Hamilton 力学

一、Legendre 变换

1. 单变量函数的 Legendre 变换

曲线的另一种描述形式：曲线的切线簇的包络线;

设一光滑曲线 $y = f(x)$，对某一给定点 x_0，其切线斜率为 $u_0 = f'(x_0)$，设其切线在 y 轴上截距为 $-g_0$，则其切线方程可以写为

$$y = u_0 x - g_0$$

由于其过点 $(x_0, f(x_0))$，故有：

$$f(x_0) = u_0 x_0 - g_0$$

让该点动起来，就有：

$$g(x) = u(x)x - f(x) \tag{1.1.1}$$

其中 $u(x) = f'(x)$，若 $f''(x) \neq 0$，即 $f'(x)$ 具有反函数，可将 x 写成 u 的函数，则式(1.1.1)可以写为

$$g(u) \triangleq ux - f(x) \tag{1.1.2}$$

其中 x 通过 $u = f'(x)$ 写成 u 的函数 $x(u)$.

式(1.1.2)就称为 $f(x)$ 对自变量 x 的 **Legendre 变换**，由上述过程，Legendre 变换的条件为 $f''(x) \neq 0$，称为 **Hess 条件**

式(1.1.2)定义了一个新的函数 $g(u)$，若以 u 为斜率，$g(u)$ 为负截距作出一直线簇，该簇直线的包络线即为 $f(x)$ 确定的曲线，即不借助 $f(x)$，给出了曲线一种新的定义方式.$g(u)$ 和 $f(x)$ 在定义曲线的层面上是等价的.

新函数 $g(u)$ 的导数为

$$g'(u) = x + u\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = x \tag{1.1.3}$$

由此有 $g''(u) = x'(u) \neq 0$，故 g 也可以对 u 作 Legendre 变换：

$$xu - g(u) = f(x)$$

故 $f(x)$ 和 $g(u)$ 互为 Legendre 变换，也可以看出其等价性

2. 多变量函数对一个自变量的 Legendre 变换

设曲面 $z = f(x, y)$. 则 f 对 x 的 Legendre 变换为：

$$g(u, y) = ux - f(x, y)$$

其中 x 通过 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = u$ 写成 u, y 的函数 $x(u, y)$. 同样，$f(x, y)$ 与 $g(u, y)$ 互为 Legendre 变换

g 与对相同自变量的导数为：

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}x + u\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}$$

此时 u 和 y 是相互独立的自变量，故 $u'_y = 0$，则有：

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y} \tag{1.2.1}$$

3. 多变量函数对多个自变量的 Legendre 变换

设函数 $f(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n)$，其对 $x_1 \dots x_n$ 的 Legendre 变换为

$$g(u_1 \dots u_n, y_1 \dots y_n) = u_i x_i - f(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n)$$

其中 x_i 通过 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = u_i$ 写成 u, y 的函数 $x(u_1 \dots u_n, y_1 \dots y_n)$

Conclusion1：Legendre 变换

(1) 对新变量的偏导数等于老变量：$\dfrac{\partial g}{\partial u_i} = x_i$

(2) 新老函数对共同参数的偏导数：$\dfrac{\partial g}{\partial y_i} = -\dfrac{\partial f}{\partial y_i}$

二、Hamilton 方程

1.Hamilton 函数 (Hamilton 量/Hamiltonian)

Lagrange 函数的一般形式可以写成广义速度的二次多项式：

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{1}{2} A_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + B_i\dot{q}_i + C \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

其中 $A_{ij} = m\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j}$ 为正定对称矩阵，由式(2.1.1)知

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{1}{2} A_{ij}\delta_{ik}\dot{q}_j + \frac{1}{2} A_{ij}\dot{q}_i\delta_{jk} + B_i\delta_{ik} \\ &= A_{kj}\dot{q}_j + B_k \end{aligned}$$

故 $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_m} = A_{km}$，即

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_m}\right) = \det A > 0$$

故 Lagrange 函数满足 Hess 条件，可以对广义速度进行 Legendre 变换：

$$H(q, p, t) = p_k\dot{q}_k - L(q, \dot{q}, t)$$

其中，$\dot{q}_k$ 通过 $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k$ 写成 q, p, t 的函数 $\dot{q}_k(q, p, t)$

函数 H 就称为体系的 **Hamilton 函数**，其与 Lagrange 函数等价

从形式上看 Hamilton 函数 $H(q, p, t)$ 等于 Jacobi 积分 $h(q, \dot{q}, t)$，故有

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

二者的区别在对自变量的依赖不同

2.Hamilton 函数的一般形式

Lagrange 函数的一般形式为：

$$L = \frac{1}{2}A_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + B_i\dot{q}_i + C$$

则有 $p = A\dot{q} + B$. 由 Lagrange 力学的内容可知，Jacobi 积分等与 Lagrange 函数的二次项减零次项：

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\dot{q}^T A\dot{q} - C \\ &= \frac{1}{2}(q - B)^T A^{-1}(q - B) - C \end{aligned}$$

由 Lagrange 力学的内容知，若变换方程 $r = r(q, t)$ 不显含时间 t，则 Jacobi 为体系能量；同理，Hamilton 函数也为体系能量，即：

$$H(q, p, t) = T(q, \dot{q}) + U(q, t)$$

3.Hamilton 方程

由式(1.1.3)知：

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k \tag{2.3.1}$$

由式(1.2.1)知：

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_k} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

由 Euler-Lagrange 方程有：

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_k} = -\dot{p}_k \tag{2.3.2}$$

式(2.3.1)(2.3.2)称为 **Hamilton 方程**. 由此可知：

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_k}\dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{2.3.3}$$

即 Hamilton 函数不显含时间 t 时，Hamilton 函数守恒

Conclusion2：Hamiltonian/Hamilton's equations

(1)Hamiltonian 由 Lagrange 函数对 $\dot{q}$ 作 Legendre 变换得到：$(q,\dot{q},t)\to(q,p,t)$

(2)Hamiltonian 在形式上等于 Jacobi 积分，当变换方程 $r=r(q,t)$ 不显含时间 t 时，其等于体系能量 (不一定是守恒量)

(3)Hamiltonian 不显含时间时，其为守恒量

例 2.1：平方反比力场中粒子的 Hamiltonian

解：Lagrange 函数为：

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2)-U(r)$$

广义动量为：

$$\begin{aligned}p_r&=\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}=m\dot{r}\\p_\theta&=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}\\p_\phi&=\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}=mr^2\sin^2\theta\dot{\phi}\end{aligned}$$

则有：

$$H=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\theta^2}{2mr^2}+\frac{p_\phi^2}{2mr^2\sin^2\theta}+U(r)$$

$\star$ 在球坐标系下有：角动量 $l^2=p_\theta^2+\dfrac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}$

例 2.2：写出带电粒子在电磁场运动的 Hamilton 函数，并证明

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=e\boldsymbol{E}+e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

解：直角坐标系下带电粒子的 Lagrange 函数为：

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}_i+e\dot{x}_iA_i-e\varphi$$

对 $\dot{x}_i$ 作 Legendre 变换有：

$$H=\frac{(p_i-eA_i)^2}{2m}+e\varphi$$

Hamilton 方程：

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{p_k - eA_k}{m}$$
$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k} = \frac{e(p_i - eA_i)}{m}\frac{\partial A_i}{\partial x_k} - e\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$$

由 Hamilton 方程有：

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_k &= -e(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{\partial A_k}{\partial t}) + e\dot{x}_i(\frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i}) \\ &= eE_k + e(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})_k \end{aligned}$$

三、Hamilton 体系

1.Hamilton 方程的动力学含义

已知 t 时刻相空间的状态 $q(t), p(t)$，由 Hamilton 方程可以确定之后任意时刻的状态：

$$q_k(t+\varepsilon) = q_k(t) + \varepsilon\dot{q}_k(t) = q_k(t) + \varepsilon\frac{\partial H}{\partial p_k}|_t$$
$$p_k(t+\varepsilon) = p_k(t) + \varepsilon\dot{p}_k(t) = p_k(t) - \varepsilon\frac{\partial H}{\partial q_k}|_t$$

故 Hamilton 函数蕴含着相空间中的运动状态信息，Hamilton 方程给出了 (q,p) 的演化，Hamilton 函数 +Hamilton 方程在相空间中确定了一个速度场.(q,p) 地位对等，故 Hamilton 方程也称正则方程

2.Hamilton 体系

约定 $\xi = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$，即 $\xi_i = q_i, \xi_{s+i} = p_i$，正则方程可以写为：

$$\dot{\xi} = \Omega\frac{\partial H}{\partial \xi} \tag{3.2.1}$$

其中：

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0_{s\times s} & I_{s\times s} \\ -I_{s\times s} & 0_{s\times s} \end{pmatrix}$$

