《时间和空间》10.24 习题课

ZBZ

2023 年 10 月

1 第一次作业

1.1 证明：

$$(1-u'^2)^{\frac{1}{2}}(1-\vec{v}\cdot\vec{u})=(1-u^2)^{\frac{1}{2}}(1-v^2)^{\frac{1}{2}}$$

注：$\vec{u}$ 是某一粒子在惯性系 K 中的速度，$\vec{u'}$ 是该粒子在惯性系 K' 中的速度,K' 相对 K 以 $\vec{v}$ 运动.

思路：观察该式，发现含有 $\vec{v}\cdot\vec{u}$，联想到内积，此外，该式中同时含有 $\vec{u},\vec{u'}$ 说明和坐标变换有关。自然联想到：要把两个 4-矢量缩并成标量，因为标量在坐标变换下不变.

求解：

在 K 系中，粒子的 4-速度为

$$u^\mu=\gamma(1,\vec{u})$$

K' 系的 4-速度为

$$V^\mu=\Gamma(1,\vec{v})$$

在 K' 系中，粒子的 4-速度为

$$u'^\mu=\gamma'(1,\vec{u}')$$

K' 系的 4-速度为

$$V'^\mu=(1,\vec{0})$$

其中 $\gamma=(1-u^2)^{-1/2},\gamma'=(1-u'^2)^{-1/2},\Gamma=(1-v^2)^{-1/2}$. 4-标量在坐标变换下不变，故

$$u_\mu V^\mu=u'_\mu V'^\mu$$

把该式展开得

$$\gamma\Gamma(-1+\vec{u}\cdot\vec{v})=-\gamma'$$

再化简即为要证的式子.

2 第二次作业

2.1 证明

$$ds^2=-t^{-4}dt^2+dx^2+dy^2+dz^2$$

是闵氏线元

求解：作坐标变换 $T=\frac{1}{t}$ 即可把线元变为 $ds^2=-dT^2+dx^2+dy^2+dz^2$

注解：部分同学的作业反应出他们没有理解什么是线元，故在此作一个说明. 这里需要理解的关键事实是：线元决定时空的几何. 几何是时空的内禀性质，故而是绝对的，不随坐标变换而改变, 坐标变换改变的只是线元的表达式而不是线元本身（换句话说，就是 ds^2 是一个 4-标量）

有同学问：$ds^2=-dt^2+dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)$ 是不是闵氏线元?

回答：是. 因为存在一个坐标变换

$$t=t,\ x=r\sin\theta\cos\phi,\ y=r\sin\theta\sin\phi,\ z=r\cos\theta$$

可以把 ds^2 变为 $ds^2=-dt^2+dx^2+dy^2+dz^2$ 的形式. 不管是 $s^2=-dt^2+dr^2+r^2d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2$ 还是 $ds^2=-dt^2+dx^2+dy^2+dz^2$ 都是同一线元在不同坐标下的表示。线元是绝对的，而坐标是人选的。

有同学可能会问：线元的形式和人为选取的坐标有关，那可不可以找到一个反应时空几何性质的内禀量?

回答：可以，这个量就是大家都听说过的曲率张量。同学们只需记住以下两点：

1. 各处曲率都为 0 的时空称为平直时空，否则就是弯曲时空.

2. 闵氏时空是平直时空.

有同学可能会问：什么是绝对，什么是相对?

回答：简单地说，如果一个对象和某种人为选择的的因素有关，该量就称为相对的，否则就称为绝对的。比如：

- 事件本身是绝对的，但事件的坐标是相对的（坐标与参考系选取有关）
- 时空是绝对的，时间和空间是相对的。譬如对于平直时空，选取不同的惯性参考系实质上就是对同一四维时空做了“3+1 分解”
- 张量（比如度规）是绝对的，但张量在不同坐标下的表示是相对的

赵老师上广相时讲过一句话，大概意思是相对论其实应该改名叫“绝对论”更合适。

3 补充内容-四维张量

说明：本节采用最简化的表述向低年级同学介绍张量的基础知识，如果您已经学过可以跳过本节. 预知后事如何，请看梁灿彬《微分几何与广义相对论》.

