电磁场的拉格朗日力学

肖诗麒

作于 2019 年 5 月，2021 年 3 月整理与修改

说明：本文默认读者熟练掌握力学，电磁学，理论力学，微积分，线性代数所有课程内容，且有一定张量分析的基础。其中部分具体数学推导已经略去，需要读者自行验证。

“给我个度规，我就能写出拉格朗日量；给我个拉格朗日量，我就能搞出新物理！”

——袁业飞

一、带电粒子的拉格朗日力学

首先记时空坐标$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$，时空距离$ds^2 = \eta_{ij} dx^i dx^j$，对于狭义相对论情形有时空度规$\eta = diag\{1, -1, -1, -1\}$。自由粒子在时空里走短程线，也就是说：

$$S = -\int mcds \tag{1.1}$$

其中，m 是粒子质量，表征粒子惯性，而 c 是为了保证量纲的一个常数，负号参照朗道《场论》，其作用后面再解释。如果考虑粒子与外场的相互作用，则需要增加一项：

$$S = \int -mcds - qA_i(x)dx^i \tag{1.2}$$

其中耦合项为协变形式，满足洛伦兹不变性；q 为电荷表征耦合的强弱。为了改造成哈密顿变分原理的形式，需要引入“时间”，即原时$d\tau = ds / c$。按照这个定义，有 4 维速度的约束关系$\eta_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = c^2$，这个将会多次用到，包括计算欧拉-拉格朗日方程和后续推导。那么（1.2）改写为：

$$S = \int L(x, \dot{x}, \tau) = \int [-mc\sqrt{\eta_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} - qA_i(x)\dot{x}^i] d\tau \tag{1.3}$$

剩下的工作就是欧拉-拉格朗日方程了：

$$\frac{d}{d\tau}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}) = \frac{\partial L}{\partial x^i} \Rightarrow m\eta_{ij} \ddot{x}^j = qF_{ij} \dot{x}^j \tag{1.4}$$

其中电磁场张量$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$。如果记$(A_0, A_1, A_2, A_3) = (\phi / c, A_x, A_y, A_z)$，那么可以验证（1.4）即相对论性洛伦兹力公式。最后解释（1.1）中的负号，首先计算：

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \delta \dot{x}^i \delta \dot{x}^j = (\frac{\dot{x}_i \dot{x}_j}{c^2} - \eta_{ij}) \delta \dot{x}^i \delta \dot{x}^j = (\frac{\dot{x}_i \delta \dot{x}^i}{c^2})^2 - \eta_{ij} \delta \dot{x}^i \delta \dot{x}^j = -\eta_{ij} \delta \dot{x}^i \delta \dot{x}^j \tag{1.5}$$

其中用到$\eta_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = c^2 \Rightarrow \delta(\eta_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j) = 0 \Rightarrow \dot{x}_i \delta \dot{x}^i = 0$。一般情况不能保证协变坐标存在，而这里是常数度规情形，因此协变坐标存在并为方便而使用。在计算（1.5）的时候再用一次：

$-\eta_{ij} \delta \dot{x}^i \delta \dot{x}^j = -(\frac{\dot{x}^1}{\dot{x}^0} \delta \dot{x}^1 + \frac{\dot{x}^2}{\dot{x}^0} \delta \dot{x}^2 + \frac{\dot{x}^3}{\dot{x}^0} \delta \dot{x}^3)^2 + (\delta \dot{x}^1)^2 + (\delta \dot{x}^2)^2 + (\delta \dot{x}^3)^2 > 0$。（1.5）大于 0 即（1.3）中 S 的二阶变分为正，满足“最小”作用量原理。（参照理论力学习题课《泛函变

分与极值》命题 1，肖诗麒，2020.9.22）负号的另一种解释是：取低速极限，拉格朗日量能化为非相对论形式 $L=\frac{1}{2}mv^2+q(\vec{A}\cdot\vec{v}-\phi)$。

最后讨论（1.3）中拉格朗日系统的对称性与守恒律。注意到洛伦兹变换使得（1.3）拉格朗日量不变。洛伦兹群是 4 维转动群，有 6 个无穷小生成元，其中 3 个代表空间转动，另外 3 个代表洛伦兹变换。取其中 1 个无穷小洛伦兹变换 $x_\varepsilon^i=\Lambda^i_j(\varepsilon)x^j,\Lambda(\varepsilon)=\begin{pmatrix} ch\varepsilon & sh\varepsilon \\ sh\varepsilon & ch\varepsilon \end{pmatrix}$，由诺特定理：

$$Q=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\frac{dx_\varepsilon^i}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}-f=[-m\eta_{ij}\dot{x}^j-eA_i(x)]\Gamma^i_k x^k=p_i\Gamma^i_k x^k \tag{1.6}$$

其中 $\Gamma^i_k=\frac{d}{d\varepsilon}\Lambda^i_k(\varepsilon)|_{\varepsilon=0}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，这个变换类似于转动变换，守恒律类似于角动量守恒。

二、电磁场的拉格朗日力学

上一部分将电磁场看作外场，带电粒子的位置和速度为动力学量。而这一节将电荷看作外场，电磁场为动力学量。那么场的作用量为：

$$S=\int L(x,A,\partial_i A)dx^0dx^1dx^2dx^3=\int(-\frac{1}{c}J^iA_i-\frac{1}{4\pi\mu_0 c}F^{ij}F_{ij})dx^0dx^1dx^2dx^3 \tag{2.1}$$

其中电流 $(J^0,J^1,J^2,J^3)=(\rho c,j_x,j_y,j_z)$，电流与场的耦合项同（1.2）中耦合项，场本身的项满足协变性。使用连续体系的欧拉-拉格朗日方程：

$$\partial_i[\frac{\partial L}{\partial(\partial_i A_j)}]=\frac{\partial L}{\partial A_j}\Rightarrow\partial_i F^{ij}=\mu_0 J^j \tag{2.2}$$

可以验证这个方程即电势和磁矢势的达朗贝尔方程。接下来将讨论（2.1）中拉格朗日量的对称性和守恒律，注意到无穷小规范变换 $A_{i\varepsilon}=A_i+\varepsilon\partial_i\psi$ 使得（2.1）中作用量规范不变，即 $S'=S-\frac{\varepsilon}{c}Q\psi$，其中 Q 为体系总电荷。这说明（2.1）必然存在某种守恒律，根据连续体系的诺特定理：

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}[L(x,A_\varepsilon,\partial_i A_\varepsilon)]|_{\varepsilon=0}=\partial_i f^i\Rightarrow\partial_i[\frac{\partial L}{\partial(\partial_i A_j)}\frac{dA_j}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}-f^i]=0 \tag{2.3}$$

根据（2.3）可以得到：

$$\partial_i[\frac{\partial L}{\partial(\partial_i A_j)}\frac{dA_j}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}-f^i]=\frac{\psi\partial_i J^i}{c}=0\Rightarrow\partial_i J^i=0 \tag{2.4}$$

（2.4）即电荷守恒。