数学分析(B)历年考试真题

说明

1. 这里收录了若干套中国科学技术大学数学分析(B)测验以及考试真题，以及一套数学分析(A)的试题作为样卷.

2. 排序顺序优先考虑知识涵盖范围，其次为时间先后. 即先B1后B2，期中复习请参考标注有期中试卷及其前面的测验试卷，因为在它们后面试卷都会涉及到期中考试之后的内容.

3. 本附录的主要作用是供同学们考试之前模拟使用，越靠近现在的考卷越能接近现在的出题风格.

4. 没有参考答案，希望读者自行思考，同时熟悉题目类型. 建议本门课程的助教在平时习题课先将学过的部分的测验题进行讲解，在考前习题课讲解对应的考试题.

5. 正值科大60周年校庆，亦为少年班成立40周年之际，谨以此真题集锦，献礼科大，也便于以后的助教的习题课工作和同学们复习本门课程. 感谢李平教授和17级少创班同学们提供往年题目. 再次祝愿科大数学教育越办越好！

2017-2018秋季学期数学分析(B1)助教

2017-2018春季学期数学分析(B2)助教

15级 理科试验1班 吴天

2018年4月 于合肥

中国科学技术大学2011-2012学年第一学期

数学分析(B1)第一次测验

1. (10分)用数列极限的定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+\sin n}=\dfrac{1}{2}$.

2. (10分)设函数$f(x)$在$x>0$有定义. 请叙述极限$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在有限的Cauchy判别准则.

3. (40分)求下列极限(其中的n都是正整数):

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{n+\sin\dfrac{1}{n}}-\sqrt{n}\right)$ (2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x^2-1}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$ (4) $\lim\limits_{x\to0}(2-\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

4. (10分)设正数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}\leqslant ba_n$，$n=1,2,\cdots$，其中$0<b<1$. 求证：数列$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$收敛.

5. (10分)设$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n+\sin a_n}{2}$，$n=1,2,\cdots$. 讨论数列$\{a_n\}$的收敛性和极限.

6. (10分)设E是非空有上界的数集，且它的上确界a不在E中. 求证：E有数列$\{x_n\}$严格递增趋于E的上确界.

7. (10分)设$f(x)$是定义在实轴$\mathbb{R}$上的函数且对任意x,y有$|xf(y)-yf(x)|\leqslant M|x|+M|y|$，其中$M>0$. 求证：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$收敛.

(2)存在常数a使得对任意x有$|f(x)-ax|\leqslant M$.

$\left|\dfrac{f(y)}{y}-l\right|\leq \quad +\dfrac{M}{|y|}$

3. (1) $= n\cdot n\ \left(\dfrac{1}{2n^2}\right) = \dfrac{1}{2}$

$(1+x)^{\frac{1}{x}}$

(2) $= \dfrac{(x^2+2)}{(x+1)} = \dfrac{3}{2}$

(3) $= \left(3^n\left[1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]\right)^{\frac{1}{n}} = 3\cdot\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = 3$

(4) $\ln(\ ) = \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2} \qquad (\ ) = \sqrt{e}$

4. Cauchy

$x = 2\sin x$

5. $a_{n+1}-a_n = \dfrac{a_n-a_{n-1}}{2} + \dfrac{\sin a_n-\sin a_{n-1}}{2}$ 单减有下界

6.

7. $y=0 \Rightarrow |f(0)|\leq M \qquad |f(x)+f(-x)|\leq 2M$

中国科学技术大学2011-2012学年第一学期

数学分析(B1)第二次测验

1. (50分)计算题.

(1)求函数$f(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}$在$\mathbb{R}$上的最大值，最小值和凸凹区间.

(2)计算极限$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}\mathrm{e}^{-x}$.

$e^x\cdot e^{-x}=1$

(3)计算极限$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2\cos x-\sqrt{1+6x}-\mathrm{e}^{-3x}}{\ln(1-x^2)}$.

(4)计算$\sqrt[4]{2}$，精确到10^{-3}. (注意：要求给出计算过程，不允许使用计算器)

$\frac{x}{100}$

$1000000(1-5\%)^{\frac{x}{100}}(1000+x)$

(5)水果公司在对其最新电子产品iDayDream售前市场调研发现，如以3000元的价格出售iDayDream，会有一百万顾客有购买意向，此时每台iDayDream 会有1000元的利润；而每当价格提升或者降低100元，潜在顾客会在原来基础上降低或增加5%. 试求对水果公司而言iDayDream的最佳定价以及此时的利润. (在计算中，你可以使用：当x靠近0时，$\ln(1+x)\approx x$)

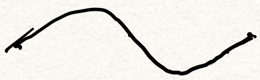
2. (10分)设多项式$f(x)=\prod\limits_{i=1}^{k}(x-x_i)^{n_i}$，其中$k\geqslant2$，$n_1,\cdots,n_k$为正整数，且$\sum\limits_{i=1}^{k}n_i=n$，$x_1<x_2<\cdots<x_k$. 证明：对于$1\leqslant i\leqslant k-1$，存在$x_i<\xi_i<x_{i+1}$，使得$f'(x)=n\prod\limits_{i=1}^{k}(x-x_i)^{n_i-1}\prod\limits_{i=1}^{k-1}(x-\xi_i)$.

3. (10分)设p,q为正实数且$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 求证：对于$x_1,x_2>0$，$x_1x_2\leqslant\dfrac{x_1^p}{p}+\dfrac{x_2^q}{q}$.

4. (10分)设函数$f(x)$在区间$[-A,A]$(A为正常数)上满足$f''=-f$. 证明：$f(x)=f(0)\cos x+f'(0)\sin x$.

5. (20分)设$f(x)$在$[a,b]$上1阶可导，在(a,b)内2阶可导，且$f(a)=f(b)=0$，$f'(a)f'(b)>0$. 证明：

$f'(a)>0,\ f'(b)>0$



(1)存在$\xi\in(a,b)$，$f(\xi)=0$.

(2)存在$a<\xi_1<\xi_2<b$，$f'(\xi_1)=f(\xi_1)$，$f'(\xi_2)=f(\xi_2)$.

(3)存在$\eta\in(a.b)$，$f''(\eta)=f(\eta)$.

$f'(x)-x$

$(x-x_1)^{n_1}\ (x-x_2)^{n_2}\ \cdots\ (x-x_k)^{n_k}$

$f'(\xi_1)=0$

$f(\xi_1)>0$

$f'(\xi_2)=0$

$f(\xi_2)<0$

$f''(x)=f(x)$

$g(x)=e^x(f(x)-f'(x))\quad g(\xi_1)=0\quad g(\xi_2)=0$

$g(x)=e^x(f(x)-f''(x))$

$f''(x) = -f(x)$ $\quad$ $f(x) = f(0)\cos x + f'(0)\sin x$

2. $f'(x) = n_1 (x-x_1)^{n_1-1} \dfrac{\prod}{(x-x_1)^{n}} + \cdots + n_k (x-x_k)^{n_k-1} \dfrac{\prod}{(x-x_k)^{n}}$

$= \prod \left(\dfrac{n_1}{(x-x_1)} + \cdots + \dfrac{n_k}{(x-x_k)} \right)$

$= \prod (x-x_i)^{n_i-1} \left(n_1 \dfrac{\prod (x-x_i)}{x-x_1} + \qquad \right)$

$= n (x-\xi_1) \cdots (x-\xi_{k-1})$

中国科学技术大学2012-2013学年第一学期

数学分析(B1)第一次测验

1. (20分)判断下列命题的真伪，并说明理由.

   (1)若对任意$\varepsilon>0$，存在无穷多个n，使得$|a_n-a|<\varepsilon$，则数列$\{a_n\}$收敛于a；

   (2)若对任意$\varepsilon>0$，存在正整数N，当$n>N$时，$|a_n-a_N|<\varepsilon$，则数列$\{a_n\}$收敛；

   (3)若$f:[-2,2]\to[-1,1]$连续，则存在$x_0\in[-2,2]$使得$f(x_0)=x_0$；

   (4)若$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$一致连续，则$f$有界.

2. (32分)计算下列极限.

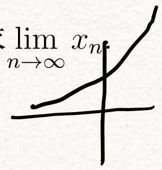
   (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-(n-1)\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}\right)$

   (3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{2x}$ (4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x(\sqrt{1+\sin x}-1)}{1-\cos(\sin x)}$

3. (10分)设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x^2\mathrm{e}^{nx}}{x+\mathrm{e}^{nx}}$. 求$f(x)$，并研究其连续性.

4. (10分)设函数$f:(0,+\infty)\to(-\infty,+\infty)$满足：对任意$x\in(0,\infty)$，$f(x)=f(x^2)$. 若$f(x)$在$x=1$处连续，证明$f(x)$为常值函数.

5. (12分)设$\alpha>1$，$x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{\alpha(1+x_n)}{\alpha+x_n}(n=1,2,\cdots)$. 求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.



6. (8分)设$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$，判断数列$\{a_n\}$的收敛性.

7. (8分)设数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}=0$.

1. (1) × $a_n=\begin{cases}1, & n=2k\\ -1, & n=2k+1\end{cases}$ $\forall\varepsilon$, $|a_{2k}-1|<\varepsilon$

(2) $|a_n-l| = |a_n-a_N|+|a_N-l| < \varepsilon +$

(3) √ $g(x)=f(x)-x$, $g(-2)>0$, $g(2)<0$, $\exists\ g(x_0)=0$, $f(x_0)=x_0$

(4) × $f(x)=x$ 一致连续 $\forall\varepsilon>0$, 取$\delta=\varepsilon$, $|f(x_2)-f(x_1)|=|x_2-x_1|=\delta<\varepsilon$

2. (1) $1<0<(1+\frac{1}{n})=1$

(2) $= n\left(1-(1-\frac{1}{n})^{\frac{3}{2}}\right) = n\left(1-(1-\frac{3}{2n})\right) = \frac{3}{2}$

(3) $= \left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{2x} = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{2}}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right]^4 = e^4$

(4) $= \dfrac{x^2}{2\left(1-(1-\frac{\sin^2 x}{2})\right)} = 1$

3. $x>0$, $\dfrac{x^2e^{nx}}{e^{nx}} = x^2$

$x<0$, $\frac{1}{x}$, $(-\infty,0)$, $[0,+\infty)$ 分别连续，0 为第一类间断点

4. $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta$ $(1-\delta, 1+\delta)$ $|f(x)-f(1)|<\varepsilon$ $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$

$f(x)=f(x^{\frac{1}{2}})=f(x^{\frac{1}{4}})=\cdots=f(x^{\frac{1}{2^n}})$ $\lim_{n\to\infty} f(x^{\frac{1}{2^n}})=f(1)$

5. $x_{n+1}-x_n=\frac{\alpha(1+x_n)}{\alpha+x_n}-x_n=\frac{\alpha+\alpha x_n-\alpha x_n-x_n^2}{\alpha+x_n}=\frac{\alpha-x_n^2}{\alpha+x_n}$

$x_{n+1}=\alpha+\frac{\alpha(1-\alpha)}{\alpha+x_n}$ 随 $x_n\uparrow$, $f(\sqrt{\alpha})=\sqrt{\alpha}$

若 $x_1>\sqrt{\alpha}$, $x_n>\sqrt{\alpha}$ 且 $x_n\downarrow$ $\sqrt{\alpha}$

6. $a_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\cdots\cdots$

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N$, $|a_{n+p}-a_n|=$ $N>\frac{2}{\varepsilon}$

$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\cdots+\frac{1}{n+p}$

$=\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots+$

$<\frac{1}{(n-1)(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+3)}$

$=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+p}+\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+p}<\frac{2}{n}<\varepsilon$

7. $\exists N$, $\varepsilon=1$ $a_n<\begin{cases}1\\a_k\end{cases}$

$=\frac{1}{n}=0$ $\frac{a_k}{n}=0$

中国科学技术大学2012-2013学年第一学期

数学分析(B1)第二次测验

1. (35分)计算.

(1)x^2e^x的n阶导数.

(2)已知$\sin(xy)+y^2=x$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. (用$x,y$的函数表示)

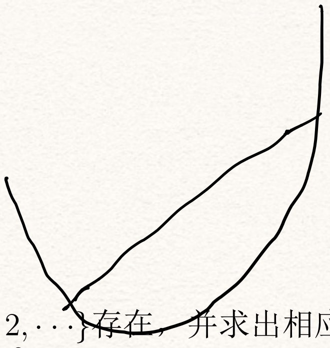
(3)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^3\sin x}$.

(4)$\lim\limits_{x\to\infty}x(a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}})$，$a,b>0$.

(5)$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{x}}$.

(6)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$.

(7)求函数$\ln x$，$x>0$的曲率.



2. (10分)求证$A:=\max\{\sqrt[n]{n}:\ n=1,2,\cdots\}$存在，并求出相应的$n_0$使得$\sqrt[n_0]{n_0}=A$.

3. (10分)求常数a,b使得$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan^2(ax)}{x}, & x>0\\ (2a-1)x+b, & x\leqslant 0\end{cases}$在定义域上可导.

4. (15分)设函数f在区间I上可导. 证明$f(x)$在I上一致连续的充分条件是导函数有界. 并举例说明必要性不成立.

5. (15分)设有界闭区间$[a,b]$上函数$f(x)$满足

$$f\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\ \forall x,y\in[a,b],\ \lambda\in(0,1).$$

证明$f(x)$在$[a,b]$上有界.

6. (15分)设$f(x)$在0附近有2阶连续导数，且$f''(0)\neq 0$. 求证，对任意x，如果$|x|$充分小时，则存在唯一$\theta\in(0,1)$使得$f(x)=f(0)+f'(\theta x)x$. 并求$\lim\limits_{x\to 0}\theta$.

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2$

$f'(\theta x)=f'(0)+\frac{f''(\xi)}{2}x$

$\dfrac{f'(\theta x)-f'(0)}{x}=\dfrac{f''(\xi)}{2}$

$\theta f''(0)=\dfrac{f''(0)}{2}$

1. (1) $(x^2e^x)^{(n)}=e^x(x^2+2nx+n(n-1))$

(2) $\cos(xy)\cdot(y+y'x)+2yy'=1$ $\quad y'=\dfrac{1-y\cos(xy)}{x\cos(xy)+2y}$

(3) $=\dfrac{1-(1-\frac{x^4}{2})}{x^4}=\dfrac{1}{2}$

(4) $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{a^t-b^t}{t}=\dfrac{a^t\ln a-b^t\ln b}{1}=\ln a-\ln b$

(5) $=\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}(x-\frac{x^2}{2})}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\dfrac{e^{1-\frac{x}{2}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$

$=\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

(6) $= \dfrac{1-(1-\frac{x}{2})(1-\frac{(2x)^2}{2})(1-\frac{(3x)^2}{2})}{1-(1-\frac{x^2}{2})} = \dfrac{\frac{x^2}{2}+\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(3x)^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} = 14$

(7) $k = \dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{\frac{1}{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{3}{2}}}$

2. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ $\quad f'(x) = x^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2}\right) = x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot(1-\ln x)$

$(0,e)\uparrow \ (e,+\infty)\downarrow$ $\quad f(2) = \sqrt[2]{2}$ $\quad f(3) = \sqrt[3]{3}$

$2^3 < 3^2$ $\quad n=3$

3. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} 0 \\ b \end{cases}$ $b=0$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \begin{cases} \frac{\tan^2 ax}{x^2} = a^2 \\ 2a-1 \end{cases}$ // $\quad a=1$

4. $|f'(x)| < M$ $\quad \exists \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$

$|f(x_1)-f(x_2)| = f'(\xi)\cdot|x_1-x_2| \le M|x_1-x_2| \le \varepsilon$

$f(x)=\sqrt{x}$ $\quad |f(x_2)-f(x_1)| = |\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}| \le \sqrt{x_1+\delta}-\sqrt{x_1} = g(x_1) \le \sqrt{\delta} < \varepsilon$

$g'(x_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x_1+\delta}} - \frac{1}{\sqrt{x_1}}\right) < 0$

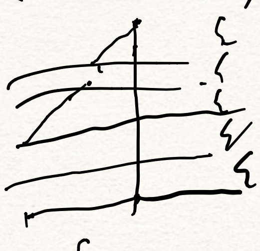
5. $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$

$f(\lambda x_0 + (1-\lambda)(b-x_0)) \le \lambda f(x_0) + (1-\lambda)f(b-x_0)$

极限 $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ 0<|x-x_0|<\delta \ |f(x)-L| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0, \ \forall x, y \in (x_0, x_0+\delta)$

$|f(x)-f(y)| < f(x_0+\delta) < \varepsilon$



δ

中国科学技术大学2013-2014学年第一学期

数学分析(B1)第一次测验

sin 1

1. (10分)用数列极限的定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+(-1)^n\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$.

2. (18分)判别下面两个极限是否收敛？

   (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-1)^{[x]}\dfrac{x}{x+1}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}\ln k}{k^3}$

3. (32分)求下列极限(其中的n都是正整数)：

   (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+(-1)^k\sqrt{k}}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\big(1+\ln(2x+1)\big)^{\frac{1}{\sin x}}$

   (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x}$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\big((n+\ln n)^\alpha-n^\alpha\big)$ $(\alpha\in(0,1))$

4. (15分)设$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是单调函数，$f(x)=\sin g(x)$. 求证$f(x)$ 在任意点x_0的左右极限都存在.

5. (15分)设数列$\{a_n\}$收敛于a，且相邻两项之差为整数. 求证：从某项开始都有$a_n=a$.

6. (10分)设$a_1=1$，$a_{n+1}=1+\dfrac{2}{a_n}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$. 求证：$\{a_n\}$收敛，并求其极限.

(1) $\forall \varepsilon > 0$ $\left|\dfrac{n}{2n+(-1)^n\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$.

$(\frac{1}{2}-\varepsilon)(-1)^n\sqrt{2}+n-2n\varepsilon<n$ $\quad \dfrac{1}{2}-\varepsilon<\dfrac{n}{2n+(-1)^n\sqrt{2}}<\varepsilon+\dfrac{1}{2}$ $\quad n<2n\varepsilon+n+(-1)^n\sqrt{2}\varepsilon+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$n>(\frac{1}{2}-\varepsilon)(-1)^n\sqrt{2}$ $\quad N=\left[\dfrac{(\frac{1}{2}+\varepsilon)\sqrt{2}}{2n}\right]$ $\quad n>\dfrac{\sqrt{2}(\frac{1}{2}+\varepsilon)(-1)^{n+1}}{2\varepsilon}>\dfrac{\sqrt{2}(\frac{1}{2}+\varepsilon)}{2\varepsilon}$

$>\dfrac{(\frac{1}{2}-\varepsilon)\sqrt{2}}{2n}$

2.(1) $=\lim\limits_{x\to+\infty}(-1)^{[x]}$ $\quad \forall X>0,\ x_1=2n>X,\ x_2=2n+1>X$ $\quad |f(x_1)-f(x_2)|=1$ $\quad \varepsilon=\frac{1}{2}$

(2) $=\dfrac{\ln 1}{1^3}-\dfrac{\ln 2}{2^3}+\dfrac{\ln 3}{3^3}-\dfrac{\ln 4}{4^3}+\cdots$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists N=[\frac{2}{\varepsilon}]$ $n>N$, $|a_n-a_{n+p}|\leq\dfrac{\ln n}{n^3}+\dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^3}+\cdots+\dfrac{\ln(n+p)}{(n+p)^3}$

$\leq\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+ \quad <\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+p}<\varepsilon$

3. (1) $\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{n-\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$

$1=\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}\leq O\leq\dfrac{n}{n-\sqrt{n}}=1$

(2) $=(1+2x)^{\frac{1}{x}}=(1+\frac{2}{t})^t=e^2$

(3) $= \frac{1+nx+o(x)-1}{x} = n$

(4) $= n^{\alpha}\left[\left(\frac{n+\ln n}{n}\right)^{\alpha}-1\right] \le n^{\alpha}\left(\frac{n}{n}+\frac{\ln n}{n}-1\right) = \frac{\ln n}{n^{1-\alpha}} = 0$

4. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\exists N$, $n > N$, $|a_n - a| < \frac{1}{2}$ $\quad a_n = N$

1.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{a_n} - \frac{2}{a_{n-1}} = \frac{2(a_{n-1}-a_n)}{a_n a_{n-1}}$$

$$a_{n+2} - a_n = \frac{2}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_{n-1}} = \frac{2(a_{n-1}-a_{n+1})}{a_{n-1}a_{n+1}}$$

$$= \frac{4(a_n - a_{n-2})}{(a_n+2)(a_{n-2}+2)}$$

$$a_{n+2} = 1 + \frac{2}{1+\frac{2}{a_n}} = 2 + \frac{a_n - 2}{a_n + 2}$$

2

中国科学技术大学2013-2014学年第一学期

数学分析(B1)第二次测验

1. (12分)试确定常数a,b的值，使得$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$为连续函数.

