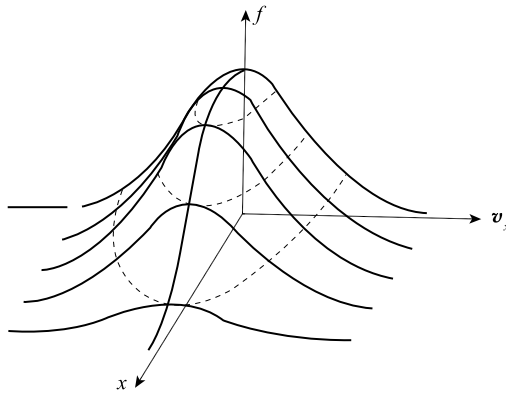


图 7-4 空间变化的一维分布 $f(x, v_x)$

如果我们考虑在空间给定点的 $f(v)$, 则我们能得到另一种形式的有关 f 的等值线图. 例如, 如果运动是二维的, 且 f 对 v_x, v_y 是各向同性的, 则 $f(v_x, v_y)$ 的等值线将是圆. 各向异性的分布会有椭圆等值线 (图 7-5). 一个漂移麦克斯韦分布会有偏离原点的圆周等值线, 而一个在 x 方向传播的粒子束应当作为一个独立的尖峰而显示出来 (图 7-6).

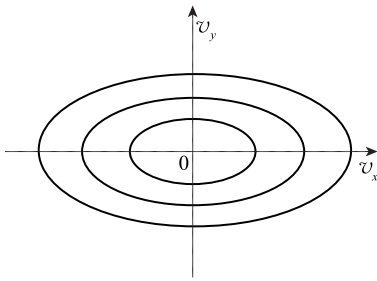


图 7-5 二维, 各向异性分布的等 f 线

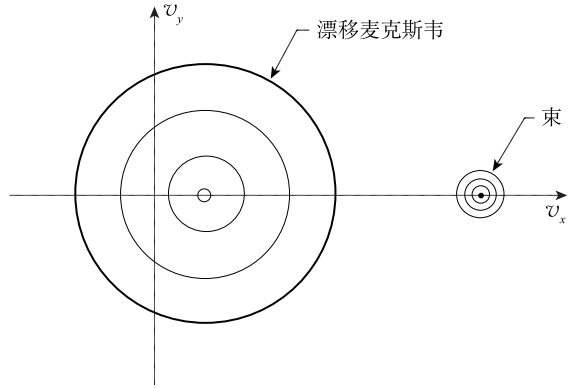


图 7-6 一个漂移的麦克斯韦分布和二维“束”等 f 线

磁镜约束等离子体的损失锥分布能够用 v_{\perp} , v_{\parallel} 空间的 f 等值线来表示. 图 7-7 示出了这些线应当具有的形式.

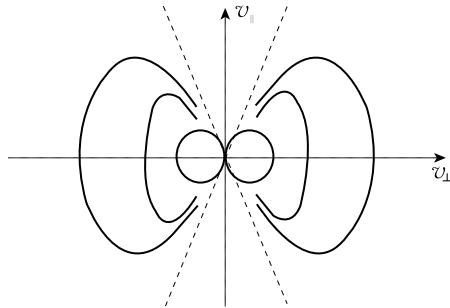


图 7-7 损失锥分布的等 f 线

这里的 v_{\parallel} 和 v_{\perp} 分别表示沿磁场和垂直磁场的 v 分量

7.2 动力学理论方程

$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 必须满足的基本方程是玻尔兹曼方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c \quad (7-19)$$

这里 \mathbf{F} 是作用在粒子上的力, $(\partial f / \partial t)_c$ 是碰撞引起的 f 随时间变化率. 像通常的用法一样, 符号 ∇ 代表 (x, y, z) 空间的梯度, $\partial / \partial \mathbf{v}$ 或 $\nabla_{\mathbf{v}}$ 代表速度空间的梯度

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial v_x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial v_y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial v_z} \quad (7-20)$$

如果我们回忆起 f 是七个独立变量的函数, 则玻尔兹曼方程的意义就变得很清楚了. 所以, f 随时间的总微商是

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v_x} \frac{dv_x}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v_y} \frac{dv_y}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v_z} \frac{dv_z}{dt} \quad (7-21)$$

这里， $\partial f / \partial t$ 是对时间的显相关。后面三项恰好是 $\mathbf{v} \cdot \nabla f$ 。用牛顿第二定律

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad (7-22)$$

认为最后三项是 $(\mathbf{F}/m) \cdot (\partial f / \partial \mathbf{v})$ 。正如在前面第 3.3 节讨论过的那样，总微商 df/dt 能解释为在随粒子运动的坐标系中所观察到的变化率。不同之处在于我们现在必须考虑在 6 维 (r, v) 空间运动的粒子， df/dt 是在相空间中的运流微商。玻尔兹曼方程 (7-19) 简单地说明：除了有碰撞以外， df/dt 是零。从图 7-8 示出的一维例子，能看到这种说法应当是正确的。

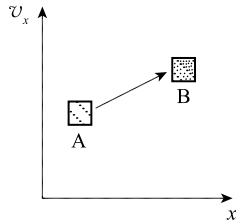


图 7-8 在相空间中的一群点（代表了粒子群的位置和速度坐标）随时间运动时，保持同样的相空间密度

在 A 点的一个无限小元 $dx dv_x$ 中的粒子群都具有速度 v_x 和位置 x 。在这个相空间中，粒子密度恰好是 $f(x, v_x)$ 。随着时间的消逝，粒子的速度 v_x 使它们运动到别的 x 点，而且作用在粒子上的力将改变它们的速度。由于力只依赖于 x 和 v_x ，所有在 A 点的粒子将受到同样大小的加速。在时间 t 后，所有粒子将到达相空间中的 B 点。由于所有粒子一起运动，B 处密度将和 A 处密度相同。然而，如果存在碰撞，粒子就能被散射，而 f 则由于 $(\partial f / \partial t)_c$ 项而改变。

在足够热的等离子体中，碰撞可以忽略。而且，如果 \mathbf{F} 完全是电磁力，则方程 (7-19) 取下面的特殊形式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (7-23)$$

这个方程称为符拉索夫方程 (Vlasov equation)。因为它比较简单，所以它是在动力学理论中受到最普遍研究的方程。当存在同中性原子的碰撞时，方程 (7-19) 的碰撞项能用

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c = \frac{f_n - f}{\tau} \quad (7-24)$$

来近似。其中， f_n 是中性原子的分布函数， τ 是碰撞时间常数。这一项称为克罗克 (Krook) 碰撞项。它是方程 (5-5) 中碰撞项的动力学推广。当存在库仑碰撞时，方程 (7-19) 可由下式来近似

$$\frac{df}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (f \langle \Delta \mathbf{v} \rangle) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{v}} : (f \langle \Delta \mathbf{v} \Delta \mathbf{v} \rangle) \quad (7-25)$$

这个方程称为福克 (Fokker) - 普朗克 (Planck) 方程，它只考虑二体库仑碰撞。

这里, Δv 是在一次碰撞中的速度变化, 方程 (7-25) 是一个相当复杂表达式的一种简便写法.

df/dt 在没有碰撞时为常数, 这件事意味着粒子在相空间各处沿着等 f 线运动. 作为如何运用这些等值线的一个例子, 我们考虑 6.6 节的束-等离子体不稳定性. 在未扰动的等离子体中, 所有电子具有速度 v_0 , 等 f 线是一条直线 (图 7-9).

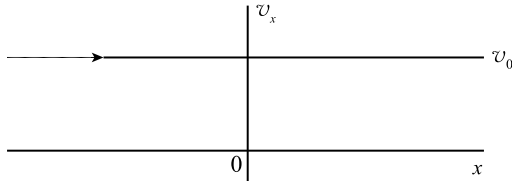


图 7-9 所有电子具有同一速度 v_0 的一个电子束在一维相空间中的表示法
沿着这条线, 分布函数 $f(x, v_x)$ 是无穷大, 而在别处分布函数为零.
这条线也是个别电子的轨道. 它们沿着箭头方向运动

函数 $f(x, v_x)$ 是纸平面上 $v_x = v_0$ 处升起的一堵墙. 电子沿着图中示出的轨道运动. 当一个波产生时, 随着电子向前流动, 电场 E_1 使它们的 v_x 发生变化. 于是轨道发生了一个正弦式涟漪 (图 7-10). 这个涟漪以相速度而不是以粒子速度传播. 当粒子相对于波运动时, 它们继续停留在曲线上. 如果随着波的增长, E_1 变成非常大, 并且如果存在着一些碰撞, 某些电子将在波的静电势中被俘获. 在坐标空间中, 波势看来有图 7-11 所示的形状. 在相空间中, $f(x, v_x)$ 在势能谷处将有峰值 (图 7-12). 由于 f 的等值线也是电子轨道, 我们看到某些电子在相空间的闭合轨道运动. 这些电子恰好就是俘获电子.

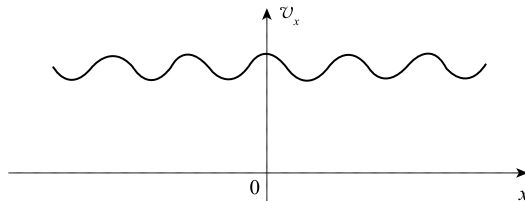


图 7-10 当电子束中出现等离子体波时, 图 7-9 曲线的外貌
整体图形以波的相速度向右运动. 如果观察者来到波的坐标系, 图形应当停止不动,
并且会看到电子以速度 $v_0 - v_p$ 沿着曲线运动

电子俘获是一种非线性现象, 它不能用直接解符拉索夫方程来处理. 然而用计算机可追踪电子轨道, 其结果常以类似图 7-12 所示曲线的形式来表示. 数值计算结果的一个例子在图 7-13 中示出. 这是对双流不稳定性的结果, 在那里, 初始的 f 等值线在接近 $v_x = 0$ 处有一个间隙, 它把反向运动的电子分开. 这个不存在粒子的间隙随时间的发展由图 7-13 中的阴影区域表示. 这个图案说明不稳定性逐渐使 $f(v)$ 变形, 变形的途径很难分析描述.

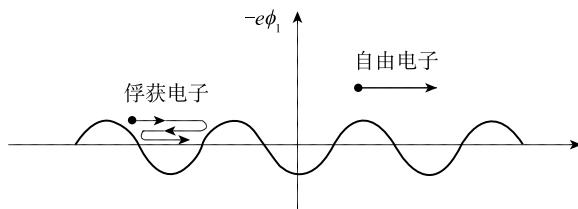


图 7-11 电子所看到的等离子波的势能

图像以速度 v_p 运动。一个相对于波具有较小速度的电子会在势谷中被俘获并且和波一起传播

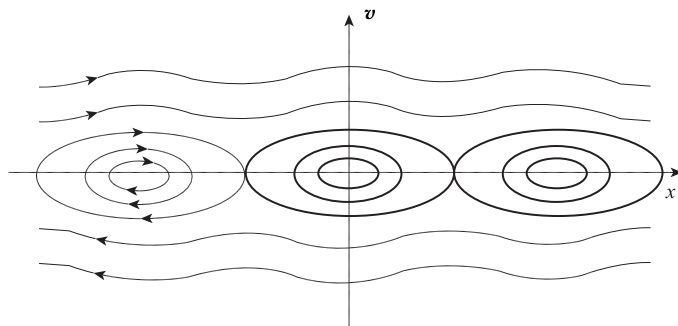


图 7-12 在波坐标系中（那里，图形是固定的）看到的电子轨道或等 f 线

适合于有限分布 $f(v)$ 的这类曲线比图 7-10 的 δ 函数分布较容易理解

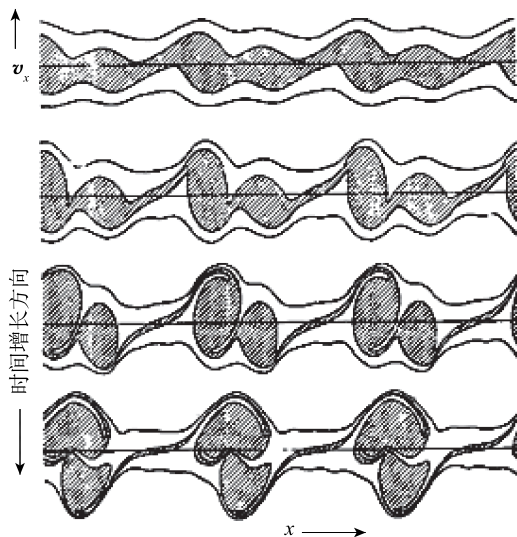


图 7-13 双流不稳定性中电子在相空间的等 f 线

阴影区域（最初代表实验室坐标的低速度区）是没有电子的。当这种不稳定性发展超过线性阶段时，在相空间中的这些空的区域扭曲成类似于“水袋”的形状 [引自 H. L. Berk, C. E. Nielson and

K. V. Robert, Phys. Fluids, **13**, 986 (1970)]

7.3 流体方程的推导

我们已经在使用的流体方程只不过是玻尔兹曼方程的矩。最低阶的矩由积分方程 (7-19) 得到, 方程 (7-19) 中的 \mathbf{F} 特指洛伦兹力

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} + \int \mathbf{v} \cdot \nabla f d\mathbf{v} + \frac{q}{m} \int (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c d\mathbf{v} \quad (7-26)$$

第一项给出

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \int f d\mathbf{v} = \frac{\partial n}{\partial t} \quad (7-27)$$

由于 \mathbf{v} 是一个独立变量, 因此不受算子 ∇ 的影响, 第二项给出

$$\int \mathbf{v} \cdot \nabla f d\mathbf{v} = \nabla \cdot \int \mathbf{v} f d\mathbf{v} = \nabla \cdot (n \bar{\mathbf{v}}) \equiv \nabla \cdot (n \mathbf{u}) \quad (7-28)$$

其中平均速度 \mathbf{u} 按定义是流体速度。由于如下原因, \mathbf{E} 项为零。

$$\int \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (f \mathbf{E}) d\mathbf{v} = \int_{S_\infty} f \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (7-29)$$

积分全散度给出在 $v \rightarrow \infty$ 的表面上的 $f \mathbf{E}$ 值。如果当 $v \rightarrow \infty$ 时, $f \rightarrow 0$ 比 $v^{-2} \rightarrow 0$ 要快 (这对任何具有有限能量的分布是必要的), 则 $v \rightarrow \infty$ 表面的 $f \mathbf{E}$ 值为零。 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 项能写成

$$\int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (f \mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{v} - \int f \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{v} = 0 \quad (7-30)$$

第一个积分再次能变换成面积分。对于麦克斯韦分布, 当 $v \rightarrow \infty$ 时, f 的下降比 v 的任何次幂下降要快, 因此积分为零。因为 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 垂直于 $\partial / \partial \mathbf{v}$, 所以第二个积分为零。最后, 因为碰撞不能改变粒子的总数 (这里不考虑复合), 方程 (7-26) 的第四项为零。于是, 方程 (7-27) ~ 方程 (7-30) 就给出连续性方程

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \mathbf{u}) = 0 \quad (7-31)$$

用 $m\mathbf{v}$ 乘方程 (7-19), 并对 $d\mathbf{v}$ 积分, 可得到玻尔兹曼方程的下一阶矩。我们得到

$$m \int \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} + m \int \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \nabla) f d\mathbf{v} + q \int \mathbf{v} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = \int m \mathbf{v} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c d\mathbf{v} \quad (7-32)$$

右边是碰撞引起的动量变化并且将给出方程 (5-58) 式中的 P_{ij} 项。方程 (7-32) 的第一项给出

$$m \int \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} = m \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{v} f d\mathbf{v} \equiv m \frac{\partial}{\partial t} (n \mathbf{u}) \quad (7-33)$$

方程 (7-32) 中的第三个积分可写成

$$\begin{aligned} \int \mathbf{v}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} &= \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot [f\mathbf{v}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})] d\mathbf{v} \\ &\quad - \int f\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{v} \\ &\quad - \int f(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} d\mathbf{v} \end{aligned} \quad (7-34)$$

按照前面所述的同样原因, 方程 (7-34) 右边的前两个积分为零, $\partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{v}$ 恰好是单位张量 \mathbf{I} . 所以, 我们有

$$q \int \mathbf{v}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = -q \int (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) f d\mathbf{v} = -qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (7-35)$$

最后, 为了计算方程 (7-32) 的第二个积分, 我们首先利用这样的事实, 即 \mathbf{v} 是一个与 ∇ 无关的独立变量, 并且写出

$$\int \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla) f d\mathbf{v} = \int \nabla \cdot (f\mathbf{v}\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \nabla \cdot \int f\mathbf{v}\mathbf{v} d\mathbf{v} \quad (7-36)$$

由于一个量的平均是它对 \mathbf{v} 权重积分的 $\frac{1}{n}$ 倍, 我们得到

$$\nabla \cdot \int f\mathbf{v}\mathbf{v} d\mathbf{v} = \nabla \cdot n\overline{\mathbf{v}\mathbf{v}} \quad (7-37)$$

现在, 我们可以把 \mathbf{v} 分成平均 (流体) 速度 \mathbf{u} 和热速度 \mathbf{w} , 即

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} \quad (7-38)$$

由于 \mathbf{u} 已经是一个平均值, 我们有

$$\nabla \cdot (n\overline{\mathbf{v}\mathbf{v}}) = \nabla \cdot (n\mathbf{u}\mathbf{u}) + \nabla \cdot n(\overline{\mathbf{w}\mathbf{w}}) + n\nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}\mathbf{w}}) \quad (7-39)$$

平均 $\overline{\mathbf{u}\mathbf{w}}$ 显然是零. 量 $m\overline{n\mathbf{w}\mathbf{w}}$ 正好就是压力张量 \mathbf{P}

$$\mathbf{P} \equiv m\overline{n\mathbf{w}\mathbf{w}} \quad (7-40)$$

方程 (7-39) 中剩下的项可写成

$$\nabla \cdot (n\mathbf{u}\mathbf{u}) = \mathbf{u} \nabla \cdot (n\mathbf{u}) + n(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (7-41)$$

汇集方程 (7-33), 方程 (7-35), 方程 (7-40) 和方程 (7-41) 所得到的结果, 我们能把方程 (7-32) 写成

$$m \frac{\partial}{\partial t} (n\mathbf{u}) + m\mathbf{u} \nabla \cdot (n\mathbf{u}) + mn(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{P} - qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \mathbf{P}_{ij} \quad (7-42)$$

用方程 (7-31) 把方程 (7-42) 的前两项结合起来, 我们最后得到了流体运动方程

$$mn \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P}_{ij} \quad (7-43)$$

这个方程描述了动量的流动. 为了论述能量的流动, 我们可以取玻尔兹曼方

程的下一阶矩（通过乘 $\frac{1}{2}mv$ 并积分）。那时，我们会获得热流方程，同压力张量 \mathbf{P} 出现的方式相同，在这个方程中，会出现热导系数 κ 。状态方程 $p \propto \rho^\gamma$ 是热流方程的一种简单的形式（ $\kappa=0$ ）。

7.4 等离子体振荡和朗道阻尼

作为用符拉索夫方程的一个基本实例，我们将导出电子等离子体振荡的色散关系，在 4.3 节，我们曾用流体观点处理过这个问题。这个推导将需要围道积分的知识，对围道积分不熟悉的读者可以跳到 7.5 节。一种较简便但较长的推导（不用复变量理论）将在 7.6 节中给出。

在零阶近似下，我们假定一个具有分布 $f_0(\mathbf{v})$ 的均匀等离子体，并且令 $\mathbf{B}_0 = \mathbf{E}_0 = 0$ 。在一阶近似下，我们用 $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 表示 $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 中的扰动

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{v}) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (7-44)$$

现在，由于 \mathbf{v} 是独立变量而且未经线性化，所以电子的一阶符拉索夫方程是

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_1 - \frac{e}{m} \mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (7-45)$$

像以前一样，我们假定离子质量重并且固定不动，而且假定波是在 x 方向的平面波

$$f_1 \propto e^{-i(kx - \omega t)} \quad (7-46)$$

那么，方程 (7-45) 变成

$$-i\omega f_1 + ikv_x f_1 = \frac{e}{m} E_x \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \quad (7-47)$$

$$f_1 = \frac{ieE_x}{m} \frac{\partial f_0 / \partial v_x}{\omega - kv_x} \quad (7-48)$$

泊松方程给出

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = ikE_x = -4\pi e n_1 = -4\pi e \iiint f_1 d^3v \quad (7-49)$$

代入 f_1 并除以 ikE_x ，得到

$$1 = -\frac{4\pi e^2}{km} \iiint \frac{\partial f_0 / \partial v_x}{\omega - kv_x} d^3v \quad (7-50)$$

如果我们用归一化函数 \hat{f}_0 来代替 f_0 能提出因子 n_0

$$1 = -\frac{\omega_p^2}{k} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \hat{f}_0(v_x, v_y, v_z) / \partial v_x}{\omega - kv_x} dv_x \quad (7-51)$$

如果 f_0 是麦克斯韦分布或者其他某些能分解因子的分布，就能容易地求出对 v_z 和 v_y 的积分。留下的就是一维分布 $\hat{f}_0(v_x)$ 。例如，一维麦克斯韦分布是

$$\hat{f}_m(v_x) = (m/2\pi KT)^{1/2} \exp(-mv_x^2/2KT) \quad (7-52)$$

因此, 色散关系是

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \hat{f}_0(v_x)/\partial v_x}{v_x - (\omega/k)} dv_x \quad (7-53)$$

由于我们讨论一维问题, 所以可去掉下标 x . 小心不要将这里的 v (实际上是 v_x) 与前面使用的总速度 v 相混淆

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \hat{f}_0/\partial v}{v - (\omega/k)} dv \quad (7-54)$$

在这里, \hat{f}_0 被理解为一维分布函数, 对 v_y 和 v_z 的积分已经求过. 方程 (7-54) 适用于任何平衡分布 $\hat{f}_0(v)$, 在特殊情况下, 倘若 \hat{f}_0 是麦克斯韦分布, 则式中的 \hat{f}_0 可用方程 (7-52).

方程 (7-54) 中的积分不能直接计算, 因为在 $v=\omega/k$ 处有奇点. 人们也许认为不会涉及奇点, 因为在实际上 ω 几乎从来不会是实数; 波通常由于碰撞而稍微阻尼或者由于某些不稳定性机制而增长. 由于速度 v 是一个实数, 方程 (7-45) 的分母绝不会是零. 朗道首先正确地处理了这个方程. 他发现, 即使奇点在积分的路线以外, 它的存在对等离子体波的色散关系引入了一个重要的修正 (一个流体理论所不能预言的效应).

考虑一个初始值问题, 在这个问题中, 给等离子体一个正弦扰动, 所以 k 是实数. 如果扰动增长或衰变, ω 将是复数. 方程 (7-54) 中的积分必须处理成复 v 平面的周线积分. 对于 (a) $\text{Im}(\omega) > 0$ 的一种不稳定波, (b) $\text{Im}(\omega) < 0$ 的阻尼波, 在图 7-14 中示出了可能的周线. 在正常情况, 人们会用留数定理来计算沿实 v 轴的线积分

$$\int_{C_1} G dv + \int_{C_2} G dv = 2\pi i R(\omega/k) \quad (7-55)$$

其中, G 是被积函数, C_1 是沿实轴的积分路程, C_2 是在无穷大处的半圆, $R(\omega/k)$ 是 (ω/k) 处的留数. 如果对 C_2 的积分为零, 就能求出沿实轴的积分. 但不幸的是, 对于包含因子

$$\exp(-v^2/v_{th}^2)$$

的麦克斯韦分布来讲, 这种情况不出现. $v \rightarrow \pm i\infty$ 时, 这个因子变得很大, C_2 的贡献就不能忽略. 朗道证明, 当这个问题被正确地处理成初始值问题时, 使用的正确周线是低于奇点通过的曲线 C_1 . 一般来说, 这个积分必须要用数值计算, 当 \hat{f}_0 是麦克斯韦分布时, 弗里德 (Fried) 和康特 (Conte) 已经给出了计算数表.

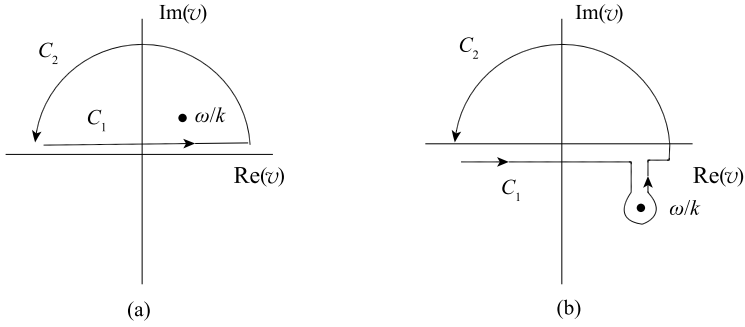


图 7-14 对于 (a) $\text{Im}(\omega) > 0$ 和 (b) $\text{Im}(\omega) < 0$, 朗道问题的积分周线

虽然, 这个问题的确切分析是复杂的, 但对于大相速度和弱阻尼情况, 我们能得到近似的色散关系. 在这种情况下, 在 ω/k 的极点接近于实 v 轴 (图 7-15). 于是, 由朗道描述的周线是一条沿 $\text{Re}(v)$ 轴的直线, 它在极点周围有一个小半圆. 围绕极点进行积分, 就得到 $2\pi i$ 乘上极点处的半留数. 方程 (7-54) 就变成

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \left[P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \hat{f}_0 / \partial v}{v - (\omega/k)} dv + i\pi \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} \Big|_{v=\omega/k} \right] \quad (7-56)$$

其中, P 就是柯西主值. 为了计算这个值, 我们沿实 v 轴积分, 但正好在遇到极点前停止. 如果像我们假定的那样, 相速度 $v_\phi = \omega/k$ 足够大, 则周线的忽略部分将不带来较大的贡献, 因为在那里 \hat{f}_0 和 $\partial \hat{f}_0 / \partial v$ 都是非常小的 (图 7-16). 用分部积分能计算方程 (7-56) 的积分:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} \frac{dv}{v - v_\phi} = \left[\frac{\hat{f}_0}{v - v_\phi} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\hat{f}_0 dv}{(v - v_\phi)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}_0 dv}{(v - v_\phi)^2} \quad (7-57)$$

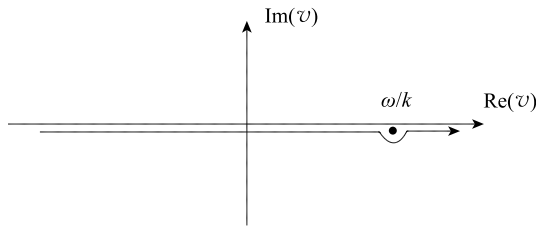


图 7-15 对于 $\text{Im}(\omega)$ 为小量的情况, 在复 v 平面上的积分周线

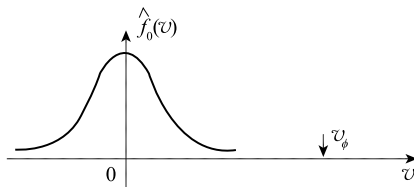


图 7-16 在 $v_\phi \gg v_{th}$ 的情况下的归一化麦克斯韦分布

由于这个式子恰好是 $(v-v_\phi)^{-2}$ 对分布的平均, 色散关系的实数部分能写出

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \overline{(v-v_\phi)^{-2}} \quad (7-58)$$

由于已经假定 $v_\phi \gg v$, 我们可展开 $(v-v_\phi)^{-2}$

$$\begin{aligned} (v-v_\phi)^{-2} &= v_\phi^{-2} \left(1 - \frac{v}{v_\phi}\right)^{-2} \\ &= v_\phi^{-2} \left(1 + \frac{2v}{v_\phi} + \frac{3v^2}{v_\phi^2} + \frac{4v^3}{v_\phi^3} + \dots\right) \end{aligned} \quad (7-59)$$

在取平均时, 奇数项为零, 我们有

$$\overline{(v-v_\phi)^{-2}} \approx v_\phi^{-2} \left(1 + \frac{3}{v_\phi^2} \overline{v^2}\right) \quad (7-60)$$

现在, 我们令 \hat{f}_0 是麦克斯韦分布并计算 $\overline{v^2}$. 请记住, 这里的 v 是 v_x 的缩写, 我们能写成

$$\frac{1}{2} m \overline{v_x^2} = \frac{1}{2} K T_e \quad (7-61)$$

只存在一个自由度. 于是, 色散关系 (7-58) 就变成

$$1 = \frac{\omega_p^2 k^2}{k^2 \omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 K T_e}{\omega^2 m}\right) \quad (7-62)$$

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{\omega_p^2 3 K T_e}{\omega^2 m} k^2 \quad (7-63)$$

如果热修正不大, 我们可以用 ω_p^2 代替第二项中的 ω^2 , 便得到

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3 K T_e}{m} k^2 \quad (7-64)$$

它和 $\gamma=3$ 的流体方程所得到的方程 (4-30) 相同.

现在, 我们回到方程 (7-56) 的虚数项. 在计算这个小项时, 忽略对 ω 实数部分的热修正, 并且令 $\omega^2 \approx \omega_p^2$, 这样做, 将有足够的精确性. 从方程 (7-57) 和方程 (7-60), 我们看到方程 (7-56) 中的积分主值近似为 k^2/ω^2 . 现在方程 (7-56) 变成

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + i\pi \frac{\omega_p^2}{k^2} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} \Big|_{v=v_\phi} \quad (7-65)$$

$$\omega^2 \left(1 - i\pi \frac{\omega_p^2}{k^2} \left[\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} \right]_{v=v_\phi} \right) = \omega_p^2 \quad (7-66)$$

把虚数项当作小量, 我们能把它移到右边去. 令 $\omega^2 \approx \omega_p^2$, 并取泰勒级数展开的平方根, 就得到

$$\omega = \omega_p \left(1 + i \frac{\pi}{2} \frac{\omega_p^2}{k^2} \left[\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} \right]_{v=v_\phi} \right) \quad (7-67)$$

如果 \hat{f}_0 是一维麦克斯韦分布, 我们得到

$$\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} = (\pi v_{th}^2)^{-1/2} \left(\frac{-2v}{v_{th}^2} \right) \exp\left(\frac{-v^2}{v_{th}^2} \right) = -\frac{2v}{\sqrt{\pi} v_{th}^3} \exp\left(-\frac{v^2}{v_{th}^2} \right) \quad (7-68)$$

在系数中，我们可以用 ω_p/k 来近似 v_ϕ ，但是在指数中，我们必须保留方程 (7-64) 中的热修正项。于是阻尼由下式给出

$$\begin{aligned} \text{Im}(\omega) &= -\frac{\pi \omega_p^3}{2 k^2} \frac{2\omega_p}{k} \frac{1}{\sqrt{\pi} v_{th}^3} \exp\left(\frac{-\omega^2}{k^2 v_{th}^2} \right) \\ &= -\sqrt{\pi} \omega_p \left(\frac{\omega_p}{k v_{th}} \right)^3 \exp\left(\frac{-\omega^2}{k^2 v_{th}^2} \right) \exp\left(-\frac{3}{2} \right) \end{aligned} \quad (7-69)$$

$$\text{Im}\left(\frac{\omega}{\omega_p} \right) = -0.22 \sqrt{\pi} \left(\frac{\omega_p}{k v_{th}} \right)^3 \exp\left(\frac{-1}{2k^2 \lambda_D^2} \right) \quad (7-70)$$

由于 $\text{Im}(\omega)$ 是负的，就存在等离子体波的无碰撞阻尼，它称为朗道阻尼。从方程 (7-70) 明显地看到，对于小的 $k\lambda_D$ ，这个阻尼是极为小的，但对 $k\lambda_D = O(1)$ ，它就变成重要的了。这个效应和波引起的分布函数变形 f_1 有关系。

7.5 朗道阻尼的意义

在无由碰撞引起能量消耗下波阻尼的理论发现也许是等离子体物理学研究中最令人震惊的结果。这是一个真实的效应，它在实验室中已经得到证明。虽然目前对这种波阻尼有一种简单的物理解释，但是这个未被预期到的效应首先是在对周线积分的仔细分析过程中纯数学地发现的，这是应用数学的一个成功。朗道阻尼是无碰撞等离子体的一种特征，但是，在其他领域，它可能也有应用。例如，在星系形成的动力学处理中，恒星可以考虑成通过重力而不是电磁力相互作用的等离子体的原子。恒星气体的不稳定性能使螺旋形臂形成，但这个过程受到朗道阻尼的限制。

为了了解形成朗道阻尼的原因是什么，首先，我们注意 $\text{Im}(\omega)$ 由 $v=v_\phi$ 处的极点所引起。因此，这个效应与分布中速度接近于相速度的那些粒子相联系，这些粒子叫做“共振粒子”。它们和波一起传播，并且感觉不到迅速波动的电场，因此它们能够有效地与波交换能量。理解这种能量交换的最容易的方法是想象一个试图赶上海浪的冲浪运动员（图 7-17）。如果冲浪板不运动，当波通过时，它只是向上和向下振动，从平均来看，它并不获得任何能量。同样，一条远快于波推进的小舟也不能与波交换很多能量。然而，如果冲浪板和波有几乎相同的速度，它会被波赶上并被波推动向前。这终究是这项运动的主要目的。在那种情况下，冲浪板获得能量，因此波必须损失能量并且被阻尼。另外，如果冲浪板会比波稍快一些运动，当它向上坡运动时，它会推动波，于是波能获得能量。在等离子体中，比波运动较快和较慢的电子都存在。然而，麦克斯韦分布具有的慢电子比快电子要多（图 7-18）。因此，从波获得能量的粒子多于给波能量的粒子，波

受到阻尼。随着 $v \approx v_\phi$ 的粒子在波中俘获，在接近相速度处 $f(v)$ 变平。这个畸变就是我们所计算的 $f_1(v)$ 。正如图 7-18 所看到的那样，扰动了的分布函数包含了相同的粒子数，但已经得到了总能量（以波能量消耗为代价）。

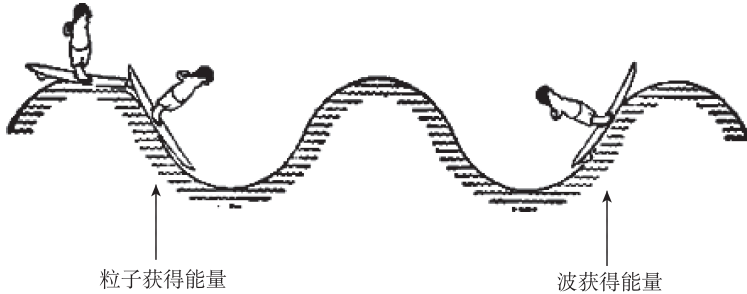


图 7-17 朗道阻尼的惯用物理图像

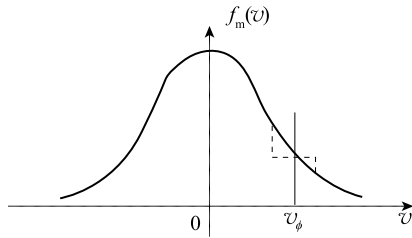


图 7-18 在 $v=v_\phi$ 区域，朗道阻尼引起的麦克斯韦分布的变形

从上面的讨论，人们能推测，如果 $f_0(v)$ 包含的快粒子比慢粒子要多，波就能被激起。从方程 (7-67) 确实可明显地看出，如果在 $v=v_\phi$ 处 $\partial \hat{f}_0 / \partial v$ 是正的，则 $\text{Im}(\omega)$ 是正的。这样一种分布在图 7-19 中示出。 v_ϕ 处于斜率为正区域的波将是不稳定的，它以消耗粒子能量为代价而得到能量。它恰好是双流不稳定性的有限温度模拟。当存在两个运动的冷 ($KT=0$) 电子流时， $f_0(v)$ 由两个 δ 函数所组成。它显然是不稳定的，因为 $\partial f_0 / \partial v$ 为无限；事实上，我们从流体理论发现了这种不稳定性。当川流具有有限温度时，动力学理论告诉我们，两个川流必须具有这样的相对密度和温度，使得在它们之间有一个 $\partial f_0 / \partial v$ 为正的区城；更确切地说，不稳定性的总分布函数必须有一个极小值。