可以看出 $\Omega^T\Omega = I_{2s\times 2s}$

上述已知 Hamilton 函数 +Hamilton 方程在相空间中确定了一个速度场，现在任意给定一状态参量的函数 $H(\xi,t)$ 都可以按照正则方程的形式生成一矢量场——**Hamilton 矢量场**，也就是相空间中的速度场：

$$\Delta_H(\xi,t) \triangleq \Omega\frac{\partial H}{\partial \xi}$$

$\Delta_H(\xi,t)$ 作为相空间中的速度场，这样的体系就叫做 $H(\xi,t)$ 生成的 **Hamilton 体系**，这里的 $H(\xi,t)$ 不必是某个 Lagrange 函数的 Legendre 变换，拓宽了 Hamilton 力学研究的范围

给定一 Hamilton 函数可以生成一个速度场，即 Hamilton 体系，但给定一个速度场 $X(\xi,t)$，不一定是 Hamilton 体系，若其是 Hamilton 体系应该有：

$$Y = \Omega X = -\frac{\partial H}{\partial \xi} \tag{3.2.2}$$

即 Y 是一个无旋场，满足：

$$\partial_\alpha Y_\beta = \partial_\beta Y_\alpha \tag{3.2.3}$$

将 $Y_\beta = \Omega_{\beta\gamma}X_\gamma$ 代入式(3.2.3)有：

$$\Omega_{\beta\gamma}\frac{\partial X_\gamma}{\partial \xi_\alpha} = \Omega_{\alpha\gamma}\frac{\partial X_\gamma}{\partial \xi_\beta}$$

接下来有：

$$\begin{aligned}\Omega_{\alpha\rho}\Omega_{\beta\sigma}\Omega_{\beta\gamma}\frac{\partial X_\gamma}{\partial \xi_\alpha} &= \Omega_{\alpha\rho}\Omega_{\beta\sigma}\Omega_{\alpha\gamma}\frac{\partial X_\gamma}{\partial \xi_\beta}\\ \Rightarrow \Omega_{\rho\alpha}\frac{\partial X_\sigma}{\partial \xi_\alpha} &= \Omega_{\sigma\alpha}\frac{\partial X_\rho}{\partial \xi_\alpha}\end{aligned}$$

令 $D_\rho = \Omega_{\rho\alpha}\dfrac{\partial}{\partial \xi_\alpha}$，则 Hamilton 体系的判据可以写为：

$$D_\rho X_\sigma = D_\sigma X_\rho \tag{3.2.4}$$

(其实就是 Piossion 括号)

⋆3. 相空间中的 Hamilton 原理

相空间中两点 ξ_1 和 ξ_2 的真实路径可以通过如下作用量取驻值路径给出：

$$\widetilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} \widetilde{L}(\xi, \dot{\xi}, t)\mathrm{d}t \tag{3.3.1}$$

其中 $\widetilde{L}(\xi, \dot{\xi}, t) = \dot{q}_k p_k - H(q, p, t)$ 但其并不是 Hamiltonian 对广义动量的 Legendre 变换，其中的 $\widetilde{L}$ 是 $(q, p, \dot{q}, \dot{p})$ 的函数称其为相空间中的 Lagrange 函数. 两点之间的可能路径要求端点相同，即：

$$\delta\xi_\alpha(t_1) = \delta\xi_\alpha(t_2) = 0$$

作用量取驻值意味着一节变分为零：

$$\begin{aligned}
\delta\widetilde{S} &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\xi_i}\delta\xi_i + \frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{\xi}_i}\delta\dot{\xi}_i \mathrm{d}t = 0 \\
\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} &\left(\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\xi_i}\delta\xi_i - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{\xi}_i}\delta\xi_i\right)\mathrm{d}t + \underbrace{\boxed{\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{\xi}_i}\delta\xi_i\Big|_{t_1}^{t_2}}}_{\delta\xi_\alpha(t_1) = \delta\xi_\alpha(t_2) = 0 \Rightarrow \text{值为 } 0} = 0 \\
\Rightarrow \frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\xi_i} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{\xi}_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, 2s)
\end{aligned}$$

令 $\xi_i = q_k$ 则有：

$$\underbrace{\boxed{\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial q_k}}}_{\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial q_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\boxed{\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{q}_k}}}_{\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{q}_k} = p_k}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k$$

令 $\xi_i = p_k$ 则有：

$$\boxed{\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial p_k}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boxed{\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{p}_k}}$$

$$\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial p_k} = \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \qquad \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{p}_k} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k$$

这就给出了正则方程. 其中，相空间中的 Lagrange 函数不显含 $\dot{p}$，故 $p(t)$ 这一半路径端点条件不必满足，端点处的变分可以不为零，这样也可以通过变分原理挑出真实路径，但是把这一可有可无的条件加上，就可以定义 Lagrange 函数的规范不变性：加减某个函数对时间的全导数，对 Lagrange 量积分的作用量相差常数. 设规范函数为 $F(\xi, t)$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}F(\xi,t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = F(\xi,t)|_{t_1}^{t_2} = \mathrm{const}$$

这里的常数是指 $F(\xi(t_2), t_2) - F(\xi(t_1), t_1)$ 是一个与路径无关的常数，每个 $\xi_\alpha(t)$ 都有很多不同的选择，限制住端点相等，就保证了 $\xi_\alpha(t_1)$ 和 $\xi_\alpha(t_2)$ 不随路径改变，即 $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}F(\xi,t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$ 不随泛函宗量而改变，令

$$L' = L + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$$

则 L' 定义的作用量取驻值时，L 定义的作用量也取驻值，通过变分原理找到的路径也相同

Conclusion3：Hamilton 体系

(1)Hamilton 函数蕴含的动力学信息

(2)Hamilton 函数按照正则方程的形式在相空间中生成一速度场，相空间中的运动遵循此速度场的体系即为 Hamilton 体系

(3)Hamilton 体系的判断，数学上就是能否找到标量势函数描述某矢量场

例 3.1：单自由度体系在相空间中的运动由以下速度场确定：

$$\dot{q} = p, \dot{p} = aq + bp$$

a, b 均不为零. 判断该体系是否为 Hamilton 体系

解：若为 Hamilton 体系，则存在 H，使得

$$\frac{\partial H}{\partial p} = p$$
$$\frac{\partial H}{\partial q} = -aq - bp$$

成立，由第一式：$\dfrac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = 0$，由第二式：$\dfrac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = -b$，故找不到合适的 H，使得上述矢量场为 H 生成的 Hamilton 矢量场，不是 Hamilton 体系

四、Poisson 括号

1.Poisson 括号定义

Poisson 括号定义在偶数维空间上，两个力学量之间的 Poisson 括号定义为：

$$[f, g]_\xi \triangleq \frac{\partial f}{\partial \xi_\alpha} \Omega_{\alpha\beta} \frac{\partial g}{\partial \xi_\beta} = \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \tag{4.1.1}$$

此时以 $\xi = (q, p)$ 作为正则变量，若以 $\eta = (Q, P)$ 作为正则变量：

$$[f, g]_\eta = \frac{\partial f}{\partial \eta_\alpha} \Omega_{\alpha\beta} \frac{\partial g}{\partial \eta_\beta}$$

不一定等于 $[f, g]_\xi$，故括号通过下标区分

2.Poisson 括号的数学性质

(1) 反对称性

$$[f, g] = -[g, f] \tag{4.2.1}$$

(2) 双线性性

$$[f, ag + bh] = a[f, g] + b[f, h] \tag{4.2.2}$$

(3)Jacobi 恒等式

$$[f, [g, h]] + [h, [f, g]] + [g, [h, f]] = 0 \tag{4.2.3}$$

(4)Leibniz 法则

$$[f,gh]=g[f,h]+h[f,g] \tag{4.2.4}$$

(5) 链式法则

$$[f,g(h)]=\frac{\partial g}{\partial h}[f,h] \tag{4.2.5}$$

(6) 对参数的偏导数

$$\partial_t[f,g]=[\partial_t f,g]+[f,\partial_t g] \tag{4.2.6}$$

以上性质都可以通过定义得到

$\star$**(7) 基本 Poisson 括号**

$$[\xi_\alpha,\xi_\beta]_\xi=\varOmega_{\alpha\beta}$$

则 $[q_i,p_j]=\delta_{ij}=-[p_i,q_j]$，更一般地，有：$[f(q),g(q)]=[h(p),m(p)]=0$

3.Poisson 括号在 Hamilton 体系的应用

(1) 力学量随时间的变化

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f(\xi,t)}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial f}{\partial \xi_i}\dot{\xi}_i+\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial \xi_i}\Omega_{ij}\frac{\partial H}{\partial \xi_j}+\frac{\partial f}{\partial t}\\&=[f,H]+\frac{\partial f}{\partial t}\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

若力学量不显含时间 t，且力学量与 Hamilton 函数的 Poisson 括号为 0，则该力学量守恒，Poisson 括号给出了判断守恒量的方式

(2) 力学量的 Taylor 展开

设力学量 $f(\xi)$ 不显含时间 (但是 ξ 是时间的函数)，在 $t=0$ 处的 Taylor 展开为：

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left(\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}t^n}\right)_{t=0}$$