2. (12分)设函数$f(x)$在点$x=0$处有二阶导数且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，求$f(0)$，$f'(0)$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

x^2

3. (12分)设函数$f(x)$在点x_0处二阶可导，$f'(x_0)\neq 0$，求$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}-\dfrac{1}{(x-x_0)f'(x_0)}\right)$.

4. (12分)设由参数方程$\begin{cases} x=\mathrm{e}^t\sin t\\ y=\mathrm{e}^t\cos t\end{cases}$确定$y$是$x$的函数，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$和$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

$\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{2(x-1)x}$

5. (12分)设函数$f(x)$在$x=0$处可导，在什么条件下，$|f(x)|$在$x=0$处也可导？

6. (10分)设函数$f(x)$在$x=1$处连续，且对任意$x,y\in(0,+\infty)$，满足$f(xy)=f(x)+f(y)$. 证明$f(x)$在$(0,+\infty)$上连续.

$\dfrac{1}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{1}{2x(x-1)}$

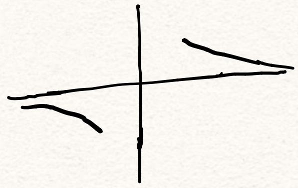
7. (10分)利用微分学的方法证明：当自然数$n>9$时，$(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}>(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$.

8. (10分)今年，中国田径运动员在男子百米比赛中创造了10秒整的全国纪录. 有人说这位运动员在这次比赛中一定在某个一秒钟的时间内正好跑了10 米. 这个说法正确吗？请给出你的证明.

$x(x+1)$

9. (10分)设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内有二阶导数，且满足$f''(x)=\mathrm{e}^xf(x)$，$f(a)=f(b)=0$，证明：$f(x)\equiv 0$.

1、$f(x)=\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$　　$x>1$: $\dfrac{x^{2n-1}}{x^{2n}}=\dfrac{1}{x}$



$x=1$: $\dfrac{1+a+b}{2}\Rightarrow a+b=1$

$-1<x<1$: ax^2+bx　　$x=-1$: $\dfrac{-1+a-b}{2}$

$x<-1$: $\dfrac{x^{2n-1}}{x^{2n}}=\dfrac{1}{x}$　　$-1+a-b=-1$　　$a=b=\dfrac{1}{2}$

2、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{f'(x)}{1}=0$　　$f'(0)=0$　　$f(0)=0\ (x)\to 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{f'(x)}{2x}=\dfrac{f''(0)}{2}$

3、$=\left(\dfrac{1}{(x-x_0)f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}-\dfrac{1}{(x-x_0)f'(x_0)}\right)$

$=\dfrac{-\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}{f'^2(x_0)(x-x_0)^2}=-\dfrac{f''(x_0)}{2f'^2(x_0)}$

4. $x' = e^t(\sin t+\cos t)$ $y' = e^t(\cos t-\sin t)$

$x'' = 2e^t\cos t$ $y'' = -2e^t\sin t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2\sin t(\sin t+\cos t)-2\cos t(\cos t-\sin t)}{(\sin t+\cos t)^3} = \frac{-2}{(\sin t+\cos t)^3}$$

5. $f(\xi)\neq 0$

7. $(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}} > (\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$ $\sqrt{n+1}\ln\sqrt{n} > \sqrt{n}\ln\sqrt{n+1}$

$$\frac{\ln\sqrt{n}}{\sqrt{n}} > \frac{\ln\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \qquad \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$(e,+\infty)\downarrow$ $\frac{\ln x}{x} > \frac{\ln y}{y}$ $y>x>e$

6. $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta\ x\in(1+\delta,1-\delta)$ $|f(x)|<\delta$

$f(xy)=f(x)+f(y)$ $f(x_0y) = f(x_0)+f(y)$

$|f(x_0y)-f(x_0)| = |f(y)|$

$\varepsilon>0,$ $x_0y-x = x_0(y-1) < \delta$

$y < 1+\frac{\delta}{x_0}$

$\forall$令 $1-\frac{\delta}{x_0}<y<1+\frac{\delta}{x_0},$ $=$ $f(y)<\varepsilon$

8. $\int_0^{10} f(x)\,dx = 100$ $\exists\xi,\ f(\xi)\cdot 10=100$，即 $f(\xi)=10$

定义 $g(x)=\int_x^{x+1} f(x)\,dx$，$g(x)$ 连续

证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\int_x^{x+1} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{x_0+1} f(x)\,dx = \int_{x_0+1}^{x+1} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$

9. $f''(x) = e^x f(x)$, $f(a) = f(b) = 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$

$g(x) = e^x (f(x) - f'(x))$

$\forall x > 0$, $f'(x) < 0$

$\exists x_0$, $f(x)$, $x > 0$ 且 $f'(x) \geq 0$

$f(c) > 0$

构造函数?

中国科学技术大学2015-2016学年第一学期

数学分析(B1)第一次测验

1. (10分)用函数极限的定义证明$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x^2+x+2}{x^3+x^2-x-1}\right)=\frac{1}{4}$.

2. (10分)数列$\{\sqrt{n}(\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n})\}$是否收敛？说明理由.

3. (20分)求下面数列的极限：

   (1)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^k}{n^n}$ $(k\in\mathbb{N}^*)$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+2\sin\frac{1}{n}\right)^n$

4. (20分)求下面函数的极限：

   (1)$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{2x^2+8x-10}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}$

5. (10分)函数$x\sin x$在$(0,+\infty)$是否有界，当$x\to+\infty$时是否为无穷大量？说明理由.

6. (10分)求数列$\{\frac{n+1}{2n-1}\sin\frac{n\pi}{2}\}$的上极限和下极限.

7. (10分)设数列$\{a_n\}$由$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$ $(n\geqslant 1)$定义. 判断数列$\left\{\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right\}$是否收敛，若收敛，则求其极限.

8. (10分)设$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+1}=\frac{3n-1}{2n}a_n-\frac{n-1}{2n}a_{n-1}$ $(n=2,3,\cdots)$. 求证数列$\{a_n\}$收敛.

$n!\sim\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$\frac{\left(\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^k}{n^n}$

$\sqrt{2n\pi}$

$e^{n\ln(1+2\sin\frac{1}{n})}$

$=e^{n\cdot 2\sin\frac{1}{n}}$

1. $\left|\frac{1}{x-1}-\frac{x^2+x+2}{x^3+x^2-x-1}-\frac{1}{4}\right|=\left|\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{4}\right|$

$=\left|\frac{1}{x-1}-\frac{x^2+2x+1+1-x}{(x+1)^2(x-1)}-\frac{1}{4}\right|=\left|\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{4}\right|<\varepsilon$

$-\varepsilon+\frac{1}{4}<\frac{1}{(x+1)^2}<\varepsilon+\frac{1}{4}$

$(x+1)^2>\frac{1}{\varepsilon+\frac{1}{4}}$

$\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}-\varepsilon}}-1>x>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon+\frac{1}{4}}}-1$

2. $n=2k+1$, $n=2k$ $\lim\ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\to\frac{1}{2}$ / $-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\to-\frac{1}{2}$ $\times$

3. $=\frac{n^k\cdot(n-1)^k(n-2)^k\cdots 1^k}{n\cdot n\cdot n\cdot n\cdots n}=$ —

4 (1) $\frac{(x+3)(x-1)}{2(x+5)(x-1)}=\frac{4}{2\cdot 6}=\frac{1}{3}$

(2) $=\frac{-\sin x+2\sin 2x}{2x}=\frac{-\cos x+4\cos 2x}{2}=\frac{4-1}{2}=\frac{3}{2}$

5. 无界 不收 $\qquad a_n^2 > 2n$

6. $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$

7. $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2}$ $\qquad a_{n+1}^2 - a_n^2 = 2 + \frac{1}{a_n^2}$

$a_2^2 - a_1^2 = 2 + \frac{1}{a_1^2}$

$a_{n+1}^2 = 2n + 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2} \geq 2(n+1)$, $n \geq 3$

$\frac{1}{a_n^2} \leq \frac{1}{2n}$

$a_n \geq \sqrt{2n}$

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{a_n^2}{n} = \frac{2n + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{a_i^2}}{n}$

$\leq \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}}{n}$ $\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{n}$

$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 0$

8.

中国科学技术大学2015-2016学年第一学期

数学分析(B1)第二次测验

1. (1)设$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(x\neq-\dfrac{d}{c})$，求$f^{(n)}(x)$.

   (2)对由参数方程$\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$确定的函数$y=y(x)$，求$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

2. 求极限：

   $x\,y=z$

   (1)$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cot x}{x}\right)$　　(2)$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\mathrm{e}}{2}x+x^2\Big((1+\dfrac{1}{x})^x-\mathrm{e}\Big)\right]$

3. 证明：

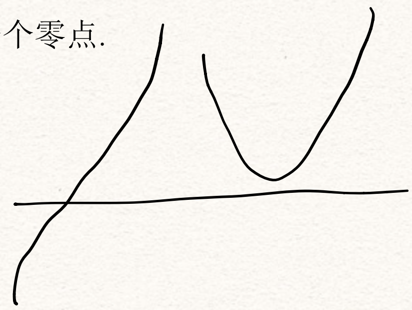
   (1)不等式$\sqrt[n]{x}\cancel{-\sqrt[n]{y}}\ {+\sqrt[n]{y}}\leqslant\sqrt[n]{x-y}$对任何$x\geqslant y\geqslant0$成立. 2

   (2)不等式$\cot x>1-\dfrac{x^2}{2}$对任何$x\neq0$成立. $x>y$

4. 求函数$f(x)=\mathrm{e}^{-x}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}$的极值.

5. 设函数$f(x):[0,+\infty)\to(0,+\infty)$一致连续，$\alpha\in(0,1]$. 求证：函数$g(x)=f^{\alpha}(x)$也在$[0,+\infty)$上一致连续.

6. 证明：多项式$P(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k}$当$n$是偶数时无零点，当$n$是奇数时恰有一个零点.



1.(1) $f(x)=\dfrac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d}$

$f^{n}(x)=(cb-ad)(-1)^n\dfrac{n!}{(x+\frac{d}{c})^{n+1}}$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t)}{x'(t)^3}$

$x'(t)=1-\cos t$　　$x''(t)=\sin t$

$y'(t)=\sin t$　　$y''(t)=\cos t$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t}{(1-\cos t)^3}=\dfrac{c-1}{(1-c)^3}=-\dfrac{1}{(1-c)^2}$

2.(1) $=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}=\dfrac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\dfrac{\tan x-x}{x^3}=\dfrac{\frac{1}{c^2}-1}{3x^2}$

$=\dfrac{\frac{2s}{c^2}}{6x}=\dfrac{1}{3}$

(2) $=\dfrac{e}{2}x+x^2\left(e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}-e\right)=\dfrac{e}{2}x+x^2\left(e^{x(\frac{1}{x}-\frac{x^2}{2})}-e\right)$

$1+x+\frac{x^2}{2}+$

$= \frac{e}{2}x + x^2(e^{1-\frac{1}{2x}} - e) = \frac{e}{2}x + ex^2(1 - \frac{1}{2x} - \frac{\frac{1}{4x}}{2} - 1)$

$= \frac{e}{2}x - \frac{e^x}{2} - \frac{e}{8} = -\frac{e}{8}$

3.(2) $\frac{\cos x}{\sin x} > 1 - \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \cos x > \sin x - \frac{x^2}{2}\sin x$

$\cot x > 1 - x^2$

4. $f'(x) = e^{-x}(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \quad - x - \cdots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}) = e^{-x}(1 - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!})$

$x = \sqrt[n-1]{(n-1)!} \qquad e^{-\sqrt[n-1]{(n-1)!}} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt[n-1]{(n-1)!}}{k!}$

5. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta, |x_1 - x_2| < \delta, |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

$\Rightarrow |f^\alpha(x_1) - f^\alpha(x_2)| < \varepsilon$

$= |f^\alpha(x_1)(1 - \frac{f^\alpha(x_2)}{f^\alpha(x_1)})| \le |f(x_1)||1 - \frac{f(x_2)}{f(x_1)}|$

$= |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

6. $f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \frac{x^n}{n} -$

$f_n'(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1}$ $\qquad x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

$f_1(x) = 1 + x$ $\qquad f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} > 0$

单调递增

$f_3'(x) = 1 + x + x^2 = f_2(x) + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^4}{4}$

$1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

$1 + x + x^2 +$

中国科学技术大学2003-2004学年第一学期

数学分析(I)期中试卷

1. (每小题5分)

(1)用$\varepsilon-N$语言表达"数列$\{a_n\}$不以实数a为极限"这一陈述.

(2)讨论函数$f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$在区间$(0,+\infty)$上的一致连续性.

(3)用极限的定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos n}{n}=0$.

2. (每小题5分)求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$

(2) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{[x]^2-4}{x^2-4}$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^x$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\Big(\big(1+\dfrac{1}{x}\big)^x-\mathrm{e}\Big)$

3. (每小题5分)求下列导数：

(1) $(\ln\tan\frac{x}{2})'$

(2) $\left(\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'$

(3) $(\sqrt{1-x^2})'$

(4) $(x\mathrm{e}^x)^{(n)}$

4. (12分)设x_1是一个正数，并归纳地定义$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$，$n=1,2,\cdots$. 求证：极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

5. (13分)设函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上是严格凸的并有二阶导函数，又$f(0)=f'(0)=0$. 求证：当$x>0$时，$f(x)>0$.

6. (10分)设函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上有连续的导函数，且$f(0)=1$. 又当$x\geqslant 0$时，$|f(x)|\leqslant \mathrm{e}^{-x}$. 求证：存在$x_0>0$，使得$f'(x_0)=-\mathrm{e}^{-x_0}$.

7. (10分)设函数$f(x)$在区间[0,1]上可导，且满足$|f'(x)|\leqslant 1$及$f(0)=f(1)=1$. 求证：对$x\in(0,1]$，有$f(x)>\dfrac{1}{2}$.

1. (1) $\exists\varepsilon, \forall N, \exists n>N$ s.t $|a_n-a|>\varepsilon$

(2) $|f(x_1)-f(x_2)|=|\cos\frac{1}{x_1}-\cos\frac{1}{x_2}|$ 令 $x_1=\frac{1}{2n\pi}$ $x_2=\frac{1}{2n\pi+\pi}$

则对 $\varepsilon=1$, $\forall\delta>0$, $\exists n$ s.t $|x_1-x_2|=\frac{\pi}{(2n\pi)(2n\pi+\pi)}<\delta$

而 $|f(x_1)-f(x_2)|>\varepsilon$ ，不一致连续

(3)

对 $\forall\varepsilon>0$. $\left|\frac{\cos n}{n}\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon$, $N=\frac{1}{\varepsilon}$

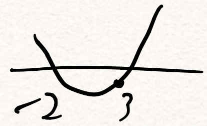
2. (2) 0 (3) $=\left[\left(\frac{2+x}{1+x}\right)^x\right]^{-1}=\frac{1}{e}$

(4) $=x(e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}-e)=x(e^{x(\frac{1}{x}-\frac{\frac{1}{x^2}}{2})}-e)$

$= x(e^{1-\frac{1}{2x}} - e) = x(e\cdot e^{-\frac{1}{2x}} - e)$

$= ex(-\frac{1}{2x}) = -\frac{e}{2}$

3. $\frac{\ln\cos^{\frac{1}{x}}\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}$: $2\csc x$ (3) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

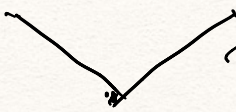


$(x_n-3)(x_n+2)$

4. $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n} < \sqrt{6+3} = 3$

$x_{n+1} - x_n = \sqrt{6+x_n} - x_n > 0$ $\quad 6+x_n > x_n^2$

5. $f''(x) > 0$ $\quad f'(x) > 0$

7.  $f'(\xi) = \frac{|f(x_0)-f(0)|}{x_0}$ $\quad x_0 = \frac{1}{f'(\xi)} \geq \frac{1}{2}$

$(x_{n+1}-x_n) - (x_n - x_{n-1})$

$= \frac{f(x_n)-x_n}{2} - \frac{f(x_{n-1})-x_{n-1}}{2}$

$= \frac{(f(x_n)-f(x_{n-1}))-(x_n-x_{n-1})}{2}$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n \geq N$

$|x_{n+1} - x_n| > \varepsilon$

$|\frac{1}{2}(x+f(x)) - \frac{1}{2}(y+f(y))|$

$= \frac{|f(x)-f(y)+(x-y)|}{}$

$\leq |f(x_n)-f(y_n)| + |x_n - y_n| \leq |x-y|$

中国科学技术大学2005-2006学年第一学期

数学分析(I)期中试卷

1. (10分)叙述数列$\{a_n\}$收敛于实数a的定义，并用极限定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

2. (10分)叙述函数$f(x)$在区间I上一致连续的定义，并讨论函数$f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$在区间$(0,+\infty)$上的一致连续性(要给出证明).

3. (10分)求数列$a_n=\dfrac{n^2}{1+n^2}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$的上极限和下极限.

4. (20分)计算下面的的极限或导数：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\sin\dfrac{a}{x}\right)^x$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$

(3) $\left(\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)'$ (4) $(x\mathrm{e}^x)^{(n)}$

5. (10分)设函数$f(x)$ 在区间$[0,+\infty)$上有连续的导函数，且$f(0)=1$. 又当$x\geqslant 0$时，$|f(x)|\leqslant \mathrm{e}^{-x}$. 求证：存在$x_0>0$，使得$f'(x_0)=-\mathrm{e}^{-x_0}$.

6. (20分)设函数$f(x)$把有界闭区间$[a,b]$映射到$[a,b]$，并且满足$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$. 任取$x_1\in[a,b]$，并归纳地定义$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\big(x_n+f(x_n)\big)$. 证明数列$\{x_n\}$收敛于$[a,b]$内一点$c$，且$f(c)=c$.

$x_n + f(x_n)$ $\quad f(x_n)-f(x_{n-1})\leq x_n - x_{n-1}$

7. (20分)设$f(x)$在有限闭区间$[a,b]$上连续，在(a,b)中每点的右导数存在，且$f(a)<f(b)$. 求证：存在$c\in(a,b)$，使$f'_+(c)\geqslant 0$.