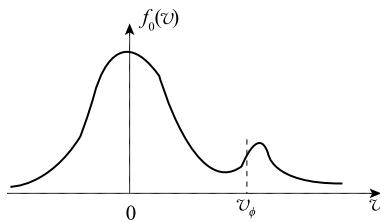


图 7-19 一种双驼峰分布和不稳定性将发展的区域

一个赶波浪的冲浪运动员的物理图像是非常有趣的，但对我们真实理解朗道阻尼来说，它并不是很确切。实际上存在两类朗道阻尼：线性朗道阻尼和非线性朗道阻尼。两类都与耗散的碰撞机制无关。如果粒子在波势阱中被收集，这种现象称为“俘获”。如在冲浪的情况一样，粒子在俘获时的确能得到能量或损失能量。然而，俘获并不在线性理论的范围内。从下面的运动方程能看到，确实是这样一种情况

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = qE(x) \quad (7-71)$$

如果通过代入 x 的精确值来计算 $E(x)$ ，由于 $E(x)$ 有些像 $\sin kx$ ，这个方程将是非线性的。线性理论的做法是对 x 用未扰动轨道，即 $x = x_0 + v_0 t$ 。于是，方程 (7-71) 是线性的。然而当粒子被俘获时，这个近似不再是正确的。当粒子遇到一个大到足以反射它的势垒时，它的速度和位置当然极大地受到了波的影响，而且不接近于它们的未扰动值。在流体理论中，运动方程是

$$m \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = q\mathbf{E}(x) \quad (7-72)$$

这里的 $\mathbf{E}(x)$ 在实验室坐标系中计算，很容易求出。但是从 $\mathbf{E}(x)$ 的组成来看，是有 $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ 项的。在线性理论中，忽略 $(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1$ 相当于用未扰动轨道。从方程 (7-45) 看到，在动力学理论中忽略的非线性项为

$$\frac{q}{m} E_1 \frac{\partial f_1}{\partial v} \quad (7-73)$$

当粒子被俘获时，它们相对于波把它们的行走方向反过来了，所以在接近 $v = \omega/k$ 处，分布函数 $f(v)$ 受到了极大的扰动。这说明， $\partial f_1 / \partial v$ 可与 $\partial f_0 / \partial v$ 相比较，而且不能忽略方程 (7-73)。因此，俘获问题不在线性理论的范围内。

当波增长到大振幅时，发生了有俘获的无碰撞阻尼。于是，人们发现，波并不单调衰变；更确切地说，在衰变期间，随着俘获粒子在势阱中往返跳动，振幅出现起伏。这是非线性朗道阻尼。由于方程 (7-67) 的结果是从线性理论导出，它必定来自不同的物理效应。问题是：接近于波相速度运动的未俘获电子能否与波交换能量？在回答这个问题以前，让我们研究这种电子的能量。

7.5.1 电子束的动能

我们可以把电子分布 $f_0(v)$ 分为大量的单能束 (图 7-20)。考虑这些束中的一束：它具有未扰动速度 u 和密度 n_u 。速度 u 可能接近于 v_ϕ ，所以这个束可能由共振电子所组成。现在，我们加上等离子体振荡 $E(x, t)$ 并考虑束通过波峰和波谷运动时的动能。波是由所有束在一起的自洽运动形成的。如果 n_u 足够小 (束的数目足够大)，所研究的束对波的影响是微不足道的，而且可以考虑成在给定的场 $E(x, t)$ 中的运动。令

$$E = E_0 \sin(kx - \omega t) = -\frac{d\phi}{dx} \quad (7-74)$$

$$\phi = \left(\frac{E_0}{k}\right) \cos(kx - \omega t) \quad (7-75)$$

束的线性化流体方程是

$$m \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + u \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) = -eE_0 \sin(kx - \omega t) \quad (7-76)$$

一个可能解是

$$v_1 = \frac{-eE_0 \cos(kx - \omega t)}{m(\omega - ku)} \quad (7-77)$$

这就是当束电子移过时，由波引起的速度调制。由于粒子通量守恒，存在着相应的密度振荡，由线性化的连续性方程给出

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + u \frac{\partial n_1}{\partial x} = -n_u \frac{\partial v_1}{\partial x} \quad (7-78)$$

由于 v_1 比例于 $\cos(kx - \omega t)$ ，我们可用 $n_1 = \bar{n}_1 \cos(kx - \omega t)$ 来试解。把它代入方程 (7-78) 得到

$$n_1 = -n_u \frac{eE_0 k \cos(kx - \omega t)}{m(\omega - ku)^2} \quad (7-79)$$

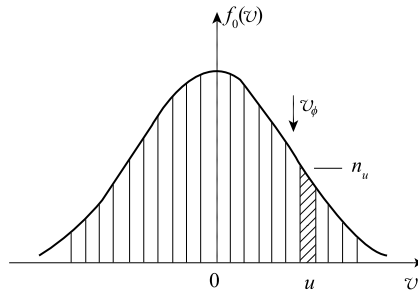


图 7-20 分布 f_0 分成大量具有速度 u 和密度 n_u 的单能束

图 7-21 表示了方程 (7-77) 和方程 (7-79) 的含义。前两条曲线示出了束电子所看到的 E 和势 $-e\phi$ 的一个波长。第三条曲线是在 $\omega - ku < 0$ 或 $u > v_\phi$ 情形下方程 (7-77) 的图。这是容易理解的：当电子 a 攀上势垒时，它的速度变小，反过来，到势谷时，速度变大。第四条曲线是 $u < v_\phi$ 情形的 v_1 ，并看到了符号的反转。这是因为在波的坐标系中，向左运动的电子 b 向势垒顶部运动时被减速，但是由于它以相反的途径运动，所以它的正 x 方向的速度 v_1 在那里是极大。运动的势垒加速电子 b 向右运动，所以当它达到顶部时，它的 v_1 具有极大值。图 7-21 的最后一曲线表示由方程 (7-79) 给出的密度 n_1 。它不随 $u - v_\phi$ 而改变符号，因为在波的坐标系中，电子 a 和电子 b 在势垒的顶部都是最慢的，因此那里的密度最高。特点就在于 n_1 和 v_1 之间的相对位相随 $u - v_\phi$ 改变符号。

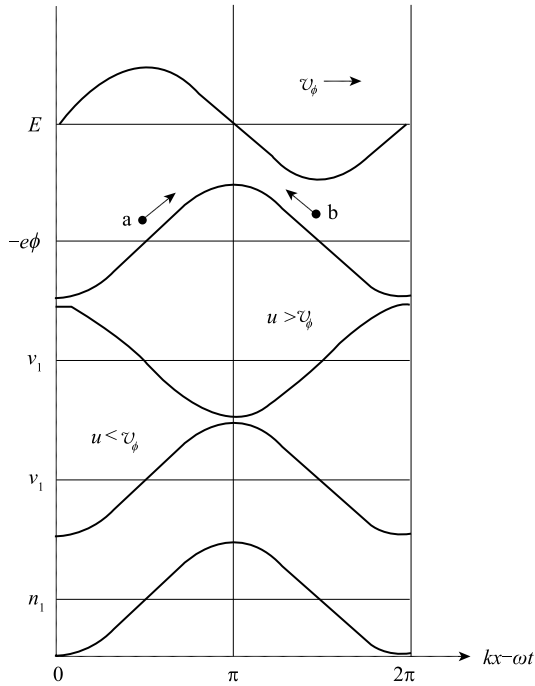


图 7-21 对于在静电波中运动的电子，速度和密度的相位关系

现在，我们可以计算束的动能 W_k

$$\begin{aligned} W_k &= \frac{1}{2} m(n_u + n_1)(u + v_1)^2 \\ &= \frac{1}{2} m(n_u u^2 + n_u v_1^2 + 2u n_1 v_1 + n_1 u^2 + 2n_u u v_1 + n_1 v_1^2) \end{aligned} \tag{7-80}$$

最后三项包含振荡量的奇次幂，因此，当我们对一个波长平均时，它们将为零。减去第一项（初始能量）就得到由于波引起的 W_k 的变化。于是平均能量变化是

$$\langle \Delta W_k \rangle = \frac{1}{2} m \langle n_u v_1^2 + 2u n_1 v_1 \rangle \tag{7-81}$$

由方程 (7-77) 得到

$$n_u \langle v_1^2 \rangle = \frac{1}{2} n_u \frac{e^2 E_0^2}{m^2 (\omega - ku)^2} \tag{7-82}$$

因子 $\frac{1}{2}$ 表示 $\langle \cos(kx - \omega t) \rangle$ 。同样，由方程 (7-79) 得到

$$2u \langle n_1 v_1 \rangle = n_u \frac{e^2 E_0^2 ku}{m^2 (\omega - ku)^3} \tag{7-83}$$

因而，

$$\langle \Delta W_k \rangle = \frac{1}{4} m n_u \frac{e^2 E_0^2}{m^2 (\omega - ku)^2} \left(1 + \frac{2ku}{\omega - ku} \right)$$

$$= \frac{n_u e^2 E_0^2}{4m} \frac{\omega + ku}{(\omega - ku)^3} \quad (7-84)$$

这个结果说明 $\langle \Delta W_k \rangle$ 取决于观察者的坐标系，而且说明它并不长期地随时间变化。考虑在类似洗衣板表面滑动的一个无摩擦滑块（图 7-22）。在洗衣板的坐标系中，正如在方程（7-84）中取 $\omega=0$ 所看到的那样， ΔW_k 比例于 $-(ku)^2$ 。从直观上很清楚地看到，① $\langle \Delta W_k \rangle$ 是负的，因为滑块在顶峰比在凹部消耗了较长的时间；②一旦振荡开始，平均来看，滑块并不得到或损失能量。现在，如果人们进入洗衣板以稳定速度 ω/k 运动的坐标系（这个速度不受滑块运动的影响，因为我们已经假定 n_u 比起整个等离子体密度来可以忽略），一旦振荡开始后，平均来说，滑块不得到或不损失能量仍是正确的。但是方程（7-84）告诉我们， $\langle \Delta W_k \rangle$ 依赖于速度 ω/k ，因此它也依赖于观察者的坐标系。特别是它说明：如果 $\omega - ku < 0$ 或 $u > v_\phi$ ，波存在时的束能量小于波不存在时的束能量；如果 $\omega - ku > 0$ 或 $u < v_\phi$ ，则波存在时的束能量大于波不存在时的束能量。它的原因可以追溯到 n_1 和 v_1 之间的相位关系。如图 7-23 所示， W_k 是 v 的抛物函数。当 v 在 $u - |v_1|$ 和 $u + |v_1|$ 之间振荡时，倘若粒子在每个半振荡耗费了同样的时间，则 W_k 的平均值将大于平衡值 W_{k0} 。这个效应就是方程（7-81）中第一项（一定是正值）的意义。此方程的第二项是由于粒子不能相等地分配它的时间而带来的修正项。在图 7-21 中，人们看到电子 a 和电子 b 在势垒的顶部都要比在底部消耗较多的时间，但是电子 a 是在减速周期后到达那个点，所以 v_1 在那里是负的，而电子 b 是在加速周期后（向右）到达那个点，所以 v_1 在那里是正的。这个效应引起 $\langle \Delta W_k \rangle$ 在 $u = v_\phi$ 改变符号。

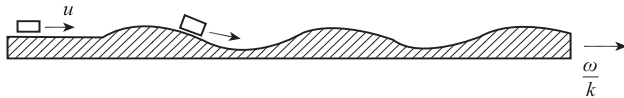


图 7-22 在运动势中，一个运动电子的力学模拟

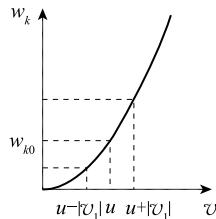


图 7-23 动能和速度间的二次关系引起一个对称速度扰动，并造成平均能量的增加

7.5.2 初始条件的影响

然而，我们刚才已经导出的结果仍然与线性朗道阻尼无关。阻尼要求 W_k 以消耗波能量为代价连续地增加，但是我们已经发现，未俘获粒子的 $\langle \Delta W_k \rangle$ 不随时间变化。如果未俘获粒子和俘获粒子都不是造成线性朗道阻尼的原因，那么，

造成线性朗道阻尼的原因是什么？从下面的观察能够找到这个答案：比如，如果 $\langle \Delta W_k \rangle$ 是正的，就必定有一段 $\langle \Delta W_k \rangle$ 正在增加的时间。在原来的分布中，确实存在一些粒子，它们具有如此接近于 v_ϕ 的速度，以至于在时间 t （相对于波）它们仍然没有走过半个波长。对于这些粒子，人们不能取平均 $\langle \Delta W_k \rangle$ 。这些粒子能从波吸收能量，而且能把它们称为“共振”粒子。随着时间的消逝，共振电子数减少，因为数目越来越多的粒子从它们初始位置移动将超过 $\frac{1}{2}\lambda$ 。然而，阻尼速率能保持常数，因为现在的振幅较小，并且波携带较少的电子以保持恒定的阻尼速率。

从相空间图（图 7-24）极容易看到初始条件的影响。这里，我们画出了电子的相空间轨迹，也画出了电子看到的静电势 $-e\phi_1$ 。我们已经假定，这个静电波在 $t=0$ 存在，并且假定分布 $f_0(v)$ （在垂直于纸平面上绘出）在空间是均匀的，并且在那个时间随 $|v|$ 单调减少。为清晰起见，波的大小被极大地夸大了。当然，波的存在含有 $t=0$ 时存在 $f_1(v)$ 的意思。然而，由此引起的阻尼是在线性理论中忽略的高阶效应。现在，让我们来到波的坐标系考虑电子运动，所以图 7-24 所示的形状并不运动。最初，在 A 点的电子，由于它们的 $v > v_\phi$ ，在势垒的顶点起程向右运动。而最初在 B 点的电子则由于它们的 $v < v_\phi$ 而向左运动。在 C 和 D 的那些电子（在势谷中起动）分别向右和向左运动。在闭合等 E 线上起动的电子没有足够能量通过势垒而被俘获。在初始波振幅小的极限下，能使俘获电子的粒子数

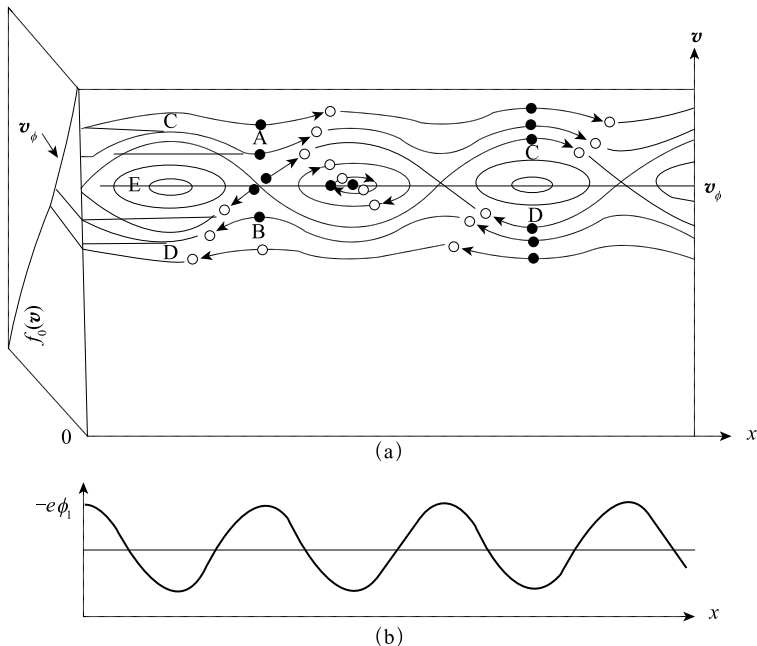


图 7-24 运动在势能波 (b) 中电子的相空间轨迹 (a)

整个图形向右运动，箭头表示电子相对波形的运动方向。平衡分布 $f_0(v)$ 画在垂直于纸面的平面中

任意小. 在某个时间 t 之后 (这段时间足够短, 以至于在 A, B, C 或 D 点没有一个电子走过的路程超过半波长), 电子将运动到空心圆点所标明的位置. 可看到, 在 A 和 D 的电子得到了能量, 而那些在 B 和 C 的电子损失了能量. 现在, 如果一开始 $f_0(v)$ 在空间是均匀的, 最初在 A 点的电子要比 C 点的多, 在 D 点的电子要比在 B 点的多. 因此, 电子有一个净能量增加, 波有一个净能量损失. 这是线性朗道阻尼, 并且它苛刻地取决于所假定的初始条件. 在长时间之后, 电子的相位被抹掉, 使得初始分布可以被忘却, 正如在 7.4 节所发现的那样, 不存在进一步的平均能量增益. 在这种图像中, 在对波长平均时, 具有 $v > v_\phi$ 和 $v < v_\phi$ 的电子以消耗波能量为代价而得到能量. 这与冲浪运动员图像所得到的想法表面上看是矛盾的, 这种表面上的矛盾不久将得到消除.

7.6 朗道阻尼的物理推导

现在, 我们能够不依靠周线积分来推出朗道阻尼速率. 像以前一样, 我们把等离子体分成速度 u 和密度 n_u 的束, 并在这样的波

$$E = E_1 \sin(kx - \omega t) \quad (7-85)$$

中研究它们的运动. 从方程 (7-77) 知道, 每个束的速度是

$$v_1 = -\frac{eE_1 \cos(kx - \omega t)}{m(\omega - ku)} \quad (7-86)$$

这个解满足运动方程 (7-76), 但它并不满足在 $t=0$ 时的初始条件 $v_1=0$. 很清楚, 必须要强加这个初始条件, 不然, 在 $u = \omega/k$ 附近, v_1 会非常大, 等离子体最初就会处于一种特殊准备的状态. 我们通过加上一个 $kx - kut$ 的任意函数能使方程 (7-86) 满足初始条件. 因为方程 (7-76) 左边的算子作用在 $f(kx - kut)$ 上得到零, 这个合成解仍然满足方程 (7-76). 很明显, 为了在 $t=0$ 得到 $v_1=0$, 函数 $f(kx - kut)$ 必须取 $-\cos(kx - kut)$. 这样, 我们用

$$v_1 = -\frac{eE_1 \cos(kx - \omega t) - \cos(kx - kut)}{m(\omega - ku)} \quad (7-87)$$

代替方程 (7-86). 其次, 我们必须解 n_1 的连续性方程 (7-78), 再次要服从 $t=0$ 时的初始条件 $n_1=0$. 由于我们现在比以前更聪明了, 我们可以用下面解来尝试

$$\bar{n}_1 = \bar{n}_1 [\cos(kx - \omega t) - \cos(kx - kut)] \quad (7-88)$$

把它代入方程 (7-78), 并运用 v_1 的方程 (7-87), 我们求出

$$\bar{n}_1 \sin(kx - \omega t) = -n_u \frac{eE_1 k \sin(kx - \omega t) - \sin(kx - kut)}{m(\omega - ku)^2} \quad (7-89)$$

很明显, 我们并不十分巧妙, 因为 $\sin(kx - \omega t)$ 因子不能抵消. 为了给出 $\sin(kx - kut)$ 形式的项 (它来自于 v_1 的附加项), 我们能在 n_1 上加上 $A \sin(kx - kut)$ 形式的项. 在 $t=0$ 时, 这项显然为零. 而且当方程 (7-78) 左边的算子作用在因子 $A \sin(kx - kut)$ 时, 它将给出 $\sin(kx - kut)$ 项. 当算子作用在 $\sin(kx - kut)$ 因

子时, 就得到零. 为了与 $\partial v_1 / \partial x$ 中同样的因子匹配, 系数 A 必定正比于 $(\omega - ku)^{-1}$. 这样, 我们取

$$n_1 = -n_u \frac{eE_1 k}{m} \frac{1}{(\omega - ku)^2} \times [\cos(kx - \omega t) - \cos(kx - kut) - (\omega - ku) t \sin(kx - kut)] \quad (7-90)$$

在 $t=0$, 它显然为零, 并且, 不难证明它满足方程 (7-78).

对每个束所做的功是力乘上距离. 作用在每 cm^3 束上的力是

$$F_u = -eE (n_u + n_1) \quad (7-91)$$

第一项对空间的平均将变零. 所以, 我们得到

$$F_u = n_u \frac{e^2 E_1^2 k \sin(kx - \omega t)}{m} \frac{1}{(\omega - ku)^2} \times [\cos(kx - \omega t) - \cos(kx - kut) - (\omega - ku) t \sin(kx - kut)] \quad (7-92)$$

现在, 我们对波长平均这个式子. 第一项, $\langle \sin(kx - \omega t) \cos(kx - \omega t) \rangle$ 没有贡献, 这和我们在 7.5.1 节得到的结果是相同的. 最后两项来自初始条件, 并且是仅有的做贡献部分. 运用下列恒等式

$$\begin{aligned} \langle \sin(kx - \omega t) \cos(kx - kut) \rangle &= -\frac{1}{2} \sin(\omega t - kut) \quad (7-93) \\ \langle \sin(kx - \omega t) \sin(kx - kut) \rangle &= \frac{1}{2} \cos(\omega t - kut) \end{aligned}$$

我们得到

$$\langle F_u \rangle = n_u \frac{e^2 E_1^2 k}{2m} \frac{1}{(\omega - ku)^2} [\sin(\omega t - kut) - (\omega - ku) t \cos(\omega t - kut)] \quad (7-94)$$

于是, 对每个束的做功速率为

$$\langle dW_k / dt \rangle_u = \langle F_u \rangle u \quad (7-95)$$

通过对所有束求和, 求出对粒子所做的总功

$$\sum_u \langle F_u \rangle u = \int f_0(u) \frac{\langle F_u \rangle}{n_u} u du = n_0 \int \hat{f}_0(u) \frac{\langle F_u \rangle}{n_u} u du \quad (7-96)$$

由最后三个方程和 ω_p 的定义得到

$$\left\langle \frac{dW_k}{dt} \right\rangle = \frac{E_1^2}{8\pi \omega_p^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u} f_0(u) du \times \left[k \frac{\sin(\omega t - kut) - (\omega - ku) t \cos(\omega t - kut)}{(\omega - ku)^2} \right] \quad (7-97)$$

或

$$\left\langle \frac{dW_k}{dt} \right\rangle = \frac{E_1^2}{8\pi \omega_p^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u} f_0(u) \frac{d}{du} \left[\frac{\sin(\omega - ku)t}{\omega - ku} \right] du \quad (7-98)$$

令这个式子等于波能量密度 W_w 的损失率. 波能量由两部分组成, 第一部分是静电场的能量密度

$$\langle W_E \rangle = \langle E^2 \rangle / 8\pi = E_1^2 / 16\pi \quad (7-99)$$

第二部分是粒子振荡的动能. 如果我们再次把等离子体分成束, 方程 (7-84) 给出每个束的能量

$$\langle \Delta W_k \rangle = \frac{1}{4} \frac{n_u}{m} \frac{e^2 E_1^2}{(\omega - ku)^2} \left[1 + \frac{2ku}{\omega - ku} \right] \quad (7-100)$$

在推导这个结果中, 我们没有用正确的初始条件, 虽然这个条件对共振粒子是重要的; 然而, 后者对波总能量的贡献非常小. 对束求和, 得到

$$\langle \Delta W_k \rangle = \frac{1}{4} \frac{e^2 E_1^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0(u)}{(\omega - ku)^2} \left[1 + \frac{2ku}{\omega - ku} \right] du \quad (7-101)$$

在 $\omega/k \gg v_{th}$ 的极限下 (这样做是为了和我们以前的结果相比较), 能忽略括号中的第二项. 由泊松方程可求出色散关系

$$kE_1 \cos(kx - \omega t) = -4\pi e \sum_u n_1 \quad (7-102)$$

运用 n_1 的方程 (7-79), 我们得到

$$1 = \frac{4\pi e^2}{m} \sum_u \frac{n_u}{(\omega - ku)^2} = \frac{4\pi e^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0(u) du}{(\omega - ku)^2} \quad (7-103)$$

将这个方程与方程 (7-101) 比较, 我们求出

$$\langle \Delta W_k \rangle = \frac{1}{4} \frac{e^2 E_1^2}{m} \frac{m}{4\pi e^2} = \frac{E_1^2}{16\pi} = \langle W_E \rangle \quad (7-104)$$

这样

$$W_w = \frac{E_1^2}{8\pi} \quad (7-105)$$

W_w 的变化速率由方程 (7-98) 的负值给出

$$\frac{dW_w}{dt} = -W_w \omega_p^2 \int_{-\infty}^{\infty} u \hat{f}_0(u) \frac{d}{du} \left[\frac{\sin(\omega - ku)t}{\omega - ku} \right] du \quad (7-106)$$

由分部积分得出

$$\frac{dW_w}{dt} = -W_w \omega_p^2 \left\{ \left[u \hat{f}_0(u) \frac{\sin(\omega - ku)t}{\omega - ku} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{du} (u \hat{f}_0) \frac{\sin(\omega - ku)t}{\omega - ku} du \right\}$$

对于性状良好的函数 $\hat{f}_0(u)$, 积分过的部分为零, 我们得到

$$\frac{dW_w}{dt} = W_w \frac{\omega}{k} \omega_p^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}'_0(u) \left[\frac{\sin(\omega - ku)t}{\omega - ku} \right] du \quad (7-107)$$

其中已经令 u 等于 ω/k (一个常数), 因为只有很接近 ω/k 的速度才对积分有贡献. 事实上, 对于足够大的 t , 方括号能由 δ 函数来近似

$$\delta\left(u - \frac{\omega}{k}\right) = \frac{k}{\pi} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin(\omega - ku)t}{\omega - ku} \right] \quad (7-108)$$

这样

$$\frac{dW_w}{dt} = W_w \omega_p^2 \frac{\pi}{k} \frac{\omega}{k} \hat{f}'_0\left(\frac{\omega}{k}\right) = W_w \pi \omega \frac{\omega_p^2}{k^2} \hat{f}'_0\left(\frac{\omega}{k}\right) \quad (7-109)$$

由于 $\text{Im}(\omega)$ 是 E_1 的增长率, W_w 正比于 E_1^2 , 必定有

$$\frac{dW_w}{dt} = 2 [\text{Im}(\omega)] W_w \quad (7-110)$$

因而

$$\text{Im}(\omega) = \frac{\pi}{2} \omega \frac{\omega_p^2}{k^2} \hat{f}_0' \left(\frac{\omega}{k} \right) \quad (7-111)$$

对于 $\omega = \omega_p$, 就和前面的结果方程 (7-67) 一致.

7.6.1 共振粒子

现在, 我们能够精确地看到哪些粒子是对线性朗道阻尼做贡献的共振粒子. 图 7-25 画出了方程 (7-107) 被积函数中乘 $\hat{f}_0'(u)$ 的那个因子 (即 $\frac{\sin(\omega - ku)t}{\omega - ku}$) 的图. 我们看到最大的贡献来自 $|\omega - ku| < \pi/t$ 或 $|v - v_\phi| < \pi/k = \lambda/2$ 的那些粒子, 即在初始分布中, 那些相对于波来说尚未传播半波长的粒子. 像我们所期望的那样, 中间峰值的宽度随时间变窄. 在图 7-25 所示的“衍射花样”中, 副峰来自那些已进入波势的邻近半波长的粒子. 这些粒子在相空间迅速地散开, 所以平均来说, 它们很少贡献; 初始分布被遗忘. 注意到中间峰的宽度与初始波振幅无关, 因此, 共振粒子可以包括俘获和未俘获粒子. 这个现象与粒子俘获无关.

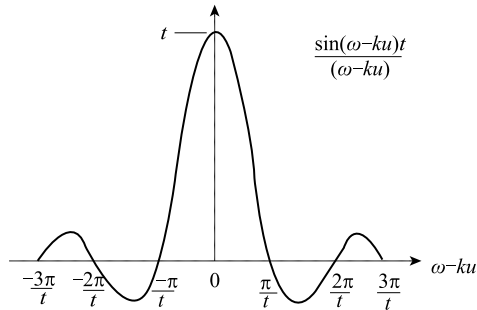


图 7-25 一个描述不同速度群对朗道阻尼相对贡献的函数

7.6.2 两种似乎矛盾说法的消除

图 7-25 表明方程 (7-107) 的被积函数是 $\omega - ku$ 的偶函数, 所以, 传播比波快和比波慢的粒子都增加朗道阻尼. 这就是我们在图 7-24 得到的物理图像. 另外, 图 7-25 曲线的斜率 (代表方程 (7-106) 被积函数中的因子) 是 $\omega - ku$ 的奇函数; 从这点应当得到以下推断: 比波传播快的那些粒子给波能量, 而比波传播慢的那些粒子从波那里取得能量. 这两种描述法的区别由分部积分引起. 两种描述法都是正确的, 选择哪一种方法取决于人们希望在被积函数中有 $\hat{f}_0'(u)$

还是有 $\hat{f}'_0(u)$.

第二个似乎矛盾的说法涉及伽利略 (Galilean) 不变性问题. 如果我们采用这种观点, 即阻尼要求比波传播快的粒子少于比波传播慢的粒子, 只要人们处于等离子体是静止的坐标系, 则不出现什么问题. 然而, 如果人们进入另一个以速度 V 运动的坐标系 (图 7-26), 看来比波快的粒子要多于比波慢的粒子, 并且人们会期望波会增长而不是衰减. 通过在方程 (7-100) 中重新插入我们忽略的第二项能除去这个矛盾. 正如在第 7.5.1 节中示出的那样, 这一项能使 $\langle \Delta W_k \rangle$ 变负. 事实上, 在图 7-26 所示的坐标系中, 方程 (7-100) 中的第二项不能忽略, $\langle \Delta W_k \rangle$ 是负的, 波好像有负的能量 (即静漂移麦克斯韦分布的能量多于有振荡时的能量). 波“增长” (但把能量加到负能量波上), 使它的振幅减少.