由式(4.3.1)有：$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=[f,H]$，力学量 $[f,H]$ 也不显含时间，故：

$$\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}t^2}=[[f,H],H]$$

则力学量的展开可以用 Poisson 括号表示为

$$f=f_0+[f,H]_{t=0}t+\frac{1}{2!}[[f,H],H]_{t=0}t^2+\frac{1}{3!}[[[f,H],H],H]_{t=0}t^3+\cdots \tag{4.3.2}$$

(3)Poisson 定理

两个力学量作 Poisson 括号会给出新的力学量，该力学量对时间求全导数有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f,g] = \partial_t[f,g] + [[f,g],H] = [\partial_t f,g] + [f,\partial_t g] + \boxed{[[f,g],H]}$$

由 Jacobi 恒等式：$= [f,[g,H]] + [[f,H],g]$

$$\begin{aligned} &= [\partial_t f + [f,H], g] + [f, \partial_t g + [g,H]] \\ &= [\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}, g] + [f, \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}] \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

通过此定理可以将两个守恒量作 Poisson 括号得到新的守恒量，提供了一种构建守恒量的方式，但是构造出来的守恒量不一定与原有守恒量独立

由 Poisson 定理知，Poisson 括号对时间的求导形式类似于乘积的求导，则由 Leibniz 法则可类比

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}[f,g] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k [f^{(k)}, g^{(n-k)}] = \sum_{k+l=n} \frac{n!}{k!l!}[f^{(k)}, g^{(l)}] \tag{4.3.4}$$

4.Poisson 括号判断 Hamilton 体系

由式(3.2.4)有

$$\begin{aligned} &[\xi_\alpha, X_\beta] = [\xi_\beta, X_\alpha] \\ \Rightarrow &[\xi_\alpha, \dot{\xi}_\beta] + [\dot{\xi}_\alpha, \xi_\beta] = 0 \end{aligned}$$

例如对单自由度体系，判断是否为 Hamilton 体系的条件为：

$$[q,\dot{p}] + [\dot{q},p] = 0$$

Conclusion4：Poisson 括号

(1) 定义

(2) 数学性质：$\star$ 基本 Poisson 括号

(3) 应用：判断/构造守恒量，判断 Hamilton 体系，对力学量 Taylor 展开

五、正则变换

1.p 正则变换的定义

以 $\xi=(q,p)$ 作为正则变量，任意给定一 H 生成一 Hamilton 体系，现在用另一组变量 $\eta=\eta(\xi)$，若此时该体系仍为 Hamilton 体系，则称该变换对该 H 是类正则的，若对任意的 H，经过该变换都为 Hamilton 体系，则称其为正则变换

由于 ξ 和 η 都可作为正则变量，故正则变换是可逆的

$$\det(M)=\det(\frac{\partial\eta_\alpha}{\partial\xi_\beta})\neq 0$$

2. 判断正则变换的条件

首先定义一个力学量 $\Lambda_{\alpha\beta}$

$$\Lambda_{\alpha\beta}\triangleq[\xi_\alpha,\xi_\beta]_\eta=\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial\eta_\rho}\Omega_{\rho\sigma}\frac{\partial\xi_\beta}{\partial\eta_\sigma}\tag{5.2.1}$$

设该变换为正则的，则由式(4.3.1)(4.3.3)有：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Lambda_{\alpha\beta}}{\mathrm{d}t}&=[\Lambda_{\alpha\beta},H]_\xi+\frac{\partial\Lambda_{\alpha\beta}}{\partial t}\\\frac{\mathrm{d}\Lambda_{\alpha\beta}}{\mathrm{d}t}&=[\dot\xi_\alpha,\xi_\beta]_\eta+[\xi_\alpha,\dot\xi_\beta]_\eta\\\Rightarrow&[\dot\xi_\alpha,\xi_\beta]_\eta+[\xi_\alpha,\dot\xi_\beta]_\eta=[\Lambda_{\alpha\beta},H]_\xi+\frac{\partial\Lambda_{\alpha\beta}}{\partial t}\end{aligned}\tag{5.2.2}$$

若变换是正则的，则式(5.2.2)对任意的 H 都成立

若 $H=\mathrm{const}$，则由正则方程有 $\dot\xi_\alpha=0,[\Lambda_{\alpha\beta},H]_\eta=0\Rightarrow\partial_t\Lambda_{\alpha\beta}=0$ 即该力学量不显含时间，式(5.2.2)改写为

$$[\dot\xi_\alpha,\xi_\beta]_\eta+[\xi_\alpha,\dot\xi_\beta]_\eta=[\Lambda_{\alpha\beta},H]_\xi\tag{5.2.3}$$

若 $H=C_\gamma\xi_\gamma$，则 $\dot\xi_\alpha=C_\gamma[\xi_\alpha,\xi_\gamma]_\xi=C_\gamma\Omega_{\alpha\gamma}=\mathrm{const}$，则有 $[\Lambda_{\alpha\beta},H]_\xi\equiv 0$ 式(5.2.3)改写为

$$[\dot\xi_\alpha,\xi_\beta]_\eta+[\xi_\alpha,\dot\xi_\beta]_\eta=0\tag{5.2.4}$$

若 $H=\dfrac{1}{2}C_{\rho\sigma}\xi_\rho\xi_\sigma$，则

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_\alpha &= C_{\rho\sigma}[\xi_\alpha,\frac{1}{2}\xi_\rho\xi_\sigma]_\xi=\frac{1}{2}C_{\rho\sigma}\xi_\sigma[\xi_\alpha,\xi_\rho]_\xi+\frac{1}{2}C_{\rho\sigma}\xi_\rho[\xi_\alpha,\xi_\sigma]_\xi\\ &=\frac{1}{2}C_{\rho\sigma}\xi_\sigma\Omega_{\alpha\rho}+\frac{1}{2}C_{\rho\sigma}\xi_\rho\Omega_{\alpha\sigma}=C_{\rho\sigma}\xi_\sigma\Omega_{\alpha\rho}\end{aligned}$$

则式(5.2.4)可以写为

$$\begin{aligned}&[\dot{\xi}_\alpha,\xi_\beta]_\eta+[\xi_\alpha,\dot{\xi}_\beta]_\eta=C_{\rho\sigma}\Omega_{\alpha\rho}[\xi_\sigma,\xi_\beta]_\eta+C_{\rho\sigma}\Omega_{\beta\rho}[\xi_\alpha,\xi_\sigma]_\eta=0\\ &\Rightarrow C_{\rho\sigma}\Omega_{\alpha\rho}\Lambda_{\sigma\beta}+C_{\rho\sigma}\Omega_{\beta\rho}\Lambda_{\alpha\sigma}=0\\ &\Rightarrow \Omega C\Lambda+\Lambda C^T\Omega^T=0\\ &\Rightarrow \Omega C\Lambda=\Lambda C\Omega(\text{左乘 }\Omega\text{，右乘 }\Omega)\\ &\Rightarrow C\Lambda\Omega=\Omega\Lambda C(\text{令 }C=I\text{，则 }\Lambda,\Omega\text{ 可交换})\\ &\Rightarrow C(\Omega\Lambda)=(\Omega\Lambda)C\\ &\Rightarrow \Omega\Lambda=-aI\\ &\Rightarrow \Lambda=a\Omega\end{aligned}\tag{5.2.5}$$

则，若变换是正则变换，则一定有式(5.2.5)成立，它代表基本 Poisson 括号的不变性. 下证满足该条件的变换一定是正则变换：力学量 $f(\xi,t),g(\xi,t)$ 在新坐标作为正则变量下的 Poisson 括号为

$$[f,g]_\eta=\frac{\partial f}{\partial\xi_\alpha}[\xi_\alpha,\xi_\beta]_\eta\frac{\partial g}{\partial\xi_\beta}=a\frac{\partial f}{\partial\xi_\alpha}\Omega_{\alpha\beta}\frac{\partial g}{\partial\xi_\beta}=a[f,g]_\xi$$

两边对时间求全导数：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f,g]_\eta &= a[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t},g]_\xi+a[f,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}]_\xi\\ &=[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t},g]_\eta+[f,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}]_\eta\end{aligned}$$

正式 Poisson 定理的形式，Poisson 定理只在 Hamilton 体系成立，故变量换为 $\eta=\eta(\xi,t)$ 后依然是 Hamilton 体系.