3.1 肤浅的定义

对任何四个量，如 $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$, 如果对时空作一个坐标变换（比如洛伦兹变换），$A^\mu$ 的变换方式（变换矩阵）与四维坐标的微分 dx^μ 相同, 则称 A^μ 是一个四维逆变矢量. 一言蔽之，4-矢量就是像 dx^μ 一样变换的量。类似的，如果说一个量 σ 是四维标量，那么这个量在坐标变换下保持不变. 如果一个量 $A^{\mu\nu}(\mu,\nu = 0,1,2,3$，共 16 个分量) 是四维二阶张量，那么这个量在坐标变换下像 $dx^\mu dx^\nu$ 一样变. 标量就是零阶张量，矢量就是一阶张量. 为了简便，以后的称呼中统一略去“四维”.

例：能量与动量的变换，见讲义第五节 p6.

或者更严格地，如果作一个坐标变换

$$\widetilde{x}^\mu = \widetilde{x}^\mu(x^\alpha)$$

任意一点的坐标微分变换公式为

$$d\widetilde{x}^\mu = \frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$$

一阶逆变张量的变换公式：

$$\widetilde{T}^\mu = \frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} T^\alpha$$

二阶逆变张量的变换公式：

$$\widetilde{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \widetilde{x}^\nu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}$$

一阶协变张量的变换公式：

$$\widetilde{T}_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \widetilde{x}^\mu} T_\alpha$$

二阶协变张量的变换公式：

$$\widetilde{T}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \widetilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \widetilde{x}^\nu} T_{\alpha\beta}$$

混合张量：同时含有协变指标或逆变指标. 假设我们有一个混合二阶张量 $T^\mu{}_\nu$。在新的坐标系下，其变换公式为：

$$\widetilde{T}^\mu{}_\nu = \frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \widetilde{x}^\nu} T^\alpha{}_\beta$$

逆变张量用上标表示，协变张量用下标表示.

注意：dx^μ 的变换矩阵是坐标的函数，故而所有张量都是相应于某一时空点定义的.

WHY 四维向量/张量? 如果一个物理规律能用四维向量或张量表达，其形式自然而然就在坐标变换下不变，满足了相对性原理的要求.

常见的标量：时空间隔 ds^2, 固有时 $d\tau$，四维 Minkowski 空间的体积元 $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$

常见的矢量：四维速度 $v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, 四维动量 $p^\mu = mv^\mu$, 四维波矢 $k^\mu = (\omega, \vec{k})$, 四维电流密度 $J^\mu = (\rho, \vec{j})$, 平直时空中标量的四维梯度 $\partial_\alpha \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} = (\frac{\partial \phi}{\partial t}, \nabla \phi)$. 注：$\partial_\alpha \phi$ 只有在平直时空中才是标量，如果在弯曲时空中，要把普通导数换成协变导数.

常见的的张量：度规张量 $g_{\mu\nu}$, 能量动量张量 $T^{\mu\nu}$

3.2 张量的运算

同类型的张量可以加减，两个张量可以直乘为一个张量，如 $C^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu$.

现在要重点介绍的是张量的缩并：对一对上下指标取相同的值并求和. 例如，如果我们有一个二阶混合张量 $M^\mu{}_\nu$，我们可以将其与自身进行缩并得到一个标量 $M^\mu{}_\mu$：

$$M^\mu{}_\mu = M^0{}_0 + M^1{}_1 + M^2{}_2 + M^3{}_3$$

在这里，我们对指标 μ 进行了求和

爱因斯坦求和约定: 相对论中常用的一种简化表示方法。当一个上标和一个下标在同一个数学表达式中重复时，它们被认为是被求和的，从而省略常见的求和符号。例如，$T^{\mu\nu} V_\nu$ 实际上表

示的是从 0 到 3（或其他适当的范围）对 ν 的总和：

$$T^{\mu\nu}V_\nu = \sum_{\nu=0}^{3} T^{\mu\nu}V_\nu$$

没求和的指标叫作自由指标，被求和的指标叫作哑指标. 为了避免混淆要注意几点：

- 指标顺序不能随便交换
- 在一个等式中，若其中一项含有某一自由指标，则所有项都要含有该自由指标
- 一项中，不可能同时有两个相同的上标或下标
- 若一项中已经有一对哑指标，则该项中该指标不得出现第三次

注意到逆变张量和协变张量对应的的变换矩阵是互逆的：

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \widetilde{x}^\alpha}\frac{\partial \widetilde{x}^\alpha}{\partial x^\nu} = \delta^\mu{}_\nu$$

可知，一个张量缩并后任然是张量，只是降了两阶.