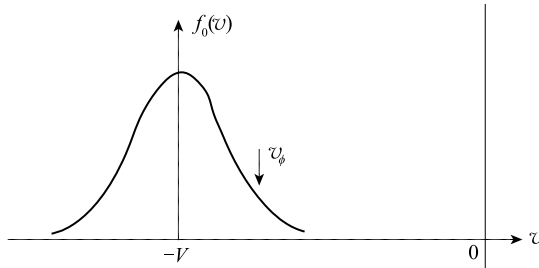


图 7-26 从运动坐标系看到的麦克斯韦分布看来具有不稳定斜率的区域

7.7 BGK 和范坎彭模

我们已经看到朗道阻尼与这样的要求直接相联系, 即 $f_0(u)$ 在空间中开始是均匀的. 另外, 如果沿着粒子轨道 $f(v, t=0)$ 开始是常数, 则产生无阻尼电子波. 从图 7-24 很容易看到, 如果等离子体开始是这样准备, 使得沿每个轨道的密度是常数, 则平均来说, 粒子既不得到能量也不损失能量. 这样的波称为 BGK 模, 因为正是伯恩斯坦 (I. B. Bernstein)、格林 (J. M. Greene) 和克鲁斯卡 (M. D. Kruskal) 首先证明, 任意 ω, k , 振幅和波形的无阻尼波是可能的. 调节 $f(v, t=0)$ 以形成 BGK 模的决定性参量是俘获粒子和未俘获粒子的相对数目. 如果我们取 BGK 模的小振幅极限, 就得到一种模, 称为范坎彭 (Van Kampen) 模. 在这种极限下, 只俘获 $v=v_\phi$ 的粒子. 通过在 $f(v, t=0)$ 上增加一个正比于 $\delta(v-v_\phi)$ 的项, 我们能改变俘获粒子数. 图 7-24 的研究将证明, 沿着 $v=v_\phi$ 线加入的粒子将不引起阻尼——稍晚一些时间后, 得到能量的粒子恰好与损失能量的粒子一样多. 事实上, 通过在其他 v_ϕ 值选择具有 δ 函数的分布, 能得到任意 v_ϕ 的无阻尼范坎彭模. 然而, 这样奇异的初始条件是不实际的. 为了得到一个平滑变化的 $f(v, t=0)$, 我们必须对具有 v_ϕ 分布的范坎彭模求和. 虽然, 每

个模是无阻尼的，总的扰动将显示出朗道阻尼，因为不同的模彼此之间有相位失调。

7.8 实验证实

虽然无碰撞阻尼的朗道推导是相当简练的，但直到道森 (J. M. Dawson) 给出较长的直观的推导之前 (这个推导在第 7.6 节中示出)，人们并不清楚它与一个物理上能观察到的现象相联系。甚至在那时，对实验室能否建立适当的条件还存在疑问。在 1965 年，通过马姆伯格 (Malmberg) 和沃顿 (Wharton) 的实验，消除了这些疑问。它们用探针沿着无碰撞等离子体柱激发和探测等离子体波。波的相位和振幅 (作为距离的函数) 由干涉仪得到。阻尼波空间变化的一个轨迹在图 7-27 示出。由于在实验中 ω 是实数，而 k 是复数，我们在方程 (7-70) 得到的结果不能和实验数据比较。对于实数 ω 又作了 $\text{Im}(k)/\text{Re}(k)$ 的计算。这个比值也包含了与麦克斯韦分布中共振电子数目成比例的因子 $\exp(-v_p^2/v_{th}^2)$ ，因此， $\text{Im}(k)/\text{Re}(k)$ 的对数应当正比于 $(v_p/v_{th})^2$ 。图 7-28 显示了测量和理论曲线之间的一致。

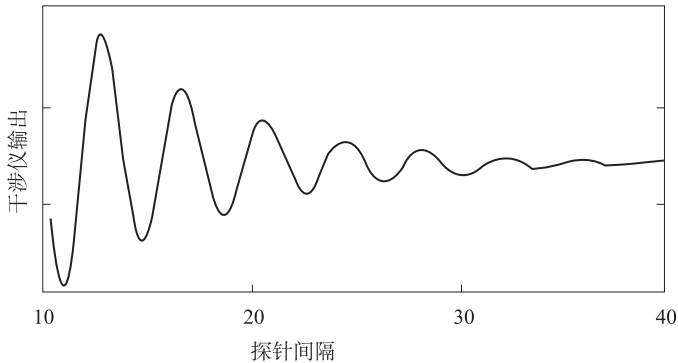


图 7-27 干涉仪的轨迹

说明了在阻尼等离子体波中的扰动密度的图形 [引自 J. H. Malmberg and C. B. Wharton, Phys. Rev. Letters, **17**, 175 (1966)]

德弗勒 (Derfler) 和西蒙恩 (Simonen) 在平面几何情形做了一个相似的实验，使得 $\text{Re}(\omega)$ 的结果和方程 (7-64) 相比较。图 7-29 表示在不同频率下他们所测量的 $\text{Re}(k)$ 和 $\text{Im}(k)$ 值。虚线代表方程 (7-64) (与图 4-5 中画出的曲线是相同的)。由于展开式 (7-59) 中高阶项的影响，实验点偏离虚线。然而，从方程 (7-54) 计算的理论曲线和实验数据吻合得很好。

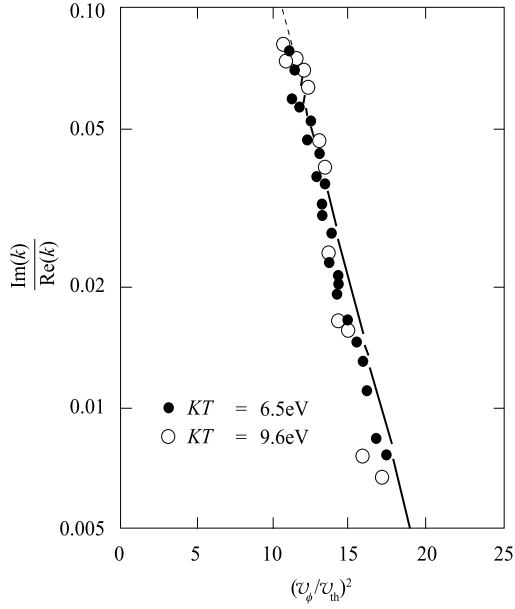


图 7-28 在马姆伯格-沃顿实验中朗道阻尼的证实 (同上述引用文)

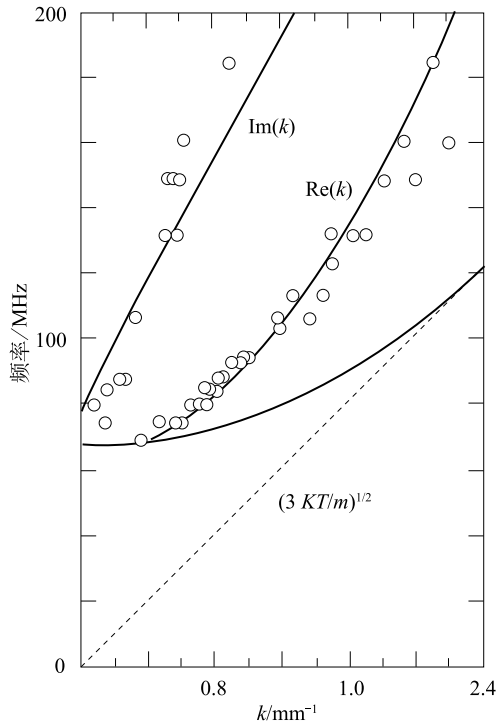


图 7-29 在平面几何情形, 等离子体波色散关系的实验测量
 [引自 H. Derfler and T. Simonen, J. Appl. Phys. **38**, 5018 (1967)]

7.9 离子朗道阻尼

电子并不是唯一可能的共振粒子. 如果波有一个慢到足以和离子热速度相匹配的相速度, 就能发生离子朗道阻尼. 例如, 离子声波受到了朗道阻尼的极大影响. 记得由方程 (4-41) 给出的离子波色散关系是

$$\frac{\omega}{k} = v_s = \left(\frac{KT_e + \gamma_i KT_i}{M} \right)^{1/2} \quad (7-112)$$

如果 $T_e \leq T_i$, 相速度位于 $f_{0i}(v)$ 有负斜率的区域, 它在图 7-30(a) 中示出. 因此, 如果 $T_e \leq T_i$, 离子波严重地被朗道阻尼. 仅当 $T_e \gg T_i$ 时 (图 7-30 (b)), 离子波才能观察到, 所以相速度位于离子速度分布很远的尾巴中. 亚历克塞夫 (Alexeff)、琼斯 (Jones) 和蒙哥马利 (Montgomery) 使用了一个巧妙的方法以受控方式引入朗道阻尼. 在 $T_e \gg T_i$ 的重离子等离子体 (如氙) 中产生了一个弱阻尼离子波, 然后加入少量轻原子 (氦). 由于氦同氙有大致相同的温度, 但其质量比氙小得多, 它的分布函数就更宽, 如图 7-30 (b) 中虚线所示. 于是, 共振氦离子引起波阻尼.

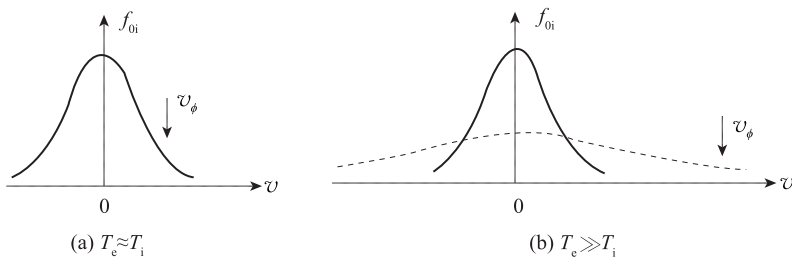


图 7-30 离子声波朗道阻尼的解释

对于 $T_e \approx T_i$, 相速度恰好位于离子分布内; 对于 $T_e \gg T_i$, 几乎没有离子以相速度运动. 加入一种轻离子 (虚线) 增加了朗道阻尼

习题

7-1 一个具有固定离子的无限、均匀等离子体, 其电子分布函数由两部分组成. ①一个静止在实验室中的“等离子体”电子的麦克斯韦分布, 它具有密度 n_p 和温度 T_p ; ②中心在 $\mathbf{v} = V\mathbf{x}$ 的“束”电子的麦克斯韦分布, “束”电子具有密度 n_b 和温度 T_b (图 7-31). 如果 n_b 是无穷小, 在 x 方向传播的等离子体振荡被朗道阻尼; 如果 n_b 大, 将存在双流不稳定性. 令总分布函数的斜率等于零, 能求出不稳定性到来的临界 n_b 值. 为了使代数式简单, 我们能找出如下一种近似回答:

(a) 用缩写 $v = v_x$, $a^2 = 2KT_p/m$, $b^2 = 2KT_b/m$, 写出 $f_p(v)$ 和 $f_b(v)$ 的表

达式.

(b) 假定, 相速度 v_ϕ 将等于 $f_b(v)$ 具有最大正斜率所对应的 v 值, 求出 v_ϕ 和 $f'_b(v_\phi)$.

(c) 求出 $f'_b(v)$ 并令 $f'_p(v) + f'_b(v) = 0$.

(d) 对于 $V \gg b$, 证明临界束密度近似由下式给出

$$\frac{n_b}{n_p} = (2e)^{1/2} \frac{T_b V}{T_p a} \exp(-V^2/a^2)$$

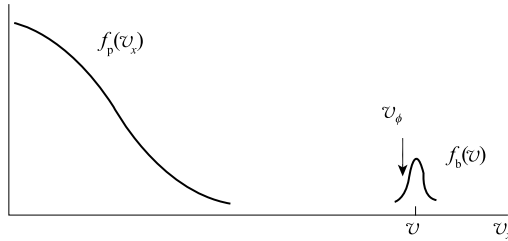


图 7-31 在束-等离子体相互作用中, 等离子体和束电子的未扰动分布函数 $f_p(v_x)$ 和 $f_b(v_x)$

第 8 章 非线性效应

8.1 引言

到现在为止，我们几乎将全部注意力集中到线性现象，即集中到用这样一些方程就可以描述的现象，在这些方程中，因变量不出现高于二阶的项。例如，在第 4 章中波的整个处理取决于线性化过程，在那里高阶项被看成小量并被忽略。这个过程使我们一次只考虑一个傅里叶分量，通过加上适当分布的傅里叶分量能够简单地很有把握地处理任何非正弦波。只要波振幅足够小，以至于线性方程是正确的，就能这样做。

但不幸的是，在许多实验中波被观察的时刻，它们不再能用线性理论来描述。例如，考虑漂移波的情况，因为它们是不稳定的，按照线性理论，它们的振幅会指数式地增加。这个增长周期通常不能被观察到（因为人们经常不知道什么时刻开始观察），相反，仅在波已增长到一个稳定的大振幅以后才能观察到波。波不再增长这个事实指的是线性理论不再正确，而某些**非线性效应**正限制着振幅的增长。已经证明理论上解释这种基本观察结果是一个十分困难的问题，因为在饱和时观察到的振幅是相当小的。

当波的振幅变大时，它能经历很多变化。它能改变它的波形——比方说，从正弦波变到倾斜的三角形波形。这和下面的说法是相同的：即产生了其他频率（或波数）的傅里叶分量。最后，波能“打碎”（类似于海滩上的海浪），并把波能量转换成粒子的热能。一个大的波能在它的势阱中俘获粒子，因此改变着它在其中传播的媒质的性质。在讨论非线性朗道阻尼中，我们已经遇到了这种效应。如果如此强烈地激发等离子体，以至于出现连续频谱，它就处于**湍流态**。像普通流体动力学的情况一样，这种状态必须统计地描述。等离子体湍流的重要结果是**反常电阻率**，在这种情况下，电子和无规则电场涨落的碰撞（不是和离子碰撞）而使它变慢。这个效应被用于欧姆加热等离子体（第 5.6.3 节）到正常电阻率达不到的高温。

能把非线性现象分成三种主要的类型：

(1) **本质上非线性化的问题**。例如，在完全电离气体中的扩散本质上为一非线性问题（5.8 节），因为扩散系数是随密度变化的。在 6.1 节中，我们已经看

到磁流体平衡问题是非线性的。在 8.2 节中，我们将给出另一例子——重要的等离子体鞘层课题。

(2) 波-粒子相互作用。粒子俘获 (7.5 节) 是这种类型的一个例子，并且能导致非线性阻尼。一个经典的例子是准线性效应，在那里波使等离子体平衡发生变化。考虑具有电子束的等离子体 (图 8-1)。由于分布函数具有 df_0/dv 为正的 区域，系统有逆朗道阻尼，在正斜率区域中，具有 v_ϕ 的等离子体振荡是不稳定的 (方程 (7-67))。共振电子首先受到了波-粒子相互作用的影响，并且它们的分布函数将因波电场而改变。当 $f_c(v)$ 由于波的影响而变平时，就使这些波稳定，这在图 8-1 中由虚线示出，所以，新的平衡分布不再有正斜率。这是一个典型的准线性效应。另一种波-粒子相互作用的例子——等离子体回波，将在 8.6 节中给出。

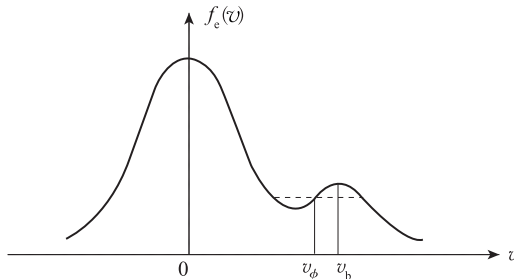


图 8-1 一种双驼峰的不稳定电子分布

(3) 波-波相互作用。甚至在忽略单个粒子影响的流体的描述中，波彼此之间也能相互作用。单一的波由于首先产生了它的基频谐波而衰变。然后，这些谐波彼此相互作用并与原始波相互作用而形成具有拍频的其他波。拍波又能增长到如此之大，以至于它们能相互作用，并且形成更加多的拍频，直到频谱变成连续时为止。讨论湍流谱中的能量流动方向是有意义的。在流体动力学中，长波模衰变成短波模，因为大涡流包含更多能量，并且仅由于分散成小涡流 (每个具有较少能量) 才能衰变。然后，最小的涡流由于黏性阻尼而把它们的动能转化成热。在等离子体中，通常发生相反的情况。短波模趋向于聚结成能量较少的长波模。这是因为电场能 $E^2/8\pi$ 具有 $k^2\phi^2/8\pi$ 的量级，因此如果 $e\phi$ 是固定的 (通常由 kT_e 固定)，小 k ，长 λ 模具有较小的能量。所以，由于大 k 模的不稳定性，大 k 模的能量将会转移到小 k 模，并且必须找出某些机制以耗散能量。在大 k 时不出现发生朗道阻尼这样的问题，对于沿 B_0 的运动，非线性“调制的”不稳定性能使小 k 模的能量与离子耦合，并加热离子。对于垂直于 B_0 的运动，最大的涡流将具有与等离子体半径同量级的波长，而且由于对流引起等离子体到壁的损失。

虽然在波和不稳定性的线性理论中仍然留下了有待解决的问题，等离子体研究的主流已经转到几乎不熟悉的非线性现象领域。以下几节的例子将给出对某些效应的想法，这些效应已经在理论和实验上研究过。

8.2 鞘层

8.2.1 鞘层的必然性

在所有的实际等离子体装置中，等离子体包含在一个有限大小的真空室中。在壁处的等离子体会发生什么现象呢？为简单起见，让我们把注意力集中到没有磁场的一维模型（图 8-2）。假定等离子体内没有明显的电场，于是我们能假定那里的势 ϕ 等于零。当离子和电子碰撞时，它们复合并且损失掉。由于电子的热速度远大于离子的热速度，它们损失更快，就在等离子体中留下了净的正电荷。于是，相对于壁来说，等离子体必须具有正电势，即壁势 ϕ_w 是负的。这个势不能在整个等离子体中分配，因为德拜屏蔽（1.4 节）将把势的变化限制到厚度为几个德拜长度量级的一个层上。这个层称为鞘层，它必定存在于所有与等离子体相接触的冷壁上。鞘层的作用是形成势垒，使得较易迁移的属种（通常为电子）受到了静电限制。势垒的高度会自身调节，使得有足够能量越过势垒到达壁的电子通量恰好等于达到壁的正离子通量。

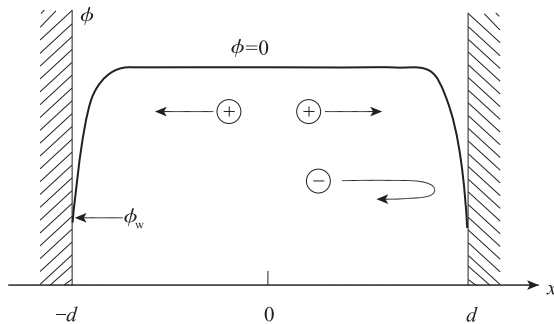


图 8-2 等离子体势在接近壁处形成鞘层，所以电子被反射
库仑势垒 $e\phi_w$ 会自身调节，使得每秒有相同数目的离子和电子到达壁

8.2.2 平面的鞘层方程

在 1.4 节中，我们把泊松方程线性化，导出了德拜长度。为了研究鞘层中 $\phi(x)$ 的确切性状，我们必须处理非线性问题，将发现并不总是存在解。图 8-3 表示接近一个壁的情况。在平面 $x=0$ 处，设想离子以漂移速度 u_0 从等离子体主体进入到鞘层区域。考虑到从离子产生区域（在那里，离子由电离产生）到壁的正离子损失，就必须要有这种漂移。为简单起见，我们假定 $T_i=0$ ，所以，所有离子在 $x=0$ 有速度 u_0 。我们考虑在无碰撞鞘层区域中的稳态问题。假定势 ϕ 随 x 单调下降，实际上 ϕ 会有空间（的）振荡，于是或许会存在处于稳态的俘获粒子。实际上，这种情况并不发生，因为耗散过程倾向于破坏任何有这样高度组织的状态。

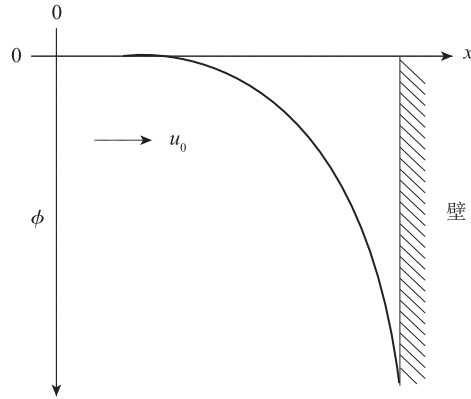


图 8-3 平面鞘层中的势 ϕ
假定冷离子以均匀速度 u_0 进入鞘层

如果 $u(x)$ 是离子速度，能量守恒要求

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mu_0^2 - e\phi(x) \quad (8-1)$$

$$u = \left(u_0^2 - \frac{2e\phi}{M} \right)^{1/2} \quad (8-2)$$

于是，离子连续性方程给出了离子密度 n_i （用主体等离子体中的密度 n_0 表示）

$$n_0 u_0 = n_i(x) u(x) \quad (8-3)$$

$$n_i(x) = n_0 \left(1 - \frac{2e\phi}{Mu_0^2} \right)^{-1/2} \quad (8-4)$$

在稳态中，电子将严格地遵循玻尔兹曼关系

$$n_e(x) = n_0 \exp(e\phi/KT_e) \quad (8-5)$$

于是泊松方程是

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 4\pi e(n_e - n_i) = 4\pi en_0 \left[\exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right) - \left(1 - \frac{2e\phi}{Mu_0^2}\right)^{-1/2} \right] \quad (8-6)$$

如果我们用下面的符号变换来简化，就能更清楚地看出这个方程的结构

$$\chi \equiv -\frac{e\phi}{KT_e}, \quad \xi \equiv \frac{x}{\lambda_D} = x \left(\frac{4\pi n_0 e^2}{KT_e} \right)^{1/2}, \quad \mathfrak{M} \equiv \frac{u_0}{(KT_e/M)^{1/2}} \quad (8-7)$$

于是方程 (8-6) 变成

$$\chi'' = \left[1 + \frac{2\chi}{\mathfrak{M}^2} \right]^{-1/2} - e^{-\chi} \quad (8-8)$$

其中，“撇”表示 $d/d\xi$ 。这是平面鞘层的非线性方程，而且仅当 \mathfrak{M} 足够大时，它才有一个可以接受的解。对符号 \mathfrak{M} 的解释将在下面有关激波的一节搞清楚。

8.2.3 玻姆鞘层判据

用 χ' 乘方程 (8-8) 的两边后，我们就能积分该式：

$$\int_0^\xi \chi' \chi'' d\xi_1 = \int_0^\xi \left[1 + \frac{2\chi}{\mathfrak{M}^2} \right]^{-1/2} \chi' d\xi_1 - \int_0^\xi e^{-\chi} \chi' d\xi_1 \quad (8-9)$$

其中, ξ_1 是一个虚变量. 由于在 $\xi=0$ 时, $\chi=0$, 积分不难得到, 它为

$$\frac{1}{2} (\chi'^2 - \chi_0'^2) = \mathfrak{M}^2 \left[\left(1 + \frac{2\chi}{\mathfrak{M}^2} \right)^{1/2} - 1 \right] + e^{-\chi} - 1 \quad (8-10)$$

如果在等离子体中 $E=0$, 我们必须令 $\xi=0$ 处的 $\chi'_0 = 0$. 求出 χ 的第二个积分必须用数值求解; 但是不管答案怎么样, 对所有 χ , 方程 (8-10) 的右边必定是正值. 特别对 $\chi \ll 1$, 我们能把右边项展开成泰勒级数

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^2 \left[1 + \frac{\chi}{\mathfrak{M}^2} - \frac{1}{2} \frac{\chi^2}{\mathfrak{M}^4} + \dots - 1 \right] + 1 - \chi + \frac{1}{2} \chi^2 + \dots - 1 > 0 \\ \frac{1}{2} \chi^2 \left(-\frac{1}{\mathfrak{M}^2} + 1 \right) > 0 \end{aligned}$$

$$\mathfrak{M}^2 > 1 \quad \text{或} \quad u_0 > (KT_e/M)^{1/2} \quad (8-11)$$

这个不等式以玻姆鞘层判据而知名. 它说明离子必定以大于声速 v_s 的速度进入鞘层区域. 为了使离子产生这个有向速度 u_0 , 在等离子体中必须有一个有限的电场. 所以, 在 $\xi=0$ 处, $\chi'=0$ 的假定仅是一种近似. 由于鞘层区的大小通常远小于加速离子的等离子体主体区域的大小, 所以作这个近似是可能的. u_0 值有某些任意性, 它取决于我们选择什么地方作为等离子体和鞘层之间的边界 $x=0$. 当然, 离子通量 $n_0 u_0$ 是由离子产生速率来确定的, 因此, 如果 u_0 变化, 在 $x=0$ 处的 n_0 值将与 u_0 成反比. 如果离子具有有限的温度, 临界漂移速度 u_0 稍微降低.

从离子和电子密度对 χ 的图 (图 8-4) 很容易看到玻姆判据的物理解释. 按照玻尔兹曼关系, 电子密度 n_e 随 χ 指数下降. 由于离子受鞘层势加速, 它的密度也下降. 如果离子开始能量大, 因为鞘层场引起了相对小的离子速度变化, $n_i(\chi)$ 下降缓慢. 如果离子开始能量小, $n_i(\chi)$ 下降迅速, 并能低于 n_e 曲线. 在那种情况下, 在接近 $\chi=0$ 处, $n_e - n_i$ 是正的; 方程 (8-6) 告诉我们, $\phi(x)$ 必定向上弯曲, 就与鞘层必须排斥电子的要求相反. 为了使这种情况不发生, 在 $\chi=0$ 处, $n_i(\chi)$ 的斜率必须比 $n_e(\chi)$ 的斜率小 (指绝对值); 这个条件和 $\mathfrak{M}^2 > 1$ 条件是相同的.

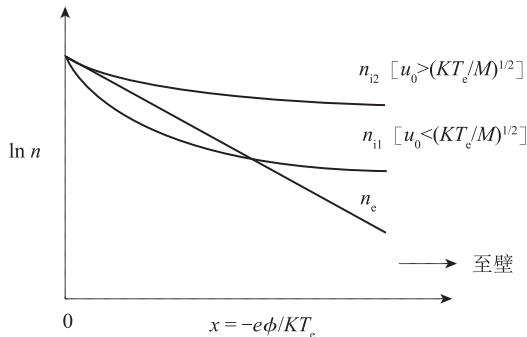


图 8-4 离子和电子密度 (对数坐标) 随鞘层中的规范化势 χ 的变化画出了在两种情况: u_0 大于临界速度和 u_0 小于临界速度时的离子密度

8.2.4 蔡尔德-朗缪尔定律

由于 $n_e(\chi)$ 随 χ 指数下降, 所以在靠近壁 (或任何负电极) 处的大 χ 区域中, 能忽略电子密度. 于是泊松方程近似为

$$\chi' \approx \left(1 + \frac{2\chi}{\mathfrak{M}^2}\right)^{-1/2} \approx \frac{\mathfrak{M}}{(2\chi)^{1/2}} \quad (8-12)$$

用 χ' 乘这个式子并从 $\xi_1 = \xi_s$ 积分到 $\xi_1 = \xi$, 我们得到

$$\frac{1}{2} (\chi'^2 - \chi_s'^2) = \sqrt{2}\mathfrak{M} (\chi^{1/2} - \chi_s^{1/2}) \quad (8-13)$$

其中, ξ_s 就是我们开始忽略 n_e 的位置. 我们能够再确定 χ 的零点, 使得在 $\xi = \xi_s$ 处 $\chi_s = 0$. 我们也将忽略 χ_s , 因为在 $n_e = 0$ 区域, 能够指望势曲线的斜率比有限 n_e 区域的斜率更陡峭. 于是方程 (8-13) 变成

$$\begin{aligned} \chi'^2 &= 2^{3/2}\mathfrak{M}\chi^{1/2} \\ \chi' &= 2^{3/4}\mathfrak{M}^{1/2}\chi^{1/4} \end{aligned} \quad (8-14)$$

或者

$$d\chi/\chi^{1/4} = 2^{3/4}\mathfrak{M}^{1/2}d\xi \quad (8-15)$$

从 $\xi = \xi_s$ 到 $\xi = \xi_s + d = \xi_{\text{wall}}$ 积分, 得到

$$\frac{4}{3}\chi_w^{3/4} = 2^{3/4}\mathfrak{M}^{1/2}d \quad (8-16)$$

或者

$$\mathfrak{M} = \frac{4\sqrt{2}\chi_w^{3/2}}{9d^2} \quad (8-17)$$

回到变量 u_0 和 ϕ , 并注意进入壁的离子电流是 $J = en_0u_0$, 我们就求出

$$J = \frac{4}{9} \left(\frac{2e}{M}\right)^{1/2} \frac{|\phi_w|^{3/2}}{4\pi d^2} \quad (8-18)$$

它恰好就是在平面二极管中有名的被空间电荷限制的电流 (space-charge-limited current) 的蔡尔德 (Child) -朗缪尔定律.

在等离子体-壁系统的势变化可分成三部分. 最接近壁处是一个无电子区域, 它的厚度 d 由方程 (8-18) 给出. 这里 J 由离子产生率决定, ϕ_w 是由电子通量和离子通量相等来决定. 接下去就来到 n_e 是可观的区域, 如 1.4 节中所表明的那样, 这个区域具有德拜长度的大小. 最后是一个具有更大尺度的区域——“预鞘”区域, 在这个区域中, 离子由势降 $\phi \geq \frac{1}{2}KT_e/e$ 加速到所需的速度 u_0 . “预鞘”的大小取决于实验, 可以用等离子体半径、碰撞平均自由程或者电离机制来估计. 当然, 势分布平滑变化, 分成三个区域仅为了方便, 而且由于尺度的悬殊, 有可能这样分. 在早期的气体放电中, 鞘层能作为暗层被观察到, 在那里,

不存在能激发原子使之发射（光）的电子。后来，用平行于壁射击的细电子束的静电偏转测出了电势的变化。

8.3 离子声激波

当一个喷气式飞机飞行比声速快时，它产生激波。因为波小并正在增长，不存在周期，激波基本上是一种非线性现象。喷气式飞机快于空气中的波速，因此，在大激波碰撞未扰动介质前，它不能由前驱信号来“预报”。在流体动力学激波中，碰撞是起支配作用的。甚至在没有碰撞时，激波也存在于等离子体中。一个磁激波，“弓形激波”是由地球产生的，在它扫过行星际等离子体的同时，沿着偶极子磁场方向拉拽。我们将讨论一个较简单的例子：从大振幅离子波发展成的无碰撞一维激波。

8.3.1 萨格捷夫势

图 8-5 表示一个离子声激波的理想势分布。现在我们将给出具有这种形状的原因。这个波以速度 u_0 向左边传播。如果我们来到随波运动的坐标系，函数 $\phi(x)$ 将是与时间无关的常数，而且，我们将看到一个等离子体流从左边以速度 u_0 撞击着波。为简单起见，令 T_i 是零，因此所有离子以同一个速度 u_0 入射，并且令电子是麦克斯韦分布。由于激波远慢于电子热速度，麦克斯韦分布的中心速度漂移可以忽略。从能量守恒，激波中的离子速度为

$$u = \left(u_0^2 - \frac{2e\phi}{M} \right)^{1/2} \quad (8-19)$$

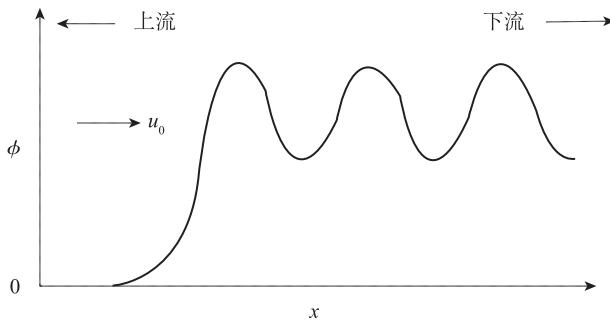


图 8-5 在离子声激波中，典型的势分布

这个波向左运动，因此在波的坐标系中，离子流从左边以速度 u_0 进入波中

如果 n_0 是未扰动等离子体的密度，激波中的离子密度是

$$n_i = \frac{n_0 u_0}{u} = n_0 \left(1 - \frac{2e\phi}{Mu_0^2} \right)^{-1/2} \quad (8-20)$$

电子密度由玻尔兹曼关系给出。于是，泊松方程给出

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 4\pi e(n_e - n_i) = 4\pi en_0 \left[\exp\left(\frac{e\phi}{KT_e}\right) - \left(1 - \frac{2e\phi}{Mu_0^2}\right)^{-1/2} \right] \quad (8-21)$$

当然，这个方程和鞘层的方程 (8-6) 是相同的。激波只不过是一个通过等离子体运动的鞘层。现在，我们引入无量纲变量

$$\chi \equiv +\frac{e\phi}{KT_e}, \quad \xi \equiv \frac{x}{\lambda_D}, \quad \mathfrak{M} \equiv \frac{u_0}{(KT_e/M)^{1/2}} \quad (8-22)$$

注意，我们已经在 χ 的定义中改变了符号，以便在这个问题中与鞘层问题一样，保持 χ 为正值。量 \mathfrak{M} 称为激波的马赫数 (Mach number)。现在能把方程 (8-21) 写成

$$\frac{d^2\chi}{d\xi^2} = e^\chi - \left[1 - \frac{2\chi}{\mathfrak{M}^2} \right]^{-1/2} \equiv -\frac{dV(\chi)}{d\chi} \quad (8-23)$$

这个方程和鞘层方程 (8-8) 的差别仅由于 χ 符号的变化。

塞格捷夫 (R. Z. Sagdeev) 用势阱中的振子模拟，搞清了方程 (8-23) 解的性状。受力为 $-m dV(x)/dx$ 的振子的位移 x 由下式给出

$$d^2x/dt^2 = -dV/dx \quad (8-24)$$

如果方程 (8-23) 的右边定义为 $-dV/d\chi$ ，这个方程就和振子的方程相同，方程中的势 χ 起了 x 的作用，而用 $d/d\xi$ 代替着 d/dt 。准势 $V(\chi)$ 有时称作塞格捷夫 (Sagdeev) 势。将方程 (8-23) 积分，用 $\chi=0$ 处的边界条件 $V(\chi) = 0$ 能求出函数 $V(\chi)$ ：

$$V(\chi) = 1 - e^\chi + \mathfrak{M}^2 \left[1 - \left(1 - \frac{2\chi}{\mathfrak{M}^2} \right)^{1/2} \right] \quad (8-25)$$

对于位于一定区域的 \mathfrak{M} ，这个函数具有图 8-6 示出的形状。如果这是一个真实的阱，从左边进入的粒子将来到阱的右边 ($x > 0$)，然后反射并回到 $x=0$ ，构成一个单次返回。同样地，在我们模拟中的一个准粒子将单次漂移到正 χ 并回到 $\chi=0$ ，如图 8-7 所示。这样的脉冲称为孤立子 (soliton)。它是一种以速度 u_0 向左 (图 8-7) 传播的势和密度扰动。

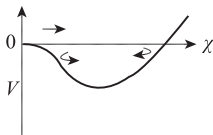


图 8-6 塞格捷夫势 $V(\chi)$

上面的箭头是描述一个孤立子的准粒子轨迹：它在右边反射并返回。下面的箭头示出了损失了能量并在势阱中被俘获的准粒子的运动。来回的弹跳描述激波波阵面后的振荡

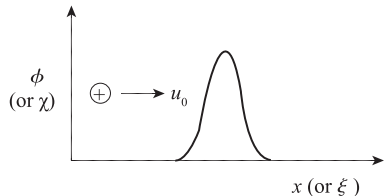


图 8-7 向左运动的一个孤立子的势

现在，如果一个粒子在势阱那段时间受到了能量损失，它将不回到 $x=0$ ，而将在某个正 x 值附近 (随时间) 振荡。同样，一个小的耗散使激波势在某个正 ϕ

值附近（在空间中）振荡。这就正好是图 8-5 所描述的性状。实际上，对于这个问题，耗散是不必要的；离子从激波波阵面的反射具有相同的效应。为了理解这一点，设想离子在能量上有一个小的热扩展，并设想激波阵面的高度 $e\phi$ 恰好大到足够使某些离子反射到左边，而其余离子则越过势垒而到右边。被反射离子引起在激波波阵面左边上游区域（图 8-5）离子密度的增加。这就意味着量

$$\chi' = \frac{1}{n_0} \int_0^\xi (n_e - n_i) d\xi_1 \quad (8-26)$$

减少。由于 χ' 是在振子问题中 dx/dt 的模拟，我们的虚振子已经损失了速度并且在图 8-6 的势阱中被俘获。

8.3.2 临界马赫数

不论是孤立子型的解还是波列型的解都仅对 \mathfrak{M} 的一个范围存在。 \mathfrak{M} 的下限由下面的条件给出，即 $V(\chi)$ 是一个势阱而不是势垒。对于 $\chi \ll 1$ ，展开方程 (8-25) 得到

$$\frac{1}{2}\chi^2 - (\chi^2/2\mathfrak{M}^2) > 0, \quad \mathfrak{M}^2 > 1 \quad (8-27)$$

不但从物理上，而且从数学上来看，这个式子确实与鞘层存在的玻姆判据（方程 (8-11)）是相同的。

\mathfrak{M} 的上限由下面的条件所决定，即图 8-6 的函数 $V(\chi)$ 在 $\chi > 0$ 必须穿过 χ 轴，否则虚粒子将不被反射，并且势将无限上升。由方程 (8-25)，对于某个 $\chi > 0$ ，我们要求

$$\exp\chi - 1 < \mathfrak{M}^2 \left[1 - \left(1 - \frac{2\chi}{\mathfrak{M}^2} \right)^{1/2} \right] \quad (8-28)$$

如果超过了低临界马赫数 ($\mathfrak{M} > 1$)，方程 (8-28) 的左边项（代表了从 0 到 χ 的电子密度积分）最初是大于表示离子密度积分的右边项。如果 \mathfrak{M}^2 不太大，随着 χ 的增加，右边项能赶上左边项。然而，由于平方根， χ 能具有的最大值是 $\mathfrak{M}^2/2$ ，这是因为 $e\phi$ 不能超过 $\frac{1}{2}Mu_0^2$ ；不然离子会被排除在下游区域的等离子体之外。把 χ 最大值代入方程 (8-28)，我们得到

$$\exp(\mathfrak{M}^2/2) - 1 < \mathfrak{M}^2 \text{ 或 } \mathfrak{M} < 1.6 \quad (8-29)$$

这是上临界马赫数。所以，在冷离子等离子体中的激波仅存在于 $1 < \mathfrak{M} < 1.6$ 范围。

正像鞘层的情况一样，这种物理情况最好用 n_i 和 n_e 对 χ 的图（图 8-8）来解释。由于 ϕ 的符号变化，这个图和图 8-4 是不同的。由于现在离子被减速而不是加速，在 $\chi = \mathfrak{M}^2/2$ 处， n_i 将接近无穷大。下临界马赫数确保 n_i 曲线在 χ 较小时低于 n_e 曲线，以至于势 $\phi(x)$ 开始其曲率具有正的符号。当曲线 n_i 穿过 n_e 曲线时，孤立子 $\phi(x)$ （图 8-7）有一个拐点。最后，当 χ 足够大，以至于 n_i 和 n_e 曲线下面的面积相等时；孤立子达到一个峰值；当 χ 回到零时， n_i 和 n_e 曲线被回扫。面积相等确保