由上述讨论可知，一般正则变换的充分必要条件为式(5.2.5)

一般正则变换也可以由辛条件判断：定义变换的 Jacobi 矩阵

$$M_{\alpha\beta} \triangleq \frac{\partial\eta_\alpha}{\partial\xi_\beta} \tag{5.2.6}$$

则力学量 $\Lambda_{\alpha\beta}$ 可以写为

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \frac{\partial\xi_\alpha}{\partial\eta_\rho}\Omega_{\rho\sigma}\frac{\partial\xi_\beta}{\partial\eta_\sigma} = [M^{-1}\Omega(M^T)^{-1}]_{\alpha\beta}$$

则式(5.2.5)可以写为

$$\begin{aligned} & M^{-1}\Omega(M^T)^{-1} = a\Omega \Rightarrow M^{-1} = a\Omega M^T\Omega^T \\ \Rightarrow & MM^{-1} = aM\Omega M^T\Omega^T \text{ 或 } M^{-1}M = a\Omega M^T\Omega^T M \\ \Rightarrow & \Omega = aM\Omega M^T \text{ 或 } \Omega = aM^T\Omega M \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

当 $a=1$ 时，式(5.2.7)称为辛条件，满足此条件的 M 称为辛矩阵

将第一个式子展开写：

$$\Omega_{\alpha\beta} = (aM\Omega M^T)_{\alpha\beta} = a\frac{\partial\eta_\alpha}{\partial\xi_\rho}\Omega_{\rho\sigma}\frac{\partial\eta_\beta}{\partial\xi_\sigma} = [\eta_\alpha, \eta_\beta]_\xi \tag{5.2.8}$$

式(5.2.8)也可以作为一般正则变换的条件

3. 受限正则变换的判断

当 $a=1$ 时称作首先正则变换，一般说的正则变换都指此受限正则变换，由第二节可知，正则变换的条件为：

(1)Poisson 括号的不变性

$$[\xi_\alpha, \xi_\beta]_\eta = [\eta_\alpha, \eta_\beta]_\xi = \Omega_{\alpha\beta} \tag{5.3.1}$$

$$[f, g]_\xi = [f, g]_\eta \tag{5.3.2}$$

(2) 辛条件

$$M\Omega M^T = \Omega \text{ 或 } M^T\Omega M = \Omega \tag{5.3.3}$$

(3) 可积条件

存在函数 $F(\xi,t)$

$$p_k\delta q_k - P_i\delta Q_i = \delta F(q,p,t) \tag{5.3.4}$$

其中 $F(q,p,t)$ 称为生成函数. 可以证明，该可积条件与辛条件等价

又 $\delta Q_i = \dfrac{\partial Q_i}{\partial q_k}\delta q_k + \dfrac{\partial Q_i}{\partial p_k}\delta p_k$，$\delta F = \dfrac{\partial F}{\partial q_k}\delta q_k + \dfrac{\partial F}{\partial p_k}\delta p_k$，则式(5.3.4)可以写为

$$(p_k - P_i\frac{\partial Q_i}{\partial q_k})\delta q_k - P_i\frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\delta p_k = \frac{\partial F}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial F}{\partial p_k}\delta p_k \tag{5.3.5}$$

则可积条件实际上是存在 F 使得下式成立

$$\begin{aligned} p_k - P_i\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} &= \frac{\partial F}{\partial q_k} \\ -P_i\frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\delta p_k &= \frac{\partial F}{\partial p_k} \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

4. 正则变换的数学物理推论

(1) 数学性质

对辛条件两边取行列式可得 $|\det(M)| = 1$，事实上，辛矩阵的行列式只能取 1(见本节最后). 由辛矩阵的定义可以看出，若 M 是辛矩阵，则 M^{-1} 也为辛矩阵，若 M_1 M_2 为辛矩阵，则乘积 M_1M_2 也为辛矩阵. 前者指正则变换的逆变换为正则变换，后者说的是正则变换的复合也是正则变换

以 $\xi = (q,p)$ 作正则变量，相空间中一确定区域的体积为

$$\int \mathrm{d}\xi_1\cdots\mathrm{d}\xi_{2s}$$

正则变换后的变量为 $\eta = (Q,P)$，变换前后的区域是一一对应的，则上述区域在变换后的相空间中的体积为

$$\int \mathrm{d}\eta_1\cdots\mathrm{d}\eta_{2s}$$

两体积的关系为

$$\int \mathrm{d}\eta_1\cdots\mathrm{d}\eta_{2s} = \int |\det(M)|\mathrm{d}\xi_1\cdots\mathrm{d}\xi_{2s} = \int \mathrm{d}\xi_1\cdots\mathrm{d}\xi_{2s} \tag{5.4.1}$$

故正则变换不改变相空间中的体积

(2)Hamilton 体系的演化与正则变换

设 t 时刻由 $H(\xi,t)$ 生成的体系的状态为 $\xi(t)$，过了时间 τ 后，体系变成 $\xi(t+\tau)$ 则有：

$$\xi_\alpha(t+\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau^n}{n!}\Big(\frac{\mathrm{d}^n\xi_\alpha}{\mathrm{d}t^n}\Big)_t$$

定义：

$$\eta_\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau^n}{n!}\Big(\frac{\mathrm{d}^n\xi_\alpha}{\mathrm{d}t^n}\Big)_t$$

将 Hamilton 体系随时间的演化看作是从 ξ 到 η 的变换，事实上，该变换即为正则变换

$$\begin{aligned}[\eta_\alpha,\eta_\beta]_\xi&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\tau^{k+l}}{k!l!}[\xi_\alpha^{(k)},\xi_\beta^{(l)}]_\xi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau^n}{n!}\sum_{k+l=n}\frac{n!}{k!l!}[\xi_\alpha^{(k)},\xi_\beta^{(l)}]_\xi\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}[\xi_\alpha,\xi_\beta]_\xi=\varOmega_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

则 Hamilton 体系随时间的演化可以看作正则变换

(3)Liouville 定理

设想相空间内有一块区域，该区域随着时间在不断演化，由于 Hamilton 体系随时间演化为正则变换，正则变换又不改变体积，故某块确定区域在相空间中随时间演化的过程中保持体积不变

$$\varGamma=\int\mathrm{d}\xi_1\cdots\mathrm{d}\xi_{2s}=\mathrm{const}$$

该结论称为 **Liouville 体积定理**

设想某块确定区域中分布有 N 个相点，在体积 $\varDelta\varGamma(\xi,t)$ 中分布有 $\varDelta N(\xi,t)$ 个相点，则可以定义数密度 n

$$n\triangleq\frac{\varDelta N(\xi,t)}{\varDelta\varGamma(\xi,t)}=n(\xi,t)$$

满足

$$\int n \mathrm{d}\xi_1 \cdots \mathrm{d}\xi_{2s} = N$$

令 $\rho(\xi, t) = \dfrac{n}{N}$ 为归一化的数密度——态密度函数，满足

$$\int \rho \mathrm{d}\xi_1 \cdots \mathrm{d}\xi_{2s} = 1$$

在随时间演化的过程中，区域内的相点不会进出该正则区域，若有相点进出，则必然在某时刻 t 会与区域边界上的相轨迹相交，这是不允许的，故随时间演化过程中，正则区域内的相点数目不变. 又由于正则区域体积不变，故 $\rho(\xi, t)$ 不变，是运动常数，这就是 **Liouville 定理**

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{5.4.2}$$

即已知 t_0 时，ξ_0 处的态密度 ρ_0，则之后 ξ_0 演化为 ξ，在此处的态密度也为 ρ_0

将式(5.4.2)利用 Poisson 括号写为

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = [\rho, H]_\xi + \partial_t \rho = 0 \\
\Rightarrow &\frac{\partial \rho}{\partial \xi_\alpha} \Omega_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial \xi_\beta} + \partial_t \rho = 0 \\
\Rightarrow &\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} (\rho \Omega_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial \xi_\beta}) - \boxed{\rho \Omega_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 H}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta}} + \partial_t \rho = 0
\end{aligned}$$

$\alpha\beta$ 指标在分母上对称，在 Ω 上反对称，故该项为 0

$$\Rightarrow \partial_\alpha J_\alpha + \partial_t \rho = 0 \tag{5.4.3}$$

其中 $J_\alpha = \rho \Omega_{\alpha\beta} \dfrac{\partial H}{\partial \xi_\beta} \Rightarrow J = \rho \Omega \dfrac{\partial H}{\partial \xi} = \rho \varDelta_H$ 则式(5.4.3)可写为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \partial_t \rho = 0 \tag{5.4.4}$$

正是连续性方程的形式

5. 新 Hamilton 函数

设正则变换 $\xi \to \eta = \eta(\xi, t)$ 则有

$$\dot{\eta_\alpha} = [\eta_\alpha, H]_\xi + \partial_t \eta_\alpha = [\eta_\alpha, H]_\eta + \partial_t \eta$$

若正则变换不显含 t，则有 $\dot{\eta}_\alpha = [\eta_\alpha, H]_\eta$ 此时把 H 中的 ξ 都用 η 表示出来就是新的 Hamilton 函数

对于一般的情况，通过相空间的 Hamilton 原理寻找新 Hamilton 函数

在 ξ 相空间中有

$$\delta \int \widetilde{L}_H(\xi, \dot{\xi}, t)\mathrm{d}t = 0 \tag{5.5.1}$$

其中 $\widetilde{L}_H = \dot{q}_k p_k - H$

在 η 相空间中有

$$\delta \int \widetilde{L}_K(\eta, \dot{\eta}, t)\mathrm{d}t = 0 \tag{5.5.2}$$

其中 $\widetilde{L}_K = \dot{Q}_k P_k - K$. 式(5.5.1)和(5.5.2)相减有

$$\delta \int \widetilde{L}\mathrm{d}t = 0 \tag{5.5.3}$$

其中 $\widetilde{L} = (K - H) + (\dot{q}_k p_k - \dot{Q}_k P_k)$，将 Q_i 展开写得到

$$\widetilde{L} = (K - H) - \frac{\partial Q_i}{\partial t} P_i + (p_k - \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} P_i)\dot{q}_k - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} P_i \dot{p}_k \tag{5.5.4}$$