1. $\forall \varepsilon>0,\ \exists N$ s.t. $n>N$, $|a_n-a|<\varepsilon$

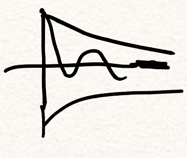
$\forall \varepsilon>0$ $\quad \sqrt{n-1}-\sqrt{n}<\varepsilon \Rightarrow n-1+n-2\sqrt{n(n-1)}<\varepsilon$

$2n-(1+\varepsilon)<2\sqrt{n(n-1)} \Rightarrow (1+\varepsilon)^2-4n\varepsilon<0 \quad N=\dfrac{(1+\varepsilon)^2}{4\varepsilon}$

3. $\lim = \cos\dfrac{2n\pi}{3} = 1,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}$

4. (1) $\left(\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}}\right)^a = e^a$ (2) $=\dfrac{e^x-x-1}{x(e^x-1)}=\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

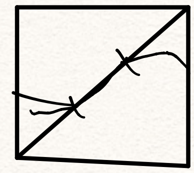
(3) $\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{-4}{\sqrt{x^2-2}\,(1+x^2)}=\dfrac{-4}{\sqrt{x^2-2}\,(1+x^2)}$



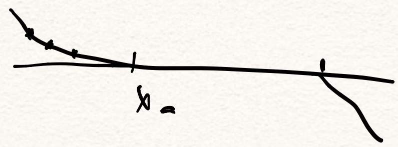
5. $g(x)=f(x)-e^{-x}\leq 0$ $\quad g'(x)=f'(x)+e^{-x}$

$g(0)=f(0)-e^0=0$

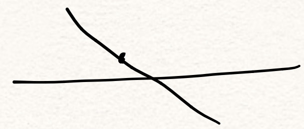
6. $\forall \varepsilon > 0$, ~~取~~ $\delta < \varepsilon$, $|f(x_0) - f(x_0+\delta)| \le |\delta| < \varepsilon$



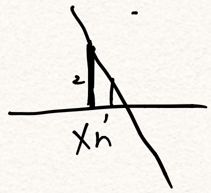
$f(x) - x \quad -2 \le g'(x) = f'(x) - 1 \le 0$



$x_{n+1} - x_n = \dfrac{f(x_n) - x_n}{2} = \dfrac{g(x)}{2} > 0$



$\le |x_0 - x_n|$



$\left| \dfrac{\ln(1+x_1)}{x_1} - \dfrac{\ln(1+x_2)}{x_2} \right|$

中国科学技术大学2006-2007学年第一学期

数学分析(I)期中试卷

1. (20分)叙述题：

(1)用$\varepsilon - N$语言表述“实数a不是数列$\{a_n\}$的极限”.

(2)叙述“函数$f(x)$当$x \to +\infty$时以实数l为极限”的定义.

(3)叙述用来判断数列$\{a_n\}$是否收敛的Cauchy准则.

(4)叙述“函数$f(x)$在区间I上一致连续”的定义.

2. (20分)求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(n^3+k)^{\frac{1}{3}}}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2\frac{1}{x}}{\mathrm{e}^x-1}$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x\ln(x+1)}$

3. (20分)计算下面的导数：

(1) $\left(2^x\sin x+\ln(x^2+1)\right)'$　　(2) $(|x|\sin x)'$

(3) $(\arctan\frac{1-x^2}{1+x^2})'$　　(4) $(x\mathrm{e}^x)^{(n)}$

4. (10分)求函数$f(x)=x^i(1-x)^{n-i}$，$0<i<n$，在$[0,1]$区间上的最大值.

5. (10分)设$f(x)$是定义在实轴$\mathbb{R}$上的函数，且存在常数L和$\alpha>1$使得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|^{\alpha}，x,y\in\mathbb{R}.$$

求证：$f(x)$是常数.

6. (10分)求证：在区间$(0,1]$上不等式$\sin^2 x<\sin x^2$成立.

7. (10分)设函数$f(x)$在$[0,1]$上可微且满足$f(0)=0$及$|f'(x)|\leqslant|f(x)|$，$x\in[0,1]$. 求证在$[0,1]$上$f(x)\equiv 0$.

1.(1) $\exists \varepsilon, \forall N, s.t.\ n>N, |a_n - a| > \varepsilon$

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists X, s.t.\ x > X, |f(x) - l| < \varepsilon$

(4) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta, s.t.\ x_1, x_2, |x_1 - x_2| < \delta, |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

2.(1) $1 = \frac{1}{(n^3+n)^{\frac{1}{3}}} \leq S = \frac{1}{(n^3+1)^{\frac{1}{3}}} + \cdots + \frac{1}{(n^3+n)^{\frac{1}{3}}} \leq \frac{1}{(n^3)^{\frac{1}{3}}} = 1$

(2) $|l| \leq \frac{x^2}{e^x-1} = \frac{2x}{e^x} = 0$

(4) $\frac{x + \frac{x^2}{2} - x}{x^2} = \frac{1}{2}$

3. (2) $= \begin{cases} \sin x + x\cos x, & x \geq 0 \\ -\sin x - x\cos x, & x \leq 0 \end{cases}$

$n-i>0$

(4) $e^x(x+n)$

4. $f(x) = x^i - x^n \quad f'(x) = i x^{i-1} - n x^{n-1}$

$= x^{i-1}(i - n x^{n-i})$

$= \left(\frac{i}{n}\right)^{\frac{i}{n-i}} - \left(\frac{i}{n}\right)^{\frac{n}{n-i}}$ $\quad \sqrt[n-i]{\frac{i}{n}}$

5. $\left|f\left(\frac{i}{n}\right) - f\left(\frac{i+1}{n}\right)\right| \leq L\left(\frac{i}{n}\right)^{\alpha}$

$|f(x) - f(a)| \leq n L \cdot \frac{i^{\alpha}}{n^{\alpha}} = \frac{L i^{\alpha}}{n^{\alpha-1}} \quad n \to \infty.$

6. $(\sin x^2 - \sin^2 x)' = x\cos x^2 - \sin x\cos x$

$> x\cos x - \sin x\cos x$

$= (x - \sin x)\cos x > 0$

7. $f(x) = f(x_0) + f'(\xi_1)x = x f'(\xi_1)$

$|f(x)| = x|f'(\xi_1)| \leq x|f(\xi_1)| \leq x\,\xi_1 f(\xi_2)$

$\leq x\,\xi_1\,\xi_2 \cdots \xi_n f(\xi_n)$

$\leq x^n |f(\xi_n)|$

$$f'' + xf' + 2f = 0$$

$$\left(f^2 + \frac{1}{2}f'^2\right)' \qquad F = f^2 + \frac{1}{2}f'^2$$

$$= \underline{2ff' + f'f''}$$

$$= \underline{2ff' + f'(-2f - xf')}$$

$$= -x(f')^2 \qquad f$$

$$f'$$

$x<0$ 时. $F' \geq 0$

$\underline{F\uparrow}$ 又 $F \geq 0$.

F 在 $(-\infty, 0)$ 有界

$x>0$, $F' \leq 0$

$F\downarrow \quad F \geq 0$

中国科学技术大学2007-2008学年第一学期

数学分析(I)期中试卷

$x>0$

$\frac{\ln(1+x)}{x}$

1. (10分)叙述题：

(1)用$\varepsilon-\delta$语言表述“函数$f(x)$在区间I上不一致连续”.

(2)叙述用来判断数列$\{a_n\}$是否收敛的Cauchy准则.

2. (20分)求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(n^3+n-k)^{\frac{1}{3}}}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3\sin^2\frac{1}{x}}{1-\cos x}$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x-\frac{1}{2}x^2}{x^2\ln(x+1)}$

$n=1:\quad x=\frac{1}{2}$

$f_n(x_0)=0 \Rightarrow x_0+x_0^n=1$

$f_{n+1}(x_0)=x_0+x_0^{n+1}<1$

$x_0\to 1$

3. (20分)计算下面的导数：

(1) $\left(2^x\sin x+\ln(x^2+1)\right)'$　　(2) $\left(|x|(\mathrm{e}^x-1)\right)'$

(3) $(\arctan\frac{1-x^2}{1+x^2})'$　　(4) $(x\sin x)^{(n)}$

4. (20分)求函数$f(x)=\cos^2 x\sin x+\cos x\sin^2 x$在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上的最大值.

5. (10分)设函数$f(x)$在区间$[a,b]$ 上可导且满足$f(a)=f(b)=0$及不等式$f'(x)\geqslant 2xf(x)$，$x\in[a,b]$. 求证$f(x)\equiv 0$.

6. (10分)设$f(x)$在实轴$\mathbb{R}$上有二阶导数，且满足方程

$(xf)'=f+xf'$

$$2f(x)+f''(x)=-xf'(x).$$

$f+xf'=-(f''+f)$

$2f+xf'+f''=0$　　$e^{-x^2}f(x)$

$(xf)'=$

求证$f(x)$和$f'(x)$都在$\mathbb{R}$上有界.

$e^{x^2}(f'(x)-2xf(x))$

7. (10分)证明对任意自然数n，方程$x+x^n=1$恰有一个正根x_n. 进一步证明数列$\{x_n\}$收敛，并求其极限.

1.(1) $\exists\varepsilon>0$, 对$\forall\delta>0$ $\exists x_1,x_2$, s.t. $|x_1-x_2|<\delta$, $|f(x_1)-f(x_2)|>\varepsilon$

(2) $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, s.t. $n>N$, $|a_{n+p}-a_{n+q}|<\varepsilon$

2.(1) $\frac{1}{(n^3+n-1)^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{(n^3+n-2)^{\frac{1}{3}}}+\cdots+\frac{1}{(n^3+n-n)^{\frac{1}{3}}}=1$

$\frac{n}{\sqrt[3]{n^3+n}}\leq O\leq\frac{n}{\sqrt[3]{n}}=1$　　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt[3]{n^3+n}}\right)^3=\frac{n^3}{n^3+n}=1$

(2) $|\cdot|\leq\frac{x^3}{1-\cos x}=\frac{3x^2}{\sin x}=\frac{6x}{\cos x}=0$

(3) $=\lim\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^x=\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t+1}=e^2$

(4) $= \dfrac{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - x - \frac{x^2}{2}}{x^2 \, x} = \dfrac{1}{6}$

3. (1) $2^x \ln 2 \sin x + \cos x \, 2^x + \dfrac{2x}{x^2+1}$

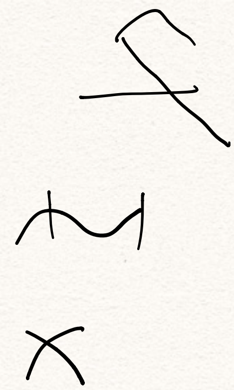
(2) $\begin{cases} e^x(x+1) - 1, & x > 0 \\ -e^x(x+1) + 1, & x < 0 \end{cases} = \left| e^x(x+1) - 1 \right|$

(3) $\dfrac{1}{1 + \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2} \cdot \dfrac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2 + (1-x^2)^2}$

$= -\dfrac{2x}{1+x^4}$

(4) $(x \sin x)^{(n)} = (\sin x)^{(n)} + n \cdot (\sin x)^{(n-1)} \cdot x'$

$= \sin(x + \frac{n\pi}{2}) + n \sin(x + \frac{n-1}{2}\pi)$



4. $\cos^2 \sin + \cos \sin^2 = (1-s^2)s + c(1-c^2)$

$= s - s^3 + c - c^3 = c - 3s^2c - s + 3c^2s$

$= c - s + 3sc(c-s)$

$= (c-s)(1 + \frac{3}{2}\sin 2x)$

$\dfrac{3.14}{4}$

$f(0) = 0 \quad f(\frac{\pi}{4}) = 2(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(5) $f'(x) \geq 2x f(x) \quad f'(x) - 2x f(x) \geq 0$

$g(x) = \dfrac{f(x)}{e^{x^2}} \quad g'(x) = \dfrac{f'(x) - 2x f(x)}{e^{x^2}} \geq 0 \quad g(a) = g(b) = 0$

$g(x) \uparrow \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

(6) $2f(x) + f''(x) = -x f'(x)$

中国科学技术大学2017-2018学年第一学期

数学分析(B1)期中试卷

1. (10分)用数列极限的定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3n+2(-1)^n}=\dfrac{1}{3}$.

2. (8分)写出一个在(0,1]上连续且有界，但不一致连续的函数，并说明理由.

3. (每小题8分)求极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1)\ln(1+x^2)}{(\sin x-x\cos x)\tan x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\cdot\ln(1-x)$　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$

4. (12分)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+k}$.

$\dfrac{\sin^2(ax)(ax)^2}{(ax)^2x^2}=a^2=2a-1$

$a=1$

5. (15分)求常数a,b使得$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2(ax)}{x}, & x>0\\ (2a-1)x+b, & x\le 0\end{cases}$在定义域内可导.

6. (15分)设函数$y=y(x)$在$\mathbb{R}$上可导且满足方程$y+2^y-x-\sin x=1$. 求$y'(0)$.

7. (8分)设$f(x)$在区间$[a,b]$可导. 假设存在$x_0\in(a,b]$使得$f'(x_0)=0$. 求证：存在$\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$.

$\frac{2}{3}\cdot(-1)^n-3n\varepsilon-2\varepsilon(-1)^n\le$

1. 对 $\forall\varepsilon>0$,

$3n\varepsilon\ge\frac{2}{3}(-1)^n-2\varepsilon(-1)^n$

解 $\left|\dfrac{n}{3n+2\cdot(-1)^n}-\dfrac{1}{3}\right|\le\varepsilon$

$\ge\left|\frac{2}{3}-2\varepsilon\right|$

$n\ge\left|\dfrac{\frac{2}{3}-2\varepsilon}{3\varepsilon}\right|$

$-\varepsilon+\frac{1}{3}\le\dfrac{n}{3n+2\cdot(-1)^n}\le\varepsilon+\frac{1}{3}$

$(\frac{1}{3}-\varepsilon)(3n+2\cdot(-1)^n)\le n\le(\varepsilon+\frac{1}{3})(3n+2\cdot(-1)^n)$

$0\le 3n\varepsilon+2\cdot(-1)^n\varepsilon\quad+\frac{2}{3}\cdot(-1)^n$

$3n\varepsilon\ge 2\cdot(-1)^{n+1}\varepsilon+\frac{2}{3}\cdot(-1)^{n+1}$

$\ge 2\varepsilon+\frac{2}{3}$

$n\ge\frac{2}{3}+\frac{2}{9\varepsilon}$

$\varepsilon=\frac{1}{2}$

2、 $\sin\frac{1}{x}$　　一致连续　　$\sin\frac{1}{\frac{1}{n}}$　　$\sin\frac{1}{\frac{1}{n+1}}$

$k\to\infty$

$=\sin n-\sin(n+1)$

$=-\cos(n+\frac{1}{2})$　，当 $n=-\frac{1}{2}+2k\pi$

3(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} = \frac{1}{e}$

(2) $$\frac{x\left(\frac{x}{2}\right)\cdot x^2}{x\cdot\left(\frac{x^3}{3}\right)} = \frac{3}{2}$$

(3) $\ln x\cdot\ln(1-x) = \dfrac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}}$

$$= \frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{\frac{1}{x}}{\ln^2 x}} = \frac{x\ln^2 x}{1-x}$$

$$x - x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{\frac{1}{x^2}}{2}\right) = x - x + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\ln^2 x + 2\ln x}{-1} = \frac{\ln x(2+\ln x)}{-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k}$$

$$\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\cdots\frac{n}{n^2+n}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{n^2+n}{2}}{n^2+n} \le \quad \le \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{1}{2}$$

$y + 2^y - x - \sin x = 1$ $\qquad y(0) + 2^{y(0)} = 1 \qquad y(0) = 0$

$y' + 2^y\ln 2 - 1 - \cos x = 0$

$y'(0) + 2^{y(0)}\ln 2 - 1 - 1 = 0$

$= 2 - \ln 2$

中国科学技术大学2015-2016学年第一学期

数学分析(A1)期中试卷

1. (10分)设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$为连续周期函数. 证明：$f$一致连续.

2. (10分)回答下列问题，并说明理由.

(1)设函数$f:(0,1)\to\mathbb{R}$满足$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|^2$，$\forall x,y\in(0,1)$，是否一定有$f\equiv 0$?

(2)设函数$f\in C[0,1]$是单射且$f(0)<f(1)$，问f是否单调递增？

(3)设函数$f\in C[0,1]$，问对$\forall t\in(0,1)$，是否存在$x,y\in(0,1)$，使得$\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(t)$?

3. (15分)计算下列极限的值.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\pi x-\pi\sin x}{x^3}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\prod\limits_{k=1}^{n}(1+\dfrac{k}{n^{2017}})\Big)^{\frac{1}{n^{2015}}}$

4. (10分)设可微函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$既非常值函数，也不是一次多项式. 证明：$\exists\xi,\eta\in(0,1)$，使得$f'(\xi)<f(1)-f(0)<f'(\eta)$.

5. (10分)设$f:[0,+\infty)\to(-\infty,0]$为凸函数. 证明：$f$单调递减.

6. (15分)设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}\subseteq\mathbb{N}$满足

$$a_1=b_1=1，a_n+\sqrt{3}b_n=(a_{n-1}+\sqrt{3}b_{n-1})^2.$$

证明：$\{\dfrac{b_n}{a_n}\}$收敛，并求出该极限值.

7. (10分)设函数$f\in C^2(\mathbb{R})$满足$M_0:=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|<\infty$，$M_2:=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|<\infty$. 证明：$M_1:=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|<\infty$，且满足不等式$M_1^2\leqslant 2M_0M_2$.

8. (10分)设函数$f\in C^2[0,+\infty)$满足$f(x)\leqslant f''(x)$，$\forall x\in[0,+\infty)$且$f(0)\geqslant 0$，$f'(0)\geqslant 0$. 证明： $f(x)\geqslant f(0)+f'(0)x$，$\forall x\in[0,+\infty)$.

9. (10分)设可导函数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$满足$\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(\dfrac{x+y}{2})$，$\forall x,y\in[a,b]$. 求$f$.

中国科学技术大学2012-2013学年第一学期

数学分析(B1)第三次测验

1. (24分)求下列不定积分：$(x-1)(x-1)^7+x-$

(1) $\displaystyle\int x(x-1)^7\mathrm{d}x$　　(2) $\displaystyle\int \sin(2x)\cos^2 x\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int \sin\sqrt{x}\mathrm{d}x$　　(4) $\displaystyle\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})\mathrm{d}x$

2. (24分)求下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^1 \arcsin x\mathrm{d}x$　　(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{(x^2+1)(x+1)}\mathrm{d}x$　　(4) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{|\cos x|}\sin^5 x\mathrm{d}x$

3. (20分)求下面的极限：

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4}\int_0^{x^2}\frac{t^4}{1+t^3}\mathrm{d}t$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}$

4. (12分)求极坐标方程$r=\mathrm{e}^{-\theta}$ $(0\leqslant\theta<+\infty)$表示的螺线的长度.

5. (10分)设$f(x)\in C[0,1]$且满足$3\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x+1=6\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$. 求证：$f(x)=x$.

6. (10分)设$f\in C(\mathbb{R})$. 令$g(x,y)=\displaystyle\int_0^x \big(f(t+y)-f(t)\big)\mathrm{d}t$. 求证：$g(x,y)=g(y,x)$.

1. (1) $= \int [(x-1)^8+(x-1)^7]\, d(x-1)$

$= 8(x-1)^7+7(x-1)^6+C$

(2) $=\int \sin 2x \frac{\cos 2x+1}{2} dx$

$=\int \frac{1}{4}\sin 4x\, dx + \int \frac{\sin 2x}{2} dx$

$= -\frac{\cos 4x}{16} - \frac{\cos 4x}{4} + C$

(3) $2\int \sin\sqrt{x}\, dx = 2x\sin\sqrt{x} - \int \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\, dx$

$\int \cos\sqrt{x}\, dx = x\cos\sqrt{x} + \int \frac{\sqrt{x}}{2}\sin\sqrt{x}\, dx$

$\therefore \int \sin\sqrt{x}\, dx = \frac{4}{5}x\sin\sqrt{x} - \frac{2}{5}x\cos\sqrt{x} + C$

(4) $= x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

$= x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} d(x^2+1)$

$= x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1}$

2. (1) $= x\arcsin x - \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$

(2) $= -\int \arctan x\, d(\frac{1}{x})$

$= -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x^2} dx$

$= -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2} d(x^2+1)$

$= -\frac{\arctan x}{x} + \ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Big|_1^{\infty}$

$= 0 - (-\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2) = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$

(3) $\int \frac{(1+x^2)-x(x+1)}{(1+x^2)(x+1)} dx$

$= \int \frac{1}{x+1} d(x+1) - \int \frac{x}{1+x^2} dx$

$= \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

$= \ln\frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$

(4) $= -\frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \underbrace{\sqrt{|\cos x|}(1+\cos^4 x-2\cos^2 x)}\, d\cos x$

$= -\frac{1}{8}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\quad) + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right)$

$= -\frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}\cos^{\frac{3}{2}} x + \frac{2}{11}\cos^{\frac{11}{2}} x - \frac{4}{7}\cos^{\frac{7}{2}} x\right) = 0$

3. (1)

$$= \frac{x^8 \, 2x}{(1+x^6)\, 4x^3} = \frac{1}{2}$$

(2) $1 = \frac{n^2}{n^2+n} < (2) < \frac{n^2}{n^2+1} = 1$

4. $L = \int_0^\infty \sqrt{e^{-\theta^2} + (-e^{-\theta})^2}\, d\theta = \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-\theta}\, d\theta = \sqrt{2}\left(-e^{-\theta}\right)\Big|_0^\infty$

$= \sqrt{2}$

5. $3\int_0^1 (x+g(x))^2\, dx + 1 = 6\int x(x+g(x))\, dx$

$3\int_0^1 (x^2+g^2(x)+2xg(x)) + 1 = 6\int x^2 + xg(x)\, dx$

$\int_0^1 g^2(x)\, dx = 0 \quad g(x) = 0$ (連續性)

6.