孤生子中的净电荷为零，所以不存在外部电场。如果 \mathfrak{M} 大于 1.6，我们得到曲线 n_{i2} ，这时，甚至当 χ 达到了它的极大值 $\mathfrak{M}^2/2$ ，这条曲线下面的面积亦太小。

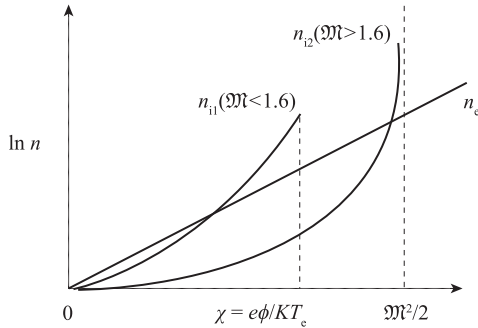


图 8-8 孤生子中离子和电子密度（对数标尺）随标准化势 χ 的变化画出了两种情况下的离子密度：马赫数 > 1.6 和马赫数 < 1.6

8.3.3 波变陡

如果在冷离子等离子体中传播一个离子波，它将具有方程 (4-42) 所给出的相速度，对应于 $\mathfrak{M} = 1$ 。然而，如何才能产生 $\mathfrak{M} > 1$ 的激波呢？我们必定记得，方程 (4-42) 是一个仅在小振幅时才正确的线性结果。当增大振幅时，离子波加快并且从正弦波变成有陡峭前沿的锯齿形波（图 8-9）。其原因是波的电场加速了离子。在图 8-9 中，在势分布峰值处的离子比起谷处的离子来在 v_ϕ 方向上具有较大的速度，因为当波经过时，它们恰好经历了一个加速周期，在线性理论中，考虑了这种速度差别，但没有考虑速度差别引起的位移。在非线性理论中，很容易看到在峰值处的离子向右漂移，而在谷处的离子向左漂移，这样波形变陡了。由于密度扰动和势是同相位的，则向右加速的离子多于向左加速的离子，波在传播方向引起一个净质量流，就使波速度超过未扰动等离子体中的声速，所以 $\mathfrak{M} > 1$ 。

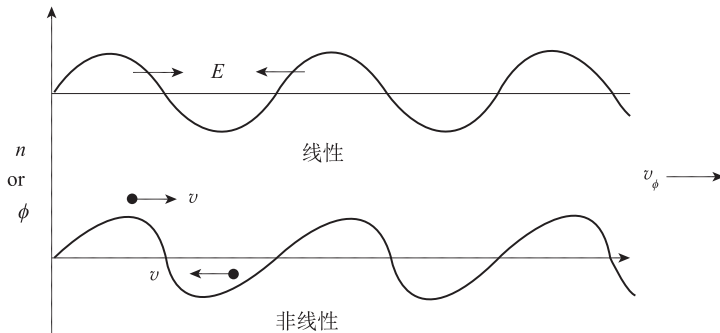


图 8-9 大振幅离子波变陡，所以前沿比后沿有较大的斜率

8.3.4 实验观察

泰勒 (R. J. Taylor)、贝克 (D. R. Baker) 和艾克齐 (H. Ikezi) 产生了图 8-5 所示形状的离子声激波。为了实现这一点，他们发明了一种新的等离子体源，DP (或双等离子体) 装置。图 8-10 示意地说明了这种装置是如何工作的。在两个电绝缘的室中，通过灯丝 F 和壁 W 之间的放电产生了相同的等离子体。等离子体由负偏置的栅极 G 所分开，G 排斥电子并在其两边形成离子鞘。在两个室之间加上一个通常为斜坡形状的电势脉冲，这就使一个室中的离子流入到另一个室中，激起了一个大振幅平面波。这个波用一个可移动的探针或者粒子速度分析仪 P 来探测。图 8-11 示出了作为时间和探针位置函数的激波密度涨落的测量结果，看到了波面变陡并转化为一经典形状的激波。振荡阻尼是由碰撞引起。

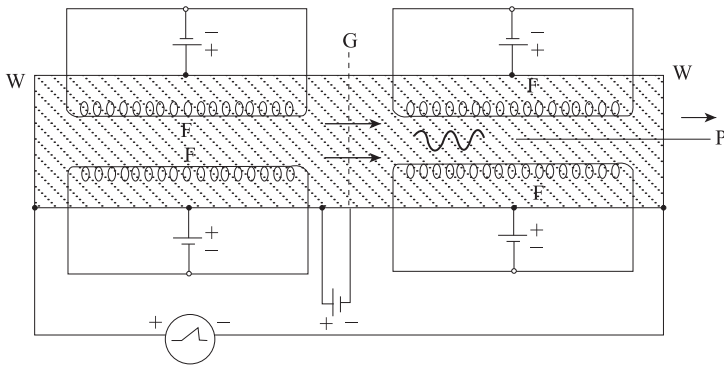


图 8-10 DP 装置示意图，在这个装置中产生和探测了离子声激波
 [参见 R. J. Taylor, D. R. Baker and H. Ikezi, Phys. Rev. Letters **24**, 206 (1970)]

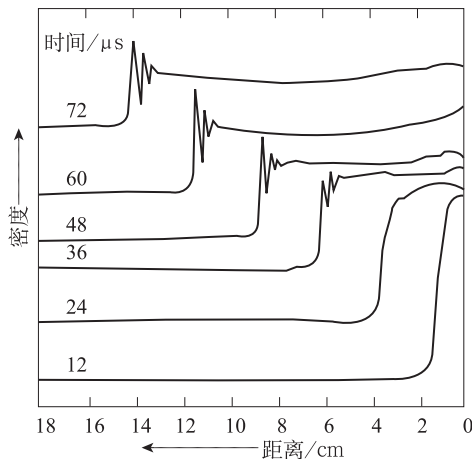


图 8-11 在不同时间，激波中密度分布的测量结果，显示出图 8-5 的特征形状是如何发展的
 [引自 Taylor et al. 同上述引文]

8.4 有质动力

光波引起一个辐射压力, 这个压力通常非常弱, 并且很难探测到. 甚至由太阳光压引起的彗星尾巴这个神秘的例子也受到了 (来自太阳的) 粒子流的附加效应的影响. 然而, 用高功率微波或激光束来加热或约束等离子体时, 辐射压力能达到几十万个大气压! 当这个压力加到等离子体时, 它以一个微妙的途径与粒子耦合, 并称为**有质动力**. 利用有质动力, 许多非线性现象就有一个简单的解释.

推导这种非线性力的最简便方式是考虑电子在波的振荡 \mathbf{E} 场和 \mathbf{B} 场中的运动. 我们忽略直流 \mathbf{E}_0 场和 \mathbf{B}_0 场, 电子运动方程是

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e[\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] \quad (8-30)$$

如果 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 在电子的瞬时位置计算, 那么这个方程是精确的. 非线性部分地来自于 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 项, 由于 \mathbf{v} 和 \mathbf{B} 在平衡时都变为零, 以至于这一项不大于 $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_1$, 所以为二阶项 (\mathbf{v}_1 和 \mathbf{B}_1 是线性理论值). 正如我们将要看到的那样, 非线性的其他部分来自于从粒子的实际位置而不是它的初始位置来计算 \mathbf{E} . 假定波的电场有如下形式

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \cos \omega t \quad (8-31)$$

其中 $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$ 包含了空间依赖性. 在一阶时, 我们可以忽略方程 (8-30) 中的 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 项, 并在初始位置 \mathbf{r}_0 计算 \mathbf{E} . 于是我们得到

$$m \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = -e\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \quad (8-32)$$

$$\mathbf{v}_1 = -(e/m\omega) \mathbf{E}_s \sin \omega t = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \quad (8-33)$$

$$\delta(\mathbf{r}_1) = (e/m\omega^2) \mathbf{E}_s \cos \omega t \quad (8-34)$$

值得注意的是在非线性计算中, 我们不能写 $e^{i\omega t}$, 并在以后取它的实数部分. 我们要明显地写出它的实数部分 $\cos \omega t$. 这是因为振荡因子的乘积出现在非线性理论中, 而乘法运算和取实数部分的运算是不对易的.

为了运算到二阶项, 我们在 \mathbf{r}_0 附近展开 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) + (\delta \mathbf{r}_1 \cdot \nabla) \mathbf{E} \big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} + \dots \quad (8-35)$$

现在, 我们必须加上 $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_1$ 项, 其中 \mathbf{B}_1 由麦克斯韦方程给出

$$\nabla \times \mathbf{E} = -d\mathbf{B}/dt$$

$$\mathbf{B}_1 = -(1/\omega) \nabla \times \mathbf{E}_s \big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \sin \omega t \quad (8-36)$$

于是, 方程 (8-30) 的二阶部分是

$$m d\mathbf{v}_2/dt = -e[(\delta \mathbf{r}_1 \cdot \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_1] \quad (8-37)$$

把方程 (8-33)、方程 (8-34) 和方程 (8-36) 代入方程 (8-37), 并对时间平均, 得到

$$m \left\langle \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \right\rangle = -\frac{e^2}{m\omega^2} \frac{1}{2} [(\mathbf{E}_s \cdot \nabla) \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_s \times (\nabla \times \mathbf{E}_s)] \equiv \mathbf{f}_{NL} \quad (8-38)$$

这里，我们用了 $\langle \sin^2 \omega t \rangle = \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$ 。双叉乘能写成两项之和，其中的一项同 $(\mathbf{E}_s \cdot \nabla) \mathbf{E}_s$ 项抵消。留下的就是

$$\mathbf{f}_{\text{NL}} = -\frac{1}{4} \frac{e^2}{m\omega^2} \nabla E_s^2 \quad (8-39)$$

这是作用在单个电子上的有效非线性力。每 cm^3 上的力是 \mathbf{f}_{NL} 乘电子密度 n_0 ， n_0 能用 ω_p^2 的形式写出。由于 $E_s^2 = 2\langle E^2 \rangle$ ，最后我们得到了有质动力的公式

$$\mathbf{F}_{\text{NL}} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \nabla \frac{\langle E^2 \rangle}{8\pi} \quad (8-40)$$

如果波是电磁波，方程 (8-38) 中的第二项起主要作用， \mathbf{F}_{NL} 的物理机制如下。电子在 \mathbf{E} 方向振荡，但是波磁场使它们的轨道畸变。也就是说，洛伦兹力 $-e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 在 \mathbf{k} 方向推电子（由于 \mathbf{v} 在 \mathbf{E} 方向， $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 在 \mathbf{k} 方向）。 \mathbf{v} 和 \mathbf{B} 具有这样的相位，以至于对一振荡的平均来说，运动不为零，而存在 \mathbf{k} 方向的久期漂移。如果波具有匀振幅，维持这个漂移不需要力；但如果波振幅变化，电子将堆积在小振幅区域，就需要有力来克服空间电荷。这就是为什么有效力 \mathbf{F}_{NL} 正比于 $\langle E^2 \rangle$ 的梯度，由于每个电子的漂移是相同的， \mathbf{F}_{NL} 正比于密度——因而正比于方程 (8-40) 中的因子 ω_p^2/ω^2 。

如果波是静电波，方程 (8-38) 中的第一项起主要作用。于是，物理机制简单地为：沿 $\mathbf{k} // \mathbf{E}$ 振荡的一个电子在从强场区到弱场区运动的半周比起从弱场区到强场区运动的半周来运动较远，所以存在一净漂移。

虽然 \mathbf{F}_{NL} 主要作用在电子上，但这个力最终传到离子上，因为它是一个低频的或直流的效应。当电子被 \mathbf{F}_{NL} 聚集后，产生了电荷分离场 \mathbf{E}_{cs} 。电子所受到的总力为

$$\mathbf{F}_e = -e\mathbf{F}_{\text{cs}} + \mathbf{F}_{\text{NL}} \quad (8-41)$$

由于 $\Omega_p^2/\omega_p^2 = m/M$ ，作用在离子上的有质动力较小，所以作用在离子流体上的力近似为

$$\mathbf{F}_i = e\mathbf{E}_{\text{cs}} \quad (8-42)$$

把最后两个方程加起来，我们发现作用在等离子体上的力是 \mathbf{F}_{NL} 。

\mathbf{F}_{NL} 的直接效应是等离子体中激光的自聚焦。在图 8-12 中我们看到，一个有限直径的激光束在等离子体中引起了径向的有质动力。这个力使等离子体偏离光束，所以比起束外来，束内的 ω_p 较低，介电常数较高。于是等离子体的作用像一个凸透镜，使束聚焦到较小的直径。

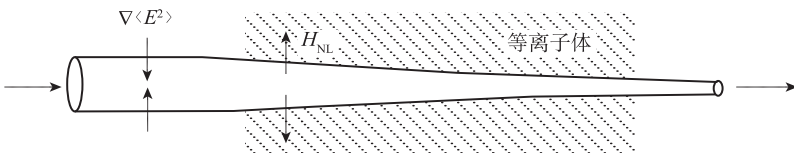


图 8-12 有质动力引起激光束的自聚焦

8.5 参量不稳定性

受到最透彻研究的非线性波-波相互作用是“参量不稳定性”，之所以这样称呼是因为类似参量放大器，参量放大器在电气工程中是一个众所周知的装置。这个课题颇为先进的理由是这个理论基本上是一个线性理论，只不过是对于振荡着的平衡为线性。

8.5.1 耦合振子

考虑图 8-13 的力学模型，在这个模型中，两个振子 M_1 和 M_2 与放置在一个支点上的一个杆相耦合。使支点 P 以频率 ω_0 来回滑动，而振子的固有频率是 ω_1 和 ω_2 。很明显，在摩擦不存在时，只要 M_1 和 M_2 不再运动，支点不遇到阻力。此外，如果 P 不运动，使 M_2 进入运动状态，则 M_1 将运动；但只要 ω_2 不是 M_1 的本征频率， M_1 的振幅将不大。现在假定 P 和 M_2 都进入运动状态。 M_1 的位移正比于 M_2 的位移和杠杆臂长度的乘积，因而随时间的变化为

$$\cos \omega_2 t \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} \cos[(\omega_2 + \omega_0)t] + \frac{1}{2} \cos[(\omega_2 - \omega_0)t] \quad (8-43)$$

如果 ω_1 或是等于 $\omega_2 + \omega_0$ 或是等于 $\omega_2 - \omega_0$ ，则 M_1 将被共振地激发，并且将增长到大振幅。一旦 M_1 开始振荡， M_2 也将得到能量，因为 ω_1 与 ω_2 的拍频之一恰好是 ω_2 。这样，一旦任何一个振子开始振荡，每一个振子将被另一个振子激发，系统是不稳定的。当然，能量来自于“泵” P ，在杆倾斜时，“泵” P 遇到了阻力。如果泵足够强，它的振荡振幅不受 M_1 和 M_2 的影响；那时，不稳定性能用线性理论来处理。在等离子体中，振子 P 、 M_1 和 M_2 可以是不同类型的波。

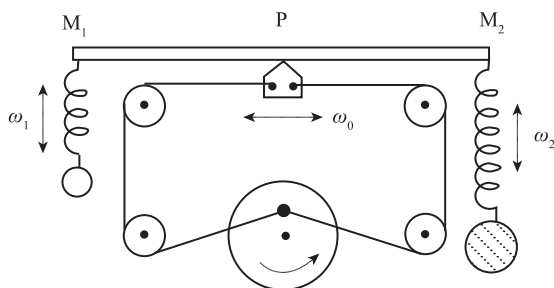


图 8-13 参量不稳定性的力学模拟

8.5.2 频率匹配

一个简单谐振子 x_1 的运动方程是

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_1^2 x_1 = 0 \quad (8-44)$$

其中, ω_1 是它的共振频率. 如果它由一个与时间有关的力来激励, 这个力正比于激励器或泵的振幅 E_0 和第二个振子振幅 x_2 的乘积, 运动方程变成

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_1^2 x_1 = c_1 x_2 E_0 \quad (8-45)$$

其中, c_1 是一个表示耦合强度的常数. 对 x_2 有相似的方程

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_2^2 x_2 = c_2 x_1 E_0 \quad (8-46)$$

令 $x_1 = \bar{x}_1 \cos \omega t$, $x_2 = \bar{x}_2 \cos \omega' t$, $E_0 = \bar{E}_0 \cos \omega_0 t$. 方程 (8-46) 变成

$$\begin{aligned} (\omega_2^2 - \omega'^2) \bar{x}_2 \cos \omega' t &= c_2 \bar{E}_0 \bar{x}_1 \cos \omega_0 t \cos \omega t \\ &= c_2 \bar{E}_0 \bar{x}_1 \frac{1}{2} \{ \cos[(\omega_0 + \omega)t] \\ &\quad + \cos[(\omega_0 - \omega)t] \} \end{aligned} \quad (8-47)$$

右边的激励项能以频率

$$\omega' = \omega_0 \pm \omega \quad (8-48)$$

激励振子 x_2 . 在非线性相互作用不存在时, x_2 只能有频率 ω_2 , 所以必须有 $\omega' = \omega_2$. 然而, 激励项能引起一个频率移动, 以至于 ω' 仅是近似等于 ω_2 . 此外, 由于存在阻尼 (为简单起见, 到目前为止忽略了阻尼) 或者能存在增长 (如果存在一种不稳定性), ω' 可能是复数. 在任何一种情况下, x_2 是一个具有有限 Q 值的振子, 能够对 ω_2 附近的一个频率范围响应. 如果 ω 是小量, 从方程 (8-48) 能够看到, 两种 ω' 的选择可以落在 x_2 的带宽内, 就必定允许两种振子, $x_2(\omega_0 + \omega)$ 和 $x_2(\omega_0 - \omega)$ 的存在.

现在, 令 $x_1 = \bar{x}_1 \cos \omega'' t$ 和 $x_2 = \bar{x}_2 \cos[(\omega_0 + \omega)t]$, 并代入方程 (8-45)

$$\begin{aligned} (\omega_1^2 - \omega''^2) \bar{x}_1 \cos \omega'' t \\ = c_1 \bar{E}_0 \bar{x}_2 \frac{1}{2} \{ \cos\{[\omega_0 + (\omega_0 \pm \omega)]t\} + \cos\{[\omega_0 - (\omega_0 \pm \omega)]t\} \} \\ = c_1 \bar{E}_0 \bar{x}_2 \frac{1}{2} \{ \cos[(2\omega_0 \pm \omega)t] + \cos \omega t \} \end{aligned} \quad (8-49)$$

激励项不仅能激发初始振荡 $x_1(\omega)$, 而且能激发新的频率 $\omega'' = 2\omega_0 \pm \omega$. 我们将考虑 $|\omega_0| \gg |\omega_1|$ 的情况, 以至于 $2\omega_0 \pm \omega$ 完全处于 x_1 能响应的频率范围之外, 就可以忽略 $x_1(2\omega_0 \pm \omega)$. 所以我们得到三个振子 $x_1(\omega)$, $x_2(\omega_0 - \omega)$ 和 $x_2(\omega_0 + \omega)$, 它们由方程 (8-45) 和 (8-46) 耦合

$$\begin{aligned} (\omega_1^2 - \omega^2) x_1(\omega) - c_1 E_0(\omega_0) [x_2(\omega_0 - \omega) + x_2(\omega_0 + \omega)] &= 0 \\ [\omega_2^2 - (\omega_0 - \omega)^2] x_2(\omega_0 - \omega) - c_2 E_0(\omega_0) x_1(\omega) &= 0 \\ [\omega_2^2 - (\omega_0 + \omega)^2] x_2(\omega_0 + \omega) - c_2 E_0(\omega_0) x_1(\omega) &= 0 \end{aligned} \quad (8-50)$$

令系数的行列式等于零, 就给出色散关系

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \omega_1^2 & c_1 E_0 & c_1 E_0 \\ c_2 E_0 & (\omega_0 - \omega)^2 - \omega_2^2 & 0 \\ c_2 E_0 & 0 & (\omega_0 + \omega)^2 - \omega_2^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (8-51)$$

$\text{Im}(\omega) > 0$ 这个解应当表示一种不稳定性。

对于小频率漂移和小的阻尼或增长率，我们能够令 ω 和 ω' 近似等于未扰动频率 ω_1 和 ω_2 。于是，方程 (8-48) 给出了一个频率匹配条件

$$\omega_0 \approx \omega_2 \pm \omega_1 \tag{8-52}$$

当振子是等离子体中的波时， ωt 必须用 $\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ 来代替。于是，也存在一个波长匹配条件

$$\mathbf{k}_0 \approx \mathbf{k}_2 \pm \mathbf{k}_1 \tag{8-53}$$

描述了空间的差拍，那就是空间中相长和相消干涉的周期性。与量子力学类比，很容易理解这两个条件方程 (8-52) 和方程 (8-53)。用普朗克常量 \hbar 乘方程 (8-52)，我们得到

$$\hbar\omega_0 = \hbar\omega_2 \pm \hbar\omega_1 \tag{8-54}$$

例如， E_0 和 x_2 可以是电磁波，所以 $\hbar\omega_0$ 和 $\hbar\omega_2$ 是光子能量。振子 x_1 可以是具有能量 $\hbar\omega_1$ 的一种朗缪尔波或等离子体子。方程 (8-54) 简单地表明能量守恒。相似地，方程 (8-53) 表示动量 $\hbar\mathbf{k}$ 守恒。

对于等离子体波，在一维问题中仅对波的一定组合，方程 (8-52) 和方程 (8-53) 才可能同时满足。在 ω - k 图上 (图 8-14)，最容易看到所需要的关系式。图 8-14 (a) 显示了电子等离子体波 (玻姆-格罗斯波) 和离子声波 (图 4-13) 的色散曲线。一个大振幅电子波 (ω_0, \mathbf{k}_0) 能衰变成一个反向运动着的电子波 (ω_2, \mathbf{k}_2) 和一个离子波 (ω_1, \mathbf{k}_1)。平行四边形结构确保了 $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ 和 $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ 。必须调节电子曲线上 (ω_0, \mathbf{k}_0) 和 (ω_2, \mathbf{k}_2) 的位置，使得差矢量落在离子曲线上。注意到一电子波不能衰变为另外两电子波，因为无法使差矢量落在电子曲线上。

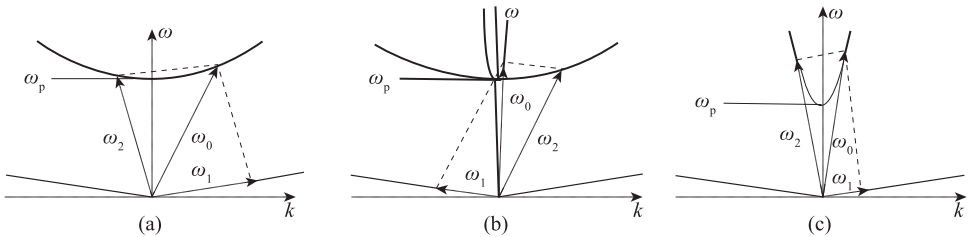


图 8-14 对于三种参量不稳定性：(a) 电子衰减不稳定性，(b) 参量衰减不稳定性，(c) 受激布里渊反向散射不稳定性，说明 ω 和 k 匹配条件的平行四边形结构
 在每种情况下， ω_0 是入射波， ω_1 和 ω_2 是衰变波。直线是离子波的色散关系；
 窄的抛物线是光波的色散关系；宽的抛物线是电子波的色散关系

图 8-14 (b) 示出了“参量衰变”不稳定性的平行四边形结构。这里，(ω_0, \mathbf{k}_0) 是一个具有大相速度 ($\omega_0/k_0 \approx c$) 的入射电磁波，它激励起一个电子波和一个在

相反方向运动的离子波. 由于 $|\mathbf{k}_0|$ 小, 对这种不稳定性, $|\mathbf{k}_1| \approx -|\mathbf{k}_2|$ 和 $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$.

图 8-14 (c) 示出了“参量反向散射”不稳定性的 ω - k 图. 在该图中, 一个光波激励起一个离子波和另一个在相反方向运动的光波. 由等离子体波来代替离子波时, 这种情况也能发生. 由于类似于固体物理中的相似现象, 这些过程分别称为“受激布里渊散射”和“受激拉曼散射”.

8.5.3 不稳定性阈值

如果不存在阻尼, 在任何振幅将发生参量不稳定性, 但实际上, 除非泵波相当强, 至少量的碰撞或朗道阻尼都将阻止不稳定性. 为了计算阈值, 必须引进 x_1 和 x_2 的阻尼率 Γ_1 和 Γ_2 . 于是, 方程 (8-44) 变成

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_1^2 x_1 + 2\Gamma_1 \frac{dx_1}{dt} = 0 \quad (8-55)$$

例如, 如果 x_1 是一被摩擦所阻尼的弹簧位移, 最后一项代表正比于速度的力. 如果 x_1 是等离子体波中的电子密度, 等离子体波由电子-中性粒子碰撞所阻尼, Γ_1 是 $\nu_c/2$ (习题 4-5). 考查方程 (8-45)、方程 (8-46) 和方程 (8-50) 将表明, 只要我们保持 \mathbf{E}_0 是实数, 并且允许 \bar{x}_1 和 \bar{x}_2 是复数, 对 x_1 和 x_2 用指数符号, 并令 $d/dt \rightarrow -i\omega$, 结果是完全正确的. 方程 (8-45) 和方程 (8-46) 变成了

$$(\omega_1^2 - \omega^2 - 2i\Gamma_1\omega) x_1(\omega) = c_1 x_2 \mathbf{E}_0 \quad (8-56)$$

$$[\omega_2^2 - (\omega - \omega_0)^2 - 2i\Gamma_2(\omega - \omega_0)] x_2(\omega - \omega_0) = c_2 x_1 \mathbf{E}_0$$

此外, 我们只讨论两种波的简单情况, 即 $\omega \approx \omega_1$ 和 $\omega_0 - \omega \approx \omega_2$, 但 $\omega_0 + \omega$ 离开 ω_2 足够远, 以至于是非共振的, 在这种情况下, 能忽略方程 (8-51) 的第三行和第三列. 于是, 方程 (8-51) 变成

$$(\omega^2 - \omega_1^2 + 2i\Gamma_1\omega)[(\omega - \omega_0)^2 - \omega_2^2 + 2i\Gamma_2(\omega - \omega_0)] = c_1 c_2 \mathbf{E}_0^2 \quad (8-57)$$

在阈值时, 我们可以令 $\text{Im}(\omega) = 0$. 最低阈值将发生在确切的频率匹配点, 即 $\omega = \omega_1$, $\omega_0 - \omega = \omega_2$. 这样, 方程 (8-57) 就给出

$$c_1 c_2 (\mathbf{E}_0^2)_{\text{thresh}} = 4\omega_1 \omega_2 \Gamma_1 \Gamma_2$$

阈值随任何一个波的阻尼而变成零.

8.5.4 物理机制

用有质动力 (8.4 节) 能非常简单地理解波的参量激发. 作为一个例证, 考虑一个电磁波 (ω_0, k_0) 激励一电子等离子体波和一低频离子波 (ω_1, k_1) 的情况 (图 8-14 (b)). 由于 ω_1 是小量, ω_0 必定接近于 ω_p . 然而, 对于 $\omega_0 < \omega_p$ 和 $\omega_0 > \omega_p$, 性状是十分不同的. 前一种情况引起了“振荡双流”不稳定性 (它将被详细处理), 而后者引起“参量衰变”不稳定性.

假设在等离子体中存在一种 $n_1 \cos k_1 x$ 形式的密度扰动，这种扰动能作为热噪声的一种组分而自发地发生。令泵浦波在 x 方向有一电场 $E_0 \cos \omega_0 t$ (图 8-15)。在直流场 B_0 不存在时，泵浦波遵循关系式 $\omega_0^2 = \omega_p^2 + c^2 k_0^2$ ，所以对于 $\omega_0 \approx \omega_p$ ， $k_0 \approx 0$ 。因此，我们可以把 E_0 当作空间均匀的。如果 ω_0 小于冷电子流体的共振频率 ω_p ，电子将在与 E_0 相反的方向运动，而离子在 ω_0 的时间范围内并不运动。于是密度涟波就引起一个如图 8-15 所示的电荷分离。静电电荷产生以频率 ω_0 振荡的场 E_1 。总场引起的有质动力由方程 (8-40) 给出

$$F_{NL} = -\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \nabla \frac{\langle (E_0 + E_1)^2 \rangle}{8\pi} \quad (8-58)$$

由于 E_0 是均匀的，并且远大于 E_1 ，只有交叉项才是重要的

$$F_{NL} = -\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{\partial \langle 2E_0 E_1 \rangle}{\partial x} \quad (8-59)$$

这个力的平均不为零，因为 E_1 随 E_0 改变符号。正像在图 8-15 中所见到的那样， F_{NL} 在 n_1 的峰和谷处是零，但在 ∇n_1 大的地方， F_{NL} 亦大。这种空间分布使得 F_{NL} 把低密度区域的电子推向高密度区域。产生的直流电场也一起拉拽离子，密度扰动就增长。 F_{NL} 的阈值恰好就是足够克服压力 $\nabla n_{i1} (KT_i + KT_e)$ 的值，(压力趋于使密度变得平滑)。密度涟波并不传播，所以 $\text{Re}(\omega_1) = 0$ 。这就叫做**振荡双流不稳定性**，因为像双流不稳定性情况一样 (6.6 节)，晃动着的电子有一个双峰值的时间平均分布函数。

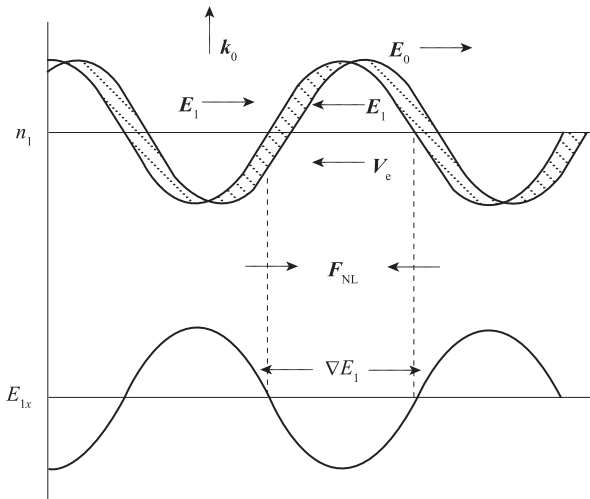


图 8-15 振荡双流不稳定性的物理机制

如果 ω_0 大于 ω_p ，这种物理机制不成立，因为一个被激励的快于其共振频率的振子，在相反于外力的方向运动 (在 8.5.5 节将更清楚地解释这一点)。于是，

在图 8-15 上的 v_e , E_1 和 F_{NL} 反向, 而有质动力使离子从稠密区到稀疏区运动, 扰动就衰变. 然而, 如果密度扰动有一定的相速度, 则能恢复适当的相位. 离子波的本征速度是声速 v_s , 所以 $\omega_1 = kv_s$. 在随密度涟波运动的坐标系中, 电子流体以多普勒漂移频率 $\omega' = \omega_0 - kv_s$ 看到了泵浦场. 当这个频率等于电子的本征频率 ω_p 时, 相互作用最大. 这样, 我们有 $\omega' = \omega_p = \omega_0 - kv_s$ 或 $\omega_2 = \omega_0 - \omega_1$, 这恰好是频率匹配条件. 以入射 J 电磁波能量消耗为代价, 激发了一个离子波和一个等离子体波, 这就叫做参量衰变不稳定性.

8.5.5 振荡双流不稳定性

现在, 我们用 8.5.4 节给出的物理图像来推导这个参量不稳定性的最简单例子. 为简单起见, 令温度 T_i 和 T_e 以及碰撞速率 ν_i 和 ν_e 都为零. 于是, 离子流体遵循低频方程

$$Mn_0 \frac{\partial v_{i1}}{\partial t} = F_{NL} \quad (8-60)$$

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v_{i1}}{\partial x} = 0 \quad (8-61)$$

由于假定平衡是空间均匀的, 我们可以作空间傅里叶分析, 并用 ik 代替 $\frac{\partial}{\partial x}$, 则最后两个方程给出

$$\frac{\partial^2 n_{i1}}{\partial t^2} + \frac{ik}{M} F_{NL} = 0 \quad (8-62)$$

其中, F_{NL} 由方程 (8-59) 给出. 为了求出 E_1 , 我们必须考虑电子的高频运动. 电子的流体方程是

$$m \left(\frac{\partial v_e}{\partial x} + v_e \frac{\partial}{\partial x} v_e \right) = -eE \quad (8-63)$$

在振荡平衡中, 我们有

$$\frac{\partial v_{e0}}{\partial t} = -\frac{e}{m} E_0 = -\frac{e}{m} \bar{E}_0 \cos \omega_0 t \quad (8-64)$$

在这个平衡点附近线性化, 得到

$$\frac{\partial v_{e1}}{\partial t} + ik v_{e0} v_{e1} = -\frac{e}{m} E_1 \quad (8-65)$$

由于 $|\partial v_{e1} / \partial t| \approx \omega_p v_{e1}$, 对 $kv_{e0} \ll \omega_p$, 能忽略第二项, 这个条件总是接近于满足的. 用泊松方程

$$ikE_1 = -4\pi en_{e1} \quad (8-66)$$

对于高频运动, 我们得到

$$\frac{\partial v_{e1}}{\partial t} = \frac{4\pi n_{e1} e^2}{ikm} \quad (8-67)$$

电子连续性方程是

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + ikv_{e0} n_{e1} + n_0 ikv_{e1} = 0 \quad (8-68)$$

在这个地方，我们必须注意到电子运动有两部分：电子的运动与离子无关的高频部分，在准中性意义上电子和离子一起运动的低频部分。所以， n_{e1} 是高频部分 n_{ch} 和低频部分 $n_{e1} = n_{il}$ 之和。（扰动场 E_1 也有低频组分，它将力 F_{NL} 传递到离子上；我们已经把这一项提出，并称它为 F_{NL}/e ）。所以，为了给出高频分量，我们必须在方程（8-68）的中间项用 n_{il} 代替 n_{e1}

$$\frac{\partial n_{ch}}{\partial t} + n_0 ikv_{e1} + ikv_{e0} n_{il} = 0 \quad (8-69)$$

取时间微商，忽略 $\partial n_{il}/\partial t$ ，并运用方程（8-64）和（8-67），我们得到

$$\frac{\partial^2 n_{ch}}{\partial t^2} + \omega_p^2 n_{ch} = \frac{ike}{m} n_{il} E_0 \quad (8-70)$$

令 n_{ch} 以 $\exp(-i\omega t)$ 变化

$$(\omega_p^2 - \omega^2) n_{ch} = \frac{ike}{m} n_{il} E_0 \quad (8-71)$$

于是，方程（8-66）和方程（8-71）给出高频场

$$E_1 = -\frac{4\pi e^2}{m} \frac{n_{il} E_0}{\omega_p^2 - \omega^2} \approx -\frac{4\pi e^2}{m} \frac{n_{il} E_0}{\omega_p^2 - \omega_0^2} \quad (8-72)$$

在令 $\omega \approx \omega_0$ 中，我们已经假定 n_{il} 的增长率比起 E_0 的频率来非常小。按照方程（8-59），有质动力为

$$F_{NL} \approx \frac{\omega_p^2 e^2}{\omega_0^2 m \omega_p^2 - \omega_0^2} \langle E_0^2 \rangle \quad (8-73)$$

注意到 E_1 和 F_{NL} 都随 $\omega_p^2 - \omega^2$ 改变符号。这就是对 $\omega_0^2 > \omega_p^2$ 振荡双流不稳定性机制不成立的原因。最大响应发生于 $\omega_0^2 \approx \omega_p^2$ ，我们可以忽略因子 ω_p^2/ω_0^2 。于是，方程（8-62）能写成

$$\frac{\partial^2 n_{il}}{\partial t^2} \approx \frac{e^2 k^2}{2Mm} \frac{\bar{E}_0^2 n_{il}}{\omega_p^2 - \omega_0^2} \quad (8-74)$$

由于对这种不稳定性， $\text{Re}(\omega) = 0$ ，我们可以令 $n_{il} = \bar{n}_{il} \exp \gamma t$ ，其中 γ 是增长率。这样

$$\gamma^2 \approx \frac{e^2 k^2}{2Mm} \frac{\bar{E}_0^2}{\omega_p^2 - \omega_0^2} \quad (8-75)$$

如果 $\omega_0^2 < \omega_p^2$ ， γ 是实数。 γ 的实际值将取决于在不用近似 $\omega^2 = \omega_0^2$ 时，方程（8-72）的分母能变得多小。如果阻尼是有限的， $\omega_p^2 - \omega^2$ 将有一个比例于 $2\Gamma_2 \omega_p$ 的虚数部分，其中 Γ_2 是电子振荡的阻尼率。于是，我们得到

$$\gamma \propto \bar{E}_0 / \Gamma_2^{1/2} \quad (8-76)$$

远高于阈值时, ω 的虚部将受到增长率 γ 而不是 Γ_2 的支配, 这样我们有

$$\gamma^2 \propto \frac{\bar{E}_0^2}{\gamma}, \quad \gamma \propto (\bar{E}_0)^{2/3} \quad (8-77)$$

γ 随 E_0 的这种行为是所有参量不稳定性的典型行为. γ 和 E_0 阈值的精确计算需要比这里更仔细地处理频率漂移 $\omega_p - \omega_0$.