则由式(5.3.6)得到

$$\widetilde{L} = K - H - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial Q_k}{\partial t} P_k + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$$

最后一个全导数项对于 Lagrange 函数来说可以省略，即

$$\widetilde{L}' = K - H - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial Q_k}{\partial t} P_k$$

$\widetilde{L}'$ 满足 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial \widetilde{L}'}{\partial \xi_\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \widetilde{L}'}{\partial \dot{\xi}_\alpha}$$

显然等号右侧为 0，故 $\widetilde{L}'$ 只是时间的函数 $f(t)$，不妨令其为 0，我们就找到了新的 Hamilton 函数

$$K = H + \frac{\partial Q_k}{\partial t} P_k + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{5.5.5}$$

总的来讲，判断正则变换的条件和新 Hamilton 函数的确定可以用一个式子表达：**正则变换可以使相空间中 Lagrange 函数规范不变！**

$$\widetilde{L}_H - \widetilde{L}_K = \frac{\mathrm{d}F(\xi, t)}{\mathrm{d}t} \tag{5.5.6}$$

即

$$(K - H) + (\dot{q}_k p_k - \dot{Q}_k P_k) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \tag{5.5.7}$$

两边同乘 $\mathrm{d}t$

$$(K - H)\mathrm{d}t + (p_k \mathrm{d}q_k - P_k \mathrm{d}Q_k) = \mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k + \frac{\partial F}{\partial p_k}\mathrm{d}p_k + \frac{\partial F}{\partial t}\mathrm{d}t$$

将 $\mathrm{d}Q_k$ 展开写后，$\mathrm{d}t$ 前的系数相等给出新 Hamilton 函数，其余给出正则变换的可积条件

⋆⋆6. 正则变换的分类

正则变换可以由变换的 Jacobi 矩阵来分类，该矩阵为：

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} & \cdots & \dfrac{\partial \eta_1}{\partial \xi_{2s}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \eta_{2s}}{\partial \xi_1} & \cdots & \dfrac{\partial \eta_{2s}}{\partial \xi_{2s}} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c:c} \dfrac{\partial Q}{\partial q} & \dfrac{\partial Q}{\partial p} \\ \hdashline \dfrac{\partial P}{\partial q} & \dfrac{\partial P}{\partial p} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} III & I \\ \hdashline IV & II \end{array}\right)$$

若部分 I 的矩阵块非奇异，即 $\det(\dfrac{\partial Q_i}{\partial p_j}) \neq 0$，则此时 p 可以用 q, Q 表示出来，即此时独立变量是 q, Q，p, P 可以用独立变量表示

(1) 第一类正则变换

矩阵块 I 非奇异的情况下即为第一类正则变换，此时，q, Q 为独立变量，生成函数为 $F_1 = F_1(q, Q, t)$，由式(5.5.7)可知

$$(K - H)\mathrm{d}t + (p_k \mathrm{d}q_k - P_k \mathrm{d}Q_k) = \frac{\partial F_1}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k + \frac{\partial F_1}{\partial Q_k}\mathrm{d}Q + \frac{\partial F_1}{\partial t}\mathrm{d}t$$

由此给出第一类正则变换满足的方程

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_k} = p_k$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial Q_k} = -P_k$$
$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

由上述方程可知，任意给定一个生成函数可以生成一个正则变换，任一确定的正则变换都可以确定一生成函数. 生成函数已知可以将 p 写成 q, Q, t 的函数，将其反解，就得到 $Q = Q(q, p, t)$，代入另一方程可得到 $P(q, p, t)$，就确定了正则变换的形式

(2) 第二类正则变换

矩阵块 II 非奇异的情况下为第二类正则变换，此时独立变量为 q, P.

仍由式(5.5.7)可知

$$(K - H)\mathrm{d}t + (p_k \mathrm{d}q_k - P_k \mathrm{d}Q_k) = \mathrm{d}F$$

在两边加上 $\mathrm{d}(P_k Q_k)$ 则有

$$(K - H)\mathrm{d}t + (p_k \mathrm{d}q_k + Q_k \mathrm{d}P_k) = \mathrm{d}F_2 = \frac{\partial F_2}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k + \frac{\partial F_2}{\partial P_k}\mathrm{d}P_k + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

由此得到第二类正则变换满足的方程为

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_k} = p_k$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial P_k} = Q_k$$
$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

(3) 第三类正则变换

矩阵块 III 非奇异的情况下为第三类正则变换，此时独立变量为 p, Q.

类似的，得到第三类正则变换满足的方程为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F_3}{\partial p_k} = q_k \\
&\frac{\partial F_3}{\partial Q_k} = P_k \\
&K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}
\end{aligned}
$$

(4) 第四类正则变换

矩阵块 IV 非奇异的情况下为第四类正则变换，此时独立变量为 p, P.

类似的，得到第四类正则变换满足的方程为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F_4}{\partial p_k} = q_k \\
&\frac{\partial F_4}{\partial P_k} = Q_k \\
&K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}
\end{aligned}
$$

上述即为正则变换的一种分类，正则变换还有其他分类方式. 某正则变换可以同时属于多种正则变换

Conclusion5：正则变换

(1) 判断条件：Poisson 括号/辛条件/可积条件

(2) 推论：数学推论/体系随时间演化为正则变换/Liouville 定理

(3) 寻找新 Hamilton 函数，正则变换可以使相空间中 Lagrange 函数规范不变

(4) 正则变换的分类

附：辛矩阵行列式为一的证明

设辛矩阵为 M，则变换 $\eta = M\xi$ 一定为正则变换，设其为第二类正则变换，以 q, P 作独立变量，则 (q, p) 到 (Q, P) 的过程可分为 (q, p) 先到 (q, P) 再到 (Q, P). 第一步变换的 Jacobi 行列式为

$$
\frac{\partial(q, P)}{\partial(q, p)} = \frac{\partial(P_1 \cdots P_s)}{\partial(p_1 \cdots p_s)} = \frac{1}{\det A}
$$

第二步变换的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,P)}=\frac{\partial(Q_1\cdots Q_s)}{\partial(q_1\cdots q_s)}=\det B$$

则从 ξ 变换到 η 的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)}=\frac{\det B}{\det A}$$

$B_{ij}=\dfrac{\partial Q_i}{\partial q_j}=\dfrac{\partial}{\partial q_j}\dfrac{\partial F_2}{\partial P_i}=\dfrac{\partial}{\partial P_i}\dfrac{\partial F_2}{\partial q_j}=\dfrac{\partial p_j}{\partial P_i}=A_{ji}$ 即 $A=B^T\Rightarrow \det A=\det B$

由此可知 $\det M=\dfrac{\det B}{\det A}=1$

六、Hamilton-Jacobi 理论

1.Hamilton-Jacobi 方程

通过正则变换可以使得 Hamilton 函数的形式变得简单，显然，Hamilton 函数最简单的形式为 $H(Q,P,t)\equiv 0$，此时，由 Hamilton 正则方程可知 $Q=\text{const}, P=\text{const}$. 故我们寻求一类生成函数，使得变换后的新 Hamilton 函数恒为 0(只讨论第二类正则变换).

将这种生成函数记作 $S(q,P,t)$，称其为 **Hamilton 主函数**，首先要满足正则变换的 Hess 条件：

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\partial P_j}\right)\neq 0 \tag{6.1.1}$$

为了使新 Hamilton 函数为 0，还需要满足以下条件：

$$K=H(q,p,t)+\frac{\partial S(q,P,t)}{\partial t}=0 \tag{6.1.2}$$

第二类正则变换都以 (q,P) 作为独立变量，故应把上述方程中的 p 用 (q,P) 表示出来，由正则变换的理论可知：

$$\frac{\partial S}{\partial q_k}=p_k$$

故方程(6.1.2)可写成

$$-\frac{\partial S}{\partial t}=H(q,\frac{\partial S}{\partial q},t) \tag{6.1.3}$$

方程(6.1.3)就被称为 **Hamilton-Jacabi 方程**，可以看出，方程并不显含 P，并且该方程一般不是线性的，是非线性偏微分方程，理论上可以由此方程解出 S. 由正则变换的理论可知

$$p_k=\frac{\partial S}{\partial q_k}=p_k(q,P,t) \tag{6.1.4a}$$

$$Q_k=\frac{\partial S}{\partial P_k}=Q_k(q,P,t) \tag{6.1.4b}$$

一旦给定了初始条件，那么 (Q,P) 的数值就确定了，从式(6.1.4b)中可以反解出 q_k，并代入(6.1.4a)中可以得到 p_k

对于 Hamilton 主函数，将其对时间求导得到：

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial S}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial S}{\partial P_k}\dot{P}_k+\frac{\partial S}{\partial t}=p_k\dot{q}_k+Q_k\dot{P}_k-H$$