中国科学技术大学2012-2013学年第一学期

数学分析(B1)第四次测验

1. (14分)求下列微分方程的通解.

(1)$y' = \dfrac{x+y}{y-2} - 1$；

(2)$y' = \dfrac{x+y+2}{x-y+4}$.

2. (12分)求微分方程$y'' - xy' - x^3(y')^3 = 0$，满足$y'(0) = 1$，$y(0) = 0$的特解.

3. (30分)判断下列数项级数的敛散性，对非正项级数指出其是条件收敛还是绝对收敛，并写出理由.

(1)$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$；

(2)$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$；

(3)$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{2^n}$；

(4)$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{(\ln n)^3}$；条件收敛

(5)$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$. 条件收敛

4. (15分)设函数序列$\{f_n(x) = n^\alpha x^2 \mathrm{e}^{-nx}\}$，试问$\alpha$取何值时：

(1)$\{f_n(x)\}$在[0,1]收敛；

(2)$\{f_n(x)\}$在[0,1]一致收敛； 一致收敛

(3)等式$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$成立.

5. (14分)求幂级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$的收敛半径及收敛区域，并求它的和函数.

6. (15分)将函数$\arctan\dfrac{3x-1}{3x+1}$展开成Maclaurin级数，并求$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$的和.

1. (1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+2}{y-2}$ $\quad (x+2)^2 = (y-2)^2, \ y \neq 2$

(2) $\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y+4=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} u=x+3 \\ v=y-1 \end{cases}$ $\quad \dfrac{dv}{du} = \dfrac{u-3+v+1+2}{u-3-v-1+4} = \dfrac{u+v}{u-v}$

$\dfrac{u\,dt}{du} = \dfrac{1+t^2}{1-t} \Rightarrow \dfrac{1-t}{1+t^2}dt = \dfrac{du}{u}$

$\arctan t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) = \ln|u| + C$

4. (1) $\dfrac{n^\alpha x^2}{e^{nx}}$ $\quad \alpha\in R???$ $\quad$ (2) $\sup u_n = \dfrac{k}{n^{2-\alpha}}$ $\quad 2-\alpha \geq 0$ $\quad 2-\alpha>0$, $\alpha<2$

$2-\alpha<0$

$$\frac{3x-1}{3x+1} \qquad \arctan x$$

$$\frac{1}{1+x^2} \quad /$$

5. $S: \frac{1}{x} \sum_{0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+2} = \frac{1}{x} \left(\sum_{0}^{\infty} x^{n+2} \right)' = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x^2}{1-x} \right)' = \frac{2-x}{(1-x)^2}$

6. $\left(\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \right)'$ $\underline{\underline{\quad\quad}}$ $\arctan x$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^2} \cdot \left(1-\frac{2}{3x+1}\right)$$

$$\frac{6}{(3x+1)^2}$$

$$\frac{du}{dx} - xu = x^3u^3 \qquad u = y' \qquad t = \frac{1}{u^2}$$

$$f' = \frac{1}{1+9x^2}$$

$$= 3 \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \cdot (3x)^n$$

$$f = 3 \sum \frac{(-3)^n}{n+1} x^{n+1}$$

$$\frac{dt}{dx} + 2xt = -2x^3$$

$$t = e^{-\int 2t\,dt} \left(\int -2x^3 e^{\int 2t\,dt} + c \right)$$

$$= \underline{e^{-x^2}} \left(\underline{\int -2x^3 e^{x^2} dx} + \underline{C} \right)$$

$$\frac{1}{y'^2} = 1-x^2$$

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{1}{y'^2} = 1-x^2 + C\underline{e^{-x^2}}$$

$$dy = \pm \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

1/10

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

中国科学技术大学2013-2014学年第一学期

数学分析(B1)第三次测验

1. (每小题9分)计算下列积分.

(1) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int \max\{x^3,x^2,1\}\mathrm{d}x$

$x\sqrt{1-x}$

$x=\sin^2 t$

$dx = 2\sin t\, dt$

2. (每小题9分)求极限.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n(n+3k)}}\Big)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+a}\frac{(\ln t)^n}{t+2}\mathrm{d}t$，$a>0$，$n\in\mathbb{N}$

$\int_0^x \sin x < \int_0^x x$

$\int_0^x -\cos x < \int_1^x \frac{x^2}{2} - 1$

$-\sin x < \frac{x^3}{6} - x$

3. (10分)计算由曲线$x=2y^2$和$x=1+y^2$所围成的平面图形的面积.

4. (18分)设D_1是由抛物线$y=2x^2$和直线$x=a,x=2$及$y=0$所围成的平面区域，D_2是由抛物线$y=2x^2$和直线$x=a$及$y=0$所围成的平面区域，$0<a<2$.

(1)求D_1绕x轴旋转而成的旋转体体积V_1，D_2绕y轴旋转而成的旋转体体积V_2；

(2)问当a为何值时，V_1+V_2最大，并求此最大值.

5. (6分)试用积分方法证明：当$x>0$时，$x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$.

x^2

6. (6分)设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，且满足

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t\ (x\in[a,b)),\quad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

$\int(b) \int_a^b x\,dx$

证明：$\displaystyle\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$.

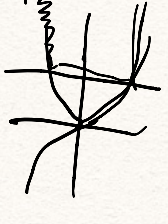
7. (6分)设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，$\displaystyle\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=0$，证明；至少存在两点$x_1,x_2\in(a,b)$，使得$f(x_1)=f(x_2)=0$.

1.(1) $\displaystyle\int \frac{x-3}{(x-3)^2+4}d(x-3)+\int\frac{8}{(x-3)^2+4}d(x-3) = \frac{1}{2}\ln\left((x-3)^2+4\right)+4\arctan\frac{x-3}{2}$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx \overset{x=\sin^2 x}{=\!=} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\, d\sin x = \frac{\sin^3 x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$

(3) $\displaystyle = -\int \ln x\, d\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\frac{\ln x}{1+x}+\int\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{x}dx = -\frac{\ln x}{1+x}+\ln\frac{x}{1+x}\Big|_1^{\infty} = 0-\ln\frac{1}{2}=\ln 2$

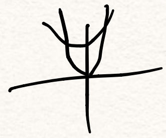
(4) $\begin{cases}\frac{x^4}{4}+\frac{3}{4} & >1\\ x & \\ \frac{x^3}{3}-\frac{1}{3} & <-1\end{cases}$



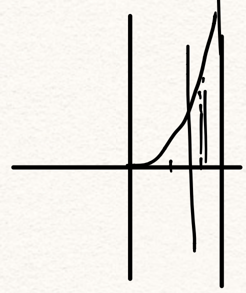
2. (1) $\frac{1}{n}\sum \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3k}{n}}} = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx = 2\sqrt{1+x}\Big|_0^3 = 2$

(2) $\lim_{\xi\to\infty} a \frac{(\ln\xi)^7}{\xi+2} = 0$

3. $y=2x^2 \quad y=1+x^2$



$x=1 \quad 2\int_0^1 (1-x^2)\,dx = 2(x-\frac{x^3}{3})\Big|_0^1 = \frac{4}{3}$



4. $V_2=\int_{x_1}^{x_2} 2\pi x\cdot 2x^2\cdot dx = 4\pi\int x^3 dx = \pi x^4\Big| \quad V_2=a^4\pi$

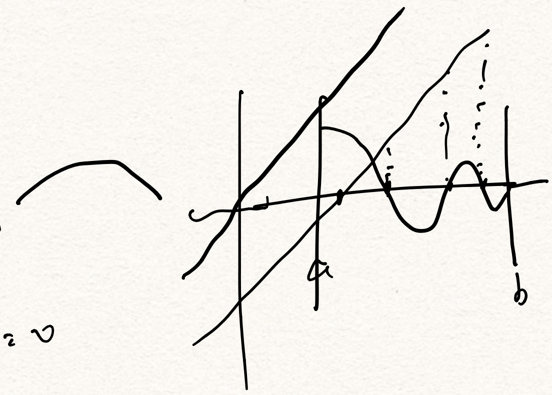
$V_1=\int \pi(2x^2)^2 dx = 4\pi\int x^4 dx = \frac{4\pi}{5}(32-a^5)$

$a^4-\frac{4}{5}a^5 \qquad 4a^3=4a^4 \qquad a=1 \qquad (\frac{4}{5}\cdot 31+1)\pi \quad \frac{129}{5}\pi$

5. $\sin x < x$

6. $\int_a^x h(t)dt \geq 0 \quad \int_a^b h(t)dt = 0 \qquad \int_a^b \boxed{t h(t)} dt \leq 0$ $=\xi$

...



$H(x)=\int_a^x h(t)dt \qquad H(a)=0$
$H(b)=0$

$H'(x)=h(x) \qquad \int_a^b H'(\xi)=0$

$\int_a^b tH'(x)\,dt - \int_a^b tH'(\xi)\,dt$

$\int_a^{k_1} + \int_{k_1}^{k_2} \quad (th(t))' = h(t)+th'(t)$

/

中国科学技术大学2015-2016学年第一学期

数学分析(B1)第三次测验

1. (24分)计算下列不定积分：

(1) $\int x(x-1)^5 \mathrm{d}x$　　(2) $\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \mathrm{d}x$

1

(3) $\int \frac{1}{\sin 2x + 2\sin x} \mathrm{d}x$　　(4) $\int (2x-1)\ln x \mathrm{d}x$

2. (24分)计算下列定积分：

$(1+\frac{1}{n})+(1+$

(1) $\int_0^1 x^2 \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$　　(2) $\int_0^1 \frac{1+3x}{(x^2+1)(x+1)} \mathrm{d}x$

(3) $\int_{-3}^2 \min(2, x^2) \mathrm{d}x$　　(4) $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+\mathrm{e}^{-x}} \mathrm{d}x$

3. 计算下列极限的值.

(1)(10分) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} (n+k)}$；

$g(x)=f(x)-f(a)$

$g'(x)=f'(x)$

(2)(10分) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}$，其中$f(x)$ 连续，且$f(0)\neq 0$.

4. (8分)设$f(x)$在$[-1,1]$上连续，且对$[-1,1]$上的任意连续偶函数$g(x)$，有

$$\int_{-1}^1 f(x)\underline{g(x)}\mathrm{d}x = 0.$$

证明：$f(x)$ 是$[-1,1]$ 上奇函数.

5. (8分)设$f(x)$在$[a,b]$上有连续导函数，证明：

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)| \leqslant \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| + \int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x.$$

1. (1) $= \int[(x-1)(x-1)^5 + (x-1)^5]\,dx$

$= \int (x-1)^6 d(x-1) + \int (x-1)^5 d(x-1)$

$= \frac{(x-1)^7}{7} + \frac{(x-1)^6}{6} + C$

(2) $= \int \frac{1}{\sin x\cos x} 2\sin x\cos x\, dx$

$= 2x = 2\arcsin\sqrt{x}$

(3) $= \frac{1}{2}\int \frac{d\cos x}{(1-\cos^2 x)(1+\cos x)}$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1-t}{1+t} + \frac{1}{1+t}\right)$

(4) $\int 2x\ln x\, dx - \int \ln x\, dx$

$= \int d(x^2)\ln x - (x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx)$

$= x^2\ln x - \int x^2 \frac{1}{x}dx - x\ln x + x$

$= x^2\ln x - \frac{x^2}{2} - x\ln x + x$

2. (1) $= \int -x^2\, d(e^{-x}) = -x^2e^{-x} + \int 2e^{-x}x\,dx = -x^2e^{-x} + 2\int -x\, de^{-x}$

$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}\Big|_0^1$

$= \frac{1}{e}(-1-2-2)-(-2) = 2-\frac{5}{e}$

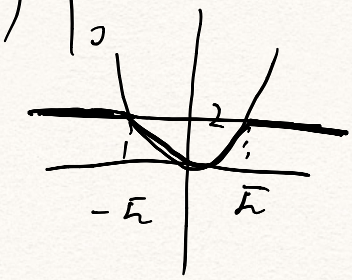
(2)

$= \int \frac{1+x+2x}{(1+x^2)(1+x)} = \int \frac{1}{(1+x^2)} + 2\int \frac{x+1-1}{(1+x^2)(1+x)}$

$= 3\int \frac{1}{(1+x^2)} - \int \frac{(1+x^2)+(1-x^2)}{(1+x^2)(1+x)} = 2\int \frac{1}{1+x^2} - \int \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2} d(x^2)$

$= 2\arctan x - \ln|1+x| + \frac{1}{2}\ln|1+x^2| \Big|_0^1$

$= \left(\frac{\pi}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2\right) = \frac{\pi - \ln 2}{2}$



(3) $= \int_{-3}^{-\sqrt{2}} 2dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} 2dx + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^2 dx$

$= 2x\Big|_{-3}^{-\sqrt{2}} + 2x\Big|_{\sqrt{2}}^{2} + \frac{x^3}{3}\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$

$= 2(3-\sqrt{2}) + 2(2-\sqrt{2}) + \frac{4\sqrt{2}}{3} = 10 + \frac{4\sqrt{2}}{3}$

(4) $\int_{-1}^{0} \frac{x^2}{1+e^{-x}} dx = \int_{1}^{0} -\frac{x^2}{1+e^{x}} d(x)$

原: $\int_0^1 \frac{x^2}{1+e^{-x}} + \frac{x^2}{1+e^{x}} = \int_0^1 x^2(\quad) dx = \frac{1}{3}$

3.(1) $= \sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{n}{n})}$ $\quad \ln 原 = \frac{1}{n}\Sigma \ln(1+\frac{i}{n})$

$= \int_0^1 \ln(1+x) = (1+x)\ln(1+x) - x$

$= 2\ln 2 - 1$

$原 = e^{2\ln 2} \cdot e^{-1} = \frac{4}{e}$

(2) $\dfrac{x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(x-t)dt - xf(x)} = \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{\quad} = \dfrac{f(x)}{-f(x)-f(x)-1}$ 洛!

$= -\frac{f(0)}{1+2f(0)}$

4 $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \int_{-1}^{0} + \int_0^1 = \int_0^1 g(x)(f(x)+f(-x))dx \overset{0}{=} 0$

5.

中国科学技术大学2003-2004学年第一学期

数学分析(I)期末试卷

1. (每小题5分)

   (1)写出函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的Riemann积分的定义.

   (2)写出带Lagrange余项的Taylor定理.

   (3)写出关于函数是否Riemann可积的Lesbegue定理.

   (4)写出微积分基本定理.

2. (每小题5分)求下列极限：

   (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^{x^2}\arctan t\mathrm{d}t}{\sqrt{x^4+1}}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

   (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{n^2}^{n^2+n}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos\frac{(k-1)\pi}{2n}-\cos\frac{(k+1)\pi}{2n}}{1+\cos\frac{k\pi}{2n}}$

3. (每小题5分)求下列积分：

   (1) $\int\sqrt{x}\ln^2 x\mathrm{d}x$　　(2) $\int\dfrac{\cos x\sin x}{(1+\sin^2 x)^n}\mathrm{d}x$

   (3) $\int_0^3\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}\mathrm{d}x$　　(4) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

4. (20分)求参数方程：$\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t)\\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，(其中$a>0$是常数)所表示的曲线的弧长和曲率.

5. (10分)求满足函数方程：$\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$的连续函数$f(x)$.

6. (10分)设函数$f(x)$在区间[0,1]上有连续的导函数，且$f(0)=0$. 求证：

$$\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\int_0^1(1-x^2)|f'(x)|^2\mathrm{d}x$$

并且当且仅当$f(x)\equiv cx$时等号成立，其中c为常数.

1.(1) $\forall\varepsilon,\ \exists\,\|T\|<\delta,\ \forall x_i\in[x_i,x_{i+1}]\ \left|\int-\sum f(x_i)\cdot\Delta x\right|<\varepsilon$

(2) $f(x)=f(x_0)+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i+\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n,\ \xi\in(x_0,x)$

(3) 有限可数间断点

(4)

2. (1) 洛 $=\dfrac{\arctan x^2\cdot 2x}{2x}=\dfrac{\pi}{2}$

(2) $=\dfrac{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}\right)}{x^4}=-\dfrac{1}{12}$

x

(3) $\le \int_{n^2}^{n^2+n} \frac{1}{x} \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\cdot n = 0$

(4)

$= \lim_{n\to\infty} 2\sin\frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{n} \tan\frac{k\pi}{4n} = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x = \pi \ln|\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\pi \ln 2}{2}$

3. (1) $\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx = \frac{2}{3}\int \ln^2 x\,dx^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\ln^2 x\, x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}\int \sqrt{x}\ \ln x\ dx$

$= \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln^2 x - \frac{8}{9}\int \ln x\,dx^{\frac{3}{2}} = (\quad) - \frac{8}{9}x\sqrt{x}\ln x + \int \frac{8}{9}\sqrt{x}\ dx$

$= \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln^2 x - \frac{8}{9}x\sqrt{x}\ln x + \frac{16}{27}x\sqrt{x} + C$

(2) $= \int \frac{\sin x}{(1+\sin^2 x)^n}\,d\sin x = \frac{1}{2}\int \frac{d(\sin^2 x+1)}{(1+\sin^2 x)^n} = \frac{1}{2(1-n)} \frac{1}{(1+\sin^2 x)^{n-1}}$

(3) $= x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} - \int x \frac{\cancel{\sqrt{1+x}}}{\cancel{\sqrt{\ \ }}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{\cancel{x}}} \cdot \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$

$= x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}\,dx = x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} - \frac{1}{2}\ln(1+x)\Big|_0^3$

$= \pi - \ln 2$

(4) $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}dx \xrightarrow[dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx]{t=\sqrt{x}} \int_0^\infty 2te^{-t}\ dt = -2\int t\,de^{-t} = -2te^{-t} + 2\int e^{-t}dt$

$= -2te^{-t} - 2e^{-t}\Big|_0^\infty$

$= -(-2) = 2$

4. $x' = a(-\sin t + \sin t + t\cos t)$ $y' = a(\cos t - \cos t + t\sin t)$

$L = \int_0^{2\pi} a\sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t}\ dt = a\int_0^{2\pi} t\,dt = a\frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2 a$

$x'' = a(\cos t - t\sin t)$ $y'' = a(\sin t + t\cos t)$

$k(t) = \frac{1}{a}\frac{t\cos t(\sin t + t\cos t) - t\sin t(\cos t - t\sin t)}{(a^2t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{at}$

5. $\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 求导, $xf(x) = \int_0^x f(t)dt$ d, $f(x) + xf'(x) = f(x)$,

$xf'(x) = 0$ $f'(x) = 0$ $f(x) = C$

6. $\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)|f'(x)|^2\mathrm{d}x$

d ,

中国科学技术大学2005-2006学年第一学期
数学分析(I)期末试卷

1. (每小题5分)叙述定义或定理.

(1)写出带Lagrange余项的Taylor定理.

(2)写出函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的Riemann积分的定义.

(3)写出关于函数是否Riemann可积的Lebesgue定理.

(4)写出微积分基本定理.

2. (每小题10分)求下列各式：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^p}{n^{p+1}}$，$p>0$

(3) $\displaystyle\int x(\ln x)^2\mathrm{d}x$ (4) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{1}{1+x}\sqrt{\frac{x}{1+x}}\mathrm{d}x$

3. (15分)求参数曲线$\Gamma: x=\dfrac{\sin t}{\sqrt{2}},\ y=\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ z=\dfrac{1-\cos t}{\sqrt{2}},\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$的弧长和曲率.