一个有用的定理：如果有协变关系式 $A^\mu{}_\nu B^\nu = C_\mu$, 且 $A^\mu{}_\nu, C_\mu$ 均为张量，则可证明，B^ν 也是张量.

3.3 度规张量

给定一个线元，实际上定义了空间相邻两点间的距离. 把线元写成 $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ 的形式，$g_{\mu\nu}$ 的反对称部分对线元无贡献，故取 $g_{\mu\nu}$ 为对称矩阵. 由 3.1 节最后的定理知 $g_{\mu\nu}$ 是二阶协变张量. 有了度规就可以进一步计算 Christoffel 联络、曲率张量等等, 但这是广义相对论的内容，我们现在暂且不提. 平直时空的度规就是大家喜闻乐见的闵氏度规：

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

度规 $g_{\mu\nu}$ 的逆矩阵是二阶逆变张量，称为逆度规. 度规和逆度规满足关系 $g^{\mu\nu}g_{\nu\rho} = \delta^\mu{}_\rho$.

度规和逆度规的一个重要作用就是通过与其他张量缩并来升降指标. 度规用来降指标，逆度

规用来升指标. 譬如，假设时空是平直时空，已知 4-速度的逆变分量

$$v^\mu = (\gamma, \gamma\vec{v})$$

则可利用度规来定义它的协变分量:

$$v_\mu = \eta_{\mu\nu} v^\nu = (-\gamma, \gamma\vec{v})$$

3.4 不依赖坐标的张量定义

有同学可能已经认识到了一个问题：之前说的张量其实就是一个数组，在坐标变换时满足特定的变换规律. 换句话说，张量的表示依赖于坐标的选取, 而坐标显然不是物理的. 那么是否能从更加内禀的、不依赖于坐标的选取的方式定义张量？同时，我们希望这种定义和之前的定义是等价的. 这里以简要讨论一下, 欲知后事如何，请学习微分流形.

为了简便，这里只讨论实线性空间, 许多结论都可以推广到一般线性空间上.

定义：一个 n 维实线性空间 V 上的 (p, q) 型张量是一个实函数 T:

$$T : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{\text{p 个}} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{\text{q 个}} \to \mathbb{R}$$

同时要求 T 对每一个变量都是线性的（T 是一个多线性函数）. 其中，V^* 表示 V 的对偶空间.

现在我们来解释为什么这个定义和之前的等价. 学过线性代数的同学都知道，给出 V 的一个基 $\{e_i\}(i = 1, ..., n)$，就可以把 V 上的线性函数写成一个矩阵表示. 这里要把 T 写成矩阵表示，我们还需要用到 V^* 的一个基 $\{e^i\}$，称作 $\{e_i\}$ 的对偶基. 其定义为:

对 V 中的任一矢量 v，可以把它展开到 $\{e_i\}$ 上：$v = v^i e_i$. 则对任意 $v \in V$，满足

$$e^i(v) = v^i (i = 1, ..., n)$$

的 V^* 中的 n 个元素 $\{e^i\}$ 就称为 $\{e_i\}$ 的对偶基. 可以证明，$\{e^i\}$ 确实是 V^* 的一个基.

现在考虑最简单的四维空间 V 上的 $(0, 1)$ 型张量 T 和 $(1, 0)$ 型张量 U:

$$T : V^* \to \mathbb{R}$$

$$U : V \to \mathbb{R}$$

借助 $\{e^\mu\}$，T 表示为一个数组 $T^\mu = T(e^\mu)$；借助 $\{e_\mu\}$，U 表示为一个数组 $U_\mu = U(e_\mu)$ 如果对 V 作一个基底变换：

$$e_{\mu'} = A^{\nu}_{\mu'} e_\nu$$

则相应的对偶基也进行了变换：

$$e^{\mu'} = A^{\mu'}_{\nu} e^\nu$$

根据对偶基的定义, 有

$$e^\mu(e_\nu) = \delta^\mu_\nu$$
$$e^{\mu'}(e_{\nu'}) = \delta^{\mu'}_{\nu'}$$

则

$$\begin{aligned}
e^{\mu'}(e_{\nu'}) &= A^{\mu'}_{\alpha} e^\alpha (A^\beta_{\nu'} e_\beta) \\
&= A^{\mu'}_{\alpha} A^\beta_{\nu'} e^\alpha(e_\beta) \\
&= A^{\mu'}_{\alpha} A^\beta_{\nu'} \delta^\alpha_\beta \\
&= A^{\mu'}_{\alpha} A^\alpha_{\nu'} \\
&= \delta^{\mu'}_{\nu'}
\end{aligned}$$

