数分分析 A3 第一次习题课

何展韬

2023 年 9 月 16 日

1 作业答案 (第 1 周)

练习 (14.1.6). 证明下列级数发散：

$$(2)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{3n^2-2}\qquad (4)\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

解. (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{n^2+1}{3n^2-2}$ 不存在，故级数发散。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=\dfrac{1}{\mathrm{e}}\neq 0$，故级数发散。 □

练习 (14.1.7). 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 也收敛。试举例说明其逆命题不成立。但若 $a_n>0$，则逆命题也成立。

解. (法一) 令 $b_n=a_{n+1}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$，利用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，以及收敛级数的线性性知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 收敛。

(法二) 利用部分和：

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k+a_{k+1})=2\sum_{k=1}^{n}a_k-a_{n+1}-a_1 \tag{1}$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，由式 (1) 知 S_n 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 收敛。

(逆命题不成立的反例)：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$。

(若 $a_n>0$，逆命题成立)：依旧考虑式 (1) 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 收敛得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n+a_{n+1}=0$，由于 $0<a_n<a_n+a_{n+1}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。对式 () 令 $n\to\infty$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。 □

注 1.1. 若 $a_n > 0$，逆命题成立可以由 14.2 的正项级数比较判别法立刻得到。

练习 (14.1.8). 设 $\{na_n\}$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 都收敛，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

解. 依旧考虑部分和：

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k - na_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - na_n + n(a_n - a_{n+1}) \tag{2}$$

由条件知 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$ 存在，$\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = 0$。对式 (2) 令 $n \to \infty$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。 □

练习 (14.2.2). 用比较判别法讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3n^2+5}$　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n^2}{3n^2+1}\right)^n$　(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n(n+2)}$

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$　(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1)$

解. (1) $0 < \dfrac{1}{3n^2+5} < \dfrac{1}{n^2}$，由正项级数比较判别法，级数收敛。

(3) $0 < \left(\dfrac{n^2}{3n^2+1}\right)^n < \dfrac{1}{3^n}$，由正项级数比较判别法，级数收敛。

(5) $\dfrac{n+1}{n(n+2)} > \dfrac{1}{n+2} > 0$，由正项级数比较判别法，级数发散。

(7) $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{(\ln\ln n)^2}} > \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln n}} = \dfrac{1}{n} > 0$，其中 $>$ 对充分大的 n 成立，由正项级数比较判别法，级数发散。

(9) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n^2+1} = 0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1}{\frac{\ln n}{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n^2+1}} - 1}{\frac{\ln n}{n^2+1}} = 1$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^2+1}$ 同敛散。又 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{\ln n}{n^2+1}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^2+1}$ 收敛，故原级数收敛。 □

练习 (14.2.8). 问 p, q 取何值时，级数：

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p (\ln\ln n)^q}$$

收敛？

解. 本题利用 Cauchy 积分判别法，但要注意单调性的讨论：

(i) $p>1$ 时对 $\forall q\in\mathbb{R}$，当 n 充分大时有 $\dfrac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}<\dfrac{1}{n^{\frac{p+1}{2}}}$，由 Cauchy 积分判别法得 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^{\frac{p+1}{2}}}$ 与下述积分同敛散：

$$\int_3^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^{\frac{p+1}{2}}}\mathrm{d}x \xlongequal{t=\ln x} \int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{1}{t^{\frac{p+1}{2}}}\mathrm{d}t$$

由 $\dfrac{p+1}{2}>1$ 得上述积分收敛，因此 $p>1$ 时对 $\forall q\in\mathbb{R}$，$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^{\frac{p+1}{2}}}$ 收敛，再由比较判别法，原级数收敛。

(ii) $p=1$ 时若 $q<0$，则当 n 充分大时有 $\dfrac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}>\dfrac{1}{n\ln n}$，由 Cauchy 积分判别法得 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 与下述积分同敛散：

$$\int_3^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x \xlongequal{t=\ln x} \int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

故积分发散，得 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 发散，再由比较判别法，原级数发散。

若 $q\geqslant 0$，则直接由 Cauchy 积分判别法得原级数与下述积分同敛散：

$$\int_3^{+\infty}\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^q}\mathrm{d}x \xlongequal{t=\ln x} \int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{1}{t(\ln t)^q}\mathrm{d}t \xlongequal{u=\ln t} \int_{\ln\ln 3}^{+\infty}\frac{1}{u^q}\mathrm{d}u$$