由于 (Q,P) 为常数，故 $\dot{P}_k=0$ 则有：

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=p_k\dot{q}_k-H$$

这刚好是 Hamilton 函数对广义动量的 Legendre 变换，也就是 Lagrange 函数，由此可以看出

$$S=\int(p_k\dot{q}_k-H)\mathrm{d}t$$

正是作用量的形式，只不过此处积分是不定限积分

2. 主函数和特征函数

偏微分方程的解由一般积分与完全积分构成，我们要找的主函数是 H-J 方程的**完全积分**解，完全积分只依赖于若干常数

例：$H=p$，求解该单自由度运动

解：由 H-J 方程可知：$-\dfrac{\partial S}{\partial t}=\dfrac{\partial S}{\partial q}$ 则 S 的解一定满足 $S=f(q-t)$，不妨令 $S=C_1(q-t)+C_0$，令 $C_1=P,C_0=0$ 则 $S=P(q-t)$，由式(6.1.4a)和(6.1.4b)可

知：

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = P$$
$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = q - t$$

故 (q,p) 便成功解出，若给初始条件 q_0, p_0，则有 $P = p_0\, Q = q_0 \Rightarrow p = p_0, q = q_0 + t$

在上述过程中，令 $C_1 = P$，但是不能令 $C_0 = P$，因为这样不满足 Hess 条件. 而令 $C_0 = 0$ 完全是因为它是无关紧要的常数，S 加减常数依然满足 H-J 方程，这常数称为**相加常数**

常见的问题是 Hamilton 函数不显含时间的情形，对于这样的体系，不妨将其主函数写为以下形式

$$S(q,t) = W(q) + T(t) \tag{6.2.1}$$

这时 H-J 方程(6.1.3)就可以写成

$$-\frac{\partial T}{\partial t} = H(q, \frac{\partial W}{\partial q}) \tag{6.2.2}$$

左边是 t 的函数，右边是 q 的函数，并且对任意 q, t 都成立，故左右两边都等于某一个相同的常数 (由 Hamilton 函数不显含时间，Hamilton 函数是守恒量也可知)，不妨将其记作 P_1，即变换后的某一个广义动量. 函数 $W(q)$ 就称为 **Hamilton 特征函数**. 此时有

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -P_1 \tag{6.2.3a}$$
$$H(q, \frac{\partial W}{\partial q}) = P_1 \tag{6.2.3b}$$

式(6.2.3a)的解为 $T = -P_1 t$. 现在，对于 Hamilton 函数不显含时间体系有：

$$\begin{cases} S(q,t) = W(q) - P_1 t \\ H(q, \dfrac{\partial W}{\partial q}) = P_1 \end{cases}$$

在上述讨论中，Hamilton 主函数中并没有写 P，这是由于 P 为常数，在微分方程求解中无贡献. 共同常数 P_1 通常为体系能量 E

例：求解简谐振子：$H=\dfrac{p^2}{2m}+\dfrac{1}{2}m\omega^2q^2$ 的运动，即 (q,p) 随时间的演化

解：由方程(6.2.3b)可知

$$\frac{1}{2m}(\frac{\partial W}{\partial q})^2+\frac{1}{2}m\omega^2q^2=P_1$$

解出：

$$W=\int\sqrt{2mP_1-m^2\omega^2q^2}\mathrm{d}q$$

Hamilton 主函数就可写为

$$S=\int\sqrt{2mP_1-m^2\omega^2q^2}\mathrm{d}q-P_1t$$

由第二类生成函数满足的方程(6.1.4a)(6.1.4b)可知

$$\begin{cases}p=\dfrac{\partial S}{\partial q}=2mP_1-m^2\omega^2q^2\\ Q=\dfrac{\partial S}{\partial P_1}=\displaystyle\int\frac{m\mathrm{d}q}{\sqrt{2mP_1-m^2\omega^2q^2}}-t=\frac{1}{\omega}\arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2P_1}}q\right)-t\end{cases}$$

从中反解出 (p,q) 即可

3. 分离变量与完全可分离体系

第 2 节的讨论将主函数分成 $W(q)$ 与 $-P_1t$ 两部分，相当于将变量 q,t 分离，那么不同的 q_k 在什么时候可以分离呢？即将特征函数写为如下形式

$$W(q)=\bar{W}(\bar{q})+W_s(q_s)\tag{6.3.1}$$

其中 q_s 是被分离出去的变量，$\bar{q}$ 代表其余广义坐标. 下面列举几种常见可分离变量的情形

情形 I 当 Hamilton 函数含有某个循环坐标时，即 Hamilton 函数有如下形式

$$H=H(\bar{q},\bar{p},p_s)$$

不显含 q_s，则与 q_s 共轭的广义动量 p_s 守恒，将其记作 P_s，则有

$$P_s=\frac{\partial W}{\partial q_s}$$

则特征函数可写为

$$W(q) = \bar{W}(\bar{q}) + W_s(q_s) = \bar{W}(\bar{q}) + P_s q_s \tag{6.3.2}$$

将其代入 Hamilton 函数中有

$$H(\bar{q}, \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{q}}, P_s) = P_1 \tag{6.3.3}$$

这就将变量 q_s 分离出去了

情形 II 当 H 具有如下形式：

$$H = \bar{H}(\bar{q}, \bar{p}) + H_s(q_s, p_s) \tag{6.3.4}$$

将形如(6.3.1)的特征函数代入上式可得到

$$\bar{H}(\bar{q}, \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{q}}) + H_s(q_s, \frac{\partial W_s}{\partial q_s}) = P_1$$

则可以令

$$H(q_s, \frac{\partial W_s}{\partial q_s}) = P_s \tag{6.3.5}$$

则有

$$H(\bar{q}, \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{q}}) = P_1 - P_s$$

这样，关于特征函数的 s 个变量的偏微分方程化为一个常微分方程和一个 $s-1$ 个变量的偏微分方程

情形 III 当 H 乘某个函数 $f(\bar{q})$ 后可以写成(6.3.4)的形式，即

$$f(\bar{q})H = \bar{H}(\bar{q}, \bar{p}) + H_s(q_s, p_s)$$

则有

$$\bar{H}(\bar{q}, \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{q}}) + H_s(q_s, \frac{\partial W_s}{\partial q_s}) = P_1 f(\bar{q})$$

改写一下形式：

$$\bar{H}(\bar{q}, \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{q}}) - P_1 f(\bar{q}) = H_s(q_s, \frac{\partial W_s}{\partial q_s})$$

左右两边的变量被分离，故左右两边都等于某个同样的常数，则有：

$$H_s(q_s,\frac{\partial W_s}{\partial q_s})=P_s \tag{6.3.6a}$$

$$\bar{H}(\bar{q},\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{q}})-P_1f(\bar{q})=P_s \tag{6.3.6b}$$

这与情形 II 类似. 若乘 $f(q_s)$ 后变成式(6.3.4)的形式，则与上述情形类似

若上述分离变量把所有广义坐标全分开了，那么此时的 Hamilton 特征函数可写为

$$W=\sum_{i=1}^{s}W_i(q_i,P)$$

每一个 W_i 都只依赖于 q_i，当然，还可以依赖于所有的 P. 这样的体系就叫做**完全可分离体系**，此时 Hamilton 主函数可写为

$$S=\sum_{i=1}^{s}W_i(q_i,P)-P_1t$$

再由正则变换满足的方程(6.1.4a)(6.1.4b)可知：

$$p_k=\frac{\partial W_k}{\partial q_k}=p_k(q_k,P)\ (k=1,2\dots) \tag{6.3.7a}$$

$$Q_k=\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial W_i}{\partial P_k}=Q_k(q,P)\ (k=2,3\dots) \tag{6.3.7b}$$

$$Q_1=\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial W_i}{\partial P_1}-t=Q_1(q,P,t) \tag{6.3.7c}$$

可以看出，式(6.3.7a)为相轨迹在 q_kp_k 平面的投影，给出了广义坐标与共轭广义动量的关系；式(6.3.7b)中含有广义坐标以及守恒量，故该式可以给出广义坐标之间的关系，这就给出了体系在位形空间中的相轨道！式(6.3.7c)中含有时间，故其可以告诉我们相轨迹的方向.