为了确切地解决这个问题, 我们在方程 (8-71) 中解出 n_{i1} 并代入方程 (8-74):

$$\frac{\partial^2 n_{i1}}{\partial t^2} = -\frac{ike}{M} n_{ch} E_0 \quad (8-78)$$

这样, 方程 (8-70) 和方程 (8-78) 就构成了如方程 (8-45) 和方程 (8-46) 所示形式的一对方程, 并且能用方程 (8-51) 的解. 在那种情况下, 频率 ω_1 为零, 因为在零温度极限下, 离子波有 $\omega_1 = 0$.

8.5.6 参量衰变不稳定性

对 $\omega_0 > \omega_p$ 的推导按照与上面相同的路线进行, 并导致等离子体波和离子波的激发. 我们将省略代数运算, 它比推导振荡双流不稳定性的代数运算还要长一些, 但是我们将代之以某些实验观察的描述. 参量衰变不稳定性得到了充分的证明, 它在电离层和实验室都已经被观察到. 振荡双流不稳定性不是经常能看到的, 部分原因是因为 $\text{Re}(\omega) = 0$, 部分原因是因为 $\omega_0 < \omega_p$, 意味着入射波是消逝波. 图 8-16 示出了斯坦泽尔 (Stenzel) 和王 (Wong) 的装置, 它由类似于图 8-10 那样的等离子体源、一对栅极 (栅极间场 E_0 由一振荡器产生) 和探针 (接到两频谱分析仪上) 所组成. 图 8-17 显示了在等离子体中探测到的信号谱. 低于阈值时, 高频谱仅示出了 400MHz 的泵浦波, 而低频谱仅显示出少量的噪声. 稍微增加泵浦波的振幅, 在低频谱中出现了 300kHz 的离子波; 同时, 在高频谱中出现了一个 399.7MHz 的一个边带. 后者是一个具有差频的电子等离子波. 于是, 能观察到与泵浦波拍频的离子波, 给出了具有和频 (400.3MHz) 的一个小信号.

在电离层实验中也已经观察到这种不稳定性. 图 8-18 示出了在科罗拉多的普拉特维尔用大射电望远镜完成的一个改进的电离层实验图. 一频率为 7MHz, 2MW 的射频束从天线发射到电离层. 在 $\omega_0 \gtrsim \omega_p$ 的层中, 产生了电子波和离子波, 并加热了电离层的电子. 在另一个具有大抛物面天线的实验中 (在波多黎各岛阿雷西博), 通过用 430MHz 的雷达束来探测并观察由电子密度扰动形成的光栅的散射, 测出了电子波的 ω 和 k .

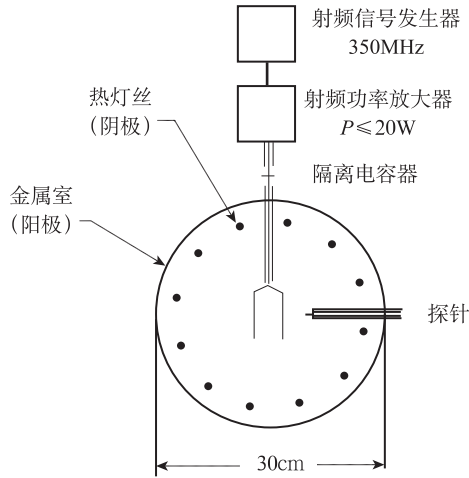


图 8-16 证明参量衰变不稳定性的实验示意图

[引自 A. Y. Wong et al. Plasma physics and controlled Nuclear Fusion Research, 1971, I, 335 (International Atomic Energy Agency, Vienna, 1971)]

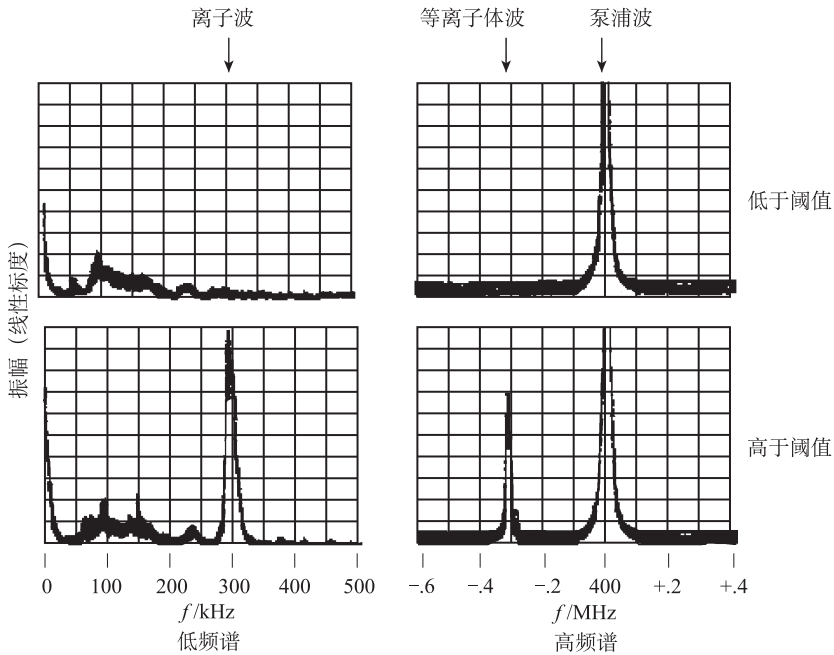


图 8-17 在图 8-16 所示的装置中，观察到的示波器图像，显示了振子的频谱当激励功率恰好低于阈值时，在低频谱中只见到噪声，在高频谱中只见到激励（泵浦）信号。

稍许增加功率使系统高于阈值，等离子体波和离子波的频率同时出现

[蒙 R. Stenzel 的允许，洛杉矶加利福尼亚大学]

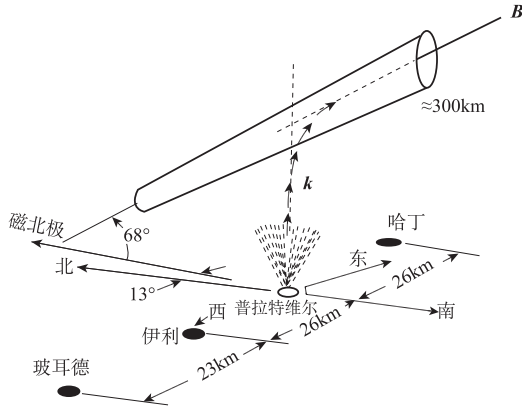


图 8-18 一个改进的电离层实验的几何图，在这个实验中，射频波因产量衰变而被吸收

[引自 W. F. Utlaut 和 R. Cohen, Science 174, 245 (1971)]

8.6 等离子体回波

由于朗道阻尼不涉及碰撞和耗散，所以它是一个可逆过程。用值得注意的等离子体回波现象生动地证明了这些说法是正确的。图 8-19 示出了实验装置示意图。在第一栅极产生了一个具有频率 ω_1 和波长 λ_1 的等离子体波，并且向右传播。波被朗道阻尼到低于能探测到的阈值。相距第一栅极为 l 的第二栅极产生了具有 ω_2 和 λ_2 的第二个波，第二个波也阻尼掉。如果第三个栅极沿着等离子体柱运动，它接到一个调谐到 $\omega = \omega_2 - \omega_1$ 的接收器，则在距离 $l' = l\omega_2 / (\omega_2 - \omega_1)$ 处，这个栅极将发现一个回波。发生了这样的情况，引起第一个波阻尼掉的共振粒子在它们的分布函数中保持了有关波的信息。如果使第二个栅极反转共振粒子分布中的变化，则能使波再现。很清楚，仅仅在非常接近于无碰撞的等离子体中才能发生这种过程。事实上，回波振幅被用来作为碰撞率的一种灵敏的测量方法。图 8-20 给出了回波为什么产生的物理图像。在用电子等离子体波或电子回旋波回波测量的背后，存在着同一个基本机制。图 8-20 是距离对时间的图，所以具有给定速度的粒子轨道是一条直线。在 $x=0$ 处，一个栅极周期性地允许具有一速度扩展的粒子聚束通过。由于有速度扩展，聚束混合在一起，并且在距离 l 之后，在图右边示出的粒子密度不随时间变化。在 $x=l$ 处的第二个栅极以较高的频率交替地封锁住粒子和让粒子通过。于是，这种在空间-时间图中粒子轨道的选择使得在 $x=l'$ 处再次发生粒子的聚束。

从这个简化了的图像能得到 l 和 l' 之间的关系，这种简化图像忽略了波电场对粒子轨道的影响。如果 $f_1(v)$ 是在第一个栅极处的分布函数，它由 $\cos \omega_1 t$ 来调制，在 $x>0$ 处的分布将由下式给出

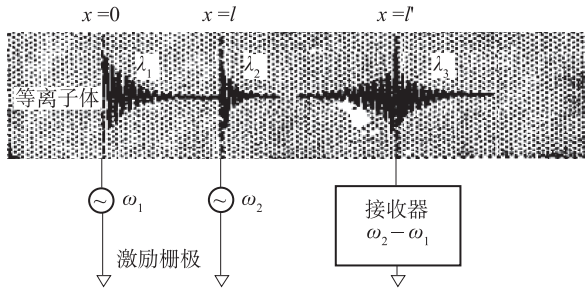


图 8-19 等离子体回波实验的示意图

[引自 A. Y. Wong 和 D. R. Baker, Phys. Rev. **188**, 326 (1969)]

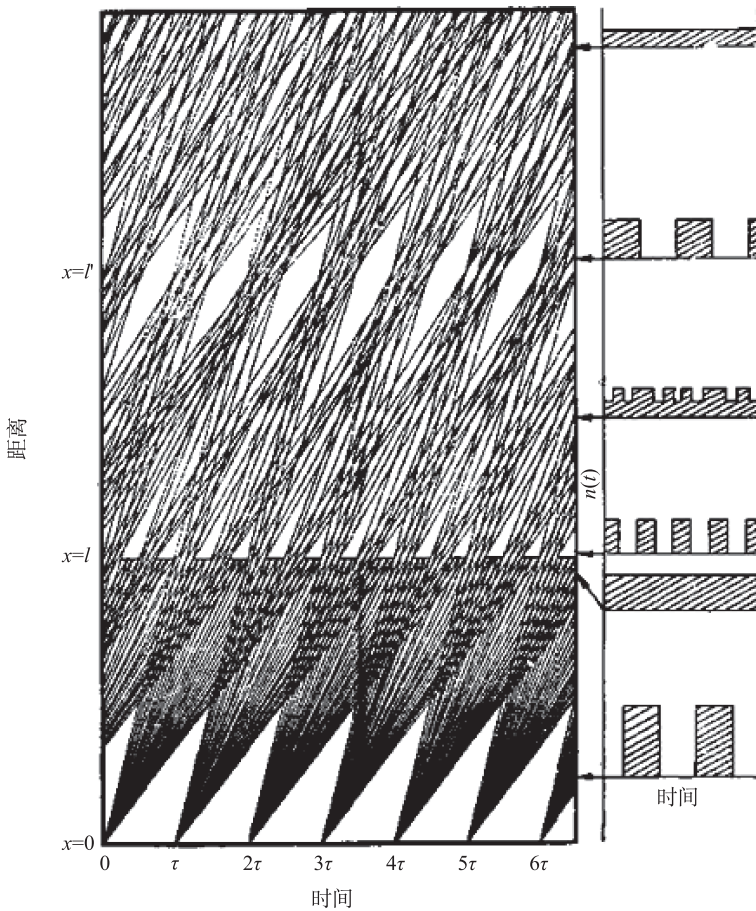


图 8-20 选通粒子的空间-时间轨道，显示了引起回波的聚束

在右边示出了不同距离的密度行为 [引自 D. R. Baker, N. R. Ahern and A. Y. Wong,

Phys. Rev. Letters **20**, 318 (1968)]

$$f(x, v, t) = f_1(v) \cos\left(\omega_1 t - \frac{\omega_1}{v} x\right) \quad (8-79)$$

在 $x=l$ 处的第二个栅极将进一步通过包含 ω_2 和距离 $x-l$ 的一个因子来调制这个分布

$$f(x, v, t) = f_{12}(v) \cos\left(\omega_1 t - \frac{\omega_1}{v} x\right) \cos\left[\omega_2 t - \frac{\omega_2}{v} (x-l)\right] \quad (8-80)$$

$$= f_{12}(v) \frac{1}{2} \left\{ \cos\left[\left(\omega_2 + \omega_1\right) t - \frac{\omega_2(x-l) + \omega_1 x}{v}\right] + \cos\left[\left(\omega_2 - \omega_1\right) t - \frac{\omega_2(x-l) - \omega_1 x}{v}\right] \right\} \quad (8-81)$$

如果

$$\omega_2(x-l) = \omega_1 x$$

或者

$$x = \omega_2 l / (\omega_2 - \omega_1) \equiv l' \quad (8-82)$$

回波来自第二项，它以 $\omega = \omega_2 - \omega_1$ 振荡，并有一个与 v 无关的幅角。所以在 $x=l'$ 处，速度扩展并不影响第二项，并且相位混合受到了破坏。当对速度积分时，这一项给出在 $\omega = \omega_2 - \omega_1$ 上的密度涨落。第一项是探测不到的，因为相位混合使密度扰动平滑。很清楚，仅当 $\omega_2 > \omega_1$ 时， l' 为正。其物理原因是第二个栅极要以较短的距离散开第一个栅极所给予的扰动，因此必须工作在较高的频率。

图 8-21 示出了贝克 (Baker)，艾亨 (Ahern) 和王 (Wong) 对离子波回波

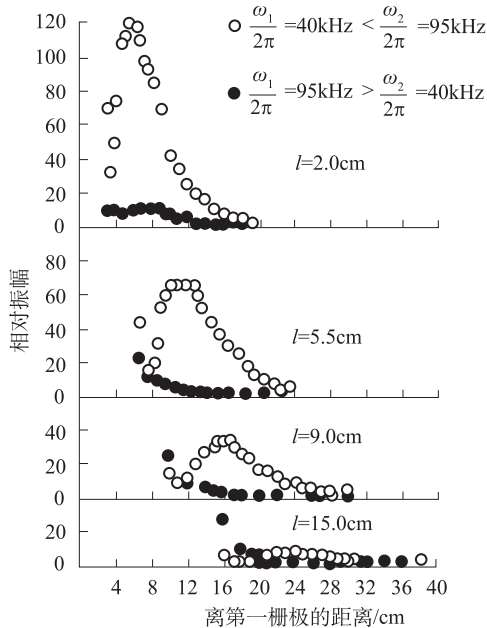


图 8-21 对激励栅极之间的不同间隔 l ，回波振幅分布图的测量结果

实心圆点对应于 $\omega_2 < \omega_1$ 的情况，这时不希望出现回波 [引自 Baker, Ahern, and Wong, 同上述引文]

的测量结果. 距离 l' 随 l 变化, 与方程 (8-82) 一致. 实心点对应于 $\omega_2 < \omega_1$ 的情况, 说明正如预料的那样, 不存在回波. 因为碰撞破坏了速度调制的相干性, 回波振幅随距离增大而减少.

8.7 非线性朗道阻尼

当人们在空间跟踪一个电子或离子波 (比如, 由一个栅极激发) 的振幅时, 常常发现, 如果振幅大, 衰变并不按照线性理论所给出的指数方式衰变. 而人们发现, 典型的情况是振幅衰变, 又增长, 振幅在降到稳定值之前振荡. 电子波的这种行为 (38MHz) 在图 8-22 中示出. 虽然也可能引起其他效应, 但这些振幅的振荡恰好是粒子俘获的非线性效应所预期的 (在 7.5 节已讨论过). 当波势同以相速度运动的粒子动能一样大时, 预期会发生俘获

$$|q\phi| = \frac{1}{2}mv_{\phi}^2 = \frac{1}{2}m(\omega/k)^2 \tag{8-83}$$

由于 $|\phi| = |E/k|$, 这个条件为

$$\omega \approx \omega_B, \quad \omega_B^2 \equiv |qkE/m| \tag{8-84}$$

量 ω_B 叫做回跳频率, 因为它是在正弦势阱底部俘获的一个粒子的振荡频率 (图 8-23). 势由式 (8-85) 给出

$$\phi = \phi_0(1 - \cos kx) = \phi_0\left(\frac{1}{2}k^2x^2 + \dots\right) \tag{8-85}$$

运动方程是

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2x = qE = -q \frac{d\phi}{dx} = -qk\phi_0 \sin kx \tag{8-86}$$

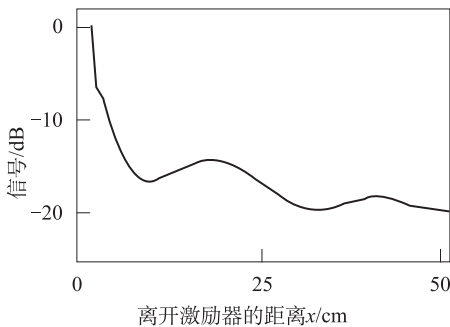


图 8-22 一个非线性电子波振幅分布的测量结果, 显示了非线性衰减
[引自 R. N. Franklin, S. M. Hamberger, H. Ikezi, G. Lampis and G. J. Smith, Phys. Rev. Letters **28**, 1114 (1972)]

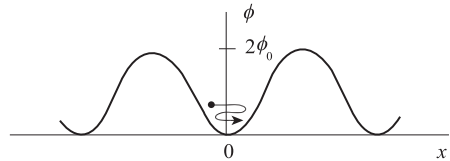


图 8-23 俘获粒子在波势阱中的回跳

除了 x 是小量, $\sin kx \approx kx$, ϕ 近似为抛物线外, 频率 ω 不是常数. 于是 ω 取方程 (8-84) 所定义的 ω_B 值. 当共振粒子被势阱反射时, 它们把动能还给波, 振幅增加. 当粒子从另一边再次回跳时, 能量又还给粒子, 波被阻尼. 这样, 人们将指望在波的坐标系中, 振幅以频率 ω_B 振荡. 在实验室坐标系中, 频率应当为 $\omega' = \omega_B + kv_\phi$; 而振幅振荡应当具有波数 $k' = \omega'/v_\phi = k[1 + (\omega_B/\omega)]$.

甚至当除了粒子俘获以外的其他过程起主要作用时, 条件 $\omega_B \gtrsim \omega$ 仍说明了线性理论的失败. 非线性朗道阻尼的另一种类型包括两个波的差拍, 假定存在两个高频电子波 (ω_1, k_1) 和 (ω_2, k_2) . 这两个波会差拍形成一个以速度 $(\omega_2 - \omega_1)/(k_2 - k_1) \approx d\omega/dk = v_g$ 传播的振幅包络线. 这个速度可以足够低, 以至于位于离子分布函数之内. 于是能存在同共振离子的能量交换. 由于有质动力, 离子所看到的势是有效势 (图 8-24), 就能发生朗道阻尼或增长. 阻尼提供了一个用高频波加热离子的有效方式, 高频波通常不与离子相互作用. 如果离子分布是双驼峰的, 它能激起电子波. 这样一种不稳定性叫做调制不稳定性.

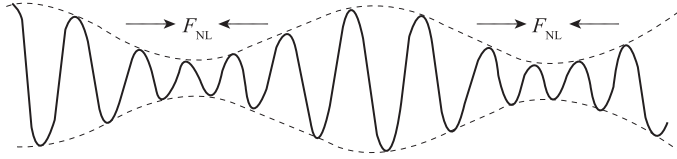


图 8-24 由一个调制波的包络线引起的有质动力能俘获粒子, 并引起波-粒子以群速度共振

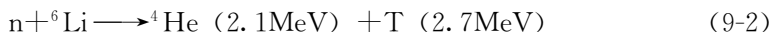
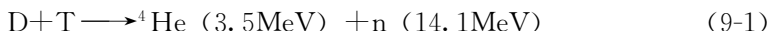
第 9 章 受控聚变介绍

9.1 受控聚变问题

因为等离子体物理学的基本研究使人们对一个复杂的问题——受控热核反应问题（这个问题最初促进了这门新科学的成长）有一个了解，所以本书采用对这个问题的介绍作为结尾是完全适当的。由于在最后的聚变反应堆中，所需的唯一燃料是海水中的重氢，所以这个目标的实现将意味着以实际上为零的燃料消耗来获得一个实际上是无限的能源（能持续几亿年）。受控聚变将对人类的文明起巨大的影响，这就使它成为人类已经面临的最重要的科学挑战。

9.1.1 反应

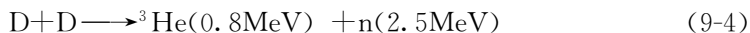
第一代聚变反应堆将依靠下列反应



这里， n 是中子， D 和 T 分别是氘原子 (${}^2\text{H}$) 和氚原子 (${}^3\text{H}$)。正如我们将要看到的那样，在所有的反应中，这个反应具有最低的点火温度和最低的约束要求。然而，大多数能量以 14MeV 中子的形式释放出来，它必须要在热循环中被收回，这个热循环的效率被限制在 40% 左右。此外，中子损坏了反应堆的壁，并使它带上放射性。

反应 (9-1) 的另外一个缺点是氚并不自然产生，它必须在围绕等离子体的锂再生区通过反应 (9-2) 来增殖。幸好， ${}^6\text{Li}$ 是一种丰富的同位素（占天然锂的 7.5% ），在地壳中有丰富的储藏量。由于海水中氢的 0.015% 是氘，而且分离简便，所以氘具有消耗不完的来源。

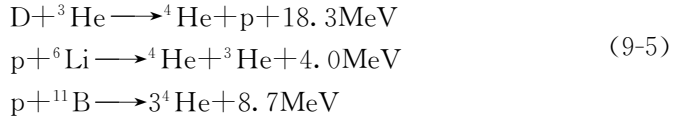
只用氘作燃料的反应堆会经历下面两个反应，它们以大致相同的几率发生



它不需要氚的增殖，并且只有 34% 的能量以中子的形式出现。然而，对等离子体的要求很难满足。

聚变反应堆的一个有吸引力的可能途径是用带电的反应产物直接产生电功

率，这样就避免了热循环的低效率并减少了环境的热污染。如果能达到高点火温度，则下列只有带电粒子产物的反应将适用于这种打算



9.1.2 等离子体的必要性

由于离子带正电，在 9.1.1 节的反应发生之前，必须克服库仑斥力。因此，为了穿透库仑势垒，必须要把核加速到相当大的能量。例如，当能量增加到 50keV 时，D-T 反应的截面 σ 急剧增加，接近 100keV 时， σ 达到了峰值，在更高能量时， σ 逐渐减少。从加速器出来的氦核束是不能使用的，因为（比如说）如果这个束指向一个固体氦或氦靶，则可以证明大多数能量消耗在电离和加热靶以及弹性碰撞中。不可能使碰撞束稠密到足以使聚变能量输出大于加速它所需的能量。解决的方法是形成一个麦克斯韦等离子体，在那里，分布尾部的快速粒子经历了聚变。如果是麦克斯韦分布，弹性碰撞不改变分布函数，而且在粒子反应或从真空室逃逸之前保留了用来加热等离子体的能量。这就是用热核反应术语的原因。

9.1.3 火温度

在氘-氘反应中，每立方厘米产生的功率是

$$P_r = n_D n_T \langle \sigma v \rangle W \quad (9-6)$$

其中， $\langle \sigma v \rangle$ 是对麦克斯韦分布的平均， W 是每次反应所释放 17.6MeV 的能量。为了保持等离子体温度，这个功率必须超过损失的功率。即使当等离子体完全被约束时，也由于电子的辐射而存在不可避免的能量损失。这种辐射称为轫致辐射，它是在电子与离子作弹性碰撞时发射出来的，因此发射这种辐射可作为加速电荷。轫致辐射的功率由下式给出

$$P_b = 5 \times 10^{-31} Z^2 n^2 (KT_e)_{\text{keV}}^{1/2} \quad (9-7)$$

P_r 和 P_b 都随着 n^2 变化，但是 P_r 随 KT 的增加比 P_b 更加迅速。使 P_r 和 P_b 相等，并假定产生的离子有足够的时间通过库仑碰撞把它们的能量传递给其他离子和电子，以至于所有的温度相等，就能求出点火温度。对于氘-氘反应，点火温度大约为 4keV；对于氘-氦反应，点火温度大约为 35keV。对于方程 (9-5) 的高 Z 反应，甚至需要更高的温度。

9.1.4 劳逊判据

为了使聚变反应产生的能量多于加热等离子体和辐射损失所需的能量，就对等离子体密度 n 和约束时间 τ （以及温度）提出一个条件。假定聚变能量、轫致

辐射能量和逃逸粒子的动能（逃逸率由 τ 决定）都通过热途径被收回，其效率不超过 33%。结果是 n 和 τ 的关系仅仅以乘积 $n\tau$ 出现；对氘-氘反应，所需的 $n\tau$ 最小值大约为 $10^{14} \text{ cm}^{-3} \text{ s}$ ；对氘-氚反应，最小值大约为 $10^{16} \text{ cm}^{-3} \text{ s}$ 。这就叫做劳逊判据。在原则上，通过用复杂的方案，如把束与等离子体结合起来，或者用更有效的能量回收法，如直接发电，降低这些数字是可能的。

9.1.5 主要的问题

研制聚变反应堆所包含的问题可以分成三个普遍领域：

- (1) 等离子体约束；
- (2) 等离子体加热；
- (3) 聚变技术。

约束与满足 $n\tau$ 的劳逊判据有关。存在两条不同的途径：磁场约束，其 $n \approx 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ 和 $\tau \approx 0.1 \text{ s}$ ；惯性约束，如激光发生聚变，在那里 $n \approx 10^{26} \text{ cm}^{-3}$ 和 $\tau \approx 10^{-11} \text{ s}$ 。最引人注意的是磁场约束，它是上面三个领域中得到最充分理解的。当然，等离子体加热是和约束有关的——要是约束时间非常长，甚至一个缓慢的加热过程也会足够好。加热的详细机理至今还不清楚。除了等离子体方面的问题外，聚变技术还和反应堆的工程设计有关。在这个领域仍然面临着不少实际的问题。

此外，我们还应当加上两个分支，在这两个分支中，已经取得了相当大的进展：

- (1) 等离子体诊断；
- (2) 等离子体纯化。

为了测量等离子体参量和了解等离子体内发生的过程，发展了很多诊断方法，包括电磁波、等离子体波、内探针电极、粒子束和外部传感器。等离子体纯化是一个相当重要的实验问题，因为来自器壁的高 Z 原子的注入引起能量的迅速损失（通过原子辐射）。有一些装置能有效地使热等离子体与器壁隔离，这些装置叫做偏滤器（divertor）。

9.1.6 主要途径

为了达到等离子体聚变条件，已经尝试了很多想法，虽然仍然还从事着一些非标准的方法，但是主要的实验努力已经集中到如下四条途径：

- (1) 闭合系统：环；
- (2) 开端系统：磁镜；
- (3) θ 箍缩；
- (4) 激光聚变。

在闭合系统中，即使磁力线本身不闭合，它们也被约束在系统中。开端磁场

系统根据 2.3.3 节描述的磁镜效应运转。箍缩装置是携带足够产生自身磁场电流的等离子体。这个电流也用于加热等离子体。装置的几何形状既可以是开端的又可以是闭合的。激光聚变采用惯性约束而不是采用磁约束，如果在技术上可行的话，将避免磁不稳定问题。

9.2 磁约束：环

9.2.1 平衡

在 2.3.2 节已经看到，粒子漂移离开磁力线是圆形并且自身闭合的一个简单的环。这是安培定律的结果

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} H_\phi r d\phi = I \quad (9-8)$$

这个式子确保了 $|B|$ 随 r^{-1} 变化，所以回转粒子轨道的相对着的两半具有不相等的拉莫尔半径（图 9-1）。其结果是离子和电子向环的顶部和底部漂移，而建立起一个垂直的电场。然而，这个 \mathbf{E} 场使离子和电子一起在 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 的方向离开长轴漂移。为了避免这种效应，环向系统需要如图 9-2 所示的磁力线扭曲。在图 9-2 右边截面的 A 点（坐标为 (ρ, θ) ）的磁力线来到左边时到达 A' 点。绕短轴的角度 θ 改变了 $\Delta\theta$ 。在磁力线绕环转动一次，并回到右边之后，变化的角 $\Delta\theta$ 称为转动变换 ι (iota)。如果没有碰撞，任何有限的 ι 值将防止向外漂移并使等离子体平衡。

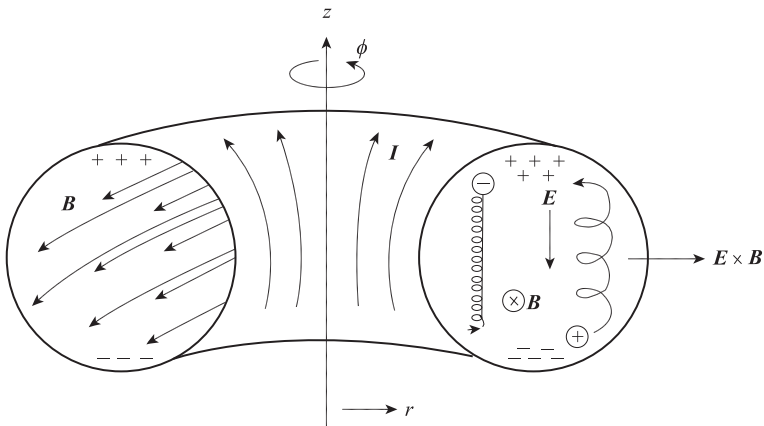


图 9-1 在磁力线是闭合圆周的简单环中，磁场随 $1/r$ 变化产生的 ∇B 漂移引起一个垂直的电荷分离，分离又使等离子体向外漂移

从两个方面可以看出螺旋磁力线的有益影响。从单粒子观点来看，比方，在 A 点向上漂移着的一个离子将离开等离子体中心运动，在到达 A' 点时，离子仍然

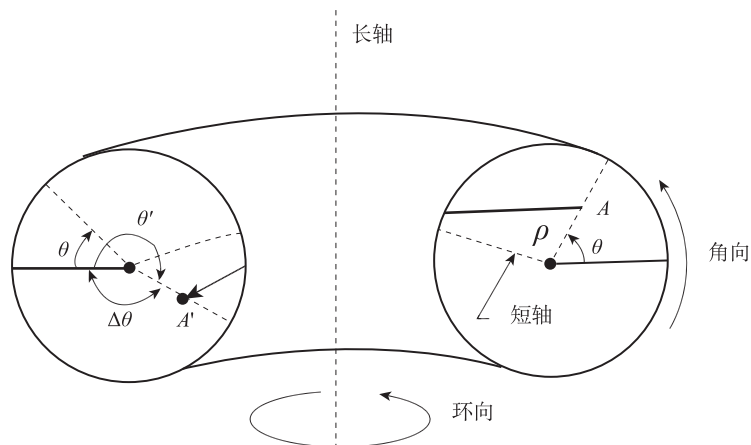


图 9-2 在具有转动变换的环中，当磁力线 $A-A'$ 绕长轴旋转时，改变了绕短轴的方位角 θ

向上漂移着，但现在它却是向等离子体中心运动。如果热运动远快于 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移，对绕长轴运动许多周的平均来说，粒子离短轴的距离 ρ 将不变（如果磁力线离短轴的距离也是 ρ ）。从流体观点来看，我们看到一个螺旋形磁力线把正电荷区域和负电荷区域连接起来（图 9-1），所以短路了垂直电场。如果存在碰撞，电阻率是有限的；在达到平衡前，转动变换必须足够大。

9.2.2 环向系统的种类

环向系统按产生磁力线扭曲的途径不同而区分。存在着四种主要途径：

- (1) 外部螺旋形导线：仿星器 (stellarators)；
- (2) 内部等离子体电流：托卡马克 (tokamaks)；
- (3) 内部导线：多极器 (multipoles)；
- (4) 内部粒子束：天体器 (Astron)。

9.2.3 稳定性

一个约束磁场除了提供平衡外，还必须具有适当的形状以确保平衡是稳定的。在环中的高频电子不稳定性通常是没有危险的，因为离子仅稍微受到高频场的扰动。能引起离子逃逸的低频不稳定性具有三类：

- (1) 瑞利-泰勒不稳定性；
- (2) 电流驱动的不稳定性；
- (3) 漂移不稳定性。

因为在环中的磁场必定是弯曲的，由于粒子绕曲线运动的离心力，它们感受到一个等效的重力场。这就引起 6.7 节导出的“重力”不稳定性。如果通过等离子体驱动电流，这个电流或是提供一个扭曲磁场，或是加热等离子体，就存在在两

类可能的不稳定性——一类是静电的，另一类是电磁的。静电型是一种由于离子和电子分布函数中心漂移引起的双流不稳定性（6.6节）。电磁型称为“扭折”不稳定性，这种不稳定性我们还没有讨论过。