故原级数收敛 $\iff$ 上述积分收敛 $\iff$ $q>1$；

(iii) $p<1$ 时对 $\forall q\in\mathbb{R}$，当 n 充分大时有 $\dfrac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}>\dfrac{1}{n\ln n}$，由 Cauchy 积分判别法得 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 与下述积分同敛散：

$$\int_3^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x \xlongequal{t=\ln x} \int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

故积分发散，得 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$，再由比较判别法，原级数发散。

综上级数收敛当且仅当 $p>1$ 或者 $p=1,q>1$。 □

注 1.2. 本题需要说明函数单调性（非负性显然故不需要强调），但是由于 p,q 可以小于 0，故函数单调性并不好说明。因此答案先放缩，放缩成单调性明显的函数，再用 **Cauchy** 积分判别法来证明敛散性。

练习 (14.2.12). $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\forall \alpha, \beta > 0, \alpha+\beta > 1$，都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^\alpha}{n^\beta}$ 收敛。

解. (解法 1) 回顾 Young 不等式：若 $p, q > 0$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，则有：

$$\frac{1}{p}\,a^p + \frac{1}{q}\,b^q \geqslant ab \quad (a, b \geqslant 0)$$

(i) $0 < \alpha < 1$ 时，$1-\alpha > 0$，$\frac{\beta}{1-\alpha} > 1$。令 $\alpha = \frac{1}{p}$，$1-\alpha = \frac{1}{q}$，代入上式得：

$$0 < \frac{a_n^\alpha}{n^\beta} = \frac{a_n^\alpha}{\left(n^{\beta/(1-\alpha)}\right)^{1-\alpha}} \leqslant \alpha a_n + (1-\alpha)\frac{1}{n^{\beta/(1-\alpha)}} \tag{3}$$

对式 (3) 右边，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta/(1-\alpha)}}$ 收敛，因此由比较判别法，原级数收敛。

(ii) $\alpha \geqslant 1$ 时，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。故当 n 充分大时，有 $0 < a_n < 1$，此时 $0 < a_n^\alpha \leqslant a_n$，从而有 $0 < \frac{a_n^\alpha}{n^\beta} \leqslant a_n^\alpha \leqslant a_n$，因此由比较判别法，原级数收敛。

(解法 2) 对 a_n 与 $\frac{1}{n}$ 的大小进行比较：

若 $0 < a_n \leqslant \frac{1}{n}$，则有 $0 < \frac{a_n^\alpha}{n^\beta} \leqslant \frac{1}{n^{\alpha+\beta}}$.

若 $a_n > \frac{1}{n}$，则当 n 充分大时，由解法 1(ii) 的推导可知 $\frac{1}{n} < a_n < 1$，又 $\alpha+\beta > 1$，故此时 $0 < \frac{a_n^\alpha}{n^\beta} < a_n^{\alpha+\beta} < a_n$.

因此有 $0 < \frac{a_n^\alpha}{n^\beta} < \frac{1}{n^{\alpha+\beta}} + a_n \ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+\beta}}$ 收敛，因此由比较判别法，原级数收敛。 □

注 1.3. 本题是第一周作业的错误重灾区。主要有以下两种错误：

(1) 在使用 Young 不等式时忽略了 $\alpha < 1$ 的限制，在 Young 不等式中要求 $p, q > 1$。

(2) 使用了一个错误命题：$a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，因此由比较判别法可得 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$ 。

这个命题若已知极限存在，则是正确的；若极限不存在，则有如下反例：

$$a_n > 0, a_{n^2} = \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*\text{，其余位置填入一个收敛的正项级数}$$

易证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，但是 $\{na_n\}$ 由无穷多项为 1，也有子列趋于 0，故 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$ 不存在。

2 补充题目

在 Cauchy 积分判别法中，我们建立了一类正项级数和其对应的无穷积分敛散性之间的联系，从而我们可以把离散的级数敛散问题转化为连续的积分敛散问题。有的时候，我们面对难以求和的式子，如果它的形式满足某些要求，也会考虑将其放缩成对应的积分，利用积分的敛散性得到级数的敛散性。具体的例子如下：