例：求解平方反比吸引力作用下粒子的轨道

解：采用极坐标，Hamilton 函数为

$$H=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\theta^2}{2mr^2}-\frac{\alpha}{r}$$

与 θ 共轭的广义动量守恒，将其记为 P_2，则有：

$$P_1 = \frac{1}{2m}(\frac{\partial W}{\partial r})^2 + \frac{P_2^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$$

从中解出

$$W = \int \sqrt{2mP_1 + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{P_2^2}{r^2}}\mathrm{d}r$$

则 Hamilton 主函数可以写为

$$S = \int \sqrt{2mP_1 + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{P_2^2}{r^2}}\mathrm{d}r + P_2\theta - P_1 t$$

则以下式子可以确定轨道：

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P_2} = -\int \frac{P_2 \mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2mP_1 + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{P_2^2}{r^2}}} + \theta$$

令 $Q = \theta_0, P_2 = l, P_1 = E$，根号下的式子配方，则有

$$\theta - \theta_0 = \int \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{\frac{m^2\alpha^2}{l^4}(1 + \frac{2El^2}{m\alpha^2}) - (\frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{l^2})^2}}$$

令 $p \triangleq \dfrac{l^2}{m\alpha}, \varepsilon \triangleq \sqrt{1 + \dfrac{2El^2}{m\alpha^2}}$ 则可得出轨迹方程为：

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta_0)}$$

为一圆锥曲线

4. 体系可分离的条件

不同坐标系下有不同的条件限制，以球坐标系为例. 球坐标系下粒子 Hamilton 函数的一般形式为

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + U(r,\theta,\phi) \tag{6.4.1}$$

当势能具有什么形式，特征函数可以写成 $W(q) = W_r(r) + W_\theta(\theta) + W_\phi(\phi)$ 的形式？将该特征函数代入式(6.2.3b)可得

$$r^2(\frac{\partial W_r}{\partial r})^2 + (\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta})^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}(\frac{\partial W_\phi}{\partial \phi})^2 = 2mr^2(P_1 - U) \tag{6.4.2}$$

最一般的情况，当 r^2U 可以写成 $r^2U=A(r)+V(\theta,\phi)$ 的情况时，上述方程就可将广义坐标 r 分离开来，将其代入式(6.4.2)有

$$2mr^2P_1-2mA(r)-r^2(\frac{\partial W_r}{\partial r})^2=(\frac{\partial W_\theta}{\partial\theta})^2+\frac{1}{\sin^2\theta}(\frac{\partial W_\phi}{\partial\phi})^2+2mV(\theta,\phi)$$

令左右都等于常数 P_2，则有

$$2mr^2P_1-2mA(r)-r^2(\frac{\partial W_r}{\partial r})^2=P_2 \tag{6.4.3a}$$

$$\sin^2\theta(\frac{\partial W_\theta}{\partial\theta})^2+(\frac{\partial W_\phi}{\partial\phi})^2+2m\sin^2\theta V(\theta,\phi)=\sin^2\theta P_2 \tag{6.4.3b}$$

类似的，若 $\sin^2\theta V=B(\theta)+C(\phi)$ 则从式(6.4.3b)中可以把 θ 和 ϕ 分离. 综上，当势能满足以下形式时，广义坐标可分离

$$\begin{aligned}U&=\frac{A(r)}{r^2}+\frac{V(\theta,\phi)}{r^2}=\frac{A(r)}{r^2}+\frac{B(\theta)}{r^2\sin^2\theta}+\frac{C(\phi)}{r^2\sin^2\theta}\\&\triangleq a(r)+\frac{1}{r^2}(b(\theta)+\frac{c(\phi)}{\sin^2\theta})\end{aligned}$$

七、作用变量与角变量理论 (AA 理论)

此部分不采用求和约定. 讨论完全可分离体系的准周期性运动，准周期性运动指的是在每个 q_kp_k 平面内作周期运动，整体是否作周期运动取决于每个周期的周期比

1. 作用变量：J_k

对于不显含时间的 Hamilton 体系，其主函数可以写为 $S=W(q,P)-P_1t$，以该函数作为第二类生成函数所生成的正则变换是化零正则变换 (新 Hamilton 函数为 0)，现在只以 $W(q,P)$ 作为第二类生成函数，显然，满足 Hess 条件：

$$\det(\frac{\partial^2W}{\partial q_i\partial P_j})=\det(\frac{\partial^2S}{\partial q_i\partial P_j})\neq0$$

这时，新 Hamilton 函数为 $K=H=P_1$，不是化零正则变换，通过正则方程可得：$\dot{Q}_1=1$，其余的 P_k，Q_k 均为守恒量

现定义 $J_k\triangleq\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\oint_{c_k}p_k\mathrm{d}q_k$，将其称为**作用变量**，显然，它是 P 的函数. 其中的 c_k 为 q_kp_k 平面内一个周期的相轨迹. 忽略掉积分前面的常数，该积分就是一个周

期内 $q_k p_k$ 平面内相轨迹围成的面积 (相轨迹闭合时可这么说，若不闭合则是一个周期内相轨迹与坐标轴围成的曲边梯形的面积). 积分里面的 $p_k = \dfrac{\partial W}{\partial q_k}$，故作用变量只依赖于正则变换后的广义动量 P. 现考虑是否可以从中反解出 $P_k = P_k(J)$. 由作用变量的定义可知：

$$D_{ij} = \frac{\partial J_i}{\partial P_j} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial P_j}\oint_{c_k}\frac{\partial W}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i = \frac{1}{2\pi}\oint_{c_k}\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial P_j}\mathrm{d}q_i$$

则该 Jacobi 行列式为

$$\det D = \det(\frac{1}{2\pi}\oint_{c_k}\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial P_j}\mathrm{d}q_i) = (\frac{1}{2\pi})^s\oint_{c_k}\det(\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial P_j})\mathrm{d}q_1 \dots \mathrm{d}q_s \neq 0$$

故可以从中把所有的 P_k 反解出来，此时，新 Hamilton 函数也就已知了，就是 $K = P_1(J)$

注：从定义可以看出所有的作用变量也是守恒量，因为只依赖于 P，而 P 都是守恒量. 此时，可以将 $W(q,P)$ 中的 P 都用 J 表示，得到只关于 q, J 的函数 $\widetilde{W}(q,J)$，该函数也可作为第二类生成函数.

2. 角变量：Θ_k

以 $\widetilde{W}(q,J)$ 作为第二类生成函数，与 J_k 共轭的广义坐标记为 Θ_k，称其为**角变量**，由正则变换的理论知：

$$\Theta_k \triangleq \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial J_k} = \Theta_k(q,J) \tag{7.2.1}$$

考察一个周期内 Θ_k 随着 q_k 的变化：

$$\Delta\Theta_k = \oint_{c_k}\frac{\partial \Theta_k}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k = \frac{\partial}{\partial J_k}\oint_{c_k}\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k = \frac{\partial}{\partial J_k}(2\pi J_k) = 2\pi$$

当 q_k 变化一个周期，Θ_k 随之的变化为 2π!

3. 运动角频率

经过上述讨论，寻得一正则变换，其生成函数为 $\widetilde{W}(q,J)$，变换后的新 Hamilton 函数为 $K = P_1(J) = E(J)$，由 Hamilton 正则方程可知：

$$\dot{\Theta}_k = \frac{\partial E}{\partial J_k} \triangleq \omega_k \Rightarrow \Theta_k = \omega_k t + \phi_k \tag{7.3.1a}$$

$$\dot{J}_k = \frac{\partial E}{\partial \Theta_k} = 0 \tag{7.3.1b}$$

当 t 变化一个周期 τ 时，$\Delta\Theta_k = 2\pi = \omega_k\tau \Rightarrow \omega_k = \dfrac{2\pi}{\tau}$，故 ω_k 就是准周期运动的角频率！

Conclusion：利用 AA 理论求解准周期性运动角频率

(1) 通过 H-J 方程解出特征函数 $W(q,P) \Rightarrow p_k = \dfrac{\partial W}{\partial q_k} = p_k(q,P)$

(2)$J_k \triangleq \dfrac{1}{2\pi}\oint_{c_k} p_k \mathrm{d}q_k = J_k(P) \Rightarrow P_k = P_k(J)$(解出 P_1 就足够)

(3)$\dfrac{\partial P_1}{\partial J_k} = \omega_k$

注：将 H-J 方程分离变量后，有时可直接算出 q_kp_k 平面内相轨迹的面积，便无需解出特征函数的形式

例：二维 Kepler 问题：$H = \dfrac{p_r^2}{2m} + \dfrac{p_\theta^2}{2mr^2} - \dfrac{\alpha}{r}$

$p_r = \sqrt{2mE + \dfrac{2m\alpha}{r} - \dfrac{P_\theta^2}{r^2}}$，则有

$$J_r = \frac{1}{2\pi}\oint_{c_k} p_r \mathrm{d}r = -P_\theta + \alpha\sqrt{\frac{-m}{2E}}$$

$$J_\theta = \frac{1}{2\pi}\oint_{c_k} p_\theta \mathrm{d}\theta = P_\theta$$

从中解出 $E = -\dfrac{m\alpha^2}{2(J_r+J_\theta)^2}$，则 $\omega_r = \omega_\theta = \dfrac{m\alpha^2}{(J_r+J_\theta)^3}$，从中可以看出轨道是闭合的，即 r 从近日点再回到近日点，θ 同时也转过 2π

若存在扰动，即 $H = \dfrac{p_r^2}{2m} + \dfrac{p_\theta^2}{2mr^2} - \dfrac{\alpha}{r} + \dfrac{\delta}{r^2}$，此时

$$p_r = \sqrt{2mE + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{P_\theta^2 + 2m\delta}{r^2}}$$

