期末考试参考答案与评分标准

题 1，25 分

（1） $L = L(r,\dot{r},\dot{\theta},\dot{z}) = \frac{n_0^2}{2}(1-a^2r^2)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$

$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = n_0^2(1-a^2r^2)\dot{z} = const$， 因为 z 是循环坐标。…… …… …… 2.5 分

$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = n_0^2(1-a^2r^2)r^2\dot{\theta} = const$，因为θ是循环坐标。…… …… …… 2.5 分

$H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_z\dot{z} = L = const$，因为拉格朗日量 L 不显含时间 t。…… …… …… 2.5 分

（2） $H = L(r,p_r,p_\theta,p_z) = \frac{p_r^2 + r^{-2}p_\theta^2 + p_z^2}{2n_0^2(1-a^2r^2)}$ 注意！哈密顿量是 p，q 的函数！ …… 2.5 分

$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{a^2r(p_r^2+p_z^2) + p_\theta^2(\frac{2a^2}{r} + \frac{1}{r^3})}{n_0^2(1-a^2r^2)}, \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{n_0^2(1-a^2r^2)}$ …… …… …… 5 分

$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0, \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{n_0^2r^2(1-a^2r^2)}$ …… …… …… 5 分

$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0, \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{n_0^2(1-a^2r^2)}$ …… …… …… 5 分

题 2，10 分

由泊松定理，

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{\partial \vec{K}}{\partial t} + [\vec{K}, H] = \vec{P} + [\vec{P}t - M\vec{r}_C, \sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + V(t,\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_N)]$$

$$= \vec{P} - [M\vec{r}_C, \sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i}] + [\vec{P}t, V(t,\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_N)]$$

$$= \vec{P} - [\sum_i m_i\vec{r}_i, \sum_j \frac{\vec{p}_j^2}{2m_j}] + t[\sum_i \vec{p}_i, V(t,\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_N)]$$

$$= \vec{P} - \sum_i \vec{p}_i + t\sum_i(-\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}) = t\sum_i(-\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i})$$

第一步：…… …… …… 3 分， 得到最后一步正确结果：…… …… …… 5 分

$\vec{K}$守恒即

$$\frac{d\vec{K}}{dt}=\vec{0}$$

$$\sum_i(-\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i})=\vec{0}$$

系统的合力之和为零。…… …… …… 2 分

题 3，20 分

（1）$H(\vec{r},\vec{p},t)=\frac{1}{2m}[\vec{p}-q\vec{A}(\vec{r},t)]^2+q\phi(\vec{r},t)$

$\dot{\vec{r}}=\frac{\partial H}{\partial \vec{p}}=\frac{\vec{p}-q\vec{A}}{m}, L(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)=\dot{\vec{r}}\cdot\vec{p}-H=\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2+q[\vec{A}(\vec{r},t)\cdot\dot{\vec{r}}-\phi(\vec{r},t)]$…… …… …… 5 分

（2）$\delta F_2(\vec{r},\vec{p}',t)=\vec{p}\cdot\delta\vec{r}+\vec{r}'\cdot\delta\vec{p}'\Rightarrow F_2(\vec{r},\vec{p}',t)=\vec{p}'\cdot\vec{r}-q\psi(\vec{r},t)+c$…… …… …… 5 分

因为 r 与 r′不独立，所以不存在 F1。…… …… …… 2 分

（3）$\tilde{H}(\vec{r}',\vec{p}',t)=H+\frac{\partial F_2}{\partial t}=\frac{1}{2m}[\vec{p}'-q\vec{A}'(\vec{r}',t)]^2+q\phi'(\vec{r}',t)$…… …… …… 6 分

因为正则方程解出来的运动方程相同，所以与 H 完全等价。…… …… …… 2 分

题 4，25 分

（1）$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{k}{r}, p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}, p_\theta=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\theta$…… …… 6 分

$I_r+I_\theta=\oint(p_r\dot{r}+p_\theta\dot{\theta})dt=2<T>\Delta t=-<V>\Delta t=\oint\frac{k}{r}dt$…… …… …… 5 分

其中 Δt 为一个周期。

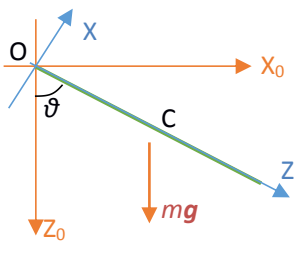
（2）$H=p_r\dot{r}+p_\theta\dot{\theta}-L=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\theta^2}{2mr^2}-\frac{k}{r}$…… …… …… 2 分

哈密顿雅可比方程 $E=\frac{1}{2m}(\frac{dW_r}{dr})^2+\frac{1}{2mr^2}(\frac{dW_\theta}{d\theta})^2-\frac{k}{r}$…… …… …… 2 分

分离变量法解得 $W_\theta=J\theta+A, W_r=\int\sqrt{2m(E+\frac{k}{r})-\frac{J^2}{r^2}}dr$…… …… …… 4 分

（3）$I_\theta=\oint p_\theta d\theta=\oint\frac{dW_\theta}{d\theta}d\theta=2\pi J$…… …… …… 3 分

$I_r=\oint p_r dr=\oint\frac{dW_r}{dr}dr=2\pi(k\sqrt{\frac{m}{2|E|}}-J)$…… …… …… 3 分



题 5，20 分

如图设置本体坐标系，角速度为 …… …… …… 2 分

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_{z0} = \omega\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_z - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_x\right)$$

应用平行轴定理，过 O 点的惯量张量分量为…… …… …… 3 分

$$I_{xx} = 2ma^2, \quad I_{yy} = \frac{3}{2}ma^2, \; I_{zz} = \frac{1}{2}ma^2, \; I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$$

重力力矩为…… …… …… 2 分

$$\boldsymbol{M} = \vec{OC} \times mg\boldsymbol{e}_{z0} = -\frac{\sqrt{3}}{2}mga\boldsymbol{e}_y$$

由欧拉动力学公式，有…… …… …… 5 分

$$-(I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x = M_y = -\frac{\sqrt{3}}{2}mga$$

(1)解得…… …… …… 3 分

$$\omega = \sqrt{\frac{4g}{3a}}$$

(2)角动量为…… …… …… 3 分

$$\boldsymbol{L} = I_{xx}\omega_x\boldsymbol{e}_x + I_{yy}\omega_y\boldsymbol{e}_y + I_{zz}\omega_z\boldsymbol{e}_z = ma^2\omega\left(-\sqrt{3}\boldsymbol{e}_x + \frac{1}{4}\boldsymbol{e}_z\right)$$

$$|\boldsymbol{L}| = ma^2\sqrt{\frac{4g}{3a}} \cdot \sqrt{3 + \frac{1}{4^2}} = \frac{7ma}{2}\sqrt{\frac{ag}{3}}$$

(3)圆环对 O 点的作用力…… …… …… 2 分

$$F_{z0} = mg$$

$$F_{x0} = m\omega^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{2\sqrt{3}}{3}mg$$