图 9-3 描述了在等离子体柱中沿主磁场 B_0 流动的电流。电流产生一个角向场 B_p 。如果扭折如图所示的那样发展起来，则在扭折内侧的 B_p 线比外侧更稠密。因此，磁压 $c^2 B_p^2 / 8\pi$ 的作用增加了扭折的大小，等离子体就被推向壁。最后，漂移不稳定性具有 6.8 节讨论的物理机制，并且它与离子和电子穿过 B 场漂移之间的差别有关，二者的漂移由方程 (2-59) 和方程 (2-66) 给出。也需要有与玻尔兹曼关系 (3-73) 的偏离，它可以来自于有限的电阻率 (6.8 节)，也可以来自于共振粒子或局部磁镜中的粒子俘获 (图 5-21)。

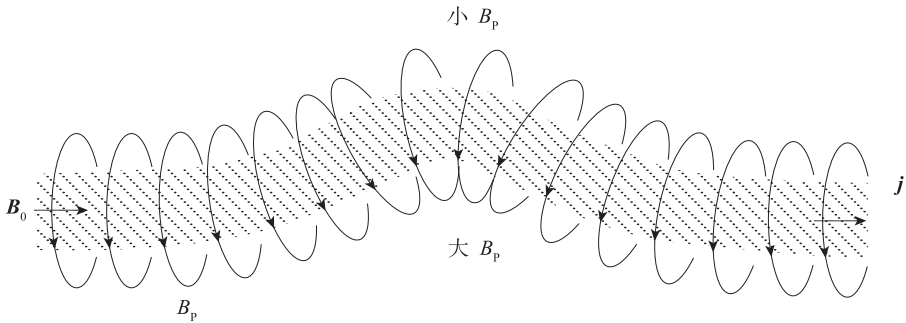


图 9-3 扭折不稳定性的物理机制

避免不稳定性有三条通用的途径：

- (1) 磁剪切；
- (2) 磁阱（最小 \bar{B} ）；
- (3) 动力学稳定。

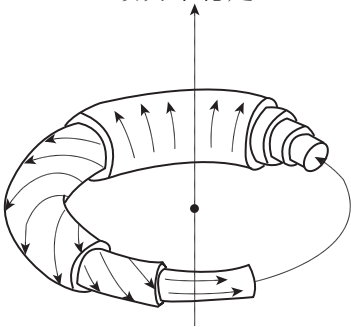


图 9-4 一个环中的剪切磁场

仿星器和托卡马克主要与磁剪切有关，指的是螺旋磁力线的螺距角随短半径 ρ 变化。图 9-4 示出了这种变化的极端情况，在图中轴上的场是纯环向的，而在外边是纯角向的（这个术语的解释如图 9-2 所示）。剪切对于防备那些有小 k_{\parallel} 的不稳定性（如重力、扭折和漂移不稳定性）是有效的。在一个半径处沿磁场方向的一个扰动，当它在剪切场中增长到另一个半径处时，它以一个角度遇到了磁力线。

一个平均磁阱系统或者最小平均 B 系统有这样的磁力线，它们更向等离子体中心弯曲，而不是向外弯曲。这样的场更容易由等离子体内部电流所产生，

并在多极器一节得到更充分地描述。内环和内束装置主要依靠最小 B 稳定作用。

通过在 E 或 B 中加入随时间变化的剪切，由振荡的 E 或 B 场的动力学稳定作用也能避免不稳定性。一种更有效的方法是**反馈稳定作用**，在这种方法中，检测了不稳定波的相位，而一个以适当的相位加在等离子体上的力（如用外部线圈）抑制了不稳定性。

9.2.4 仿星器

仿星器是一种环向系统，其转动变换和剪切完全由外部线圈所产生。磁力线围绕环时，本身并不闭合，但它们保持在相同的短半径附近。场线形成一组相互套入的磁面，如图 6-3 所示。如果跟踪一条磁力线足够长的时间，它将覆盖一个磁面但不能离开磁面；因此，跟随一条磁力线的粒子将受到约束。一种典型的仿星器磁面具有一个三角形的截面，如图 9-5 所示。这种几何形状的平衡和稳定性理论是十分复杂的，但通过**能量原理**能极大地简化计算。在这种方法中，稳定和不安定扰动能通过它们增加还是减少等离子体-磁场系统的能量而区分。

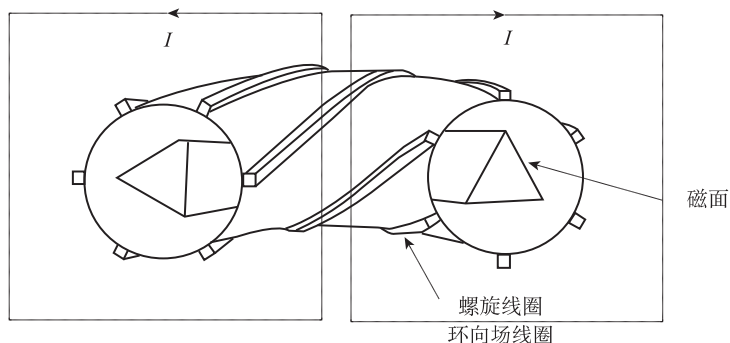


图 9-5 在仿星器中，由螺旋形围绕等离子体的导线提供剪切和转动变换
这是一个 $l=3$ 的系统，在这个系统中，三对导线引起了三角形的磁面变形

在这种几何形状中，连经典扩散都是不简单的。沿着 B 的电流短路如图 9-1 所示的电荷分离的必然性引起了与离子的附加摩擦力。引起的经典扩散率的增加叫做**菲奇-施吕特尔效应** (Pfirsch-Schlüter effect)。在较高的温度时，预期在香蕉形轨道中（图 5-21）发生粒子的俘获，并将获得新经典扩散定律（图 5-22）。虽然在某些实验中有可能看到这种效应，但在大多数情况下，观察到的扩散遵循玻姆定律（图 5-20）。仿星器没有按预期的那样来约束等离子体，其原因如下：
①对于稳定所有的不稳定性来说，剪切不够充分；
②由于系统不全是绕长轴对称的，不对称电场可能引起等离子体从一个磁面到另一个磁面的对流；
③小的磁场误差能引起磁力线在磁面间漂动。

9.2.5 托卡马克

由苏联阿齐莫维奇 (Artzimovich) 提出的托卡马克有一个强环向磁场, 并附带一个由等离子体本身的强电流所产生的角向分量. 由于托卡马克环对长轴是完全对称的, 所以它比仿星器既容易分析又容易建造. 然而, 由于等离子体受到了电流本身的焦耳消耗所加热, 又由于电流对于产生适用于平衡的转动变换是必要的, 所以约束问题和加热问题不能分开研究. 此外, 由于等离子体电流必须由变压器感应产生, 托卡马克不能像仿星器那样以稳态运转; 等离子体在变压器的每个脉冲中产生和消失. 尽管有这些缺点, 托卡马克已经成为最成功的环向装置.

图 9-6 示出了托卡马克的主要组成部分. 除了通常的环向场 B_t 和等离子体产生的角向场 B_p 外, 垂直方向的第三个场 B_v 对于抵消电流环膨胀的自然倾向是必要的. 也就是在内侧较大的角向磁压 $B_p^2/8\pi$ 使等离子体长半径趋于增加. 场 B_v 的方向是使 $\mathbf{j} \times \mathbf{B}_v$ 力径向向内. 这个场可以由外线圈或者由高导电铜壳中的相电流所产生.

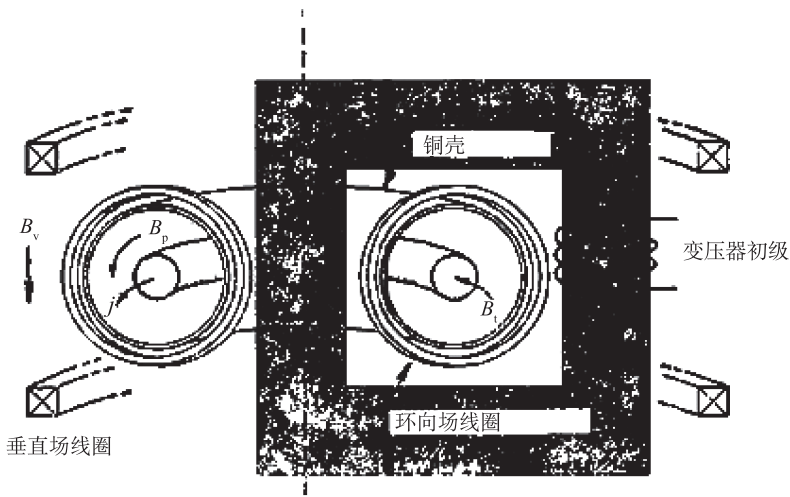


图 9-6 在一个托卡马克中, 环向场分量 B_t 由普通类型的线圈所产生, 而角向分量 B_p 由变压器感应的大等离子体电流所产生. 附加的稳定力由弱垂直场 B_v 和高导电铜壳层中的涡流电流所产生.

对于能工作的转动变换 ι , 它必定不是 2π 的整数倍; 否则, 磁力线将自身闭合, 并且将不覆盖整个磁面, 也就不能使电子到达需要抵消空间电荷的任何地方. 由于稳定性原因, 即使 ι 不是 2π 的整数倍, 它也不能超过 2π . 因此不能用无限地增加电流来试图达到更高的温度. 让我们比较两个具有不同纵横比 R/a 的托卡马克, 其中 R 和 a 分别是长半径和短半径. 在等离子体表面的磁力线绕长轴的速率正比于 B_t/R , 绕短轴的速率比例于 B_p/a (图 9-2). 因此, 转动变换正比于 $B_p R/B_t a$. 品质因子

$$q \equiv \frac{B_t a}{B_p R} = \frac{2\pi}{\iota} \quad (9-9)$$

表明一个托卡马克离 $\iota=2\pi$ 或 $q=1$ 的稳定极限有多远, 这个极限叫做克鲁斯卡-谢弗兰诺夫 (Kruskal-Shafranov) 极限. 然而, 对于加热来讲, 人们希望增加正比于 B_p/a 的电流 j , 使得和稳定性一致的 q 最低值合乎需要. 在实际上, 具有 $q < 2$ 或 3 的稳定运转是不容易达到的. 在其他方面都相同, 则粗短的托卡马克比细长的好; 小的纵横比是合乎需要的.

有可能用制造非圆截面来改进托卡马克. 归根到底, 环向系统的困难起源于在环内侧和外侧 B_t 的差别. 通过在垂直方向延伸装置 (图 9-7), 人们可以制造 Δr 小但却保持相同的总截面积 (为了电流流过). 当然, 由于在等离子体顶部和底部的急剧弯曲, 存在一个 Δr 多小才能制造的极限. 一个更进一步的改进, 也在图 9-7 示出, 是使截面成三角形, 使得在内径处的等离子体体积大于外径处的等离子体体积. 在内径处, 磁场较强且具有正确的曲率得以稳定重力模 (参看方程 (6-55)).

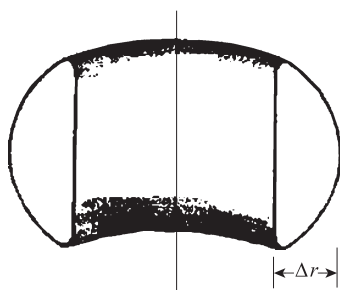


图 9-7 具有非圆截面的托卡马克, 在理论上看来它比圆截面装置好

在仿星器中, 通过断开加热电流并观察余辉中的密度衰减能测量出等离子体约束. 在托卡马克中不能这样做, 因为电流对形成磁场是必要的. 由于电流连续地重复电离已经跑到壁并复合和返回到等离子体的离子, 所以密度衰减是没有意义的. 等离子体能量的约束时间是怎么回事呢? 正如粒子扩散率的规律一样, 预期能量扩散率也遵循环向效应引起的新经典扩散定律 (图 5-22). 确实发现离子遵循这个定律比遵循玻姆定律 (方程 (5-111)) 更好, 表明不稳定性的振幅不大. 然而, 对于加热变压器在等离子体表皮感应电流, 存在一个反常的电子能量输运和一个异常快的穿透时间. 已经达到了 1keV 量级的温度和高于 $5 \times 10^{13} \text{cm}^{-3}$ 的密度, 但 $n\tau$ 值仍低于劳逊判据约两个数量级. 通过简单地增加托卡马克的尺寸, 大概能增加 τ 值, 但却留下了另一个问题. 欧姆加热的效率随 KT_e 的增加而下降, 因而必须要找出一个辅助加热方法以达到热核温度.

图 9-8 是一张典型的托卡马克的照片, 是在普林斯顿等离子体物理学实验室的 ST 装置. 图 9-9 是普林斯顿 ATC 托卡马克图. 这种装置用来试验把绝热压缩作为辅助加热的一种手段.

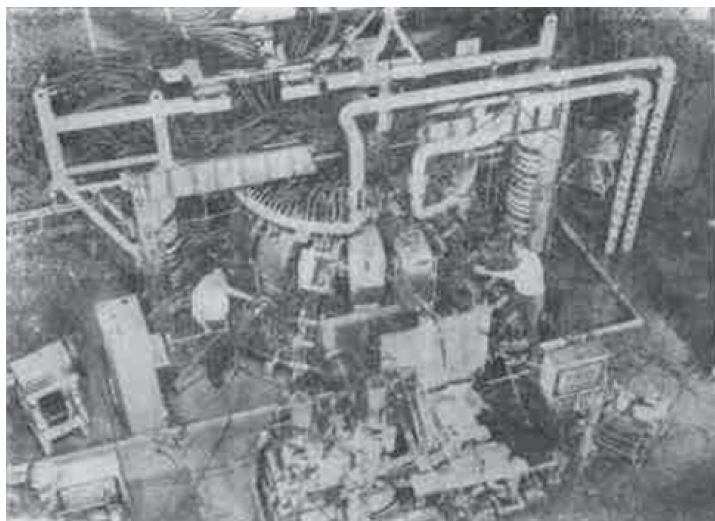


图 9-8 在美国新泽西州普林斯顿等离子体物理学实验室的 ST 托卡马克 [由美国原子能委员会支持]

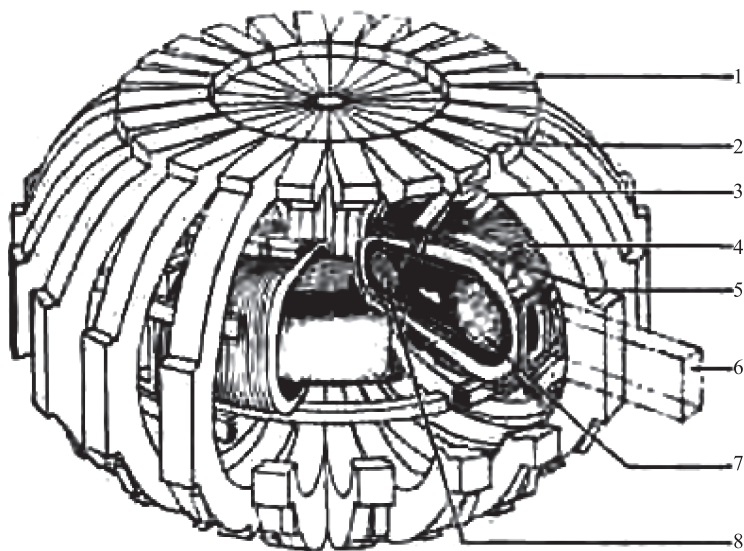


图 9-9 在普林斯顿的 ATC 托卡马克中，等离子体受到了绝热压缩（长半径和短半径都受到压缩），达到的温度比欧姆加热提供的温度更高
绝热环向压缩器（ATC）

1. 环向场线圈（24 个）；
 2. 条状限制器；
 3. 角向场线圈；
 4. 波纹不锈钢真空室；
 5. 接口截面（6 个中的一个）；
 6. 到泵（6 个）；
 7. 初始欧姆加热等离子体；
 8. 经压缩的等离子体
- [普林斯顿大学等离子体物理学实验室，由美国原子能委员会支持]

9.2.6 多极器

与仿星器和托卡马克相反，多极器的磁场完全或主要在角向。通过在等离子体内安装载流导线以形成平均磁阱，而达到平衡和稳定。这由图 9-10 来说明，它示出了加利福尼亚州拉乔拉 (La Jolla) 的通用原子能公司的八极器装置的磁力线。铜环携带相同方向的电流，因此在短轴上存在一个停滞点或零 B 点。在这个区域俘获的等离子体在每个方向都看到一个增长着的磁压 $B_0^2/8\pi$ 。沿着外磁力线运动的等离子体交替地受到了向内和向外的离心力。在离开导线不太远的最小平均 B 区域中，平均曲率是有利的，也就是说，平均的离心力是向内的，因此重力不稳定性不能发生。对其他不稳定性，这也是一个很有效的稳定方案。如果 \mathbf{B} 场是纯角向的，并且磁力线是自身闭合的，电子不能短路任何在邻近磁力线之间可能发生的电势。为了防止这种现象，能够通过一个沿长轴的电流来加上一个环向场。于是，八极器同样也有剪切。图 9-11 示出了在拉乔拉的大型八极器装置的内部。

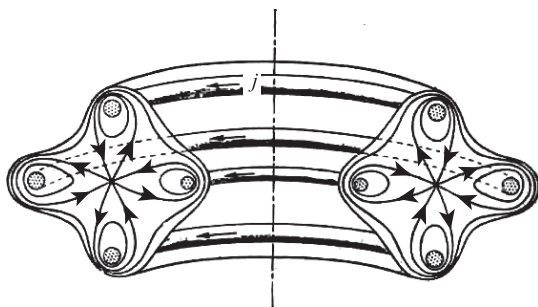


图 9-10 在环向八极器中，四个导体环携带相同方向的电流，产生如图所示的角向磁场。等离子体充满了磁场接近为零的中心区域，并且绕环流动。在更外面的磁面上（超出图示的最外边的磁面），等离子体不具有最小平均 B 稳定性并将因重力不稳定性而损失。

用两个环（四极器）或者用单个环（球形器或偏心漂浮器）也能实现最小 B 原理。在后一种情况下，同样也需要有环向场和垂直场。当然，支撑内环和给内环馈送电流是使用多极器的主要问题。支架必定穿过等离子体，而等离子体在支架上损失。避免这种损失的唯一方法是使环漂浮在空中。通过在环中感应一个电流，并用外部产生的磁场，能够由 $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ 力举起环而瞬时做到这一点。随着电流因电阻而衰变，环就下降。通过冷却环到低温，并采用超导体，电流几乎能无限地维持。于是运用漂浮环，多极器能在稳态运转。图 9-12 示出了在普林斯顿的 FM-1 球形结构器的图，在这个装置中能做到稳态运转。由于需要在环内补充液氦 (He)，以冷却环到 4K，所以运转时间被限制在两个小时左右。

虽然多极器太复杂了以至于不适宜用作反应堆，但在环向装置的研究中，他们已经起了重要的作用。已经试验了剪切和最小 B 稳定作用的相对价值。通过消除不稳定振荡，多极器已经显示出磁误差和不对称电场对约束的有害影响。多极器的研究导致在理论上发现一类不稳定性——俘获粒子不稳定性，它与粒子由于遇到了局部磁镜而没有能力绕磁力线运行有关。最后，多极器提供了新经典扩散定律的第一个实验证明。

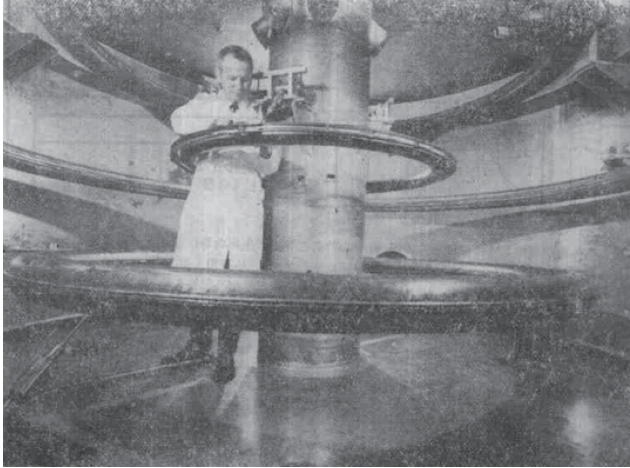


图 9-11 在加利福尼亚州拉乔拉的通用原子能公司的大型八极器装置的内部四个导电的环由穿过等离子体的小金金属线支撑
[蒙通用原子能公司奥卡瓦 (T. Ohkawa) 的允许]

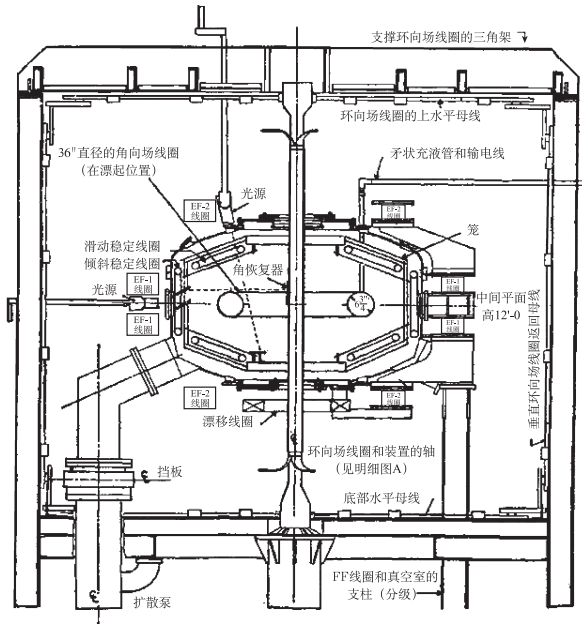


图 9-12 在普林斯顿的 FM-1 球形结构器图

由中心的垂直导线产生环向场；通过在装置周围的鸟笼形导体，电流从顶到底而返回。角向场由超导环电流产生，超导环不用支撑，而由在底部的线圈磁场漂起。接到反馈系统的稳定线圈抑制环运动。环套中的液氮使环保持在超导温度达两个小时之久（在氮蒸发完之前）。用 EF 标记的附加线圈来形成具有最小平均 B 形态的磁面。等离子体环绕着环并具有弯成圆周的管形 [普林斯顿大学等离子体物理学实验室，美国原子能委员会支持]

9.2.7 相对论性束装置

在等离子体内建立适当形状的角向场来漂浮超导环的困难可以用高流量相对论性电子束代替超导环来克服。这种束将不是等离子体的一个壑，事实上，它还会用于加热等离子体。例如，人们也许会设想用电子束代替球形器的环（图 9-12），这个电子束从现有的一个相对论性电子束发生器来产生，它能产生能量 1MeV， 10^6 A 的短脉冲。主要的问题是如何注入和俘获电子。

一种非常大型的这类装置叫做天体器，它建立在加利福尼亚州劳伦斯·利弗莫尔实验室。图 9-13 示出了它的一张图。从加速器出来的 4MeV 电子被注入到两端具有磁镜的磁场。回转电子产生一个与约束场相反的场，并且如果电子流足够强，某些磁力线会在等离子体内形成闭合环，产生一个具有平均磁阱的多极形角向场。沿着长轴加上电流产生的剪切，就使它的磁力线拓扑形状与球形结构器相同。（比较图 9-13 和图 9-12，并使其中一张图旋转 90° ）。虽然，最后在天体器内注入了 600A，6MeV 的电子，但是电流仍然不足以反转轴上的磁场；这种实验已经停止。

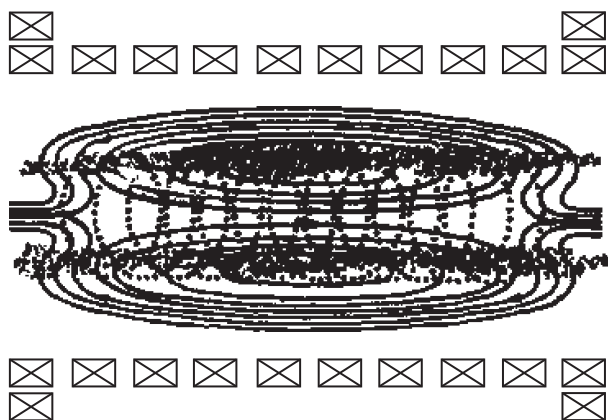


图 9-13 在天体器中，围绕水平对称轴的相对论性电子层（图中的圆点）被磁镜场约束。电子电流使磁镜场畸变成图示的形状，它具有一个磁力线闭合的稳定约束区。相对论性电子也能用来加热该区域的等离子体。

相对论性电子束装置能考虑成托卡马克和多极器之间的中间体。在所有的情况下，环向电流对产生角向磁场是必要的。在托卡马克中，由于扭折不稳定性，不能使电流太大。在多极器中，固体环不能扭折，但它们干扰了等离子体。相对论性电子束不像固体环那样稳定，但由于相对论性带来的质量增加，它们比等离子体电子有较高的刚度。

9.3 磁镜

在 2.3.3 节讨论了磁镜约束的原理。然而，在图 2-8 示出的简单磁镜结构对于重力槽纹不稳定性来说是不稳定的，由于曲率到处都是凸的，所以离心力指向密度梯度的反方向（方程 (6-55)）。为了达到稳定性，能使用沿所谓约飞棒 (ioffe bars) 的辅助电流。图 9-14 示出当这些绕组加入时，等离子体如何畸变成不对称的形状。于是等离子体发现它自己处于绝对磁阱中，也就是在每个方向（径向以及轴向），场强 $|B|$ 都增加。这样一种最小 $|B|$ 形态对于那些低频模（对环来说是讨厌的）是稳定的，但是正像我们将看到的那样，它具有别的不稳定性。在环中，能达到的最好磁形态是一种浅平均磁阱（平均是沿着磁力线取的）。在曲率不适当的区域，仍然能发生局部不稳定性。

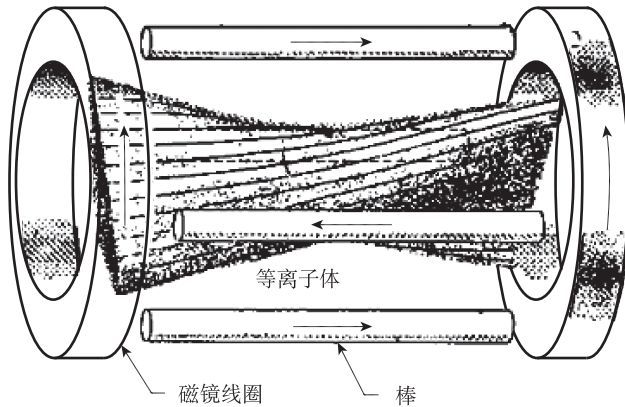


图 9-14 用附加四根约飞棒，（棒以交替方向携带电流）能使磁镜变成最小 $|B|$ 形态。于是等离子体畸变成所示形状，并且对重力不稳定性来说是稳定的

[引自 Scientific American 215, 21 (1966)]



图 9-15 一种“棒球线圈”拓扑地等价于具有约飞棒的简单磁镜

[引自 Scientific American 同上图引文]

图 9-14 形态的进一步改进是把约飞棒和主线圈结合成单个绕组。得到的绕组具有棒球上接缝的形状，并称为棒球线圈（图 9-15）。图 9-16 示出了一个超导棒球线圈，它在劳伦斯·利弗莫尔实验室正在吊入到它的真空室中。等离子体由注入磁场中的高能中性氢原子束的洛伦兹电离来形成。图 9-17 示出了全系统图。

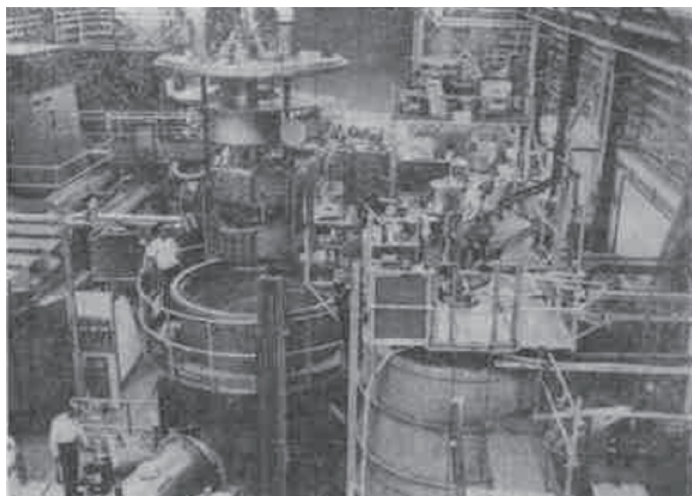


图 9-16 在加利福尼亚州，劳伦斯·利弗莫尔实验室，棒球 II 超导线圈正吊入它的真空室
[由美国原子能委员会支持]

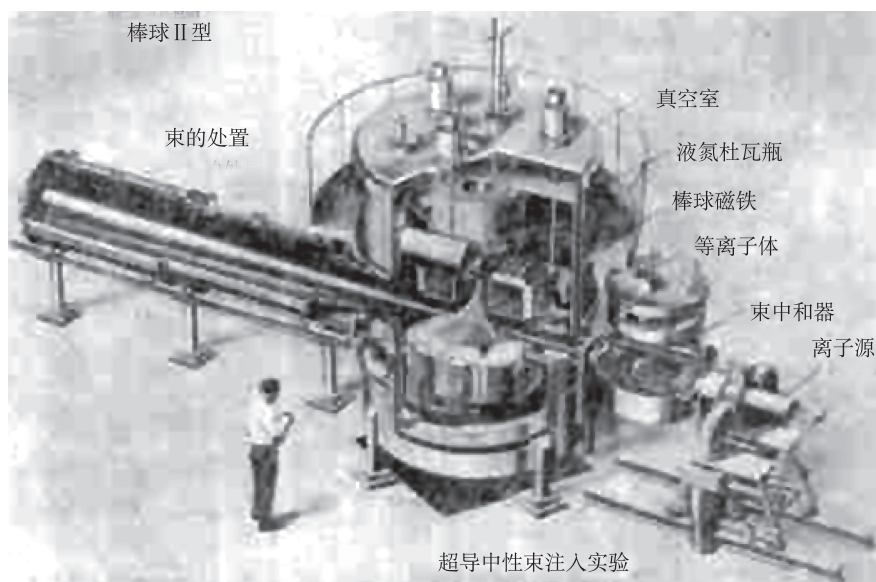


图 9-17 棒球 II 中的等离子体由穿过磁场注入的部分强中性氢原子束的自电离所产生
[劳伦斯·利弗莫尔实验室，由美国原子能委员会支持]

到目前为止，人们得到的最好结果也在利弗莫尔，用一个较大的磁镜装置 2XII 得到。图 9-18 示出了这个装置的图。通过绝热压缩，等离子体被注入和加热，然后进一步由高能中性原子束的注入而加热（高能束与离子交换电荷）。按这种方法，大约 8keV 的离子温度， $6 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ 量级的密度和 0.5ms 量级的约束时间已经达到（虽然这三个指标并非同时达到）。

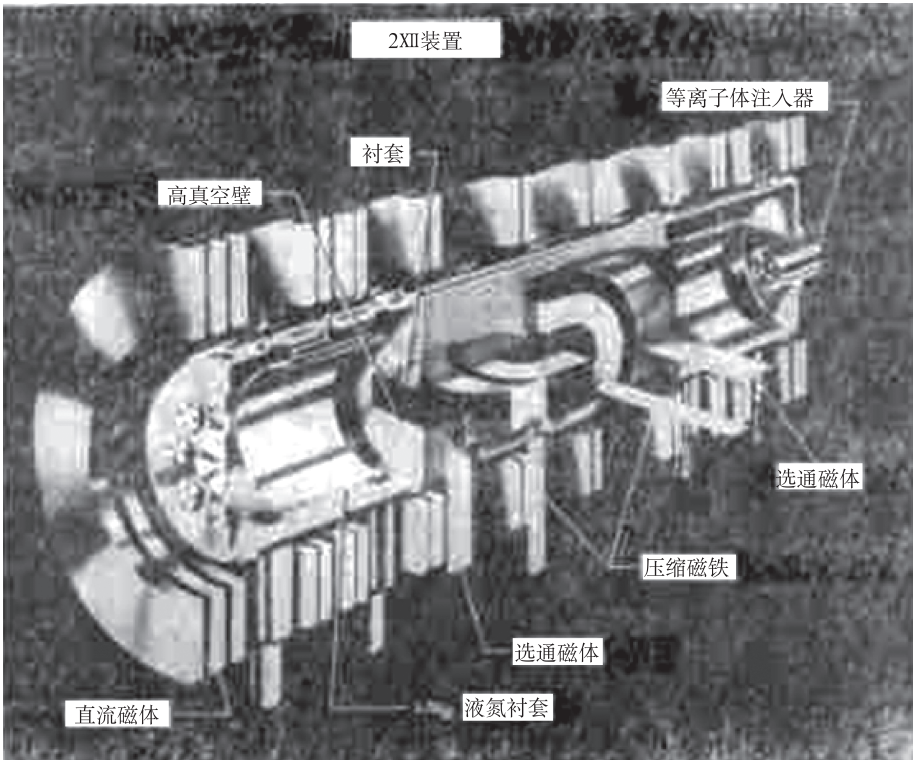


图 9-18 在劳伦斯·利弗莫尔实验室的 2MII 装置是一个由“阴-阳”线圈（一种改进的棒球线圈）产生的大型磁镜
 等离子体由等离子体枪注入，经绝热压缩，然后与中性束交换电荷进一步加热
 [劳伦斯·利弗莫尔实验室，由美国原子能委员会支持]

磁镜装置基本上是稳态装置，在这类装置中注入率和扩散损失率是平衡的。鉴于磁阱防止了引起径向玻姆扩散的不稳定性，这种扩散主要是离开终端的。然而，离开终端的扩散不是通常的扩散，它是在速度空间的扩散。在损失锥（图 2-9）外面的粒子由小角度碰撞能扩散进入损失锥。但只有当频率高于 Ω_c ，以至于不存在离子的绝热不变量（2.8.1 节），不稳定性才能加大速度空间的扩散。由损失锥分布（图 7-7）偏离麦克斯韦分布所驱动的速度-空间不稳定性不幸地恰好落在这个频率区域。如果装置短（像棒球形态那样），并且如果注入速度分布有一个大扩展，那么这种不稳定性大概很少会发生。已经开始设想用不稳定振荡的非线性能级从理论上理解所观察到的扩散率。

在普通的扩散中，只有接近边缘的粒子才能在一次碰撞后离开系统。速度空间的扩散是更危险的，因为它能在整个体积的任何地方发生。一旦一个粒子被散射进入逃逸锥，它在下一次到达一个磁镜喉道时离开。由于这个损失，磁镜装置往往有相对快的损失率；而为了减少这种损失，磁镜反应堆通常设计成比环向反

应堆具有更高的 KT 和较低的密度。

直接发电是一种巧妙的方案，这种方法能把终端损失转化成优势。流出终端的等离子体首先由发散磁场来分散，一直到密度足够低、德拜长度足够长，以至于电场能穿入到等离子体内。通过在磁场中的尖锐弯曲，（离子不能跟随这种弯曲）使电子和离子分离。然后，离子束由一组正电势逐渐变大的电极来减速。电极电势实际上是交变的，以便提供一个强聚焦效应，并防止离子在几乎全部损失它们的动能之前就离开。当一个离子已经变慢到不再感受到强聚焦力时，就径向地穿过栅极离开并对收集离子的电极供应电荷。于是，电极能以提供直流功率的形式连接。图 9-19 显示在一个直接发电的系统中计算的粒子轨迹。如果回收带电粒子能量（直接作为电能）能达到 $>90\%$ 的效率，则能显著地降低用于磁镜反应堆的劳逊判据。

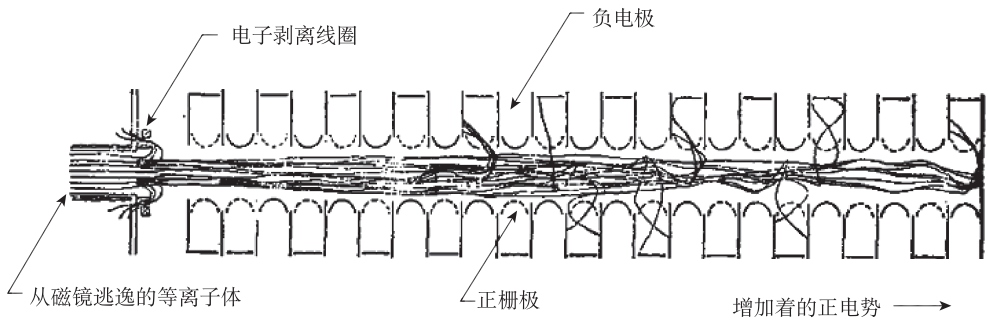


图 9-19 在一个设想的静电减速器中计算的离子轨迹，
这个减速器用来把带电聚变产物的动能直接转换为电能

[承蒙劳伦斯·利弗莫尔实验室波斯特 (R. F. Post) 的允许，由美国原子能委员会支持]

9.4 箍缩装置

箍缩装置基本上是最简单的聚变装置：携带电流的等离子体由它本身电流产生的磁场来约束。有两种互相补充的形态， z -箍缩和 θ -箍缩（图 9-20）。随着电流的上升，增加着的磁场压缩和加热等离子体；约束和加热同时发生。由于需要大电流，箍缩仅以短脉冲运转。 θ -箍缩通常具有一个磁镜形态，以减少终端损失。另外，任何一类箍缩都能弯成环形。

就 z -箍缩来说，很容易计算需要约束热核等离子体的电流。磁压 $B_G^2/8\pi$ 必须足以平衡等离子体压力 nKT 。如果 I 是在半径为 r 的圆柱中的总电流，在表面上的场是 $B_G = 2I/cr$ ，其中 I 用静电单位，或者 $B_G = I/5r$ ，其中 I 以安培为单位。令 $N = \pi r^2 n$ 是每厘米长度的离子数。于是，压力平衡给出

$$\frac{1}{8\pi} \left(\frac{I}{5r} \right)^2 = \frac{NKT}{\pi r^2}$$

或者

$$I^2(A) = 200NKT \tag{9-10}$$

这称为贝内特 (Bennett) 箍缩条件. 当供给所需的几百 kA 电流时, 等离子体常发生扭折不稳定性 (图 9-3) 或腊肠不稳定性, 它是一种与截面局部变窄的畸变相联系的现象. 虽然已经尝试了抑制这些不稳定性的各种方案, 但没有一个是完全成功的.