则 $E = -\dfrac{m\alpha^2}{2(J_r + \sqrt{J_\theta^2 + 2m\delta})^2} = -\dfrac{m\alpha^2}{2D^2}$ 此时 $\omega_r \neq \omega_\theta$，故轨道不闭合，发生进动

$$\frac{\omega_r}{\omega_\theta} = \frac{\partial_{J_\theta} D}{\partial_{J_1} D} = \frac{J_\theta}{\sqrt{J_\theta^2 + 2m\delta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{2m\delta}{J_\theta^2}}} \approx 1 - \frac{m\delta}{J_\theta^2} = 1 - \frac{m\delta}{p_\theta^2}$$

设进动角为 $\Delta\theta$，则有

$$|\frac{\Delta\theta}{2\pi}| = |\frac{\omega_r}{\omega_\theta} - 1| = \frac{m\delta}{p_\theta^2}$$

八、相空间中的对称与守恒

1.Nother 定理

若变换 $\xi_\alpha \longmapsto \eta_\alpha = \eta_\alpha(\xi, t; \varepsilon)$ 为体系 $H(\xi, t)$ 的对称变换，即：

$$\widetilde{L_\varepsilon}(\xi, \dot{\xi}, t) \triangleq \widetilde{L}(\eta, \dot{\eta}, t) = \widetilde{L}(\xi, \dot{\xi}, t) + \frac{\mathrm{d}F(\xi, t, \varepsilon)}{\mathrm{d}t} \tag{8.1.1}$$

则 $\Gamma = p_k s_k - G$ 为运动常数，其中 $s_k = s_k(\xi, t) \triangleq \frac{\partial Q_k}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}, G = G(\xi, t) \triangleq \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}$
若无穷小变换 $\xi_\alpha \longmapsto \eta_\alpha = \xi_\alpha + \delta\xi_\alpha$ 为 $H(\xi, t)$ 的对称变换:

$$\delta\widetilde{L} = \widetilde{L}(\xi + \delta\xi, \dot{\xi} + \delta\dot{\xi}, t) - \widetilde{L}(\xi, \dot{\xi}, t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta F \tag{8.1.2}$$

其中 $\delta\xi_\alpha = \varepsilon s_\alpha, \delta F = \varepsilon G$. 则 $\varepsilon\Gamma = p_k \delta q_k - \delta F$ 为守恒量. 相当于将 ε 看成无穷小量，变换即多了一个无穷小偏移，即正则变量的变分

例：$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r} = H(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ 验证角动量守恒

考虑无穷小变换 $\delta\boldsymbol{r} = \varepsilon\hat{n} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}, \delta\boldsymbol{p} = \varepsilon\hat{n} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{p}$

已知 $\widetilde{L} = \boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} - H(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$，则

$$\begin{aligned}
\delta\widetilde{L} &= \delta(\boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}) - \delta H(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) = \delta\boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{p} \cdot \delta\dot{\boldsymbol{r}} - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}}\delta\boldsymbol{r} - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\delta\boldsymbol{p} \\
&= \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \dot{\boldsymbol{r}}) + \dot{\boldsymbol{r}} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{p}) - \frac{\alpha}{r^3}\boldsymbol{r} \cdot \delta\boldsymbol{r} - \frac{1}{m}\boldsymbol{p} \cdot \delta\boldsymbol{p} = 0
\end{aligned}$$

故 $\delta F = 0$，则 $\boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})$ 为守恒量，由于 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 任意，则角动量守恒.

2.Runge-Lenz 矢量

考虑如下无穷小变换：

$$\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{r} &= 2(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{p} - (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{p})\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p})\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{p}) \times \boldsymbol{r} - \boldsymbol{\varepsilon} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) \\
\delta\boldsymbol{p} &= (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{p})\boldsymbol{p} - \frac{m\alpha}{r^3}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{r} + (\frac{m\alpha}{r} - p^2)\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{p}) \times \boldsymbol{p} - \frac{m\alpha}{r^3}(\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{r}
\end{aligned}$$

平方反比力场：$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}$，由上述例子可知：

$$\delta\widetilde{L}=\underbrace{\delta\boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}}_{(1)}+\underbrace{\boldsymbol{p}\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}}_{(2)}+\underbrace{\left(-\frac{\alpha}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}-\frac{1}{m}\boldsymbol{p}\cdot\delta\boldsymbol{p}\right)}_{(3)} \tag{8.2.1}$$

下述推导要用到：

$$\boldsymbol{a}\cdot[(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}]=\boldsymbol{\varepsilon}\cdot[\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})]$$

$$\boldsymbol{a}\cdot[\varepsilon\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]=-\boldsymbol{\varepsilon}\cdot[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]$$

对于式(8.2.1)

$$\begin{aligned}(3)&=\frac{\alpha}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot[\boldsymbol{\varepsilon}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})]+\frac{\alpha}{r^3}\boldsymbol{p}\cdot[(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{r}]\\&=\frac{\alpha}{r^3}[-\boldsymbol{\varepsilon}\cdot[\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})]+\boldsymbol{\varepsilon}\cdot[\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})]]=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)&=\boldsymbol{p}\cdot[(\boldsymbol{\varepsilon}\times\dot{\boldsymbol{p}})\times\boldsymbol{r}+(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{p})\times\dot{\boldsymbol{r}}]-\boldsymbol{p}\cdot[\boldsymbol{\varepsilon}\times(\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{p})+\boldsymbol{\varepsilon}\times(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{p}})]\\&=\boldsymbol{\varepsilon}\cdot[\dot{\boldsymbol{p}}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})+\boldsymbol{p}\times(\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{p})]+\boldsymbol{\varepsilon}\cdot[\boldsymbol{p}\times(\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{p})+\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{p}})]\\&=\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})]+\boldsymbol{\varepsilon}\cdot[\boldsymbol{p}\times(\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{p})]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1)&=\dot{\boldsymbol{r}}\cdot[(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{p})\times\boldsymbol{p}]-\frac{m\alpha}{r^3}\dot{\boldsymbol{r}}\cdot[(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{r}]\\&=\boldsymbol{\varepsilon}\cdot[\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{p}\times\dot{\boldsymbol{r}})]+m\alpha\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\underbrace{\frac{-[\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})]}{r^3}}_{=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r}-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}}{r^3}\boldsymbol{r}=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r}-\frac{\dot{r}\boldsymbol{r}}{r^2}=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r}+(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{r})\boldsymbol{r}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\boldsymbol{r}}{r})}\end{aligned}$$

故 $\delta\widetilde{L}=(3)+(2)+(1)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\boldsymbol{\varepsilon}\cdot[\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})+m\alpha\hat{r}]\}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta F$，可以看出上述无穷小变换确实是该体系的一个对称变换！该变换对应的守恒量为：

$$\begin{aligned}\Gamma&=\boldsymbol{p}\cdot\delta\boldsymbol{r}-\delta F\\&=\boldsymbol{p}\cdot[(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{p})\times\boldsymbol{r}]-\boldsymbol{p}\cdot[\boldsymbol{\varepsilon}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})]-\delta F\\&=\boldsymbol{\varepsilon}\cdot[\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})-m\alpha\hat{r}]\triangleq\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

定义 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{l}-m\alpha\hat{r}$ 为 **Runge-Lenz 矢量**，是平方反比力场中的守恒量. 几何上看说明的是近日点固定，不会发生进动

3. 无限小连续正则变换

对于恒等变换：$q_k=Q_k, p_k=P_k$，一定是第二类正则变换，其第二类生成函数 $F_2=q_kP_k$. 无限小正则变换只是在恒等变换基础上加了一些偏移：

$$F_2=q_kP_k+\boxed{\varepsilon G(q,P,t)}$$

ε 已经是小量，故保留至一阶小量即可：$G=G(q,p,t)$

由正则变换的方程可知：

$$\begin{aligned}p_k&=\frac{\partial F_2}{\partial q_k}=p_k+\varepsilon\frac{\partial G(q,p,t)}{\partial q_k}\\Q_k&=\frac{\partial F_2}{\partial P_k}=q_k+\varepsilon\frac{\partial G(q,p,t)}{\partial p_k}\end{aligned}$$

由上述二式可知：

$$\begin{aligned}\delta q_k&=\varepsilon\frac{\partial G}{\partial p_k}=\varepsilon[q_k,G]\\\delta p_k&=-\varepsilon\frac{\partial G}{\partial q_k}=-\varepsilon[p_k,G]\end{aligned}$$

故将 G 称之为无穷小变换的生成函数-**连续 CT 的生成元**

任意力学量 $A(\xi,t)$ 的变分：

$$\delta A(\xi,t)=A(\eta,t)-A(\xi,t)=A(\xi+\delta\xi,t)-A(\xi,t)\triangleq\varepsilon[A,G]$$

特别地：$\delta H=\varepsilon[H,G]$，故当 $\delta H=0$，G 不显含 t 的时候，G 为守恒量

更一般的情况，定义

$$\begin{aligned}\Delta H&\triangleq H(\eta,t)-K(\eta,t)\\&=[H(\eta,t)-H(\xi,t)]-[K(\eta,t)-H(\xi,t)]\\&=-\varepsilon\{[G,H]+\partial_t G\}\end{aligned}$$

故 $\Delta H=0$ 等价于 G 是运动常数