《理论力学A》(2023 年秋季) 平时作业五[1]

10 月 17 日 (星期四) 交。

1. 考虑存在相互作用的两质点系统，两质点的质量分别为：m_1, m_2。假设该相互作用只与两质点间的距离有关，即该系统的拉格朗日量为：
$$L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 - V(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \ , \tag{1}$$
其中 V 为相互作用的势能。试根据 Noether 定理，证明该系统的能量、动量和角动量守恒。

2. 下图显示的是二维的阿特伍德机。先写出系统的拉格朗日量，观测发现系统的对称性，构造相应的操作：x_ϵ, y_ϵ。验证你的猜想，并得到相应的守恒量。

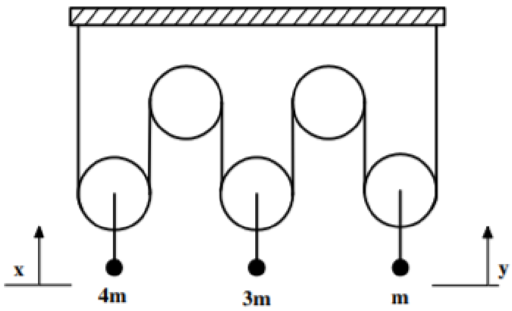

图 1: 二维阿特伍德机，悬挂质量的三个滑轮是活动的，上面两个为定滑轮。建议广义坐标选为图中的 x, y，即左右两个滑轮垂向位置。

3. 为简单起见，考察相对论电荷在一维空间中的运动，即时空是二维的。
   (a) 先考虑自由的相对论电荷的运动。粒子的等效拉格朗日量为：
   $$L = \frac{m}{2}\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \equiv \frac{m}{2}\left(-\dot{t}^2 + \dot{x}^2\right) \tag{2}$$
   如果我们进行如下的坐标变换–洛伦兹变换 (Lorentz boost)：
   $$\begin{pmatrix} ct_\varepsilon \\ x_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\varepsilon & -sh\varepsilon \\ -sh\varepsilon & ch\varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{3}$$
   其中 ε 与速度 v 有关。这里我们将该坐标变换看作对位型空间 (注意：在二维时空中，t 也是广义坐标) 的单参数的操作 (operation)。试证明在操作下，粒子的拉格朗日量不变，即系统具有洛伦兹对称性，并导出相应的守恒量–Noether 荷。
   (b) 如果存在外磁场 $A^\mu = (\varphi, A)$，则系统的朗格朗日量为：
   $$L = \frac{m}{2}\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} + J^\mu A_\mu = \frac{m}{2}\left(-\dot{t}^2 + \dot{x}^2\right) + e(-\varphi\dot{t} + \frac{1}{c}A\dot{x}) \tag{4}$$
   其中 $J^\mu = eU^\mu$ 为电荷的电流，m、e 分别为带电粒子的静止质量和电荷。电磁势 φ 和 A 为 x 与 t 的函数，磁矢势 A 沿 x 方向。如果在无穷小的洛伦兹变换操作下，粒子的作用量不变，试求 φ 和 A 之间满足的关系，并给出相应的守恒量–Noether 荷。