4. (10分)设$f(x)$是区间$[-1,1]$上的连续函数，并且对一切在$[-1,1]$上可积的奇函数$g(x)$，有$\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$. 求证$f(x)$是$[-1,1]$上的偶函数.

5. (10分)设$f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上满足函数方程

$$\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=(x-1)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

的连续函数. 求证$f(x)\equiv 0$.

6. (5分)设$f(x)$是闭区间$[0,1]$上满足$f(0)=f(1)=0$的连续可微函数，求证不等式

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{12}\int_0^1|f'(x)|^2\mathrm{d}x,$$

并且等号成立当且仅当$f(x)\equiv Ax(1-x)$，这里A是常数.

2 (1) 0 (2) $=\frac{1}{n}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p=\int_0^1 x^p=\frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1=\frac{1}{1+p}$

15

(3) $=\frac{1}{2}\int dx^2\ln^2 x=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\int x\ln x\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\frac{1}{2}\int dx^2\ln x$

$=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{x^2}{4}+C$

(4) $=\int$

3. $x' = \frac{\cos t}{\sqrt{2}}$ $y' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $z' = \frac{\sin t}{\sqrt{2}}$ $S = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\cos^2 t + 1 + \sin^2 t}{2}}\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

$$k = \frac{\sqrt{(x'y'' - y'x'')^2 + (xz \cdot \ldots)^2 + (zy \ldots)^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}}\frac{\cos t}{\sqrt{2}} + \frac{\sin^2 t}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right)^2}}{t^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{s^2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{c^2}{4}}}{t\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{2}\, t\sqrt{t}}$$

4. $= \int_{-1}^{0} + \int_0^1 = \int_0^1 - \ldots \int_1^0 f(-x, g(-x))\, dx)$

$$= \int_0^1 f(x) \cdot (g(x) - g(-x))\, dx = 0$$

5. $\int_0^x t f(t)\mathrm{d}t = (x-1)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ $d \Rightarrow f(x) = \int$ $d \Rightarrow f'(x) = f(x)$

$y = Ce^x$

中国科学技术大学2006-2007学年第一学期

数学分析(I)期末试卷

1. (每小题5分)求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^4}\left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^3}\mathrm{d}t - x\right)$ (2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x x^n \mathrm{d}x$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n^3}}{n}$

2. (每小题5分)求下列积分：

(1) $\displaystyle\int\sqrt{x}\ln x\mathrm{d}x$ (2) $\displaystyle\int\frac{\cos x\sin x}{(1+\sin^2 x)^n}\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ (4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

3. (10分)求解微分方程：$(x+y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0$.

4. (10分)讨论级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{\alpha}\cos n$的条件收敛性和绝对收敛性.

5. (10分)讨论函数项级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-nx}$在区间$0\leqslant x<+\infty$上的一致收敛性.

6. (15分)设$f(x)$在区间[0,1]上非负连续可微，$f(0)=f(1)=0$，且$|f'(x)|\leqslant 1$. 求证：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{4}.$$

又问上面的不等式是否可能成为等式，为什么？

7. (10分)设$\{a_n\}$是正数列且满足$\lim\limits_{n\to\infty}\ln n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda>0$. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

1.(1) $= \dfrac{e^{x^3}-1}{4x^3} = \dfrac{x^3}{4x^3} = \dfrac{1}{4}$ (2) $= \lim\limits_{\xi\to\infty}\dfrac{\sin\xi}{\xi} = 0$

(3) $= \int_0^{\xi} e^x x^n dx + \int_{\xi}^1 e^x x^n dx$

$< e\cdot\xi^n\cdot\xi + (1-\xi)\cdot e$

$= e(1-\xi) = 0\ [(1-\xi)\to 0]$

(4) $= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$

$= \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln|1+x|\Big|_0^1$

$= \ln 2$

(5) $= \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}\cdot\frac{1}{n} = 0$

2.(1) $= \frac{2}{3}\int d(x\sqrt{x})\ln x = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{2}{3}\int\sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{4}{9}x\sqrt{x}$

(3) $= \int_{-1}^{0} + \int_0^1 = \int_1^0 x^2\sqrt{1-x^2}dx = 2\int_0^1 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x\cos x\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 (1-\cos 4x)dx$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{16}\sin 4x\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{4}$

(4) (2) 略

3. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=1 \quad e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int e^{\int\frac{1}{x}dx}+C\right)=\frac{1}{x}(x+C)=1+\frac{C}{x}$

4. 条件: $\sum\cos n$ 有界, $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{\alpha}$ 一致收敛于0 $\alpha>0$

$\alpha>0 \quad \lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$

绝对: $\sum(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{\alpha}|\cos n| \le \sum(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{\alpha} \sim \sum\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\alpha} \Rightarrow \alpha>2$

$\alpha=2$ 时 若 $\sum(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{2}|\cos n|^{2}<+\infty$, 则 $\sum(\quad)^{2}=\sum(\quad)^{2}(1-\sin^2 n)<\infty$ 矛盾

5. $f(x)=x^2e^{-nx}$, $f'(x)=e^{-nx}(2x-nx^2)=0$, $x=\frac{2}{n}$

$f_n(x)_{max}=\frac{4}{n^2e^2}$ W— 一致

6. $\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx \le \int_0^{\frac{1}{2}}x\,dx=\frac{1}{8} \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{1}x\,dx=\frac{1}{8} \Rightarrow <\frac{1}{4}$

不能, 可微

7. $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda>1 \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}>\frac{n+1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>1+\varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_{n+1}}>1+\frac{\varepsilon}{n+1}$$

$$\prod \quad > \prod(\qquad)$$

$$\ln\frac{1}{b_n}>\sum\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{n+1}\right)\to\infty$$

$b_n\to 0$

中国科学技术大学2007-2008学年第一学期

数学分析(I)期末试卷

1. (15分)概念题：

 (1)叙述函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的Riemann积分的定义.

 (2)叙述函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$在集合$E$上一致收敛的定义.

 (3)叙述函数$f(x)$在区间I内一点x_0可微的定义.

2. (15分)计算下面的积分：

 (1)$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}\mathrm{d}x$

 (2)$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

 (3)$\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$

$\frac{n+1}{n+2}\ \frac{n-1}{n}$

$\leq \frac{1}{e}\int_0^1 e^x |f'+f|$

$= \frac{1}{e}\int_0^1 e^x f'$

$= \frac{1}{e} e^x f$

3. (15分)求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}x^n$在其收敛域内的和函数.

4. (15分)求微分方程$y'' = \frac{y'}{x} + x$的通解.

5. (15分)设$\{a_n\}$是正数列且满足$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = q < 1$. 求证级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.

6. (15分)求证函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(1-x)^2x^n$在区间$(-1,1]$上收敛，并讨论其和函数在此区间上的连续性.

$\sqrt{n}(1-x)^2x^n$

7. (10分)设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续且满足

$$|f(x)| \leqslant \mathrm{e}^{kx} + k\int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t,$$

其中k是常数. 求证：$|f(x)| \leqslant (kx+1)\mathrm{e}^{kx}$.

2.(1) 令 $x=t^2$, $dx=2t\,dt$ $\int \frac{1}{t(1-t^2)}2t\,dt = 2\int\frac{1}{1-t^2}dt = \int \frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\,dt$

$= \ln\frac{1+t}{1-t} = \ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + C$

(2) $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^2 x\, e^x}{1+e^x} + \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$

(3) $\int e^{-x}\sin x\,dx = -\sin x\, e^{-x} + \cancel{\int e^{-x}\cos x\,dx}$

$\cancel{\int e^{-x}\cos x\,dx} = -\cos x\, e^{-x} - \int e^{-x}\sin x\,dx$

$\Rightarrow \int = -\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{4}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = 1$ $L=1$ $\sum\frac{n}{n+1}$ 不收敛 $\sum\frac{n}{n+1}(-1)^n$ 收敛 $[-1,1)$

$\sum\limits_1^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n = \int\sum\limits_1^{\infty} n x^n = \int x\sum\limits_1^{\infty} n x^{n-1} = \int x\sum\limits_1^{\infty}(x^n)' = \int x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \int\frac{x}{(1-x)^2}$

$= \ln|1-x| + \frac{1}{1-x}$

4. $y'' - \frac{y'}{x} = x \quad \frac{dy'}{dx} - \frac{y'}{x} = x$

$$y' = e^{-\int -\frac{1}{x}dx}\left(\int x \cdot e^{\int -\frac{1}{x}dx} + C\right) = x\left(\int x \cdot \frac{1}{x} + C\right) = x(x+C)$$

$$\frac{dy}{dx} = x(x+C_1) \qquad y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 C_1}{2} + C_2$$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1}$ ① ② 收 $\Rightarrow$ ①+② 收

6. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\ )} = x \cdot \sqrt[n]{(1-x)^2} < 1 \quad x < 1$

-1: $\sum (-1)^n \sqrt{n} \cdot 4 \quad \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

$(-r, r)$: $< \sum \sqrt{n} \cdot 2 \cdot r^n$ 收敛，一致收敛

$[0-1]$ $f_n'(x) = 0$, $x = \frac{n-1}{n+1}$ $\sum \sqrt{n}\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)^2\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = 4\sum \frac{\sqrt{n}}{(n+1)^2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$ 收敛

7. $\int f'(x) - f'(0)$

中国科学技术大学2008-2009学年第一学期

数学分析(I)期末试卷(A卷)

1. (15分)概念题：

(1)用$\varepsilon-\delta$语言描述$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$.

(2)叙述函数列$f_n(x)$在集合E上一致收敛于函数$f(x)$的定义.

(3)叙述函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上的无穷积分存在的定义.

2. (15分)计算下面的积分：

(1)$\displaystyle\int \sqrt{x}\ln^2 x\mathrm{d}x$

(2)$\displaystyle\int \frac{\cos x\sin x}{(1+\sin^2 x)^n}\mathrm{d}x$

(3)$\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

3. (15分)求幂级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^n-\frac{1}{n}\right)x^n$的收敛半径及其和函数.

4. (15分)求微分方程$y'=\dfrac{y^2}{x^2}-2$的通解.

5. (15分)求证当$x>0,\alpha>1$时，有$(1+x)^\alpha>1+\alpha x$.

6. (10分)设$\alpha>0$. 研究级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left((n+1)^\alpha-n^\alpha\right)\cos n$的敛散性.

7. (15分)设$a_n=2\sqrt{n}-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$. 求证：

(1)$1\leqslant a_n\leqslant 2-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$;

(2)极限$a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在;

(3)数列$\{\sqrt{n}(a-a_n)\}$有界.

$\sqrt{n}$ $n-1$

$$= \frac{2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) - \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}}}$$

2.(1) 略 (2) $= -\int \frac{\sin x}{(1+\sin^2 x)^n}\,d\sin x = -\frac{1}{2}\int \frac{d(\sin^2 x+1)}{(1+\sin^2 x)^n} = \frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(1+\sin^2 x)^{n-1}}$

(3) 略

3. $\sum\limits_1^\infty 2^n x^n - \sum\limits_1^\infty \frac{1}{n}x^n$ $\quad r=\frac{1}{2}$, $r=1$

$= \sum\limits_1^\infty (2x)^n - \int \sum\limits_1^\infty x^{n-1} = \frac{2x}{1-2x} - \frac{x}{1-x}$

4. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$ $\qquad x\frac{du}{dx} = u^2-2-u$

$\frac{1}{(u-2)(u+1)}du = \frac{1}{x}dx$ $\qquad \ln\frac{u-2}{u+1} = \ln|x|^3 + C$

$\frac{\frac{y}{x}-2}{\frac{y}{x}+1} = C\,(x)^3$

5. $f(x) = (1+x)^\alpha - (1+\alpha x)$ $\quad f(0)=0$ $\quad f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha > 0$

7. (1) $a_n = 2\sqrt{n} - \sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}} = \sqrt{n}\left(2 - \frac{1}{n}\sum\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}\right)$ $\leq 2 - \frac{1}{\sqrt{n}}$

$2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2\sqrt{n}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})-1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} - 1 > 0$

$\therefore a_n$ 单增。 $a_1 = 2 - \frac{1}{1} = 1$ $\therefore a_n \geq 1$

$2\sqrt{n} - \sum_{1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$

中国科学技术大学2008-2009学年第一学期

数学分析(I)期末试卷(B卷)

1. (15分)概念题：

(1)用$\varepsilon-N$语言描述$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$.

(2)叙述函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$在集合$E$上一致收敛于函数$f(x)$的定义.

(3)叙述函数$f(x)$在区间$[a,b]$上Riemann可积的定义.

2. (15分)计算下面的积分：

(1)$\displaystyle\int x^n \ln x \mathrm{d}x\ (n\neq 1)$

(2)$\displaystyle\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\mathrm{d}x$

(3)$\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$

3. (15分)讨论函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2\mathrm{e}^{-nx}$在区间$0\leqslant x<+\infty$上的一致收敛性.

4. (15分)求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}$的收敛半径$R$，并求此幂级数在$(-R,R)$中的和.

5. (15分)求解微分方程：$(x+y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$.

6. (15分)设$f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上满足函数方程

$$\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=(x-1)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

的连续函数. 求证：$f(x)\equiv 0$.

7. (10分)设$f(x)$在区间[0,1]上非负连续可微，$f(0)=f(1)=0$，且$|f'(x)|\leqslant 1$. 求证：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}.$$

又问上面的不等式是否可能成为等式，为什么？

2. (1) $= \frac{1}{n+1}\int \ln x \, dx^{n+1} = \frac{1}{n+1}\ln x\, x^{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^n \, dx = \frac{\ln x\, x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$

(2) $= x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} - \int x\sqrt{1+x}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\cdot\frac{1}{(1+x)^2} = (\quad) - \frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$

$= (\quad) - \int\frac{t^2}{1+t^2}dt = x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x} + C$

$= \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2n+1}{2n+3} x^2 < 1 \quad R = 1$

$$= \sum_{0}^{\infty} \int x^{2n} = \int \sum_{0}^{\infty} x^{2n} = \int \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

中国科学技术大学2011-2012学年第一学期

数学分析(B1)期末试卷

1. (20分)计算下列极限：

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1-x}{x\ln(1+x)}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^x$；

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$.

2. (10分)计算下面的积分：

(1)$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$；　　(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

3. (10分)讨论下面级数的敛散性：

(1)$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{3n^2-2}$；　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{n!\mathrm{e}^n}$.

4. (10分)设$f(x)$在$\mathbb{R}$上有二阶导函数且$f(x)$，$f'(x)$和$f''(x)$都大于零. 求证：$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=0$.

5. (15分)求微分方程$y''-y'=(2x+2)\mathrm{e}^x$的通解.

6. (15分)考虑函数项级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-n^2x}}{n}$.

(1)求该级数的收敛域；

(2)在收敛域内该级数是否一致收敛？说明理由.

(3)在收敛域内该级数的和函数是否连续？说明理由.

7. (10分)设$\{a_n\}$是正的单调递增数列且$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$收敛. 求证$\{a_n\}$有界.

8. (10分)设$f(x)$在区间$[0,1]$上有连续的导函数且$f(0)=0$，$f(1)=1$. 求证：

$$\int_0^1|f(x)+f'(x)|\mathrm{d}x\geqslant 1.$$

1. (1) $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x+\frac{x^2}{2}-1-x}{x(x-\frac{x^2}{2})}=\dfrac{1}{2}$　(2) $=\left(1+\dfrac{1}{\frac{x-1}{3}}\right)^{(\frac{x-1}{3}+\frac{1}{3})\cdot 3}=e^3$

(3) $=\lim\limits_{\xi\to\infty}\dfrac{\sin^2\xi}{\xi}<\dfrac{1}{\xi}=0$　(4) $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$

2. (1) $=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x\cos x}\cos x\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}=\ln|\csc x-\cot|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\ln(1-\frac{\pi}{2})-\ln(2-\sqrt{3})$

(2) $=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{(1+x^2)+(1+x)-x(1+x)}{(1+x)(1+x^2)}=\frac{1}{2}\left(\int\frac{1}{1+x}+\int\frac{1}{1+x^2}-\int\frac{x}{1+x^2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\ln\dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}+\arctan x\right)=\dfrac{\pi}{4}$

3. (1) 收 (2) 收 $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{e^n}$

4. $f''(x)>0$, $f'(x)\uparrow$ 且 >0, 有下界, 若下界 $\neq 0$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty<0$

5. $x^2-x=0$, $x=1, 0$ $\quad y=C_1+C_2e^x$

$y=e^x(Ax+Bx^2)$ $\quad y'=e^x(Ax+Bx^2+A+2Bx)$

$y''-y'=e^x(A+2Bx+2B)=e^x(2x+2)$ $\quad \begin{cases}2B=2\\ A+2B=2\end{cases}$

$y=x^2e^x+C_1+C_2e^x$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=e^{-nx}=\frac{1}{e^{nx}}<1$ $\quad x>0$

(1) $\sum \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{e^{n^2x}}$

n

$2e$

(2) 连续 在闭子区间上 一致收敛

7. $n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)\geq \ln\frac{a_{n+1}}{a_n}$ $\quad \sum \geq \ln\frac{a_n}{a_1}$ 发散

$\frac{1}{n(e^{n^2x})}$ $\quad \sum_{n}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{e^{n^2x}}$

$\frac{1}{ne^{\frac{1}{n}}}$ $\quad \frac{1}{ne^{\frac{1}{n}}}$

$n(1+\frac{1}{n})$, $e^x-1=$

$\overline{n+1}$

$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n}$

中国科学技术大学2012-2013学年第一学期

数学分析(B1)期末试卷

1. (10分)设函数$f(x)$在$x>0$有定义. 请叙述当$x\to+\infty$时，函数$f(x)$存在有限极限的Cauchy判别准则.

2. (每小题10分)求下面的极限.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4+|\sin x|}\int_0^{x^2}\frac{t^4+|\cos t|}{1+t^3}\mathrm{d}t$

$-(x+1)\sum\frac{(-x)^n}{n}+\frac{(-x)^{n+1}}{n+1}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}n^{\frac{3}{2}}\Big(\sqrt{n\ln\big(1+\frac{1}{n}\big)}-\sqrt{n}\Big)$

$\frac{x^n}{1-x}$

3. (每小题10分)求下列积分.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$ $\qquad$ (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{2n+1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ (n为自然数)

$\frac{(x+1)}{n}$ $\qquad$ $[-1,0]$

4. (每小题10分)求下面微分方程的通解或初值问题.

(1)$(x+y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$.

(2)$y''+(y')^2=y'$，$y(0)=y'(0)=1$.

$\frac{1+x}{1-x}$ $\quad$ $\frac{x^n}{n}$

5. (12分)求级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x+1)x^n}{n}$的收敛域、和函数，并讨论在收敛域内是否一致收敛.

6. (10分)设$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，且$f(a)=f(b)=0$. 求证：对任意实数c都存在$\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)+cf(\xi)=0$.

7. (8分)设$f(x)$在$[0,1]$上非负单调递增连续函数，$0<\alpha<\beta<1$. 求证：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x,$$

并且$\dfrac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$不能换为更大的数.

