

《理论力学 A》(2023 年秋季) 平时作业十一¹

12 月 7 日 (星期四) 交。

1. 质量为 m 的粒子在二维 (x, y) 平面中运动, 势能曲线为:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2 \quad (1)$$

一般来说, $\omega_x \neq \omega_y$ 。

- 找到作用变量 (I_x, I_y) , 并用这些变量表示能量;
 - 求角度变量 (ϕ_x, ϕ_y) , 用作角量变量和角变量表示直角坐标;
 - 写出角变量和笛卡尔坐标作为时间的函数;
 - 取 $\omega_x/\omega_y = 5/3$ 绘制粒子在 (x, y) 空间和 (ϕ_x, ϕ_y) 空间中的轨迹。
2. 质量为 m 的粒子在有心势场中运动:

$$V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{h}{r^2} \quad (2)$$

- 用能量 E 和总角动量 L 表示作用变量 I_r ;
 - 用作用变量 (I_r, I_θ, I_ϕ) 表示能量 E ;
 - 计算频率 $(\omega, \omega_\theta, \omega_\phi)$, 在什么条件下运动是周期性的?
3. 考察一小振幅振荡的简单平面摆, 并假设它的长度 l 被绝热缩短, 即通过把弦从摆盘上的一个小洞拉上来。试证明振动的能量 E_{osc} 满足 $E_{\text{osc}}\sqrt{l}$ 保持不变, 即 E_{osc} 随着摆长的减少不断增加。
4. 一个质量为 m 的粒子在一维的无限深方势阱 $x \in (0, l)$ 中运动。
- 试证明壁面上受到的平均 (向外) 力为 $F = 2E/l$, 其中 E 为粒子的动能;
 - 假设 $x = l$ 处的壁绝热移动。粒子的能量随着它与运动壁的碰撞而改变。证明: $\delta E = -(2E/l)\delta l$;
 - 证明 El^2 为绝热不变量。

¹© 中国科学技术大学物理学院天文学系袁业飞