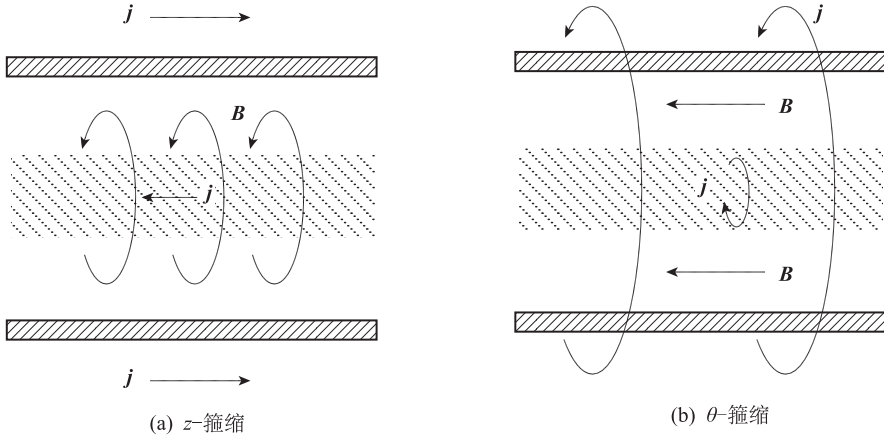


图 9-20 z-箍缩 (a) 和 θ -箍缩 (b) 图

另外, θ -箍缩显示了非凡的稳定度. 图 9-21 示出了密度分布的轴向视图, 它由激光干涉仪得到. 圆条纹表示等离子体的等密度线, 可以看到, 当等离子体衰减时, 它并不移动到壁. 在 θ -箍缩中, 已经达到高至 10^{17} cm^{-3} 的密度, 几个

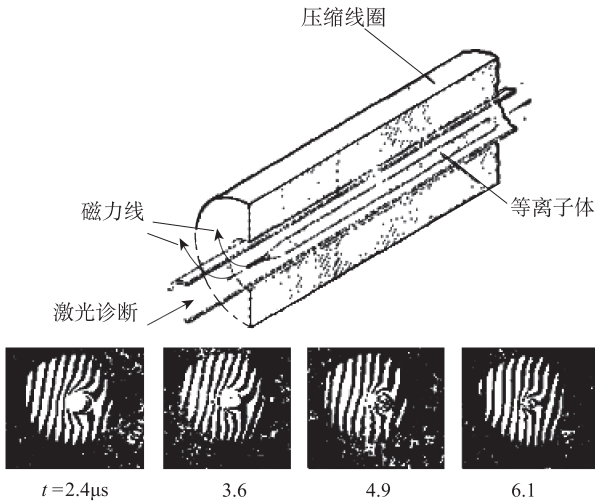


图 9-21 线性 θ -箍缩图

它下面的激光干涉仪图显示了等离子体密度随时间衰减, 但保持了稳定约束
 [洛斯阿拉莫斯国家实验室, 由美国原子能委员会支持]

keV 的温度和几个 μs 的约束时间。在这些密度下，碰撞率是如此之高，以至于磁镜约束不是有效的约束。已经建立了一个长的线性箍缩装置，以增加离子到终端的飞行时间。图 9-22 是一张在新墨西哥洛斯阿拉莫斯国家实验室的长 θ -箍缩装置的照片。为箍缩线圈提供能量所需的电容器组充满了一个大型建筑物。在 θ -箍缩中已经观察到经典扩散。图 9-23 示出了在英国卡拉姆实验室，一个 8m 长的 θ -箍缩装置中，测量到的密度分布。这个分布与经典扩散计算曲线的符合程度远好于同玻姆扩散计算曲线的符合程度。虽然未能测量涨落的程度（探测这样高密度的等离子体是困难的），但很清楚，不稳定性并不起主要的作用。

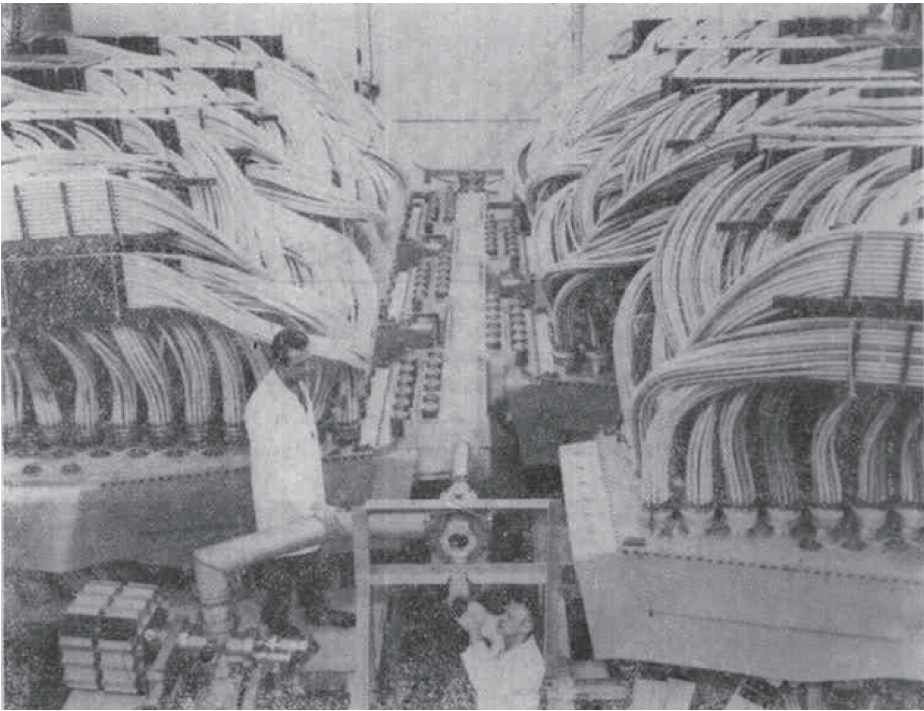


图 9-22 在新墨西哥洛斯阿拉莫斯科学实验室的大型线形 θ -箍缩装置使线圈产生脉冲所需的能量储存在快脉冲电容器中，这些电容器充满了建筑物并由图示的电缆相连 [洛斯阿拉莫斯科学实验室，由美国原子能委员会支持]

为了避免终端损失， θ -箍缩能弯成一个环。图 9-24 示出了在洛斯阿拉莫斯的赛拉克 (Scyllac) 装置的 120° 的一段，这个装置将试验环向 θ -箍缩的概念。将用反馈稳定作用来帮助抑制环向不稳定性。由于 θ -箍缩仅仅在高 β 运转，等离子体加热问题将自动地得到解决。赛拉克是否将遇到类似其他环的同样困难仍然有待了解。有关 θ -箍缩的平衡和稳定还没有进行什么理论工作，而这条聚变途径的成功希望主要在于由线性箍缩得到的实验证据。

θ -箍缩是一种脉冲装置。在反应堆中，每个脉冲中用来形成和压缩等离子

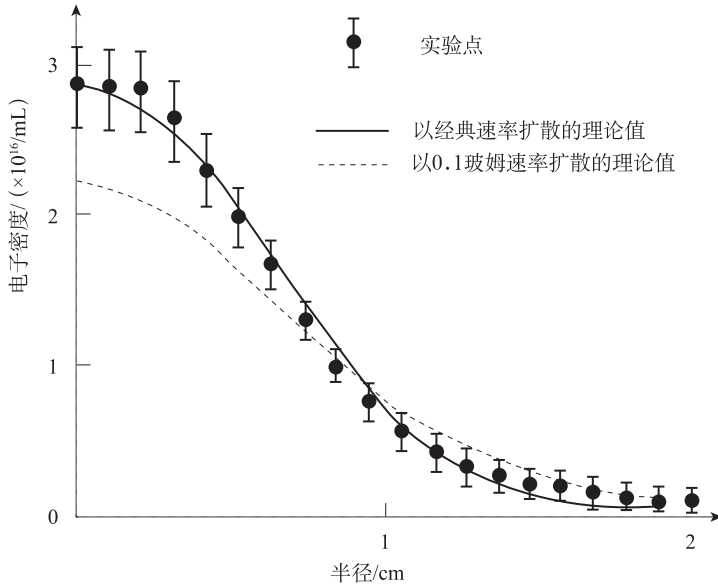


图 9-23 在 8m 长 θ -箍缩的装置中密度分布的测量结果，表明损失受经典碰撞扩散所控制
 实线是根据福克-普朗克方程计算的，虚线是玻姆扩散起作用时预期值的十倍 [H. A. B. Bodin et al.
 Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion II, 533 (1968)
 (International Atomic Energy Agency, Vienna, 1969)]

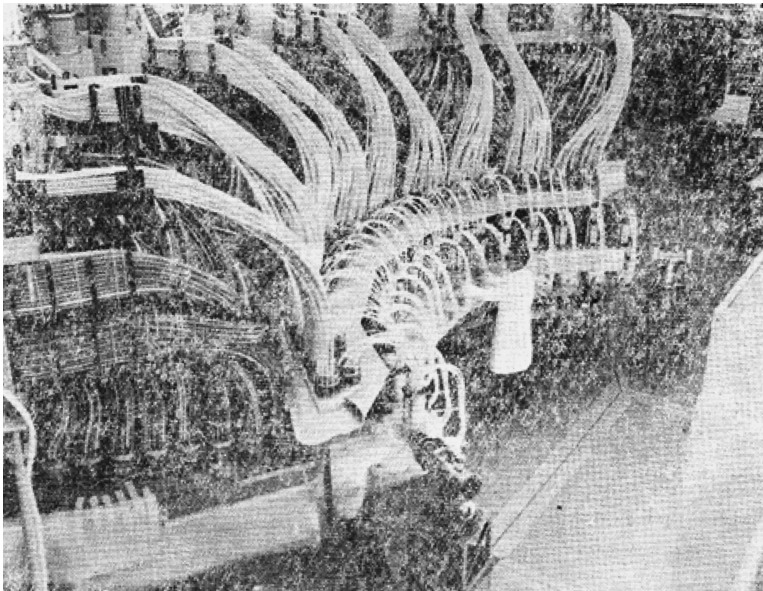


图 9-24 在洛斯阿拉莫斯叫做赛拉克的环向 θ -箍缩装置，图为装置的 120° 的一段
 [洛斯阿拉莫斯科学实验室，由美国原子能委员会支持]

体的能量必定要在两个脉冲之间被有效地补偿和储存。冷却到液氦温度的超导线圈中的电感储能用来担负这项工作。聚变能量直接转换为电自然地出现在这样一个系统中，因为带电的反应产物将使等离子体以大于压缩它所用的能量膨胀。

9.5 激光聚变

脉冲红外激光器能产生巨大的功率密度，就很自然地试图用它来点燃聚变反应。然而，同其他的途径一样，通向成功的道路也是不平坦的。两种功率最大的激光器在表 9-1 中示出。

表 9-1

| 激射介质 | 波长/ μm | 截止密度 n_c/cm^{-3} |
|---------------|-------------------|---------------------------|
| 钽玻璃 | 1.06 | 10^{21} |
| CO_2 | 10.6 | 10^{19} |

临界密度 $n_c = m\omega^2/4\pi e^2$ 是 $\omega = \omega_p$ 时的密度。由于在高于这个密度的等离子体中激光辐射不能传播，因此我们发现参量 n_c 起着决定性的作用。作为一个激光瞬时可达到的功率的例子，我们注意到钽玻璃激光器能在 0.1ns 给出 250J，或 $2.5 \times 10^{12}\text{W}$ 。这个数字等于美国全部电输出容量的 6 倍。

已经提出了两种不同的方法以实现激光聚变。在激光-气体聚变中，用 CO_2 激光束来电离和加热密度约为 10^{17}cm^{-3} 的气态氖和氙的长圆柱。激光通过逆韧致辐射过程被吸收，这个过程简单地由于电子-离子碰撞而引起光波的电阻性阻尼。由于碰撞频率随 $KT_e^{-3/2}$ 改变（方程 (5-59) 和 (5-70)），在热核温度时，这个过程是非常无效的；而且对于 $n \ll n_c$ ，吸收长度将以千米来衡量。无论怎样，预期会发生强度大的非线性参量过程（8.5 节），而这些过程能增加吸收并且能把等离子体长度减少到合理的尺度。为了满足在 $n = 10^{17}\text{cm}^{-3}$ 时的劳逊判据，将需要磁约束。

在激光-靶丸-聚变中，把激光聚焦在固态氖氙小靶丸上，靶丸密度 n_0 大约为 $5 \times 10^{22}\text{cm}^{-3}$ ，质量密度 $\rho_0 = n_0 M$ 大约为 $0.2\text{g}/\text{cm}^3$ 。因为即使对一个钽玻璃激光器， n_0 也远大于 n_c ，一旦在靶丸表面上形成密度为 10^{21}cm^{-3} 的等离子体，激光辐射就被反射。为了电离靶丸的其余部分并把它加热到 10keV，就依赖于参量衰变不稳定性引起的反常吸收（8.5.6 节）。在量级为 10^{22}cm^{-3} 的密度下，不可能建立一个强到足以平衡等离子体压力 nKT 的磁场。反应必定以持续时间小于 10^{-10}s 的微型爆炸出现。等离子体膨胀的速度由离子惯性和用来加速离子的等离子体势（ KT_e 量级）来决定。因此，膨胀速度用声速 $v_s = (KT_e/M)^{1/2}$ 来衡量；约束时间 τ 由 $\tau \approx R/v_s$ 给出，其中 R 是靶丸半径。当这个值和有关效率的合理估计值一起运用时，就得到激光聚变的 $n\tau$ 劳逊判据。这个判据通常表述为

$$\rho R > 1 \text{g/cm}^2 \quad (9-11)$$

对 $\rho = \rho_0$ ，为了满足上式，将需要一个大于 $3 \times 10^{10} \text{J}$ 的激光脉冲，超出了可信的范围。

一个可能的解决办法是压缩靶丸到 $\rho = 10^4 \rho_0$ 。在高于 10^{15}W/cm^2 的强度下，辐射压力具有 10^6atm ($1 \text{atm} = 1.01 \times 10^5 \text{Pa}$) 的量级。然而，这个压力不足以达到这种压缩。图 9-25 说明了打算做的方案。靶丸从所有方向被激光束照射。在临界层由参量过程吸收激光能量，加热了等离子体壳层。然后壳层膨胀，它的动量被用来压缩中心核，中心核占原靶的 10%。于是在中心发生聚变，释放的能量被周围的液锂层所俘获。加热靶丸所需的能量比例于它的质量 $\rho (4/3) \pi R^3$ 。如果方程 (9-11) 满足并且 $R = \rho^{-1}$ ，激光能量正比于 ρ^{-2} 。这样通过压缩 10^4 倍就可使能量减少 10^8 倍。所需的脉冲能量减少到低于 1MJ 的实际值。

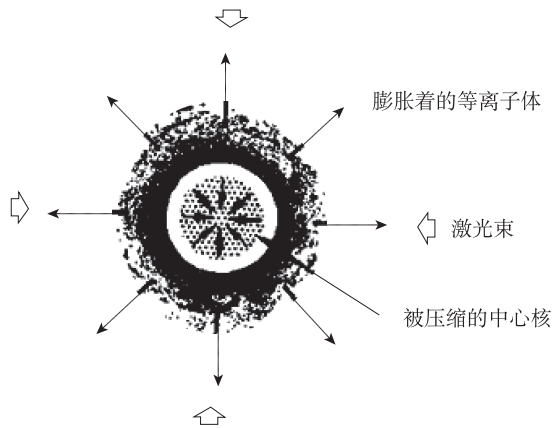


图 9-25 用激光加热固态氘氚靶丸产生聚变的方案图
它包括用会聚激光束（最外面箭头）对称加热等离子体壳层，
加热壳层的膨胀（长箭头），中心核由于反冲的压缩（最里面的箭头）

有许多问题尚待解决，激光能量必须在足够短的时间内供给。为了避免瑞利-泰勒不稳定性，入射的光辐射必定要充分地向各向同性。脉冲的时间波形必须具有这样的形状，使得在绝热压缩之前能预热中心核到适当的温度。如果温度太高，压缩后密度太低；如果温度太低，点火温度将达不到。在参量不稳定性中加热的电子绝不会快到能穿透和预热中心核。其他参量不稳定性，例如反向散射，使光在到达临界 $\omega = \omega_p$ 层之前不反射。必须要极大地增加激光的效率、重复率以及激光的能量。具有较高 n_c 值的较短波长激光器（如 Xe（氙）激光器）的发展会放宽这些要求。虽然在激光-靶丸-聚变中免除了困难的磁约束问题，但这些新的问题本身是非常难于解决的。

9.6 等离子体加热

理论上了解等离子体如何吸收能量和能量如何转换为无规则热运动仍然处于相当原始的阶段，一部分原因是问题的非线性性质，另一部分原因是在实验中把加热效应同约束效应分开是困难的。以下列举能加热等离子体的某些方法。

(1) **欧姆加热**。这是在一个电阻性等离子体中简单地由电流耗散的 I^2R 焦耳热。在仿星器和托卡马克中，欧姆加热是主要的方法。

(2) **绝热压缩**。这是在某些磁镜装置， θ -箍缩和激光-靶丸-聚变中使用的主要方法。近来，它也被用到了托卡马克中（图 9-9）。

(3) **离子波加热**。第一种试验射频加热的形式是离子回旋共振加热（ICRH）。在 $\omega < \Omega_c$ 的区域，由一个围绕等离子体的射频线圈来激发离子回旋电磁波。波传播进入 B 场减少的区域（“磁滩”），在那里达到了共振条件 $\omega = \Omega_c$ ，波能量通过回旋加速被离子吸收。也能使用和 4.19 节磁声模有关的快速磁流体波。用 4.11 节下杂化振荡有关的波也已经得到了很有希望的结果。

(4) **电子波加热**。用高功率微波管，人们能在 GHz 的电子回旋频率范围加速电子。这叫做电子回旋加热（ECRH）。虽然用这个方法能产生非常大的电子能量，但是这个能量通常不能被热化，而留在少量的“垂直逃逸”的电子中。较低的频率源能通过电阻性耗散产生非共振加热。共振和非共振波的一种结合给出最好的结果，这也许是因为波-波耦合效应。注意到电子加热本身是没有用处的；对于聚变来说，能量最后必须转移到离子中。

(5) **带电粒子注入**。磁镜装置和多极器通常充满了从等离子体“枪”出来的等离子体。这些枪由 $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ 加速能够以 kV 能量注入离子和电子。加速器能产生具有足够密度（对等离子体加热有意义的密度）的 300keV 离子束或 6MeV 的电子束。这样的粒子具有大到足够穿越磁场的拉莫尔半径。

(6) **中性粒子束注入**。在一个气室中，通过使加速的离子束中性化，有可能产生 10^4 eV 或更高能量的中性氢或氦的强粒子束。中性粒子能够进入磁场并与等离子体的冷离子交换电荷，留下了一个快速离子和一个慢速中性原子，然后慢原子逃逸。这种方法可用于磁镜和环。当用于已经充满等离子体的环时，自然出现了附加的好处：交换电荷的离子具有足够能量经历聚变反应，而在同时，它们变慢并加热等离子体。这就导致劳逊判据的降低。在“双组分环”（TCT）概念中，虽然欧姆加热的等离子体低于点火温度，但能用氦中性束注入到 2keV 的氦等离子体中（或者反过来，用氦中性束注入到氦等离子体中），来达到能量得失相当（图 9-26）。

(7) **磁泵浦**。在环的局部磁镜区域磁场强度的振荡如果有这样的频率，以至于绝热不变性被破坏，则能把能量转移给离子（参见 2.8.1 节）。

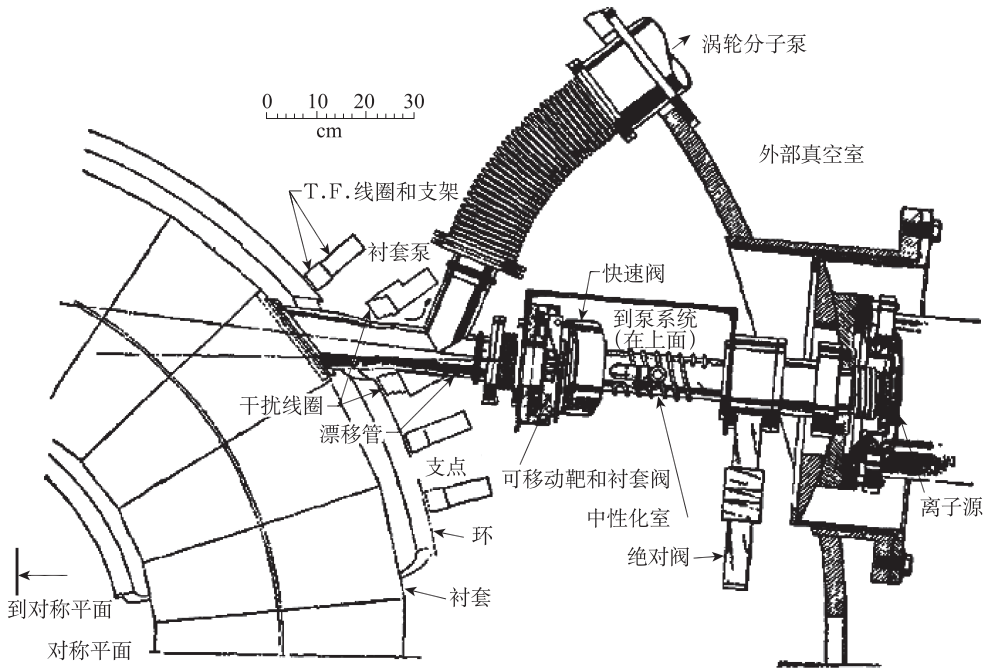


图 9-26 奥马克 (ORMAK) 注入系统：中性束注入器的简图

它通过注入的快中性原子和相对慢的冷等离子体离子之间的电荷交换来加热托卡马克等离子体。当产生的快速离子同离子分布的主体热化时，它们能在这个过程中经历聚变反应。这些反应构成了在其他加热方法中不存在的附加好处，并且是“双组分环”（TCT）概念的主要特征
 [承蒙橡树岭国家实验室的允许，由联合碳化物公司按照美国原子能委员会的合同经营]

(8) **束-等离子体相互作用**。快速电子束或离子束注入等离子体能引起双流不稳定性 (6.6 节)。有方向的束能量被转换成波能量，然后，波能量必定通过朗道阻尼或参量过程转换成粒子能量。通过低频调制或与磁场以一个角度注入能使电子束更有效地和离子耦合。兆安培 (MA) 相对论性电子束的存在已经增加了对这种加热方法的兴趣。然而，总是存在如何把电子注入磁场的问题。

(9) **湍流加热**。实验已经证明，在等离子体中感应一个快速上升的电子流引起一个具有宽谱电场涨落的湍流。电子因这些无规则电场而不是由于同离子的碰撞而变慢。于是，即使可忽略库仑碰撞，也发生具有反常电阻率的欧姆加热。虽然许多实验工作已经在线型磁镜装置上完成，但湍流加热是加热托卡马克的一种有潜在能力的重要方法。

(10) **参量波加热**。由于在波相速度和粒子热速度之间的不同，强微波或红外激光束并不直接与共振粒子耦合。然而，电磁波能参量地衰变成离子波，而能量可通过朗道阻尼转移给粒子。

(11) **场湮没**. 如果磁场有一个停滞点, 像在多极器 (图 9-10) 或在地球磁层的尾巴中那样, 则磁场能量可通过大的感应电场而转换成粒子能量. 如果能利用这种方法, 显然是加热磁约束等离子体的一种非常经济的途径.

9.7 聚变技术

甚至在解决了等离子体的约束和加热问题, 证明了受控聚变反应的科学可行性以后, 在建造聚变反应堆以前, 仍然有大量的技术问题尚待解决. 下面列出了这些问题中的一部分.

(1) **壁材料**. 暴露在等离子体中的真空壁必定要由具有以下性质的材料来制作, 它容易制造, 能经得起高温, 它不因 14MeV 的大通量中子或带电粒子的溅射而损坏, 并且它不能衰变成长寿命的放射性产物. 在已知的材料中, 铌最符合这些技术要求, 但会变成高度放射性的材料, 因此用完的壁材料的储存变成了一个问題.

(2) **锂再生区**. 再生区有双重目的, 通过方程 (9-2) 反应增值氘和捕获聚变反应产生的中子热能. 虽然锂是一种优良的冷却剂, 但存在严重的腐蚀问题和穿过磁场泵浦液体金属的问题.

(3) **磁铁设计**. 磁装置将需要大量的超导材料和冷却它的大型低温系统. 线圈的支持必须要防备巨大的磁应力.

(4) **燃料的注入和回收**. 在环中注入氘和氚不是一个平凡的问题. 由于在约束时间内仅有一小部分氚发生反应, 它必须在真空系统中得到非常有效的回收. 在稳态反应堆中, 存在着提取反应产物 (如 He 和 H) 的问题.

(5) **环境公害**. 除了在结构材料中由于中子而诱导出的放射性外, 还存在着重要的氚泄漏问题. 虽然所有产生的氚将用完, 但在反应堆现场存在相当多的氚库存, 它由于偶然事件散入到水源或由于扩散而进入大气层都是一个重要的问题.

(6) **裂变聚变混合反应堆**. 通过把裂变反应堆和聚变反应堆结合起来, 并利用聚变产生的中子来帮助裂变过程, 能降低劳逊判据. 这种装置确实有理由成为第一个实际的受控聚变装置.

以上所述的内容只不过是今后任务的少量实例. 当人们认识到前面描述的每个磁装置, 每种加热方法和每种能量转换方法在它们实现以前必定要经历多年的工程发展, 就能设想聚变技术领域的范围. 工程设计仅在最近才开始. 图 9-27 是在田纳西州橡树岭国家实验室所设计的托卡马克反应堆的略图, 它将给读者一个聚变反应堆像什么的概念.

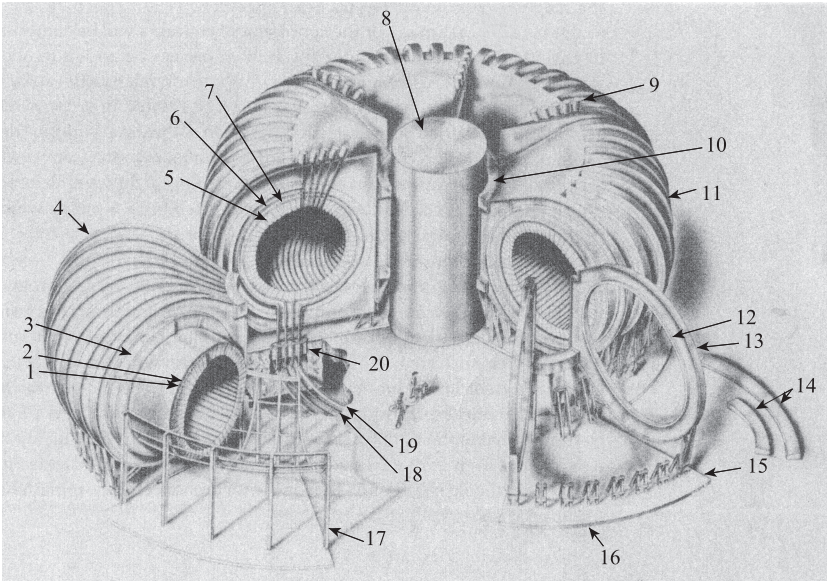


图 9-27 一种 1000MW 热托卡马克反应堆设计研究的设想图

它由钾蒸气来冷却并应用超导磁铁。内部的格状结构是锂再生区。[弗拉兹 (A. P. Fraas), 橡树岭国家实验室, 由联合碳化物公司原子核部代表美国原子能委员会经营]

环向聚变反应堆 (1000MW)

1. 钾锅炉馈送管道; 2. 钾蒸气管道; 3. 磁屏蔽; 4. 六分之一段 (接近装配); 5. 再生区部分;
6. 钾蒸气出口支管; 7. 钾锅炉馈送支管; 8. 角向磁芯; 9. 中性粒子束注入器; 10. 压缩环;
11. 磁线圈上的隔热层; 12. 磁线圈; 13. 磁加固环; 14. 再生区部分; 15. 六分之一的支撑网;
16. 六分之一段, 在装配过程的初期; 17. 再生区结构的装配架; 18. 钾馈送管道; 19. 钾蒸气管道;
20. 到高真空泵的导管

9.8 结束语

经过等离子体物理学家二十年以上的探索, 稳定磁约束装置已经缩小到三种主要的结构: 托卡马克、最小 B 磁镜和环向 θ 箍缩。托卡马克仍然需要知道电子能量的控制、辅助加热方法和在高 β 时的稳定性试验。磁镜需要知道所观察的约束, 在高 β 时的试验和大规模直接转换效率的试验。 θ 箍缩则在环向构形的稳定性方面, 面临着一个决定性的试验。

论证受控聚变科学上可行性的下一步进展是发展新的加热方法和理论上阐明加热过程。一系列较大型的装置将验证以我们现在对不稳定性和约束的认识为基础的定标律。在实现了等离子体约束以后, 聚变技术问题仍然有待解决。在确定磁构形以前, 反应堆工程不会动工。

在最后的产物中，许多领域的概念很可能将结合起来。在环中，也许通过用相对论性电子束，能将最小 B 稳定作用加到剪切稳定作用上。为了得到中性束注入的好处，可能在环中建立局部的磁镜区域。甚至在一个普通的环中，局部磁镜中的俘获也可能是一个重要的现象。反过来，磁镜装置可能连成环形以减少终端损失。加在一个环上的激波加热将使环和 θ -箍缩相似。在赛拉克构形中， θ -箍缩恰好是一个高 β 环。

虽然在实验中已经逐步向劳逊判据和点火温度前进，但是，可以说真正的进展在于发展等离子体物理学的牢固基础。认识等离子体复杂行为的成功已经得到了证实，例如，在最小 B 稳定作用和新经典扩散理论和实验之间的一致性。现在，等离子体物理学家的数学技巧和物理上的直观知识使得他们能相当快地分析和认识实验的新结果，基础的等离子体线性理论已经进入到教科书，但是探索聚变能量仍然是尚未结束的一章。

附 录

I 单位制

本书使用的单位制是 cgs 静电单位制。这个单位制只在一个次要方面区别于通常使用的 cgs 高斯单位制。在这两种单位制中，真空中的麦克斯韦方程和牛顿第二定律表达如下：

| cgs-esu | cgs-Gaussian |
|---|---|
| $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi e(n_i - n_e)$ | $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi e(n_i - n_e)$ |
| $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ | $c \nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}_G$ |
| $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ | $\nabla \cdot \mathbf{B}_G = 0$ |
| $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j} + \dot{\mathbf{E}}$ | $c \nabla \times \mathbf{B}_G = 4\pi \mathbf{j} + \dot{\mathbf{E}}$ |
| $\epsilon = \mu = 1$ | $\epsilon = \mu = 1$ |
| $m \frac{dv}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ | $m \frac{dv}{dt} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_G\right)$ |

本书中，没有下标的 \mathbf{B} 表示它用静电单位来测量。当 \mathbf{B} 以通常的高斯单位来测量时，则用 \mathbf{B}_G 来标记。从上面的方程很清楚地看到，如果 \mathbf{B} 与 \mathbf{B}_G/c 等同的话，这两种单位制是相同的。其他所有的量都不变。

实际上，人们通常需要以实用单位来计算电场 \mathbf{E} 或势 ϕ 。我们只需记住 $1\text{esu} = 300\text{V}$ 。除了下面这种形式

$$\mathbf{j} = ne\mathbf{v}$$

以外，通常不需要计算电流，式中的 \mathbf{j} 是电流密度。如果我们用 $e = 1.6 \times 10^{-19}\text{C}$ 而不用静电值 $e = 4.8 \times 10^{-10}\text{esu}$ ，则上式的 \mathbf{j} 以 A/cm^2 为单位。

注意到 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 的漂移速度在静电单位制中为 $\mathbf{v} = \mathbf{E}/B$ ，而在高斯单位制中则为 $\mathbf{v} = c\mathbf{E}/B_G$ 。这样， \mathbf{E}/B_G 是无量纲的，而 \mathbf{E}/B 是有速度的量纲。 \mathbf{E} 中出现的因子 300 与 B 中的因子 $c = 3 \times 10^{10}\text{cm/s}$ 相结合就给出方程 (2-16) 中的常数 10^8 。

还不具备阅读等离子体物理学研究报告能力的大学生也许更熟悉有理化的 mks 单位制。在 mks 系统中，真空中的麦克斯韦方程如下：

$$\begin{aligned} & \text{mks} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= e(n_i - n_e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \dot{\mathbf{D}} \\ \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}\end{aligned}$$

运动方程和连续性方程与 cgs-esu 中的方程相同. 为了计算多数的物理量, 必须记住 $\epsilon_0^{-1} = 36\pi \times 10^9$ 和 $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} = 3 \times 10^8$ m/s. 虽然, 在实用单位制中 \mathbf{E} 和 \mathbf{j} 以 V/m 和 A/m² 为单位, \mathbf{B} 则用 Wb/m² 来量度. 为了转化成更通用的高斯, 要记住 1 Wb/m² = 10⁴ G. 频率单位和 cgs 单位制相同, 但频率的公式同其他等离子体物理量的公式一样, 可以是不同的. 一些重要的例子在附录 II 中给出.