2.(1) $=\dfrac{\frac{x^8}{x^6}\cdot 2x}{4x^3}=\dfrac{1}{2}$

(2) $=n\sqrt{n}\left(\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{n}\right)=-\infty$

3.(1) $=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x\,dx}{1+\cos^2 x}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x\,d\cos x}{1+\cos^2 x}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\cos^2 x}{1+\cos^2 x}=-\ln(1+\cos^2 x)$

$=\ln 2$

(2) $=\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t^n e^{-t}dt$ $\qquad$ $\displaystyle\int=-\int t^n de^{-t}=-t^n e^{-t}\Big|_0+n\int e^{-t}t^{n-1}dt$

且$\forall n$, $0\Big|_0^\infty=0$

$\displaystyle\therefore\int=n!\int_0^\infty e^{-t}dt=n!$

4. (2) $\frac{dy'}{dx} - y' = -y'^2$ 令 $u = \frac{1}{y'}$ $\frac{du}{dx} + u = 1$

$u = e^{-\int dx}(\int e^{\int dx} + c) = e^{-x}(\int e^x + c) = 1 + \frac{c}{e^x}$

$y'(0) = 1$, $u(0) = 1$, $c = 0$ $u = 1$ $y' = 1$

$y = x + 1$

5. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = (-1)^n \cdot \frac{n \cdot x}{n+1} < 1$, $x < 1$

$x = 1$: $\sum \frac{(-1)^n \cdot 2}{n}$ ✓ $x = -1$: ✓

$-(x+1) \sum_1^\infty \frac{(-x)^n}{n} = -(x+1) \cdot \int \sum_1^\infty (-x)^{n-1} dx$

$= (x+1) \cdot \int \frac{1}{1+x} = \underline{(x+1) \ln(1+x)}$

1. 若 $= 0$. 彳任意 $\neq 0$ 、设 $\exists f(d) > 0$, $f'(d) = 0$

$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{\qquad}{f(d) + o(\Delta x)}$

$\int_0^1 f(x) dx \geq \int_\alpha^1 f(x) dx \geq \int_\alpha^\beta f(x) dx + \int_\beta^1 f(x) dx$

$\geq \int_\alpha^\beta f(x) dx + (1-\beta) f(\beta) \geq \int_\alpha^\beta f(x) dx + (1-\beta) \cdot \frac{\int_\alpha^\beta f(x) dx}{\beta - \alpha} = \frac{1-\alpha}{\beta - \alpha}$

相世 $\int_0^\alpha f(x) = 0$, $f(x) = C$, $\alpha < x < 1$

中国科学技术大学2013-2014学年第一学期

数学分析(B1)期末试卷

1. (10分)计算下面的导函数：

(1)$\left(\ln(1+\mathrm{e}^{x\sin x})\right)'$ (2)$\left((x^2+1)\sin x\right)^{(n)}$

2. (20分)计算下面的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n-k^2}}$

3. (20分)计算下面的不定积分和积分：

(1)$\int(x+1)\mathrm{e}^x\ln x\mathrm{d}x$ (2) $\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$

4. (10分)求解微分方程$y\cos x-y'\sin x=y^2(1-\sin x)\cos x$.

5. (10分)讨论函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}$在区间$0\leqslant x<+\infty$上的一致收敛性.

6. (10分)求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$的收敛区域及和函数.

7. (10分)求证对任意$x>0,y>0$有$\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y+xy<\mathrm{e}^{x+y}+1$.

8. (10分)设$f(x)$在$\mathbb{R}$上有二阶导函数，$f(x),f'(x),f''(x)$都大于零，假设存在正数a,b使得$f''(x)\leqslant af(x)+bf'(x)$对一切$x\in\mathbb{R}$成立. 求证：

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=0$；

(2)存在常数c使得$f'(x)\leqslant cf(x)$.

1.(1) $=\frac{1}{1+e^{x\sin x}}\cdot e^{x\sin x}(\sin x+x\cos x)$ (2) $=\sin(x+\frac{n\pi}{2})(x^2+1)$
$+n\sin(x+\frac{(n-1)\pi}{2})2x$
$+\frac{n(n-1)}{2}\sin(x+\frac{(n-2)\pi}{2})\cdot 2$

2. (1) $=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\frac{\arctan\xi}{\xi}=0$ (2) $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}-(\frac{k}{n})^2}}$ $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}$

3.(1) $=\int d(xe^x)\ln x=x\ln x e^x-\int xe^x\frac{1}{x}dx=x\ln xe^x-e^x+C$

4. 令 $u=\frac{1}{y}$, $u'+\tan x\, u=(\sin x-1)$

$u=e^{-\int\tan x dx}\left(\int(\sin x-1)e^{\int\tan x dx}+C\right)=\frac{1}{|\cos x|}\left(\int(\sin x-1)|\cos x|+C\right)$

$=-\frac{\cos 2x}{4\cos x}-\tan x+\frac{C}{\cos x}=\frac{1}{y}$

5. $f'=e^{-nx}(1-nx)$ $x=\frac{1}{n}$, $\max=\frac{\frac{1}{e}}{n\sqrt{n}}$ 收敛

6. $R=1$ $[-1,1]$ $=\frac{1}{x}\iint\sum_1^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{x}\iint\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x}\int\ln|1-x|=\frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}$

7. $e^{x+y}+1 = e^{x}\cdot e^{y}+1 = 1+(1+x+\frac{x^2}{2}\cdots)(1+y+\frac{y^2}{2}+\cdots) = e^x+e^y+xy+\cdots > 0$

8. (2) $f''(x) \le a f(x) + b f'(x)$

$f'(x) \le a\int + bf + C$

$f'(x) - f'(0) \le a\int_0^x f(x) + b f(x) - b f(0)$

$f'(x) \le b f(x) + f'(0) - b f(0) + \int_0^x f(x)$

$E = -\frac{GMm}{r^2}$

中国科学技术大学2015-2016学年第一学期

数学分析(B1)期末试卷

1. (每小题5分)求极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \sqrt{n}\cos nx \sin x^n \mathrm{d}x$　　　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin t\mathrm{d}t}{\ln(1+x^4)}$

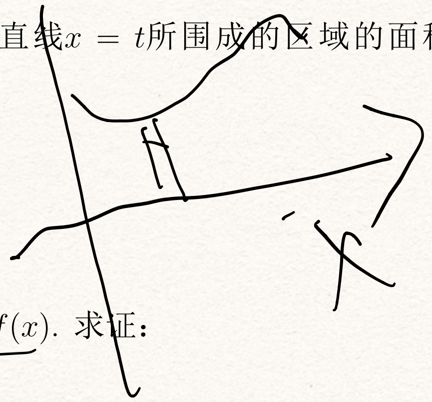
2. (每小题5分)求不定积分或积分.

(1) $\int x^2\arctan x\mathrm{d}x$　　　　(2) $\int \dfrac{1}{x(1+x^4)}\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^1 \dfrac{(1-x)^2\mathrm{e}^x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$　　　　(4) $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x$

3. (15分)设$f(x)=x\ln(1+x^2)$, 求$f^{(n)}(0)$.

4. (15分)求在$[0,+\infty)$上连续可微函数$f(x)$，$f(0)=1$，使得对任意$t>0$，曲线段$L: y=f(x)$, $x\in[0,t]$的弧长恰好等于L与两个坐标轴及垂直线$x=t$所围成的区域的面积. 并求L绕x轴旋转所得的旋转体的体积.



5. (每小题10分)求微分方程的通解.

(1)$(\sin x)y''-(\cos x)y'=\sin^2 x+1$

(2)$y''-3y'+2y=2x$

6. (12分)设$f(x)$在$\mathbb{R}$上连续，且满足方程$f(x+a)=-f(x)$. 求证：

$$\int_0^{2a} xf(x)\mathrm{d}x=-a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

$x=f(y)$

7. (8分)设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$0\leqslant f(x)\leqslant 1$. 求证：

$$2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2,$$

$\int_0^\infty \pi y^2 dx$

并求使上式成为等式的连续函数.

$x - \int_0^t f(x)$

$1-f(x)\geq 0$

1.(1) 0　(2) $= \dfrac{\sin x^2\cdot 2x}{4x^3} = \dfrac{1}{2}$

2. (1) $= \frac{1}{3}\int dx^3 \arctan x = \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{3}\int x^3\frac{1}{1+x^2}dx$

$= \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{6}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx^2 = \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln(1+x^2)$

(2) $= \int\frac{x^3dx}{x^4(1+x^4)} = \frac{1}{4}\int\frac{dx^4}{x^4(1+x^4)} = \frac{1}{4}(\ln x^4 - \ln(1+x^4))$

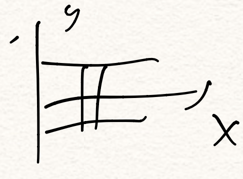
(3) $= \int d\left(\frac{e^x}{(1+x^2)}\right) = \frac{e^x}{(1+x^2)}\Big|_0^1 = \frac{e-2}{2}$

(4) $= \int\frac{1+x^2-x^2+x-x}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{(1+x)}+\frac{2}{1-x+x^2}-\frac{x}{1-x+x^2}\right)$

$= \frac{1}{3}\left(\int \frac{1}{1+x}dx + \int \frac{\frac{3}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} d(x-\frac{1}{2}) - \int \frac{(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} d(x-\frac{1}{2})\right)$

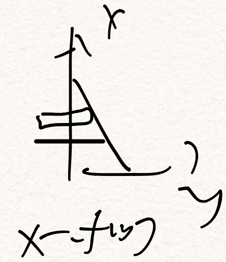
$= \frac{1}{3}\left(\ln(1+x) + \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\ln[(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]\right)\Big|_0^\infty$

$= \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$



3. $f(x) = x(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3}\cdots) = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{3}\cdots$

$f^{(2k+1)}(0) = \frac{(2k+1)!}{k}(-1)^{k+1}$, $k=1\cdots$ $\quad f^{(n)}(0)=0$



4. $\underline{\int_0^t \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_0^t f(x)}$ 两边求导 $\sqrt{1+y'^2} = y$

$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{y^2-1}$, $\ln(y+\sqrt{y^2-1}) = \overset{t}{x}$ $\quad y=\cosh t$

$\cosh t = y$

$V = \int_0^1 \pi y^2\, \cancel{d\ln(y+\sqrt{y^2-1})} = 2\pi\int t\sinh t\,dt$

πy^2

$= 2\pi\int t\,d\cosh t = 2\pi(t\cosh t - \sinh t)$

5. (1) $\frac{dy'}{dx} - \frac{c}{s}y' = \frac{1+\sin^2 x}{\sin}$ $\quad y' = e^{-\int\frac{c}{s}}\left(\int\frac{1+s^2}{s}e^{\int-\frac{c}{s}} + C\right)$

$y' = x\sin x - \cos x + C\cdot\sin x = \sin\left(\int\frac{1+s^2}{s}\cdot\frac{1}{s} + C\right)$

$= s\left(x - \frac{c}{s} + C\right)$

$y = -x\cos x + \sin x + \sin x - C_1\cos x + C_2$

(2) $(r-1)(r-2)=0$ $\quad y = C_1e^x + C_2e^{2x} + x + \frac{3}{2}$

6. $\int_0^{2a} xf(x)dx = -a\int_0^a f(x)dx.$ $\quad f(x+a) = -f(x)$

$= \int_0^a xf(x)dx + \int_a^{2a} xf(x)dx = \int_0^a xf(x)dx + -\int_0^a (x+a)f(x)\,dx = -a\int_0^a f(x)dx$

7. $2\int_0^1 xf(x)dx \geqslant \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$, 3 $\quad 2\int_0^x tf(t)dt - \left(\int_0^x f(t)dt\right)^2$

$x - \int_0^x f(t)dt$

$1-f(x)$

中国科学技术大学2016-2017学年第一学期

数学分析(B1)期末试卷

1. (每小题5分)求极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{\ln(1+x^3)}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 n(1-x)\cos(nx)\sin(x^n)\mathrm{d}x$

2. (每小题8分)求不定积分和无穷积分.

(1) $\int x\arctan x\mathrm{d}x$

(2) $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x$

(3) $\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$

$\sum \frac{1}{\ln a_{n+1}}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$

$\leq \sum \frac{1}{\ln a_{n+1}}\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}$

$\ln(1+x)$

$x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-$

3. (10分)设$\delta>0$. 考察函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{1+n^2x}$分别在区间$\boxed{[\delta,+\infty)}$和$(0,+\infty)$上是否一致收敛.

$\left(1-\frac{\ln a_n}{\ln a_{n+1}}\right)$

$\leq \frac{1}{1+n^2\delta}$

4. (10分)求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}x^n$的收敛半径及和函数.

$\ln(1+x)<x$

$x\to 1$

$\ln(x)<x-1,$

5. (20分)求下列微分方程的通解：

(1)$y'+y=y^2x$；

(2)$xy''+2y'=2$

6. (10分)求微分方程$y''-2y'=\mathrm{e}^{4x}$满足初始条件$y(0)=0,y'(0)=0$的特解.

W

$u_n\to 0$

7. (8分)设$f_0(x)$和$f_1(x)$是$[0,1]$上正连续函数，满足$f_1(x)\leqslant 2f_0(x)$. 设

$$f_{n+1}(x)=\frac{2f_n^2(x)}{f_n(x)+f_{n-1}(x)},\quad n=1,2,\cdots.$$

求证：

(1)$f_n(x)\leqslant c_nf_{n-1}(x)$，其中$c_1=2$，$c_{n+1}=\dfrac{2c_n}{c_n+1}$，$n=1,2,\cdots$；

(2)$|f_n(x)-f_{n-1}(x)|\leqslant\left(\dfrac{2}{3}\right)^n|f_1(x)-f_0(x)|$；

(3)函数列$\{f_n(x)\}$在[0,1]上一致收敛.

8. (8分)设$\{a_n\}$是大于1的递增数列. 求证：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n\ln a_{n+1}}$收敛的充分必要条件是$\{a_n\}$有界.

1.(1) $=\dfrac{\sin x\cdot 2x}{3x^2}=\dfrac{2}{3}$

(2) $\int_0^1 n(1-x)\cos(nx)\sin(x^n)dx$

$\leq\int_0^1 n(1-x)x^n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(n+1)(n+2)}=0$

2.(1) $=\frac{1}{2}\int dx^2\arctan=\frac{1}{2}x^2\arctan-\frac{1}{2}\int x^2\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}x^2\arctan-\frac{1}{2}(x-\arctan)$

(2) $=\int_1^\infty \frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}=\ln\frac{x}{1+x}\Big|_1^\infty=-\ln\frac{1}{2}=\ln 2$

(3) $=\int_0^1+\int_{-1}^0=\int_0^1+\int_{-1}^0 x^2\sqrt{1-x^2}dx=2\int_0^1=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}s^2c\,c\,dx=$

3. $\le \frac{1}{1+n^2x} \le \frac{1}{1+n^2\delta} \quad \sum \frac{1}{1+n^2\delta}$ 收敛 ✓

$f\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1+\frac{1}{n}} \to \infty$

4. $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2} \quad R = 2$

$\sum_1^\infty \frac{x^n}{n} \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_1^\infty \int \frac{x^{n-1}}{2^n} = \int \sum_1^\infty \frac{x^{n-1}}{2^n} = \int \frac{1}{2-x} = \ln(2-x)$

5. (1) 令 $u = \frac{1}{y}$, $u' - u = -x$, $u = e^{-\int - dx}\left(\int -x e^{\int -1 dx} + c\right)$

$= e^x\left(\int -x e^{-x} + c\right)$

$\frac{1}{y} = e^x\left(e^{-x}(x+1) + c\right) = x+1+ce^x$

(2) $\frac{dy'}{dx} + \frac{2}{x}y' = \frac{2}{x}$ $\quad x^2$

$y' = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left(\int \frac{2}{x} e^{\int \frac{2}{x}dx} + c\right) = \frac{1}{x^2}\left(\int \frac{2}{x} x^2 + c\right) = 1 + \frac{c}{x^2}$

$dy = \left(1+\frac{c}{x^2}\right)dx \quad y = x - \frac{c_1}{x} + c_2$

6. $y'' - 2y' = \mathrm{e}^{4x}$ $\quad y = e^{4x}(Ax+B) \quad y' = e^{4x}(A + 4Ax + 4B) \quad y'' = e^{4x}(4A + 4A + 16Ax + 16B)$

$4A + 4A + 16Ax + 16B - 2A - 8Ax - 8B = \underset{0}{8Ax} + 6A + 8B \quad B = \frac{1}{8}$

$x^2 - 2x = 0 \quad x = 0, 2 \quad c_1 + c_2 e^{2x} + \frac{1}{8}e^{4x} \quad c_1 + c_2 + \frac{1}{8} = 0$

$y' = 2c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{4x} \quad 2c_2 + \frac{1}{2} = 0, \quad c_2 = -\frac{1}{4} \quad c_1 = \frac{1}{8}$

$y = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{8}e^{4x}$

中国科学技术大学2017-2018学年第一学期

数学分析(B1)期末试卷

1. (10分)设$a_0, a_1, \cdots, a_n$是$n+1$个实数，$x_0 \in \mathbb{R}$，求n次多项式$P_n(x)$满足

$$P_n^{(k)}(x_0) = a_k,\ k = 0, 1 \cdots, n.$$

2. (每小题6分)求积分和不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x} \mathrm{d}x$　　(2) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}} \mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} \mathrm{d}x$　　(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^x} \mathrm{d}x$

3. (每小题7分)求解下面的微分方程：

(1)求$y''' + y'' + y' + y' = 0$实的通解.

(2)求$\begin{cases} y' + 2xy = 4x \\ y(0) = 0 \end{cases}$的解.

4. (10分)设$f(x)$是在$[0, \frac{\pi}{2}]$上非负单调递增的连续函数. 求证：

$$x \int_0^x f(t) \sin t \mathrm{d}t \geqslant (1 - \cos x) \int_0^x f(t) \mathrm{d}t,\quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

5. (12分)设$u_n(x) = (-1)^n x \mathrm{e}^{-nx}$. 证明：(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[0, 1]$上一致收敛；

(2)对于任何$x \in [0, 1]$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$收敛；(3)$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$在[0,1]上不一致收敛.

6. (10分)求函数$f(x) = \ln(1+x)$在$x = 2$处的Taylor级数展开，并指出收敛集合.

7. (10分)已知函数$f(x)$在区间(a, b)上可导，$x_0 \in (a, b)$. 定义函数

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \in (a, b) \setminus \{x_0\}, \\ f'(x_0), & x = x_0. \end{cases}$$

设$g(x)$在x_0可导，且$f(x)$在x_0二阶可导. 求证：$g'(x)$在x_0连续.

8. (10分)设$f(x)$在$[0, 1]$上有二阶连续导函数，且$f(0)f(1) \geqslant 0$. 求证：

$$\int_0^1 |f'(x)| \mathrm{d}x \leqslant 2 \int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)| \mathrm{d}x.$$

1. $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(\wedge}{k!}$

2. (1) $= \displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = -\int \frac{d\cos x}{1-\cos^2 x} = -\int \frac{1}{1+\cos x} + \frac{1}{1-\cos x} = \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

(1) $x=t^3$, $dx=3t^2dt$ $\int e^t 3t^2 dt$

(3) $=\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}+\int \arctan d\arctan = x-\arctan x+\frac{\arctan^2 x}{2}\Big|_0^1$

$=1-\frac{\pi}{4}+\frac{(\frac{\pi}{4})^2}{2}$

(4) $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cdot \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{s^2}{1+e^x}x+\frac{s^2 e^x}{1+e^x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}s^2=\int\frac{1-\cos 2x}{2}$

$=\frac{\pi}{4}$

3. (1) $x^3+x^2+2x=0$ $x^2+x+2=0$ $x=0,\ -\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}i$

$C_1e^x+(C_2\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x)e^{-\frac{1}{2}x}$

(2) $y=e^{-\int 2x dx}(\int 4x e^{\int 2x dx}+C)=e^{-x^2}(\int 4xe^{x^2}+c)=2+\frac{c}{e^{x^2}}$

$y(0)=2+C=0$, $y=2-\frac{2}{e^{x^2}}$

4. $g'(x)=\int_0^x f(t)\sin t\, dt+xf(x)\sin x-f(x)+f(x)\cos x-\sin x\int_0^x f(t)\,dt$

$=f(x)\underline{(x\sin x+\cos x-1)}-\int_0^x f(t)(\sin x-\sin t)\,dt \geq 0$

$\sin x+x\cos x-\sin x$

5. (1) $\sum^{\infty}_{n}=\frac{(-1)^n x}{e^{nx}}=\frac{(-1)^n x}{(e^x)^n}=x\cdot\frac{(\frac{-1}{e^x})^n}{1+\frac{1}{e^x}}=(-1)^n\cdot x\cdot\frac{1}{(e^x)^n+(e^x)^{n-1}}$ $\to 0$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{x}{e^{nx}}=\sum\frac{x}{(e^x)^n}$ 收敛

6. $\ln(1+x)=\ln(x-3+4)=\ln 4+\ln(1+\frac{x-3}{4})$

$=2\ln 2+\sum_1^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\frac{x-3}{4})^n}{n}$ $-4<x-3\leq 4$ $-1<x\leq 7$

7. $\lim_{x\to x_0}g(x)=f'(x)$ $g'(x)=\frac{f'(x)(x-x_0)-(f(x)-f(x_0))}{(x-x_0)^2}$ $\lim_{x\to x_0}=\frac{f'(x)-\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}}{(x-x_0)}=f''(x_0)$

$g'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)}{x-x_0}\overset{L}{=}f''(x_0)$

8.