例题 2.1 (问题 14.2.3).
设 $a_n > 0, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$，证明：
(1) 当 $\alpha > 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛。
(2) 当 $\alpha < 1$ 且 $S_n \to +\infty$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散。

解. (i) 由于 $a_n > 0$，故 $\{S_n\}$ 严格递增。故有不等式：

$$\frac{a_n}{S_n^\alpha} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} \leqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}x \quad (\forall n \geqslant 2) \tag{4}$$

对式 (4) 求和可得：

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{S_k^\alpha} \leqslant \frac{a_1}{S_1^\alpha} + \int_{S_1}^{S_n} \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}x \leqslant a_1^{1-\alpha} + \int_{a_1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}x \quad (\forall n \geqslant 2) \tag{5}$$

由于 $\alpha > 1, a_1 > 0$，故式 (5) 右边 $< +\infty$，故正项级数部分和 $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{S_k^\alpha}$ 有界，从而级数收敛。
(ii) 由于 $S_n \to +\infty$，故 n 充分大时，$S_n > 1$，此时有：

$$\frac{a_n}{S_n^\alpha} > \frac{a_n}{S_n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} \cdot \frac{S_{n-1}}{S_n} \geqslant \left(1 - \frac{a_n}{S_n}\right) \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x} \mathrm{d}x \quad (\forall n\text{充分大}) \tag{6}$$

若 $\exists N \in \mathbb{N}^*$，使得 $n > N$ 时满足式 (6)，且有 $\dfrac{a_n}{S_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$，则对式 (6) 求和可得：

$$\sum_{k=N+1}^{n} \frac{a_k}{S_k^\alpha} > \frac{1}{2} \int_{S_N}^{S_n} \frac{1}{x} \mathrm{d}x \quad (\forall n > N) \tag{7}$$

由于 $S_n \to +\infty$，故对式 (7) 令 $n \to \infty$，得式 (7)$\to +\infty$，从而级数发散。
若存在无穷多个 n 使得 $\dfrac{a_n}{S_n} > \dfrac{1}{2}$，则由式 (6) 第一个不等号可知正项级数通项 $\left\{\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}\right\}$ 中有无穷多项大于 $\dfrac{1}{2}$，故级数发散。 □

注 2.1. 本题的关键是目标级数的通项具有式 (4) 的形式，将其与积分关联是一个值得考虑的放缩思路。

例题 2.2. 设 $0<p<1$，$a_1>0$，且有 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+a_n^p}\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)$。求证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

解. 由条件得：

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{1+a_n^p}\ \Rightarrow\begin{cases}a_{n+1}+a_{n+1}a_n^p=a_n\\ a_n>a_{n+1}\end{cases}\Rightarrow\ a_{n+1}=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n^p}\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)\tag{8}$$

式 (8) 右边具有式 (4) 的形式，因此考虑放缩成积分：

$$a_{n+1}=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n^p}\leqslant\int_{a_{n+1}}^{a_n}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)\tag{9}$$

对式 (9) 求和可得：

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\leqslant a_1+\int_{a_n}^{a_1}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)\tag{10}$$

由式 (8) 知正数列 $\{a_n\}$ 单调递减，因此极限存在。再对式 (8) 左边等式令 $n\to\infty$ 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，从而对式 (10) 令 $n\to\infty$，结合 $0<p<1$ 可得式 (10) 右边 $<+\infty$，故原级数收敛。 □

例题 2.3 (**问题 14.3.1**)**.**

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是一个正项级数。如果存在正数 α,β，使得：$a_n-a_{n+1}\geqslant\beta a_n^{2-\alpha}\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且：

$$\sum_{n=N}^{\infty}a_n=O(a_N^{\alpha})\quad(N\to\infty)$$

解. 首先由 $a_n>0$ 知 $\{a_n\}$ 单调递减，故 $\{a_n\}$ 极限存在。进一步，对条件的不等式令 $n\to\infty$ 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，且 $\alpha<2$。接下来需要对 α 的取值进行分类讨论。

