装订线 答题时请不要超过此线

中 国 科 学 技 术 大 学

2013—2014学年度第二学期期中考试试卷

考试科目：线性代数　　考试时间：2014.4.27　　得分________________

学生所在院系：__________　　姓　名________________　　学号________________

注意: 空间中坐标系均取为右手直角坐标系；解答题和证明题要求有较详细的过程。

一、填空题（每空4分，共计20分）

(1) 已知四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{CD}=\vec{c}$，对角线$AC$、$BD$的中点分别为$E$、$F$。则$\overrightarrow{EF}$可由$\vec{a}$和$\vec{c}$表示为____________________。

(2) 复数$z=1+\sin\theta+i\cos\theta(-\pi/2\le\theta\le\pi/2)$的三角形式是____________________。

(3) 点$(1,2,3)$到直线$x-1=\frac{1-y}{3}=\frac{1-z}{2}$的距离为____________________。

(4) 经过直线$x=y=z$，且与平面$x+2y+3z=5$垂直的平面方程是____________________。

(5) 设矩阵$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1\\ a & 2a & 1\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}$，且$\mathrm{rank}(A)=2$。则$a=$__________。

二、判断题：请判断下列命题是否正确，并简要说明理由。（每题5分，共计20分）

(1) 三维空间中，向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面的充要条件为向量$\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}$共面。

(2) 设$\vec{a},\vec{b}$均为三维空间向量。则$|\vec{a}\times\vec{b}|^2=\vec{a}^2\vec{b}^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$。

(3) 设$C=\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$，其中$A,B$均为$n$阶可逆方阵。则$C^*=\begin{pmatrix} A^* & 0\\ 0 & B^*\end{pmatrix}$，其中*表示伴随矩阵。

(4) 设A为实对称方阵。若$A^2=0$，则$A=0$。

三、（15分）求直线l_1: $\begin{cases} x=1+t \\ y=1 \\ z=2t \end{cases}$ 绕直线l_2: $2x=y=z$旋转所成的旋转曲面的一般方程。

四、（15分）给定线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+\lambda x_2-x_3=1 \\ \lambda x_1-x_2+x_3=2 \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1 \end{cases}$$

(1) 问：λ分别为何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？
(2) 在方程组有无穷多解时，给出其通解。

五、（12分）设$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求矩阵$A$的逆。

六、（10分）计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

七、（8分）设A为$m\times n$矩阵，B为$n\times m$矩阵，$n\geq m$, $\lambda\neq 0$。证明：

$$\det(\lambda I_n-BA)=\lambda^{n-m}\det(\lambda I_m-AB).$$