

中国科学技术大学物理学院

2019~2020 学年第一学期考试试卷

■ A 卷 □ B 卷

课程名称： 理论力学 课程代码：

开课院系： 物理学院 考试形式：闭卷

姓 名：_____ 学 号：_____ 专 业：_____

题 号	一	二	三	四	五	六			总 分
得 分									

(以下为试卷正文)

一、(20 分) 位于坐标原点具有磁荷 b 的磁单极子产生磁场, 其矢势在球坐标系 (r, θ, φ) 中可以表示为 $\vec{A} = \frac{b(1-\cos\theta)}{r \sin\theta} \vec{e}_\varphi$, 其中 \vec{e}_φ 为方位角的单位矢量。考虑一个电荷为 e 、质量为 m 的粒子在该磁场中的运动。

1. 写出球坐标系中该带电粒子的拉格朗日函数的具体表达式, 并找出至少两个独立的运动积分;
2. 在直角坐标系 (x, y, z) 中写下相应的哈密顿函数 H 以及关于第三个自由度 (z, p_z) 的哈密顿正则方程。

二、(10 分) 以向下为 x -轴的正方向, 讨论落体运动。

1. 设初始时刻的位移为 $x(t=0) = x_0$, 动量为 $p(t=0) = p_0$, 证明:

$$x(t), p(t) \rightarrow x_0, p_0$$

是正则变换。

2. 对此变换判断第三、第四种生成函数是否存在; 若存在, 则求出各生成函数表达式和哈密顿函数 $K(t, x_0, p_0)$ 。

三、(25 分) 质量为 m 的拉格朗日陀螺, 即重力场中绕定点转动的对称陀螺的三个主转动惯量为: $I_1 = I_2 \neq I_3$, 其中质心到固定点的距离为 l 。

1. 写出选取三个欧拉角作为广义坐标时的刚体的哈密顿函数 $H(\varphi, \theta, \psi, P_\varphi, P_\theta, P_\psi)$;
2. 通过哈密顿-雅可比方程求积分形式的哈密顿主函数 $S(\varphi, \theta, \psi, t; C_1, C_2, C_3)$, 其中 C_1, C_2, C_3 为运动积分。
3. 根据主函数 $S(\varphi, \theta, \psi, t; C_1, C_2, C_3)$, 试导出刚体积分形式的运动方程。

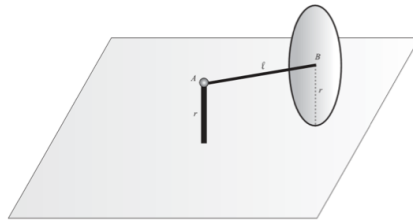
四、(25 分) 讨论质量为 m 的人造卫星围绕地球 (质量为 M) 作束缚态轨道运动。假设地球非球对称质量分布所引起的引力势为高阶小量 (一般作球谐函数展开), 显然卫星的轨道近似为椭圆。设卫星的轨道半长轴为 a , 引入无量纲化的卫星的角动量和 Runge-Lenz 矢量 (偏心率矢量):

$$\vec{J} = \frac{1}{\sqrt{GMa}} \vec{r} \times \vec{p}, \quad \vec{e} = \frac{1}{GM} \vec{p} \times (\vec{r} \times \vec{p}) - \frac{\vec{r}}{r}$$

试证明:

1. $[x_i, L_j] = \epsilon_{ijk} x_k; [p_i, L_j] = \epsilon_{ijk} p_k; [L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k$; 其中 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$;
2. $[j_i, j_j] = \frac{1}{\sqrt{GMa}} \epsilon_{ijk} j_k; [j_i, e_j] = \frac{1}{\sqrt{GMa}} \epsilon_{ijk} e_k; [e_i, e_j] = \frac{1}{\sqrt{GMa}} \epsilon_{ijk} j_k$ 。

五、(20 分) 如图所示, 质量为 m , 半径为 r 的匀质圆盘竖直放置于水平面上, 圆盘中心 B 通过长为 l 并垂直于盘面的轻杆光滑连接到固定点 A , A 点高出水平面的距离也为 r , 这样 AB 始终平行于水平面, 盘面始终保持竖直。当圆盘在水平面上作无滑动滚动时, 其中心 B 绕着 A 点作圆周运动。如果圆盘中心 B 围绕 A 点以大小为 ω_0 的角速度作匀速圆周运动, 求圆盘对水平面施加的力 (只需求出力的大小即可)。



附录：可能用到的公式

欧拉-拉格朗日方程： $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$ ；哈密顿正则方程： $\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$

泊松括号的定义： $[f(q_\alpha, p_\alpha; t), g(q_\alpha, p_\alpha; t)] \equiv \sum_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \right)$

总角速度 $\vec{\omega}$ 在本地坐标系（随动惯性系）中的分量：

$$\omega_x = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi ; \quad \omega_y = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi ; \quad \omega_z = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}$$

刚体运动的欧拉方程：

$$I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = N_1, \quad I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = N_2, \quad I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = N_3$$

正则变换（第一类母函数）：

$$dF_1(q, Q, t) = p dq - P dQ + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt$$

哈密顿-雅克比方程： $\frac{\partial}{\partial t} S(q_\alpha, t) + H\left(q_\alpha, \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, t\right) = 0$

$$S = -Et + W(q_\alpha) + A, \quad H\left(q_\alpha, \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}\right) = E$$

在笛卡尔坐标系 (x, y, z) ，柱坐标系 (r, ϕ, z) 以及球坐标系 (r, θ, ϕ) 中两点之间的距离分别为：

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$