(i) 若 $\alpha<1$，则由条件可得：

$$a_n\leqslant\frac{a_n-a_{n+1}}{\beta a_n^{1-\alpha}}\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)\tag{11}$$

式 (11) 与式 (8) 十分相似，这也是我们分类 $\alpha<1$ 的原因。

仿照例题 2.2 的讨论可得：

$$\sum_{n=N}^{\infty}a_n\leqslant\frac{1}{\beta}\int_0^{a_N}\frac{1}{x^{1-\alpha}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha\beta}a_N^{\alpha}\quad(\forall N\in\mathbb{N}^*)\tag{12}$$

再对式 (12) 令 $N\to\infty$ 即可。

(ii) 若 $\alpha \geqslant 1$，则不能像 (i) 那样放缩成积分。仍旧考虑式 (11)，注意到 $\alpha - 1 > 0$ 以及 $\{a_n\}$ 单调递减，故有：

$$a_n \leqslant \frac{1}{\beta}(a_n - a_{n+1})a_n^{\alpha-1} = \frac{1}{\beta}(a_n^{\alpha} - a_{n+1}a_n^{\alpha-1}) \leqslant \frac{1}{\beta}(a_n^{\alpha} - a_{n+1}^{\alpha}) \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \tag{13}$$

对式 (13) 求和可得：

$$\sum_{k=N}^{n} a_k \leqslant \frac{1}{\beta}\sum_{k=N}^{n}(a_k^{\alpha} - a_{k+1}^{\alpha}) < \frac{1}{\beta}a_N^{\alpha} \quad (\forall n, N \in \mathbb{N}^*) \tag{14}$$

对式 (14) 先固定 N 令 $n \to \infty$，再令 $N \to \infty$ 即可。 □

当然更常见的是直接利用 Cauchy 积分判别法将级数敛散性问题转化为积分敛散性问题。

例题 2.4. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递减且恒正。又满足：

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)}{f(x)} = p$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 在 $p < 1$ 时收敛，在 $p > 1$ 时发散。

解. 由条件知 $f(x)$ 天然具备 Cauchy 积分的条件，条件的极限也给的是 $\mathbb{R}$ 上函数的信息，因此自然考虑 Cauchy 积分判别法。

(i) 若 $p > 1$，则 $\exists M > 0$，使得 $x > M$ 时 $\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x) > f(x)$，故：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < \int_a^b \mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{e}^a}^{\mathrm{e}^b} f(x)\mathrm{d}x \quad (\forall a, b > M) \tag{15}$$

这里已经运用了 f 单调故 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积。

取 $x_{n+1} = \mathrm{e}^{x_n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$，$x_1 = M$，则 $\{x_n\}$ 单调递增趋于 $+\infty$，故利用式 (15) 得：

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{e}^{x_n}}^{\mathrm{e}^{x_{n+1}}} f(x)\mathrm{d}x > \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \tag{16}$$

对式 (16) 求和可得：

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x > n\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = n\int_{M}^{\mathrm{e}^M} f(x)\mathrm{d}x \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \tag{17}$$

对式 (17) 令 $n \to \infty$ 可得式 (17) 右边 $\to +\infty$，因此 $\displaystyle\int_M^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散。由 Cauchy 积分判别法，原级数发散。

(ii) 若 $p<1$，则 $\exists M>0$，使得 $x>M$ 时有：

$$\mathrm{e}^{x} f\left(\mathrm{e}^{x}\right)<f(x)(p+\varepsilon)=f(x) q$$

其中 $q=p+\varepsilon \in(0,1)$ 为常数。
与 (i) 同理可得：

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} f(x) \mathrm{d} x=\int_{\mathrm{e}^{x_{n}}}^{\mathrm{e}^{x_{n+1}}} f(x) \mathrm{d} x<q \int_{x_{n}}^{x_{n+1}} f(x) \mathrm{d} x \quad\left(\forall n \in \mathbb{N}^{*}\right) \tag{18}$$

对式 (18) 求和可得：

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k}}^{x_{k+1}} f(x) \mathrm{d} x<\int_{x_{1}}^{x_{2}} f(x) \mathrm{d} x \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}=\frac{1-q^{n}}{1-q} \int_{M}^{\mathrm{e}^{M}} f(x) \mathrm{d} x \quad\left(\forall n \in \mathbb{N}^{*}\right) \tag{19}$$