中国科学技术大学2011-2012学年第二学期

数学分析(B2)第二次测验

1. (15分)计算二重积分$\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{x} \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)\mathrm{d}y + \int_2^4 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)\mathrm{d}y$.

2. (15分)计算二重积分$\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是由曲线$x^2-2xy+y^2+x+y=0$和曲线$x+y+4=0$围成的有界区域.

3. (15分)计算三重积分$\iiint\limits_V xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$V$：由$z=xy$, $z=0$, $x=-1$, $x=1$, $y=2$, $y=3$围成.

4. (15分)设曲线L为圆周$x^2+y^2=2x$，计算曲线积分$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}l$.

5. (15分)计算曲面积分$\iint\limits_S z\mathrm{d}S$，其中$S$：由$z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$和$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$所围成的立体表面.

6. (15分)证明：$\int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_{x_1}^1 \mathrm{d}x_2 \cdots \int_{x_{n-1}}^1 x_1x_2\cdots x_n \mathrm{d}x_n = \frac{1}{2^n n!}$.

7. (10分)设一球面的方程为$x^2+y^2+(z+1)^2=1$，从原点向球面上任一点Q处的切平面作垂线，垂足为点P，当点Q在球面上变动时，点P的轨迹形成一封闭的曲面S，求此封闭曲面S所围成的立体的体积.

中国科学技术大学2012-2013学年第二学期

数学分析(B2)第一次测验

1. (20分)下面两个函数在原点的连续性如何，偏导数是否存在，是否可微？(要说明理由)

$$(1)f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$(2)f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

2. (15分)设$D=\{(x,y)|x>0,y>0\}$. 求函数$f(x,y)=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$在区域$D$上的极值，并说明所求极值是否是最值.

3. (10分)用Lagrange乘数法求抛物线$y=(x-\sqrt{2})^2$上的点到原点的最小距离.

4. (20分)求常数c使得变换$\begin{cases}u=2x+y\\ v=x+cy\end{cases}$将方程$2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-5\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$简化为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，其中二阶偏导数都连续.

5. (15分)设$f(x,y)$在区域D上有二阶偏导数，且二阶偏导数都为零. 求证：$f(x,y)$是至多一次函数，即存在常数a,b,c使得$f(x,y)=ax+by+c$.

6. (10分)设$z=z(x,y)$是由方程$ax+by+cz=\varphi(x^2+y^2+z^2)$所确定的隐函数，其中$\varphi$是一个可微的一元函数，$a,b,c$是常数. 求证：

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay.$$

7. (10分)设$P_n=(x_n,y_n)$，$n=1,2,...$是平面上的一个有界点列. 求证：$\{P_n\}$有收敛的子列.

中国科学技术大学2012-2013学年第二学期

数学分析(B2)第二次测验

1. (每小题5分)简答题：

(1)设$\int_I f\mathrm{d}\sigma > 0$，其中$I$为闭矩形，$f$在$I$上连续. 说明在$I$的内部存在闭矩形$J$，使得$f>0$在$J$上成立.

(2)构造一个$D=[-1,1]^2$上的非负函数$f(x,y)$，使得f在D上积分为零，但是$f(x,0)$关于x不可积，而对任意$y\neq 0$，$f(x,y)$关于x可积. 请说明理由.

2. (40分)计算积分：

(1) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x+y}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (2) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}z^2\mathrm{d}z$

(3) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\frac{y}{\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x$ (4) $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

3. (15分)计算由$\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}=1$所围成闭区域的面积.

4. (15分)计算由$(x^2+y^2+z^2)^2=z^3$围成的立体的体积.

5. (10分)设$f(x)$在$[a,b]$上连续，试证：对任意$x\in(a,b)$，有

$$\int_a^x\mathrm{d}x_1\int_a^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_a^{x_n}f(x_{n+1})\mathrm{d}x_{n+1}=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-y)^nf(y)\mathrm{d}y,\ n=1,2,\dots.$$

6. (10分)计算下述积分：

$$\iiint\limits_V\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ \iiint\limits_V\cos(ax+by+cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中V是单位球体$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$；a,b,c为常数，满足$a^2+b^2+c^2=1$.

中国科学技术大学2013-2014学年第二学期

数学分析(B2)第一次测验

1. (10分)概念题：

(1)叙述n元函数$z=f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在其定义域$D$中一点$x$可微的定义.

(2)叙述二元函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)沿方向$\boldsymbol{e}=(u_0,v_0)$的方向导数的定义.

2. (15分)下面的函数在原点的连续性如何，偏导数是否存在，是否可微？(要说明理由)

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

3. (15分)求函数$f(x,y)=(1+\mathrm{e}^y)\cos x-y\mathrm{e}^y$的极值点.

4. (15分)求函数$f(x,y)=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$在条件$x^2+y^2=1$之下的条件极值.

5. (20分)求常数c使得变换$\begin{cases}u=2x+y\\ v=x+cy\end{cases}$将方程$2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-5\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$简化为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，其中二阶偏导数都连续.

6. (15分)求在$\mathbb{R}^2$上满足方程组$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=af\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=bf\end{cases}$的二元可微函数$f(x,y)$，其中$a,b$是常数.

7. (10分)设$z=z(x,y)$是由方程$ax+by+cz=\varphi(x^2+y^2+z^2)$所确定的隐函数，其中$\varphi$是一个可微的一元函数，$a,b,c$是常数. 求证：

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay.$$

中国科学技术大学2011-2012学年第二学期

数学分析(B2)第三次测验

1. (10分)求向量场$\boldsymbol{v}=(yz,zx,xy)$的散度和旋度.

2. (15分)计算第二型曲线积分：

$\displaystyle\int_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$，其中曲线$L$是半球面$\{x^2+y^2+z^2=a^2,\ z\geqslant 0\}$与圆柱面$\{x^2+y^2=b^2\}(a>b>0)$的交线，$L$的定向与$z$轴正向构成右手系.

3. (30分)计算第二型曲面积分：

(1) $\displaystyle\iint\limits_S (y^2-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S=\{z=2-x^2-y^2:z\geqslant 0\}$，$S$的定向与$z$轴的正向同侧.

(2) $\displaystyle\iint\limits_S \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$，其中曲面$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{25}=1\}$，正向是曲面的外法向.

4. (15分)给定平面分段光滑曲线$L=\{y=2x^{\frac{2}{5}}+1:x\in[-1,0]\}\bigcup\{y=-2x^5+1:x\in[0,1]\}$，$L$的正向是参数$x$增加的方向，求积分$\displaystyle\int_L \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

5. (15分)设曲面$S=\{x^2+y^2+z^2=1:z\geqslant 0\}$，它的定向$\boldsymbol{n}$是与$z$轴正向同侧的单位法向量，函数$f=\sin(x^2+y^2+4xy\sqrt{z})$，$g=x^2+y^2+4z^2$，求积分$\displaystyle\iint\limits_S (\nabla f\times\nabla g)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$.

6. (15分)讨论如下问题：若两个向量场的散度和旋度相等，这两个向量场是否相等？

以下设Ω是$\mathbb{R}^3$的有界区域，它的边界$\partial\Omega$是光滑曲面，$\boldsymbol{n}$是$\partial\Omega$的单位外法向量场，涉及到的函数和向量场具有二阶连续偏导数.

(1)(2分)设f是$\overline{\Omega}$上的函数，证明：

$$\iint\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint\limits_{\Omega}\triangle f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

这里$\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}$是$f$沿方向$\boldsymbol{n}$的方向导数，$\triangle f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

(2)(5分)设定义在$\overline{\Omega}$的函数满足$\triangle f=0$，$f\big|_{\partial\Omega}\equiv 0$，证明$f\equiv 0$.

(3)(8分)设$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$是定义在$\overline{\Omega}$上的向量场，满足：$\mathrm{rot}\boldsymbol{v}_1=\mathrm{rot}\boldsymbol{v}_2$、$\mathrm{div}\boldsymbol{v}_1=\mathrm{div}\boldsymbol{v}_2$，问能否推出$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2$？若成立，请证明之；若不然，你认为在什么合理条件下$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2$？

中国科学技术大学2011-2012学年第二学期

数学分析(B2)第四次测验

1. (15分)设函数$f(x)=\arcsin(\cos x)$，将$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上展开成Fourier级数，讨论此Fourier级数的收敛性，并利用此求级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$的和.

2. (15分)求函数$f(x)=\mathrm{e}^{-|x|}\sin 2x$的Fourier变换.

3. (16分)判断下面非正常积分的敛散性：

(1)$\displaystyle\int_1^{+\infty}\cos(x^2)\mathrm{d}x$　　(2)$\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-\frac{x^2}{2})}}$

4. (10分)计算积分$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x$.

5. (16分)证明：

(1)含参变量积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-bx}\sin x\mathrm{d}x$在$0<b<+\infty$上收敛，但不一致收敛；

(2)对任一正实数$\varepsilon>0$，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-bx}\sin x\mathrm{d}x$在$0<\varepsilon\leqslant b<+\infty$上一致收敛.

6. (10分)设$f(x)$是$\mathbb{R}$上的连续周期函数，而其导函数$f'(x)$在$\mathbb{R}$上逐段光滑，证明；函数$f(x)$的Fourier系数a_n和b_n满足：当$n\to\infty$时，有$n\cdot\max\{a_n,b_n\}\to 0$.

7. (18分)利用$\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，分别解决下列问题：

(1)计算$\displaystyle\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x$ (n是正整数)；

(2)对固定的参数$t>0$，求函数$F(\lambda)=\mathrm{e}^{-t\lambda^2}$的Fourier逆变换.

中国科学技术大学2012-2013学年第二学期

数学分析(B2)第三次测验

1. (每小题10分)已知向量场$\boldsymbol{V}=(2xz,2yz,x^2+2y^2z-1)$.

(1)求$\boldsymbol{V}$的旋度$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}$；

(2)问$\boldsymbol{V}$是否是一个有势场？若是，求出$\boldsymbol{V}$的一个势函数.

2. (每小题15分)：

(1)求向量场$\boldsymbol{V}=(z,x,y)$沿曲线$\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t,a\sin t,at)$ $(t\in[0,2\pi])$的第二型曲线积分，t是曲线的正向参数；

(2)设曲面$S:\{z=a^2-x^2-y^2|x^2+y^2\leqslant a^2\}$，$S$的定向与$z$轴正向同向，求积分$\displaystyle\iint_S\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，其中$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$.

3. (15分)设$a>b>0$，求椭圆盘$\{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1\}$与椭圆盘$\{\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}\leqslant 1\}$公共部分的面积.

4. (15分)设f是$(0,+\infty)$上的光滑函数，向量场$\boldsymbol{V}=f(r)\boldsymbol{r}$，其中$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，$r=|\boldsymbol{r}|$.

(1)证明$\boldsymbol{V}$是无旋场；

(2)若$\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}=0$，求$f$.

5. (10分)设$\boldsymbol{V}$是定义在区域$\Omega=\{(x,y,z):\dfrac{1}{4}<x^2+y^2+z^2<\dfrac{5}{4}\}$上的光滑向量场，曲面$S=\{x^2+y^2+z^2=1\}$，正向为外法向. 证明：$\displaystyle\iint_S\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$.

6. (10分)设u是定义在$\mathbb{R}^3$上的光滑函数，$\boldsymbol{V}$是$\mathbb{R}^3$的光滑向量场；Ω是$\mathbb{R}^3$的一个有界区域，它的边界$S=\partial\Omega$是光滑曲面，并且函数u满足：$u(x,y,z)=$常数，$\forall(x,y,z)\in S$. 证明：

$$\iiint_\Omega(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{grad}u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

中国科学技术大学2012-2013学年第二学期

数学分析(B2)第四次测验

1. (20分)将函数$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & 1\leqslant|x|<\pi\end{cases}$展开成Fourier级数，并求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n}{n^2}$.

2. (20分)求函数$f(x)=\begin{cases}0, & |x|>1\\ 1, & |x|<1\end{cases}$的Fourier变换，并计算$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos\frac{x}{2}}{x}\mathrm{d}x$.

3. (15分)研究p的取值范围使得广义积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$绝对收敛、条件收敛；请说明原因.

4. (15分)设$f(x)$在$[0,1]$连续且$f(x)>0$，研究函数$g(y)=\displaystyle\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$的连续性.

5. (10分)计算(过程中要说明原因)$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\cos x\mathrm{d}x$.

6. (10分)试利用Euler积分来计算$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

7. (10分)设

   (1)$f(x)$在$[a,+\infty)$上可微且单调下降趋于0；

   (2)$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x<+\infty$；(3)$f'(x)$在$[a,+\infty)$ 上可积.

则$\displaystyle\int_a^{+\infty}xf'(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

中国科学技术大学2013-2014学年第二学期
数学分析(B2)第三次测验

1. (15分)求向量场$\boldsymbol{v}=(y,z,x)$沿曲线$\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$，$t\in[0,2\pi]$的曲线积分，$t$是曲线的正向参数，而$a,b$为正的常数.

2. (15分)计算积分$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}|y|\sqrt{z}\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为曲面$z=x^2+y^2\ (z\leqslant 1)$.

3. (20分)已知向量场$\boldsymbol{v}=(x^2-2yz,y^2-2xz,3z^2-2xy-1)$，判断：$\boldsymbol{v}$是否是一个保守场？若是，求出$\boldsymbol{v}$ 的一个势函数.

4. (20分)计算曲线积分$\displaystyle\int_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中$L$是沿曲线$x^2=2(y+2)$从点$A(-2\sqrt{2},2)$到点$B(2\sqrt{2},2)$的一段.

5. (20分)设矢量$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，并记$r=|\boldsymbol{r}|$. 证明：

$$\iiint\limits_{\Omega}r^2\mathrm{d}V=\frac{1}{5}\iint\limits_{S}r^2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S,$$

其中Ω是由闭曲面S所包围的不含原点的空间区域，$\boldsymbol{n}$是曲面S的单位外法向.

6. (10分)设$\Omega\subset\mathbb{R}^3$是有界闭区域，其边界$\partial\Omega$为光滑闭曲面，$\boldsymbol{n}$是$\partial\Omega$的单位外法向. 设光滑函数$u$是$\Omega$上的调和函数，且满足边界条件

$$\left[\alpha u+\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right]\Big|_{\partial\Omega}=0,$$

其中$\alpha\geqslant 0$为常数. 证明：u在Ω上恒为零.

中国科学技术大学2013-2014学年第二学期

数学分析(B2)第四次测验

1. (每小题8分)

(1)有限闭区间$[a,b]$上的可积且平方可积的函数一定是绝对可积的. 这个命题是否成立？如成立，请证明；否则给出反例.

(2)把函数$f(x)=x^3$在区间[1,2]上按周期1进行Fourier展开，那么得到的Fourier级数收敛域是什么？在这个收敛域上级数是否一致收敛？这个级数在$x=0$出的值是多少？

2. (30分)设$f(x)=|x|$，$x\in[-\pi,\pi]$.

(1)(5分)把f延拓到整个直线上，称为周期为2π的函数. 写出延拓后函数的定义.

(2)(10分)计算出$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上展开得到的Fourier级数.

(3)(5分)上述Fourier级数是否收敛？若收敛极限是什么？请说明理由.

(4)(10分)求下述两个级数的和：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$.

3. (10分)设f在$[-\pi,\pi]$上可导，f'可积且平方可积. 如果$f(-\pi)=f(\pi)$，证明：

$$\lim_{n\to+\infty} na_n=\lim_{n\to+\infty} nb_n=0，$$

其中a_n和b_n为f在$[-\pi,\pi]$上的Fourier系数.

4. (24分)考虑函数族：$N_1(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}\quad N_m(x)=\displaystyle\int_0^1 N_{m-1}(x-t)\mathrm{d}t,\ m\geqslant 2.$

(1)(10分)证明：$N_m(X)=\underbrace{N_1(x)*N_1(x)*\cdots*N_1(x)}_{m\text{项}}$，其中$*$表示卷积运算.

(2)(10分)给出$N_m(x)$的Fourier变换$F[N_m](\lambda)$.

(3)(4分)当$m=1,2,...$时，$F[N_m](\lambda)$经Fourier逆变换的结果是什么？请说明理由.

5. (20分)考虑函数$f(x)=\mathrm{e}^{-\beta x}$，其中$\beta>0$，$x>0$.

(1)(10分)计算出$f(x)$的Fourier正弦变换的表达式；

(2)(10分)利用上述结果，证明：当$\alpha>0,\beta>0$时

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\alpha\beta}.$$

中国科学技术大学2015-2016学年第二学期

数学分析(B2)第三次测验

1. (每小题10分)计算题：

(1)求第二型曲线积分$\oint_{L^+} y\mathrm{d}x + |y-x|\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$，其中$L^+$为球面$x^2+y^2+z^2=1$与球面$x^2+y^2+z^2=2z$的交线，其方向为与$z$轴正向满足右手法则.

(2)利用第二型曲线积分计算心脏线$x=a(2\cos t-\cos 2t), y=a(2\sin t-\sin 2t)$所围成的平面图形的面积.

(3)求第二型曲面积分

$$\iint\limits_{S^+} \big(f(x,y,z)+x\big)\mathrm{d}y\mathrm{z} + \big(2f(x,y,z)+y\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \big(f(x,y,z)+z\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中$f(x,y,z)$为连续函数，S^+是平面$x-y+z=1$在第四象限部分的上侧.

(4)求第二型曲面积分$\iint\limits_{S^+}(x+y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S^+$为柱面$x^2+y^2=1$被平面$z=0$和$z=3$所截部分的外侧.

(5)求第二型曲面积分$\iint\limits_{S^+}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中$S^+$是有界光滑闭曲面的外侧，并且原点不在曲面$S^+$上.

2. (15分)已知$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$是常向量，且$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(1,1,1)$，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$. 求向量场$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{b}$沿闭曲线$L^+$的环量，其中$L^+$为球面$x^2+y^2+z^2=1$与平面$x+y+z=0$的交线，其方向为与$z$轴正向满足右手法则.

3. (15分)设f,g为有连续导数的函数，$f(0)=g(0)=1$，且向量场$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\big(yf(x), f(x)+zg(y), g(y)\big)$是保守场，求出$f,g$以及向量场$\boldsymbol{F}(x,y,z)$的势函数.

4. (20分)设函数$\varphi(x)$有连续的导数，在围绕原点的任意逐段光滑的简单闭曲线C上，曲线积分$\oint_{C^+}\dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$的值为常数.

(1)设L^+为正向闭曲线$(x-2)^2+y^2=1$，在不求出$\varphi(x)$的情况下，求$\oint_{L^+}\dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

(2)求函数$\varphi(x)$.

(3)设C^+是围绕原点的正向光滑简单闭曲线，求$\oint_{C^+}\dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

中国科学技术大学2015-2016学年第二学期

数学分析(B2)第四次测验

1. (16分)判断下列积分是否收敛：

(1)$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$ (2)$\displaystyle\int_1^{+\infty}(\ln x)^2\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

2. (12分)证明：$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\cos\big((6k+1)x\big)}{6k+1}-\cos\frac{\big((6k+5)x\big)}{6k+5}\right)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right)\\ \dfrac{\pi}{4\sqrt{3}}, & x=\dfrac{\pi}{3}\\ 0, & x\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)\\ -\dfrac{\pi}{4\sqrt{3}}, & x=\dfrac{2\pi}{3}\\ -\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}, & x\in\left(\dfrac{2\pi}{3},\pi\right]\end{cases}.$$

3. (12分)判断下列积分是否关于$u>0$一致收敛：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ux)}{x}\mathrm{d}x$.