在 mks 单位制中, E/B 具有速度量纲. 再次明确地提到这个事实是因为它对检查方程中不同项的量纲以找出代数运算错误是有用的.

能量 KT 通常用 eV 给出. 为了转换到 cgs 单位制, 要记住 1 eV = 1.6 × 10⁻¹² erg. 由于 1 J = 10⁷ erg, 为了转换到 mks 单位制, 我们必须用 1.6 × 10⁻¹⁹ 乘上用 eV 为单位的 KT . 这个数当然就是在 mks 单位制中的电子电荷, 因为电子伏特 (electron volt) 就是这样定义的. 要注意, 在 mks 单位制中密度 n 较 cgs 单位制大 10¹⁶ 倍.

II 有用的常数和公式

| | 常数 | |
|----------------------------|---|---|
| | cgs | mks |
| c 光速 | 3×10^{10} cm/s | 3×10^8 m/s |
| e 电子电荷 | 4.8×10^{-10} esu | 1.6×10^{-19} C |
| m 电子质量 | 0.91×10^{-27} g | 0.91×10^{-30} kg |
| M 质子质量 | 1.67×10^{-24} g | 1.67×10^{-27} kg |
| m/M | 1837 | 1837 |
| $(m/M)^{1/2}$ | 43 | 43 |
| K 玻尔兹曼常数 | 1.38×10^{-16} erg/K | 1.38×10^{-23} J/K |
| eV 电子伏特 | 1.6×10^{-12} erg | 1.6×10^{-19} J |
| 1eV 的温度 (对应 KT) | 11 600K | 11 600K |
| πa_0^2 氢原子截面 | 0.88×10^{-16} cm ² | 0.88×10^{-20} m ² |
| 在室温和 1mTorr 压力下 中性原子的密度 | 3.3×10^{13} cm ⁻³ | 3.3×10^{19} m ⁻³ |
| 公式 | | |
| | cgs | mks |
| ω_p 等离子体频率 | $\left(\frac{4\pi n e^2}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$ | $\left(\frac{n e^2}{\epsilon_0 m}\right)^{\frac{1}{2}}$ |
| | | 便于使用的公式 |
| | | $f_p = 9000 \sqrt{n} \text{ s}^{-1}$ |

| | | | | |
|------------------|-------------------|---|---|--|
| ω_e | 电子回旋频率 | $\frac{eB_G}{mc}$ | $\frac{eB}{m}$ | $f_c = 2.8B \text{ GHz}$ (B 用 kG) |
| λ_D | 德拜长度 | $\left(\frac{KT_e}{4\pi ne^2}\right)^{1/2}$ | $\left(\frac{\epsilon_0 KT_e}{ne^2}\right)^{1/2}$ | $6.9 (T/n)^{1/2} \text{ cm}$ |
| r_L | 拉莫尔半径 | $\frac{mv_{\perp}c}{eB_G}$ | $\frac{mv_{\perp}}{eB}$ | |
| v_A | 阿尔芬速度 | $\frac{B_G}{(4\pi\rho)^{1/2}}$ | $\frac{B}{(\mu_0\rho)^{1/2}}$ | $2.2 \times 10^{11} \frac{B_G \text{ cm}}{\sqrt{n} \text{ s}}$ (H) |
| v_S | 声速 ($T_i=0$) | $\left(\frac{KT_e}{M}\right)^{1/2}$ | $\left(\frac{KT_e}{M}\right)^{1/2}$ | $10^6 (KT_{eV})^{1/2} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ (H) |
| v_E | $E \times B$ 漂移速度 | $\frac{cE}{B_G}$ | $\frac{E}{B}$ | $10^8 \frac{E \text{ (V/cm)}}{B_G} \text{ cm/s}$ |
| v_D | 抗磁性漂移速度 | $\frac{KTn'}{eBn}$ | $\frac{KTn'}{eBn}$ | $10^8 \frac{KT_{eV} \text{ cm}}{B_G R \text{ s}}$ |
| β | 磁压/等离子体压力 | $\frac{nKT}{B_G^2/8\pi}$ | $\frac{nKT}{B^2/2\mu_0}$ | |
| v_{the} | 电子热速度 | $\left(\frac{2KT_e}{m}\right)^{1/2}$ | $\left(\frac{2KT_e}{m}\right)^{1/2}$ | $5.9 \times 10^7 (KT_{eV})^{1/2} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ |
| ν_{ei} | 电子-离子碰撞频率 | $\approx \frac{\omega_p}{N_D}$ | | $1.5 \times 10^{-6} \frac{n \ln \Lambda}{T_{eV}^{3/2}}$ |
| ν_{ee} | 电子-电子碰撞频率 | | | $3 \times 10^{-6} \frac{n \ln \Lambda}{T_{eV}^{3/2}}$ |
| ν_{ii} | 离子-离子碰撞频率 | $Z^4 \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}$ | $\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \nu_{ee}$ | |
| λ_{ei} | 碰撞平均自由程 | $\approx \lambda_{ee} \approx \lambda_{ii}$ | | $4.5 \times 10^{13} \frac{T_{eV}^2}{n \ln \Lambda} \text{ cm}$ |

III 有用的矢量关系

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \equiv (\mathbf{ABC})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{ABD})\mathbf{C} - (\mathbf{ABC})\mathbf{D} = (\mathbf{ACD})\mathbf{B} - (\mathbf{BCD})\mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \nabla \phi \times \mathbf{A} + \phi \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{B} (\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

$$\nabla \times [(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A}] = (\mathbf{A} \cdot \nabla) (\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \cdot \mathbf{A}) (\nabla \times \mathbf{A}) - [(\nabla \times \mathbf{A}) \nabla] \mathbf{A}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A}$$

$$\nabla \times \nabla \phi = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

柱坐标 (r, θ, z)

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} A_\theta + \frac{\partial}{\partial z} A_z$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial r} \right] \hat{\mathbf{z}}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} = (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A} &= \left[\nabla^2 A_r - \frac{1}{r^2} \left(A_r + 2 \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \hat{\mathbf{r}} \\ &\quad + \left[\nabla^2 A_\theta - \frac{1}{r^2} \left(A_\theta - 2 \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \nabla^2 A_z \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} &= \hat{\mathbf{r}} \left(A_r \frac{\partial B_r}{\partial r} + A_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} + A_z \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{1}{r} A_\theta B_\theta \right) \\ &\quad + \hat{\boldsymbol{\theta}} \left(A_r \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + A_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + A_z \frac{\partial B_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} A_\theta B_r \right) \\ &\quad + \hat{\mathbf{z}} \left(A_r \frac{\partial B_z}{\partial r} + A_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

英中文对照索引

- Absolute magnetic well, 绝对磁阱 212
- Adiabatic compression, 绝热压缩 28, 33, 44, 207, 208, 213, 220, 221
- Adiabatic invariant, 绝热不变量 29, 30, 33, 35, 214
- Alfvén velocity, 阿尔芬速度 88, 90, 228
- Alfvén wave, 阿尔芬波 87-90, 92, 93, 95, 125
- Ambipolar diffusion, 双极性扩散 99, 109, 111
- across **B**, 越过 **B** 的双极性扩散 109
- Anomalous absorption, 反常吸收 219
- Anomalous diffusion, 反常扩散 110, 123
- Anomalous resistivity, 反常电阻率 172, 222
- Antimatter, 反物质 77
- Aspect ratio (of Tokamak), (托卡马克的) 纵横比 206, 207
- Astron, 天体器 203, 211
- Average kinetic energy, 平均动能 4, 9
- Backscattering instability, 反向散射不稳定性 187
- Banana diffusion, 香蕉形扩散 124
- Banana orbit, 香蕉形轨道 123, 124, 205
- Baseball coil, 棒球线圈 212, 213
- Beam-plasma instability, 束-等离子体不稳定性 136, 148
- Beam-plasma interactions, 束-等离子体相互作用 171
- Bennett pinch, 贝内特箍缩 216
- Bernstein-Greene-Kruskal mode, 伯恩斯坦-格林-克鲁斯卡模 167
- Bessel function of order zero, 零阶贝塞尔函数 103
- Bessel's equation, 贝塞尔方程 103
- Beta, β 128-132, 136, 217, 224, 225, 228
- BGK mode, BGK 模 167
- Bohm diffusion, 玻姆扩散 121, 122, 214, 217
- Bohm-Gross waves, 玻姆-格罗斯波 56, 187
- Bohm sheath criterion, 玻姆鞘层判据 175, 176
- Bohm time, 玻姆时间 122
- Boltzmann equation, 玻尔兹曼方程 146-148, 150, 151
- Boltzmann relation, 玻尔兹曼关系 9, 17, 18, 48, 61, 63, 71, 72, 77, 139, 175, 176, 178, 204
- Boltzmann's constant, 玻尔兹曼常数 227
- Bow shock, 弓形激波 178
- Bremsstrahlung, 轫致辐射 200, 201
- Centrifugal force, 离心力 17, 19,

- 125, 136, 203, 209, 212
- Charge-exchange, 电荷交换 221
- Child-Langmuir law, 蔡尔德-朗缪尔定律 177
- Circular polarization, 圆偏振 79, 83-86, 96
- CMA diagram, CMA 图 93, 94
- CO₂ laser, 二氧化碳激光器 76
- Collective behavior, 集体行为 2, 8
- Collision frequency, 碰撞频率 12, 23, 98, 99, 108, 113-115, 124, 219, 228
- Collisional damping, 碰撞阻尼 60, 158
- Collisionless damping, 无碰撞阻尼 156, 158, 168
- Collisionless plasma, 无碰撞等离子体 43, 115, 126, 156, 168
- Collisions, 碰撞 2, 5, 8, 13, 22, 30, 34, 38, 42-44, 54, 61, 76, 77, 97-99, 105-108, 111-117, 119, 123, 124, 141, 142, 146-148, 150, 153, 156, 158, 172, 174, 177, 178, 182, 188, 190, 194, 197, 200, 202, 203, 214, 217, 219, 222, 228
- Coulomb, 库仑碰撞 113, 121, 147, 200, 222
- neutral, 中性 1, 2, 8, 12, 38, 42, 49, 52, 53, 61, 62, 70, 72, 97, 98, 104-108, 110, 111, 113, 115, 117, 119, 147, 188, 212, 213, 221, 224, 225, 227
- Communications blackout, 通信中断 77
- Computer simulation, 计算机模拟 34
- Conductivity of plasma, 等离子体电导率 116
- Confinement time, 约束时间 111, 122, 123, 125, 200, 201, 207, 213, 217, 219, 223
- Continuity equation, 连续性方程 37, 43, 53, 60, 61, 63, 69, 71, 72, 91, 99, 103, 105, 109, 118, 120, 121, 134, 136, 138, 140, 150, 159, 163, 175, 191, 227
- Continuity, equation of, 连续性方程 37, 43, 53, 60, 61, 63, 69, 71, 72, 91, 99, 103, 105, 109, 118, 120, 121, 134, 136, 138, 140, 150, 159, 163, 175, 191, 227
- Contour integration, 围道积分 152
- Controlled fusion, 受控(核)聚变 10, 106, 122, 199
- Controlled thermonuclear reactions, 受控热核反应 97, 199
- Convection, 对流 39, 48, 121, 123, 173, 205
- Convective cells, 对流单元 123
- Convective derivative, 运流微商 147
- Coulomb collisions, 库仑碰撞 113, 121, 147, 200, 222
- Coulomb logarithm, $\ln\Lambda$, 库仑对数, $\ln\Lambda$ 114
- Crab nebula, 蟹状星云 11, 130
- Critical density, 临界密度 74, 76, 219
- Cross section, 截面 10, 97, 98, 111, 113-116, 119, 123, 124, 128, 139, 200, 202, 205, 207, 208, 216, 227
- Curvature drift, 曲率漂移 19, 29, 47, 122, 123
- Cutoff, 截止 58, 74, 75, 77, 78,

- 81, 82, 84, 86, 87, 93, 219
- Cyclotron frequency, 回旋频率 12, 13, 38, 54, 71, 85, 90, 221, 228
- Cyclotron heating, 回旋加热 30, 221
- Cyclotron resonance, 回旋共振 66, 84, 88, 221
- Damping, 阻尼 59, 60, 74, 90, 102, 125, 126, 134, 153, 154, 156, 157, 161, 162, 167, 168, 170, 173, 182, 186-188, 191, 194, 198, 219
- collisional, 碰撞阻尼 60, 158
- collisionless, 无碰撞阻尼 156, 158, 168
- Landau, 朗道阻尼 135, 152, 156-158, 161-163, 166-168, 170, 173, 188, 194, 198, 222
- Debye length, 德拜长度 7, 62, 99, 174, 177, 215, 228
- Debye shielding, 德拜屏蔽 6, 8, 49, 70, 71, 114, 123, 174
- Decay instability, 衰变不稳定性 190, 192, 219
- Decay of plasma, 等离子体衰变 99
- by diffusion, 由扩散引起的等离子体衰变 99
- by recombination, 由复合引起的等离子体衰变 105
- Delta function, δ 函数 104, 132, 157, 165, 167
- Diamagnetic current, 抗磁性电流 46, 47, 127-129
- Diamagnetic drift, 抗磁性漂移 45-48, 108, 137, 141
- Diamagnetic loop, 抗磁环 132
- Diamagnetism of plasma, 等离子体的抗磁性 46
- Dielectric constant, 介电常数 37, 38, 55, 77, 88, 184
- Diffusion, 扩散 97-113, 119-121, 123, 126, 130, 133, 172, 205, 207, 214, 223
- across magnetic field, 越过磁场的扩散 120
- ambipolar, 双极性扩散 99, 109, 111, 230
- Classical, 经典扩散 119-122, 124, 125, 205, 217
- in cylinder, 柱体中的扩散 102
- in fully ionized plasma, 全电离等离子体中的扩散 116, 118
- in slab, 在板片中的扩散 100
- velocity-space, 速度空间扩散 133, 214
- Diffusion coefficient, 扩散系数 99, 119
- across \mathbf{B} , 越过 \mathbf{B} 的扩散系数 109
- classical, 经典扩散系数 119, 122
- Diffusion mode, 扩散模 101-103
- Direct conversion, 直接转换 215, 219, 224
- Dispersion, 色散 56, 57, 59, 60, 62, 63, 67-69, 71, 74, 75, 77, 79, 81-85, 87, 92, 93, 95, 125, 134-136, 141, 152-155, 165, 168, 170, 186, 187
- Dissipative instability, 耗散不稳定性 141
- Distribution function, 分布函数 7, 41, 43, 142, 143, 147, 148, 153, 156-158, 170, 171, 173, 189, 194, 198, 200, 204
- Divertor, 偏滤器 201

- Double-plasma (DP) device, 双等离子体 (DP) 装置 182
- Drift frequency, 漂移频率 190
- Drift instability, 漂移不稳定性 25, 140, 141, 203, 204
- Drift wave, 漂移波 47, 51, 139-141, 172
- Dynamic stabilization, 动力学稳定 204, 205
- Echoes, 回波 173, 194-197
- Electric ($E \times B$) drift, 电 ($E \times B$) 漂移 25, 26, 45, 88, 92, 108, 119, 121, 123, 126, 133
- Electric field drift, 电场漂移 16
- Electromagnetic waves, 电磁波 58, 65, 66, 73, 74, 77, 78, 81-85, 88, 90, 94, 184, 187, 188, 190, 201, 221, 222
- Electron beam, 电子束 57, 104, 116, 136, 148, 158, 173, 178, 211, 221, 222, 225
kinetic energy of, 电子束的动能 158
- Electron plasma waves, 电子等离子体波 55, 56, 59, 63, 187, 188, 194
- Electron volt, 电子伏 227
- Electrostatic ion cyclotron waves, 静电离子回旋波 70-72, 92, 95
- Energy principle, 能量原理 205
- Equation of motion, 运动方程 13, 14, 16, 21, 24, 27, 38, 42, 45, 49, 53, 55, 56, 60, 63, 69, 70, 72, 74, 79, 87, 89, 90, 115, 117, 126, 133, 137, 158, 163, 183, 185, 186, 197, 227
- Equation of motion, of fluid, 流体的运动方程 99
- Equation of state, 状态方程 43, 44, 61, 152
- Extraordinary wave, 非寻常波 79, 81-83, 86, 87, 93
- Far-infrared laser, 远红外激光器 95
- Faraday rotation, 法拉第旋转 85, 86
- Feedback stabilization, 反馈稳定 205, 217
- Fick's law, 菲克定律 99, 100, 121
- Field annihilation, 场湮没 223
- Finite-Larmor-radius (FLR) effect, 有限拉莫尔半径效应 25, 42, 47
- First-wall material, 第一壁材料 223
- Fission-fusion reactors, 裂变聚变反应堆 223
- Fluid equations of motion, 流体运动方程 38, 48, 98, 107, 112, 117, 151
- Fluid equations, derivation of, 流体方程的推导 150
- Fluid theory, 流体理论 34, 43, 47, 133, 142, 153, 157, 158
- Flute instability, 槽纹不稳定性 139, 141, 212
- Fokker-Planck equation, 福克-普朗克方程 218
- Free energy, 自由能 132, 133
- Frequency matching, 频率匹配 185, 187, 188, 190
- Frozen field lines, 冻结场力线 89
- Fuel injection, 燃料注入 223
- Fusion reactions, 聚变反应 9, 10, 114, 115, 124, 129, 199-201, 219, 221, 223, 224
- Fusion technology, 聚变技术 201, 223, 224

- Galilean invariance, 伽利略不变性 167
- Gas discharges, 气体放电 10, 12, 97, 177
- Gas laser, 气体激光器 12, 76
- Glow discharge, 辉光放电 9, 10, 12
- Grad- \mathbf{B} drift, 梯度 \mathbf{B} 漂移 18-20, 25
- Gravitational instability, 重力不稳定性 136, 137, 209, 212
- Group velocity, 群速 51, 52, 54, 56, 62, 65, 67, 69, 74, 81, 85, 86, 95, 198
- Guiding center, 导向中心 14-16, 18-21, 25, 26, 28, 30-33, 44-47, 106, 107, 111, 112, 123, 140
- Hall current, 霍尔电流 118
- Harris instability, 哈里斯不稳定性 133
- HCN (hydrogen cyanide) laser, 氰化氢激光器 76
- Heat flow equation, 热流方程 152
- Heating methods, 加热方法 28, 207, 221-224
- Hybrid frequency, 杂化频率 72, 73
- Hydrogen atom, radius of, 氢原子半径 111
- Hydromagnetic equilibrium, 磁流体力学平衡 127
- Hydromagnetic wave, 磁流体波 33, 87, 88, 92, 221
- Ignition temperature, 点火温度 199, 200, 220, 221, 225
- Impact parameter, 碰撞参量 113
- Index of refraction, 折射率 75-77, 81
- Inductive storage, 电感储能 219
- Instabilities, classification of, 不稳定性的分类 132
- Instability, 不稳定性 12, 17, 25, 110, 126, 132, 133, 135, 136, 138, 139, 141, 148, 153, 156, 157, 170, 173, 185-188, 191, 192, 198, 203-205, 207, 209, 212, 214, 216, 217, 220, 224
- current-driven, 电流驱动的不稳定性 203
- dissipative, 耗散不稳定性 141
- drift wave, 漂移波不稳定性 141
- kinetic, 动力不稳定性 133
- kink, 扭折不稳定性 204, 211, 216
- reactive, 正反馈不稳定性 141
- sausage, 腊肠不稳定性 216
- trapped partical, 俘获粒子不稳定性 209
- two-stream, 双流不稳定性 133, 135, 136, 148, 157, 170, 189, 204, 222
- universal, 普遍不稳定性 133, 139
- velocity-space, 速度空间不稳定性 214
- Interferometer, 干涉仪 58, 59, 75, 76, 78, 86, 87, 168
- Inverse bremsstrahlung, 逆韧致辐射 219
- Ioffe bars, 约飞棒 212
- Ion acoustic shock waves, 离子声激波 178, 182
- Ion (acoustic) waves, 离子(声)波 61-64, 70, 92, 170
- Landau damping of, 离子声波的朗道阻尼 170
- Ion cyclotron resonance heating, 离子回旋共振加热 221

- Ion cyclotron wave, electrostatic, 静电离子回旋波 70-72, 92, 95
- Ion Landau damping, 离子朗道阻尼 168, 170
- Ion plasma frequency, 离子等离子体频率 63, 88
- Ionization function, 电离函数 103, 104
- Ionosphere, 电离层 9-11, 33, 77, 84, 97, 192, 194
- Joule heat, 焦耳热 125, 131, 221
- Kadomtsev-Nedospasov instability, 卡多姆采夫-涅多斯帕索夫不稳定性 110
- Kinetic instabilities, 动力不稳定性 133
- Kinetic theory, 动力学理论 11, 34, 43, 74, 135, 142, 146, 147, 157, 158
- Kink instability, 扭折不稳定性 204, 211, 216
- Klystron, 速调管 8, 75, 136
- Krook collision term, 克罗克碰撞项 147
- Kruskal-Shafranov limit, 克鲁斯卡-谢弗兰诺夫极限 207
- Landau damping, 朗道阻尼 135, 152, 156-158, 161-163, 166-168, 170, 173, 188, 194, 198, 222
by ions, 离子引起的朗道阻尼 170
derivation of, 朗道阻尼的推导 163
nonlinear, 非线性朗道阻尼 158, 172, 197, 198
- Landau problem, 朗道问题 154
- Langmuir's paradox, 朗缪尔佯谬 43
- Langmuir waves (see plasma waves), 朗缪尔波 (见等离子体波) 60, 187
- Larmor gyration, 拉莫尔回转 14, 20, 29, 42, 67, 88, 127
- Larmor radius, 拉莫尔半径 14, 17, 18, 21, 25, 30, 42, 46, 70, 107, 108, 116, 117, 202, 221, 228
- Laser, 激光器 12, 76, 95, 219, 220
CO₂, 二氧化碳激光器 76
HCN, 氰化氢激光器 76
Nd-glass, 钕玻璃激光器 219
- Laser-fusion, 激光聚变 201, 202, 219
- Laser interferometer, 激光干涉仪 216
- Lawson criterion, 劳逊判据 200, 201, 207, 215, 219, 221, 223, 225
- Left-hand cutoff, 左旋截止 82
- Levitron, 漂浮器 209
- Linear theory, 线性理论 53, 158, 162, 172, 173, 181, 183, 185, 197, 225
- Linearization, 线性化 53, 55, 56, 60, 61, 63, 66, 67, 71, 74, 79, 125, 126, 133, 137, 152, 159, 172, 174, 190
- Lithium blanket, 锂再生区 199, 223, 224
- Loschmidt number, 洛施密特常数 6
- Loss cone, 损失锥 133, 146, 214
- Loss cone instability, 损失锥不稳定性 133
- Lower hybrid frequency, 下杂化频率, 低杂化频率 72, 73
- Mach number, 马赫数 179, 181
critical, 临界马赫数 180
- Magnetic beach, 磁滩 221
- Magnetic confinement, 磁约束 45, 108, 121, 122, 129, 130, 202,

- 219, 220, 223, 224
- Magnetic mirror, 磁镜 20-23, 28, 30-33, 123, 125, 128, 133, 146, 201, 202, 204, 209, 211-215, 217, 221, 222, 224, 225
- Magnetic moment, 磁矩 21, 22, 28, 35, 36
- Magnetic pumping, 磁泵浦, 磁抽运 30, 221
- Magnetic shear, 磁剪切变 204
- Magnetic surfaces, nested, 套入的磁面 205
- Magnetic well, 磁阱 204, 212, 214
absolute, 绝对磁阱 212
average, 平均磁阱 204, 209, 211
- Magnetohydrodynamics (MHD), 磁流体力学 11
- Magnetosonic wave, 磁声波 87, 90-93
- Matching conditions (on ω , k), (ω , k 上的) 匹配条件 187, 190
- Maxwellian distribution, 麦克斯韦分布 3-6, 41, 43, 47, 98, 103, 114, 142-145, 150, 152-157, 167, 168, 170, 178, 200, 214
- Mean free path, 平均自由程 42, 98, 123, 124, 177, 228
- MHD (Magneto-hydrodynamics), 磁流体力学 11
- Microinstability, 微观不稳定性 25
- Min- B , 最小 B 204, 205, 209, 224
- Mirror machine, 磁镜装置 133, 213, 214, 221, 222
- Mirror ratio, 磁镜比 22, 28, 128
- Mobility, 迁移率 43, 97, 99, 108, 109
- Modulational instability, 调制不稳定性 198
- Multipole, 多极器 203, 205, 208, 209, 211, 221, 223
- Navier-Stokes equation, 纳维-斯托克斯方程 42, 60
- Negative ions, 负离子 78
- Neoclassical diffusion, 新经典扩散 121, 124, 205, 207, 209, 225
- Newton's law, 牛顿定律 147
- Ohmic heating, (电阻) 欧姆加热 115, 131, 172, 207, 221, 222
- Ohm's law, 欧姆定律 115, 118, 119
- Orbit theory, 轨道理论 18
- Ordinary wave, 寻常波 78, 79, 82, 86
- Oscillating two-stream instability, 振荡双流不稳定性 189-192
- Parametric decay instability, 参量衰变不稳定性 190, 192, 193, 219
- Parametric instabilities, 参量不稳定性 185, 187, 188, 190, 192, 220
backscattering, 反向散射的参量不稳定性 187
oscillating two-stream, 振荡双流的参量不稳定性 188-192
parametric decay, 参量衰变的参量不稳定性 192, 193, 219
stimulated Brillouin scattering, 受激布里渊散射的参量不稳定性 187
threshold of, 参量不稳定性的阈值 188
- Particle injection, 粒子注入 221
- Particle trapping, 粒子俘获 166, 173, 197, 198, 204
- Pfirsch-Schlüter diffusion, 菲奇-施吕

- 特尔扩散 205
 Phase space, 相空间 145, 147, 148, 162, 166
 Phase-space trajectories, 相空间轨迹 162
 Phase velocity, 相速度 47, 50, 51, 56, 62, 64, 65, 69, 73, 74, 81, 82, 85, 86, 88-90, 92, 93, 139, 148, 154, 156-158, 170, 171, 181, 187, 190, 197, 222
 Pinch, 箍缩 9, 10, 90, 201, 202, 215-217, 221, 224, 225
 Plasma approximation, the, 等离子体近似 49, 61-63, 71, 72, 134, 138
 Plasma definition, 等离子体定义 2
 Plasma diagnostics, 等离子体诊断 201
 Fried-Conte, 弗里德-康特等离子体色散函数 153
 Plasma frequency, 等离子体频率 38, 52, 54, 55, 95, 227
 Plasma gun, 等离子体枪 213
 Plasma oscillations, 等离子体振荡 8, 52, 54, 55, 57, 62, 67, 68, 74, 92, 95, 134, 152, 158, 170, 173
 Plasma parameter, 等离子体参量 8, 114, 115, 201
 Plasma waves (electron), 等离子体波(电子) 55, 63
 Polarization drift, 极化漂移 26, 29, 37, 89, 138, 141
 Poloidal field, 角向场 204, 206, 208, 210, 211
 Ponderomotive force, 有质动力 183, 184, 188-191, 198
 Positive column, 正柱 10, 110, 111
 Presheath, 预鞘 177
 Pressure, 压力 6, 9, 40-42, 46, 48, 49, 57, 61, 92, 97, 110, 113, 117, 127-130, 132, 133, 139, 151, 152, 183, 189, 215, 219, 220, 227, 228
 Pulsar (neutron star), 脉冲星(中子星) 11
 Q Machine, Q装置 45, 57, 64, 71, 78, 114, 121
 Quasilinear effect, 准线性效应 173
 Quasineutrality, 准中性 2, 8, 27, 49, 99, 116, 191
 R wave, R波 83-86, 92, 93
 Radio communication, 无线电通信 77
 Random walk, 随机游动 97, 99, 106, 107, 109, 111, 119, 123
 Rayleigh-Taylor instability, 瑞利-泰勒不稳定性 132, 136, 203, 220
 Recombination, 复合 6, 99, 105, 120, 150, 174, 207
 coefficient, 复合系数 105
 radiative, 辐射复合 105
 three-body, 三体复合 105
 Refractive index, 折射率 75-77, 81
 Relativistic beams, 相对论性束 211
 Resistive damping, 电阻阻尼 125
 Resistive drift wave, 电阻漂移波 139, 141
 Resistivity of plasma, 等离子体的电阻率 112
 Resonance, 共振 66, 81, 82, 84, 93, 162, 185, 221
 Resonant electrons, 共振电子 158, 162, 168, 173
 Resonant particles, 共振粒子 156, 165, 166, 170, 194, 198, 204, 222

- Right-hand cutoff, 右旋截止 82
- Runaway electrons, 逃逸电子 116
- Sagdeev potential, 塞格捷夫势 179
- Scyllac, 赛拉克装置 217
- Semiconductors, 半导体 12
- Shear, 剪切 41, 42, 89, 204, 205, 209, 211, 225
- Shear Alfvén wave, 剪切阿尔芬波 89
- Shear stress, 剪切应力 41
- Sheath, 鞘 7, 8, 10, 57, 173-177, 179, 180, 182
 criterion, 鞘判据 175
 equation, 鞘方程 174
- Shielding distance, 屏蔽距离 7, 9
- Single-fluid equations, 单流体方程 125
- Skin depth (collisionless), 趋肤深度 (无碰撞~) 75
- Solar wind, 太阳风 1, 10, 11, 17, 31
- Solid state plasmas, 固态等离子体 12
- Soliton, 孤立子 179-181
- Sound waves, 声波 2, 60-63, 70, 92, 170, 187
- Spherator, 球形器 209, 211
- Spitzer resistivity, 斯必泽电阻率 116
- Steepening of waves, 波变陡 181
- Stellarator, 仿星器 122, 125, 203-208, 221
- Stimulated Brillouin scattering, 受激布里渊散射 188
- Streaming instability, 川流不稳定性 132, 133
- Stress tensor, 压力张量 40-42, 113, 151
- Superconducting coil, 超导线圈 213, 219
- Susceptibility, 磁化率 36
- Thermodynamic equilibrium, 热力学平衡 132, 133, 139
- Thermonuclear reactions, 热核反应 11
- Theta-pinch, θ -箍缩 201, 215-218, 221, 224, 225
- Tokamak, 托卡马克 124, 203-208, 211, 221-224
- Toroidal field, 环向场 206, 208-210
- Toroidal system, 环向系统 202, 203, 205, 207
- Torsional Alfvén wave, 阿尔芬扭波 89
- Transverse waves, 横波 73, 78, 79
- Trapped electrons, 俘获电子 148, 158, 162, 211
- Trapped-particle instabilities, 俘获粒子不稳定性 209
- Trapping, 俘获 11, 20, 23, 30, 123, 128, 148, 157, 158, 161, 162, 166, 167, 172, 174, 179, 180, 197, 198, 205, 209, 220, 225
- Trivelpiece-Gould curves, 特里维尔皮斯-古尔德曲线 68, 69
- Turbulence, 湍流 172, 173, 222
 energy flow in, 湍流中的能量流 173
- Turbulent heating, 湍流加热 222
- Two-component torus, 双组分环 221
- Two-stream instability, 双流不稳定性 133, 135, 136, 148, 157, 170, 189, 204, 222
 nonlinear, 非线性 97, 105, 120, 126, 148, 158, 172-175, 178, 181, 183-186, 197, 214, 219, 221
- Universal instability, 普遍不稳定性 133, 139
- Upper hybrid frequency, 上杂化频率

- 67, 80
- Upper hybrid oscillations, 上杂化振荡
67, 69, 81, 92
- Van Allen belts, 范艾伦带 11, 23
- Van Kampen mode, 范坎彭模 167
- Velocity, mean, 平均速度 38, 42,
143, 150
average, 平均速度 38, 42, 143, 150
thermal, 热速度 5, 41, 55, 56,
74, 93, 99, 100, 108, 151, 168,
174, 178, 222, 228
- Viscosity, 黏滞性 42, 44, 60, 117
- Viscosity tensor, 黏滞张量 113
- Vlasov equation, 符拉索夫方程 147,
148, 152
- Water-bag model, 水袋模型 149
- Wave breaking, 波打碎 172
- Wave-particle interaction, 波-粒子相互
作用 173
- Wave steepening, 波变陡 181
- Wave-wave interactions, 波-波相互作用
173, 185
- Whistler wave, 啸波 84-86, 92, 96
- Yin-yang coil, 阴-阳线圈 214
- z -pinch, z -箍缩 215

习题索引

- 1-1: 5
1-2: 6
1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 1-7: 9
2-1, 2-2, 2-3, 2-4: 17
2-5, 2-6, 2-7: 23
2-8, 2-9: 33
3-1, 3-2: 38
3-3, 3-4, 3-5, 3-6, 3-7: 47
3-8, 3-9: 48
4-1: 51
4-2, 4-3, 4-4: 55
4-5: 60
4-6, 4-7: 69
4-8, 4-9: 77
4-10, 4-11: 78
4-12, 4-13, 4-14, 4-15, 4-16, 4-17,
4-18, 4-19: 86
4-20: 94
4-21, 4-22, 4-23, 4-24, 4-25, 4-26: 95
5-1, 5-2, 5-3: 111
5-4, 5-5, 5-6: 124
5-7, 5-8, 5-9: 125
6-1: 131
6-2: 132
6-3: 136
7-1: 170

(O-6358.01)

封面插图: Victor Lin (林杨)

INTRODUCTION TO
PLASMA PHYSICS

等离子体物理学导论

科学数理分社
联系电话: 010-64033664
E-mail: math-phy@mail.sciencep.com
网址: <http://www.math-phy.com.cn>

销售分类建议: 等离子体物理

www.sciencep.com

ISBN 978-7-03-047515-2



定价: 98.00 元