对式 (19) 令 $n \rightarrow \infty$ 可得式 (19) 右边 $<+\infty$，因此 $\displaystyle\int_{M}^{+\infty} f(x) \mathrm{d} x$ 收敛。由 Cauchy 积分判别法，原级数收敛。 □

在 14.3 节我们利用比较判别法得到了一个重要引理 (下面我们称这个引理为比值判别法)，并由这个引理推出了 D'Alembert，Raabe，Gauss 判别法。而在面对一些题目时，构造比值判别法的形式，会比考虑传统的比较判别法要简单。

例题 2.5. 设 $a_{n}>0\left(\forall n \in \mathbb{N}^{*}\right)$，$\displaystyle\lim _{n \rightarrow \infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_{n}}\right)^{n}=\lambda$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n}$ 在 $\lambda<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时收敛，在 $\lambda>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时发散。

解. 本题的临界点 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 是解题的突破口，要利用这点需要回顾以下不等式：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<e<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n} \quad\left(\forall n \in \mathbb{N}^{*}\right) \tag{20}$$

不等式的证明参考数分 A1 课本。
式 (20) 天然的 n 次方可以让我们消去 n 的幂次，而式 (20) 两边的底数也是十分好的利用比值判别法的形式。
(i) 若 $\lambda<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，则 $\exists p>1$，使得 $\lambda<\dfrac{1}{\mathrm{e}^{p}}<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$。故由条件，$\exists N \in \mathbb{N}^{*}$，使得 $\forall n>N$ 都有：

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_{n}}\right)^{n}<\frac{1}{\mathrm{e}^{p}}<\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p}} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_{n}}<\frac{\frac{1}{(1+n)^{p}}}{\frac{1}{n^{p}}}$$

由于 $p>1, a_{n}>0$，故由比值判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n}$ 收敛。

(ii) 若 $\lambda > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$，则 $\exists N \in \mathbb{N}^*$，使得 $\forall n > N$ 都有：

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n > \frac{1}{\mathrm{e}} > \frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^n} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}$$

故由比值判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。 □

例题 2.6 (**问题 14.2.1**)**.**
试证：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$ 在 $0 < x < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时收敛，在 $x \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时发散。

解. 利用例题 2.5：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}}}{x^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} x^{\frac{n}{n+1}} = x \quad (x > 0)$$

故原级数在 $0 < x < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时收敛，在 $x \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时发散。 □

例题 2.7 (问题 14.4.1)**.** 设 $\{a_n\}$ 正数列。如果对 $0 < \alpha < 1$，有：

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lambda > 0$$

或者极限是 $+\infty$，证明：对 $\forall k \in \mathbb{N}^*$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^k a_n < +\infty$

解. 由条件可得：

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) == \infty \tag{21}$$

故对 $M > 0$，$\exists N = N(M) \in \mathbb{N}^*$，使得：

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > M \quad (\forall n > N) \tag{22}$$

其中 M 为待定常数。
现在固定 $k \in \mathbb{N}^*$，由式 (22) 可得：

$$\frac{(n+1)^k a_{n+1}}{n^k a_n} < \frac{(n+1)^k n}{n^k(n+M)} \quad (\forall n > N) \tag{23}$$

现在设 $M \in \mathbb{N}^*$，则式 (23) 右边变为：

$$\frac{(n+1)^k n}{n^k(n+M)} = \frac{\dfrac{(n+1)^k}{(n+1)(n+2)\cdots(n+M)}}{\dfrac{n^k}{n(n+1)\cdots(n+M-1)}} \triangleq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad (\forall n > N) \tag{24}$$

结合式 (23)(24)，已经是比值判别法的形式，我们希望 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，从而由比值判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^k a_n < +\infty$，再由 $k \in \mathbb{N}^*$ 的任意性知结论成立。因此可进一步设 $M = k+2$，其中 k 是固定的。从而：

$$b_n = \frac{n^k}{n(n+1)\cdots(n+M-1)} \leqslant \frac{1}{(n+M-2)(n+M-1)} \quad (\forall n > N)$$

由正项级数的比较判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，即证。 □