4. (20分)计算：

(1)$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\cos x\mathrm{d}x$ (2)$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+a^2x^2)-\ln(1+b^2x^2)}{x^2}\mathrm{d}x$

5. (20分)

(1)证明：$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\cos(2ux)\mathrm{d}u=\begin{cases}1-x, & x\in[0,1]\\ 0, & x>1\end{cases}.$$

(2)计算：$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\mathrm{d}x$.

6. (10分)计算极坐标下曲线$r^4=\sin^5\theta\cos^3\theta$所围成的区域面积.

7. (10分)计算e^{-x^2}的Fourier变换.

中国科学技术大学2012-2013学年第二学期
数学分析(B2)期末试卷

1. (15分)设$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$是由下面的方程

$$\begin{cases} u^2+v^2+x^2+y^2=1 \\ u+v+x+y=0 \end{cases}$$

所确定的函数. 求$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

2. (15分)计算积分$\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{\pi}}x^2\sin(xy)\mathrm{d}x$.

3. (15分)计算抛物线$2x=y^2$与直线$y=2x-2$所围成的区域的面积.

4. (15分)求常数a使得向量场$\boldsymbol{F}=(x^2+5ay+3yz,5x+3axz-2,(a+2)xy-4z)$是有势场，并求出这时的势函数.

5. (15分)设α不是整数. 求$\cos\alpha x$在$[-\pi,\pi]$上的Fourier级数展开并证明

$$\frac{\cos\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}=\frac{2}{\pi}\Big(\frac{1}{2\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2-n^2}\Big).$$

6. (15分)求证$f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{1+(x+t)^2}\mathrm{d}t$在$0\leqslant x<+\infty$有二阶连续导数且满足微分方程$f''(x)+f(x)=\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.

7. (10分)设D是xy平面上有限条逐段光滑曲线围成的区域，$f(x,y)$在$\overline{D}$上有二阶连续偏导数且满足方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2a\frac{\partial f}{\partial x}+2b\frac{\partial f}{\partial y}+cf,$$

其中a,b,c为常数且$c\geqslant a^2+b^2$. 求证：若f在∂D上恒为零，则f在D上恒为零.

中国科学技术大学2013-2014学年第二学期

数学分析(B2)期末试卷

1. (20分)级数下列各题：

(1)计算$\mathbb{R}^3$上的向量场$V=(x^2+2y,z^3-2x,y^2+z)$的旋度和散度；

(2)计算二重积分$\iint\limits_D \arctan\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$为$x^2+y^2=4\ (x,y>0)$，$x^2+y^2=1\ (x,y>0)$，与直线$y=x$和$x=0$所围成的闭区域.

2. (20分)已知螺旋面S的方程$\begin{cases} x=u\cos v \\ y=u\sin v \\ z=v \end{cases}\quad (0\leqslant u\leqslant 5, 0\leqslant v\leqslant 2\pi)$，试求：

(1)过S上一点$M(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\pi}{3})$的切平面方程；

(2)计算曲线积分$\displaystyle\int_L \frac{z^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}l$，其中$L$是$S$上对应参数$u=5$的曲线.

3. (20分)试将函数$f(x)=\begin{cases} 1, & |x|\leqslant\dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<|x|\leqslant\pi \end{cases}$展开成Fourier级数，并求$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

4. (20分)

(1)计算积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2}\mathrm{d}x$，其中常数$b>a>0$；

(2)利用欧拉积分计算$\displaystyle\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$.

5. (20分)给定$\mathbb{R}^3$中n个固定点M_i，$i=1,2,...,n$，考察向量函数

$$F(x,y,z)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{grad}\Big(-\frac{\gamma_i}{4\pi r_i}\Big),$$

其中$\gamma_i>0$为正的常数，而r_i为点$M(x,y,z)$到固定的M_i的距离. 现在，已知光滑封闭曲面S所围成的区域的内部包含了这n个固定点. 试求：F穿过曲面S的流量.

中国科学技术大学2015-2016学年第二学期

数学分析(B2)期末试卷

1. (15分)设$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$是由下面的方程

$$\begin{cases} u^2+v^2+x^2+y^2=1 \\ u+v+x+y=0 \end{cases}$$

所确定的函数. 求$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

2. (15分)计算积分$\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{\pi}}x^2\sin(xy)\mathrm{d}x$.

3. (10分)设D是由直线$x=0$，$y=x$，$y=\frac{\pi}{2}$所围成的区域. 计算二重积分$\displaystyle\int_D\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

4. (15分)求第二型曲面积分$\displaystyle\iint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中曲面$S$是上半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$法向朝上.

5. (15分)求常数a使得向量场$\boldsymbol{F}=(x^2+5ay+3yz,5x+3axz-2,(a+2)xy-4z)$是有势场，并求出这时的势函数.

6. (15分)设$x_1,x_2,...,x_n$是正数，且$\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i=n$. 用Lagrange乘数法证明

$$\prod_{i=1}^n\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}\leqslant n,$$

等号当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n=1$时成立.

7. (15分)求证$f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$在$0<x<+\infty$可导且满足微分方程

$$f(x)-f'(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

中国科学技术大学2016-2017学年第二学期

数学分析(B2)期末试卷

1. (12分)(1)设$z=f(x,y), x=u^2+2v^2, y=ue^v$. 求$\dfrac{\partial z}{\partial u},\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

(2)求方程组$x=\cos v+u\sin v, y=\sin v-u\cos v$所确定的反函数组的偏导数$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

2. (12分)设$a_j>0, b_j>0\ (j=1,2,...,n)$.

(1)用Lagrange乘数法求函数$f(x_1,\cdots,x_n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_kx_k^2$在条件$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_kx_k=1$ 之下的极值.

(2)由(1)的结论证明不等式$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}b_ix_i^2\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}\geqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\Big)^2$.

3. (12分)设$f(x)$有连续的导函数，$f(0)=0$，且曲线积分$\displaystyle\int_C\big(e^x+f(x)\big)y\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y$与路径无关. 求$\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,1)}\big(e^x+f(x)\big)y\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y$.

4. (14分)设a,b,c是正数，求第二型曲面积分$\displaystyle\iint_S(by^2+cz^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(cz^2+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(ax^2+by^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S$是上半球面$x^2+y^2+z^2=1,(z\geqslant 0)$的上侧.

5. (12分)设a,b,c不全为零，L是球面$S:x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$与平面$\Sigma: ax+by+cz=0$的交线，其方向这样来定：质点在L上运动的正方向与平面Σ的法向(a,b,c)成右手系. 计算第二型曲线积分$\displaystyle\oint_L(bz+c)\mathrm{d}x+(cx+a)\mathrm{d}y+(ay+b)\mathrm{d}z$.

6. (18分)(1)求周期为2π的函数$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$的Fourier级数.

(2)求级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$的和. (3)由(1)的结论求级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$的和.

7. (12分)证明：由含参变量的广义积分$F(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}\ln(1+tx)\mathrm{d}x$定义的函数$F(t)$是$[0,+\infty)$上的可导函数.

8. (8分)设D是由光滑封闭曲线L所围的区域，函数$f(x,y)$在$\overline{D}$上有二阶连续偏导数，且满足$e^y\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+e^x\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$，并且$f$在$L$上恒为零.

(1)求证：存在有连续偏导数的函数$P(x,y),Q(x,y)$使得

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^y\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2+e^x\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)^2,\ (x,y)\in D;$$

(2)证明：f在D上恒为零.

一、(本题 10 分) 设 $f(x)=\frac{e^x}{1-x}$. 求 $f^{(n)}(0)$.

(1) 求 $(1+x^2)y''+2xy'=x$ 的通解.

(2) 求 $y''-3y'+2y=2x-3$ 的通解.

二、 (本题 20 分, 每小题 5 分) 求积分和不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^{2x}}\,dx$; (2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+x^2-x-1}\,dx$;

(3) $\displaystyle\int_0^1 x\arctan x\,dx$; (4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$.

四、 (本题 10 分) 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上连续函数. 求证:

$$\int_0^\pi x f(|\cos x|)\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)\,dx.$$

五、 (本题 10 分) 研究函数项级数 $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^2}{n^x}}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上是否一致收敛.

六、 (本题 10 分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛区域以及和函数.

七、 (本题 10 分) 设 $\{a_n\}$ 是正数列, 满足

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\ln n}+\frac{1}{n^2},\quad (n\geqslant 2).$$

试证明 (1) $\frac{a_n n\ln n}{a_{n+1}(n+1)\ln(n+1)}<1+\frac{1}{n^2}$; (2) 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$ 发散.

八、（本题 10 分）设 f 是 $\mathbb{R}$ 上取值为正的可微函数, 且对所有 $x,y\in\mathbb{R}$, 有

$$|f'(x)-f'(y)|^2\leqslant|x-y|.$$

求证: 对所有 $x\in\mathbb{R}$, 有 $|f'(x)|^3<3f(x)$.

$\sum (x-1)^2 \sum \frac{1}{n^x}+\frac{1}{(n+1)^x}+\cdots$

$\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}$

ε^2

$t = e^x \quad dt = e^x dx$

二、(1) $= \int \frac{1}{(1+t^2)} \frac{dt}{t} = \int \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2} = \ln|t| - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$

$= x - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})$

(2) $= \int \frac{(1+x)+(1-x)}{2(x+1)^2(x-1)} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)(x-1)} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2}$

$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cancel{(x+1)}^2} d(x+1) = \frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}$

(3) $= \frac{1}{2}\int dx^2 \cdot \arctan x = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx =$

$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arctan x$

$\int_0^1 = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi - 2}{4}$

(4) $= \quad t^2 = x-1 \quad 2t\,dt = dx \quad = \int_0^\infty \frac{1 \cdot 2t\,dt}{(1+t^2)\cdot t} = 2\int_0^\infty \arctan t = \pi$

(5) $\frac{dy'}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}y' = \frac{x}{1+x^2} \quad y = e^{-\int \frac{2x}{1+x^2}dx}\left(\frac{x}{1+x^2} e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} + C\right)$

$= \frac{1}{1+x^2}\left(\int \frac{x}{1+x^2}(1+x^2) + C\right) = \frac{x^2}{2(1+x^2)} + \frac{C}{1+x^2}$

$y = \int \frac{x^2}{2(1+x^2)} + \frac{C}{1+x^2}) = \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} + C\arctan x$

$= \frac{1}{2}x - C\arctan x + C_2$

(2) $= \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (x-1)(x-2) \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

$y = Ax + B \quad y' = A \quad -3A + 2(Ax + B) = 2Ax - 3A + 2B = 2x - 3 \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}$

$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x$

(5): $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} + x\right) f|\cos(x + \frac{\pi}{2})|\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f|\cos(x)|\,dx$

中国科学技术大学2018-2019学年第一学期
(数学分析(B1)期末考试试卷, 2019年1月11日)

一、(本题 10 分) 设 $f(x)=\frac{e^x}{1-x}$. 求 $f^{(n)}(0)$.

解 e^x 的幂级数展开为 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$, $\frac{1}{1-x}$ 的幂级数展开为 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$. 根据级数的 Cauchy 乘积, 有

$$f(x)=\frac{e^x}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,$$

其中

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.$$

(........... 6 分)

根据幂级数的知识, 应有 $c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. 故,

$$f^{(n)}(0)=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.$$

(........... 10 分)

解法2 显然在 0 的一个小邻域内, $f(x)$ 有任意阶导数. 对 $(1-x)f(x)=e^x$ 两边求 n 阶导数, 得

$$(1-x)f^{(n)}(x)-nf^{(n-1)}(x)=e^x.$$

特别有

$$f^{(n)}(0)=1+nf^{(n-1)}(0).$$

(........... 6 分)

注意到 $f(0)=1$, 利用上式可归纳可证明

$$f^{(n)}(0)=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.$$

(........... 10 分)

二、 (本题 20 分, 每小题 5 分) 求积分和不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^{2x}}\,dx$; (2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+x^2-x-1}\,dx$;

(3) $\displaystyle\int_0^1 x\arctan x\,dx$; (4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$.

解 (1)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^{2x}}\,dx &= \int \left(1-\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)dx = x-\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx\\ &= x-\frac{1}{2}\int \left(\ln(1+e^{2x})\right)'\,dx\\ &= x-\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3+x^2-x-1}\,dx &= \int \frac{1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx\\ &= \int \left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)-\frac{1}{2(x+1)^2}\right]dx\\ &= \frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+C\end{aligned}$$

注意, 不写常数 C 扣 1 分.

(3)

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\arctan x\,dx &= \frac{1}{2}x^2\arctan x\Big|_0^1-\int_0^1 \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx\\ &= \frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx\\ &= \frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi-2}{4}.\end{aligned}$$

(4) 作变换 $t=\sqrt{x-1}$, 有

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)t}\cdot 2t\,dt=2\arctan t\Big|_0^{+\infty}=\pi.$$

座位号: ______ 考场: ______ 所在院系: ______ 姓名: ______ 学号: ______

密封线　答题时不要超过此线

三、(本题 20 分, 每小题 10 分) 求解下面的微分方程:

(1) 求 $(1+x^2)y'' + 2xy' = x$ 的通解.

y' , x

解 原方程可写为 $((1+x^2)y')' = x$. 故,

$$(1+x^2)y' = \frac{1}{2}x^2 + C_1.$$

因此

$$y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{C_0}{1+x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} + \frac{C_0}{1+x^2}.$$

故,

$$y = \frac{1}{2}x + C_1 + C_2 \arctan x.$$

$Ax+B$ 　 Ax^2+B

(2) 求 $y'' - 3y' + 2y = 2x - 3$ 的通解.

解 相应的齐次方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, 有两个实根 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = 2$. 故, 齐次方程的通解为 $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$. 显然 $y = x$ 是原方程的一个特解. 故, 原方程的通解为

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + x.$$

$e^x(3x+2)$

$e^x(Ax+B)$

四、(本题 10 分) 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上连续函数. 求证:

$$\int_0^{\pi} xf(|\cos x|)\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)\,dx.$$

证明

$$\int_0^{\pi} xf(|\cos x|)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(|\cos x|)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(|\cos x|)\,dx.$$

对上式右边第二个积分作变换 $t = \pi - x$, 得

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(|\cos x|)\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\pi - t)f(|\cos t|)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi - t)f(|\cos t|)dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi - x)f(|\cos x|)dt.$$

于是

$$\int_0^{\pi} xf(|\cos x|)\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)\,dx.$$

$\frac{1}{x}\sum \frac{x^n}{n}$ $x\iint \sum_1^\infty x^{n-1}$ $\frac{1}{1-x}$ $\int \ln(1-x)\, d(1-x)$

$(1-x)\ln(1-x)-x$

五、(本题 10 分) 研究函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^2}{n^x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上是否一致收敛.

$x\ln x - x$

解 函数 $u_n(x) = \frac{(x-1)^2}{n^x}$ 的导数为 $u_n'(x) = \frac{(x-1)(2-(x-1)\ln n)}{n^x}$, 当 $n \geqslant 2$ 时, 它在 $(1, 1+\frac{2}{\ln n})$ 为正, 在 $(1+\frac{2}{\ln n}, +\infty)$ 为负. 因此 $u_n(x)$ 在 $x = 1 + \frac{2}{\ln n}$ 取最大值

$$\frac{4}{n^{1+\frac{2}{\ln n}} \cdot \ln^2 n} < \frac{4}{n \ln^2 n}.$$

$x\ln x - (1-x)$

$\frac{1}{x}\sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$

因为级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ 收敛, 所以根据 Weierestrass 判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^2}{n^x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上一致收敛.

注意: 只写出一致收敛的结论而不证明, 或证明完全错误都得 2 分.

$x\ln x + x - 1$

$\frac{1}{x}\iint \sum x^{n-1}$

六、(本题 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛区域以及和函数.

解 设 $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. 则

$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+2} \to 1 \ (n \to \infty).$$

故, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛半径为 1. 当 $x = 1$ 和 $x = -1$ 时, 该幂级数显然收敛. 故, 收敛区域为 $[-1, 1]$. (........... 4 分)

$1-\frac{1}{2}$

令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. 则 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$. 故, $f(x) = -\ln(1-x)$. 于是

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) x^n = f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n \\
&= f(x) - \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} = f(x) - \frac{1}{x}(f(x) - x) \\
&= (1 - \frac{1}{x}) f(x) + 1 \\
&= \frac{1-x}{x} \ln(1-x) + 1.
\end{aligned}$$

(........... 10 分)

$\frac{n^2\ln n + n\ln n + n + \ln n}{n^2 \ln n}$ $\ln(1+x) \ge x$

$\frac{a_n}{a_{n+1}} \le$

$1+$ $\le$

学号:______ 姓名:______ 所在院系:______ 考场:______ 座位号:______

密封线　答题时不要超过此线

七、(本题 10 分) 设 $\{a_n\}$ 是正数列, 满足

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\ln n}+\frac{1}{n^2}, \quad (n \geqslant 2).$$

试证明 (1) $\frac{a_n n \ln n}{a_{n+1}(n+1)\ln(n+1)} < 1+\frac{1}{n^2}$; (2) 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ 发散.

证明　因为 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}$ $(n \geqslant 2)$, 所以根据条件, 有

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &\leqslant 1+\frac{1}{n}+\frac{n+1}{n\ln n}\cdot\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n^2} \\ &< 1+\frac{1}{n}+\frac{n+1}{n\ln n}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n^2} \\ \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{n+1}{n}\cdot\frac{\ln(n+1)}{\ln n}+\frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

令 $c_n=(n\ln n)a_n$, 则从上式可得

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} < 1+\frac{1}{n^2}.$$

.... (5 分)

取对数, 得

$$\ln c_n - \ln c_{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

于是

$$\ln c_2 - \ln c_n < \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k^2},, \quad (n \geqslant 3).$$

由于 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛. 故, 由上式可知存在常数 c 使得

$$c \leqslant \ln c_n, \ (n \geqslant 3).$$

即,

$$a_n \geqslant \frac{e^c}{n\ln n}, \ (n \geqslant 3).$$

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$, 所以由上式可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. .... (10 分)

八、（本题 10 分）设 f 是 $\mathbb{R}$ 上取值为正的可微函数, 且对所有 $x, y \in \mathbb{R}$, 有

$$|f'(x) - f'(y)|^2 \leqslant |x - y|.$$

求证: 对所有 $x \in \mathbb{R}$, 有 $\left|f'(x)\right|^3 < 3f(x)$.

证明 对固定的 $x \in \mathbb{R}$, 若 $f'(x) = 0$, 则 $\left|f'(x)\right|^3 < 3f(x)$ 成立. 记 $h = (f'(x))^2$. 并设 $h \neq 0$.

若 $f'(x) < 0$, 则根据 Newton-Leibniz 公式和条件, 得

$$\begin{aligned}
0 < f(x+h) &= f(x) + \int_x^{x+h} f'(t)\,dt \\
&= f(x) + \int_x^{x+h} \big(f'(t) - f'(x)\big)\,dt + f'(x)h \\
&\leqslant f(x) + \int_x^{x+h} (t-x)^{\frac{1}{2}}\,dt + f'(x)h \\
&= f(x) + \frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}} + f'(x)h.
\end{aligned}$$

故

$$\frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}} + f'(x)h + f(x) > 0. \qquad (\text{...... 5 分})$$

将 $h = (f'(x))^2$ 代入上式, 即得

$$\left|f'(x)\right|^3 < 3f(x).$$

若 $f'(x) > 0$, 则根据 Newton-Leibniz 公式和条件, 得

$$\begin{aligned}
0 < f(x-h) &= -\int_{x-h}^{x} f'(t)\,dt + f(x) \\
&= \int_{x-h}^{x} \big(f'(x) - f'(t)\big)\,dt - f'(x)h + f(x) \\
&\leqslant \int_{x-h}^{x} (x-t)^{\frac{1}{2}}\,dt - f'(x)h + f(x) \\
&= \frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}} - f'(x)h + f(x).
\end{aligned}$$

将 $h = (f'(x))^2$ 代入上式, 仍得

$$\left|f'(x)\right|^3 < 3f(x).$$

总之, 始终有 $\big(f'(x)\big)^3 < 3f(x)$. 证毕. .... (10 分)