这就是告诉我们：$A^\nu_{\mu'}$ 和 $A^{\nu'}_{\mu}$ 互为逆矩阵（撇在下表示 $\{e_\mu\}$ 的变换矩阵，撇在上表示 $\{e^\mu\}$ 的变换矩阵），把 $A^\nu_{\mu'}$ 记为矩阵 A，把 $A^{\nu'}_{\mu}$ 记为矩阵 A^{-1}.

现在来看看 T 和 U 的分量 $T^\mu = T(e^\mu), U_\mu = U(e_\mu)$ 怎么变化. 在新的基底 $\{e_{\mu'}\},\{e^{\mu'}\}$ 下,T,U 的分量表示为

$$T^{\mu'} = T(e^{\mu'}) = T(A^{\mu'}_{\nu} e^\nu) = A^{\mu'}_{\nu} T(e^\nu) = A^{\mu'}_{\nu} T^\nu$$
$$U_{\mu'} = U(e_{\mu'}) = U(A^\nu_{\mu'} e_\nu) = A^\nu_{\mu'} U(e^\nu) = A^\nu_{\mu'} U^\nu$$

我们发现：T^μ 的变换矩阵就是 A^{-1},U^μ 的变换矩阵就是 A. 现在我们终于知道了,T^μ 的变换方式和 $\{e_\mu\}$ 是相反的，所以 T 叫作逆变矢量；U_μ 的变换方式和 $\{e_\mu\}$ 是完全相同的，所以 U 叫作协变矢量. 不难推广，这里的一个 (p,q) 型张量就是之前的有 p 个下标和 q 个上标的张量. 现在，我们对张量的定义就可以回到之前那个借坐标变换给出的定义. 注意: 在四维时空中，张量是逐点定义的.

最后说明四个问题:

1. 定义在 V 上的逆变矢量和 V 中的元素可以看作是一回事. V 中的每一个元素 v 都可以诱导一个映射

$$\hat{v}: V^* \to \mathbb{R}$$

使得

$$\hat{v}(f) = f(v)$$

容易验证 $\hat{v}$ 是 V^* 上的线性函数. 按照之前的定义，$\hat{v}$ 就是 V 上的一个逆变矢量.V 上所有逆变矢量构成一个线性空间，这个空间就是 V^{**}. 定义映射 $F: V \to V^{**}$，使得

$$F(v) = \hat{v}$$

易证 F 是一个线性映射，且是单射. 由线性代数知识知 $\dim V = \dim V^{**}$，故 F 是一个一一映射.F 的定义不依赖于任何基的选取，所以把 F 称作一个自然同构.

2. 某一时空点处的度规的本质是 V 上的一个对称的双线性函数，这可以直接从定义看出来.

3. 一种认识是，定义了度规后，协变矢量和逆变矢量可以视作同一事物的一体两面. 根据第二条所说的，某一度规张量 g 是实质上是一个 V 上的双线性函数. 任意给定一个 $v \in V$, 都可以诱导一个映射 $\widetilde{v}: V \to \mathbb{R}$ 使得

$$\forall u \in V,\ \widetilde{v}(u) = g(v, u)$$

容易验证 $\widetilde{v}$ 是线性的，故 $\widetilde{v} \in V^*$，所以 $\widetilde{v}$ 是一个逆变矢量. 如果你把双线性函数写作 $(u|v)$，那么 $\widetilde{v}$ 也可记作 $(v|\cdot)$.

定义 $L: V \to V^*$ 使得

$$L(v) = (v|\cdot)$$

可以证明 L 是一个一一映射 (请回忆 Riesz 表示定理).L 是一个很重要的映射.

按第一条的观点，我们不再区分 V 和 V^{**}. 我们把 $v \in V$ 按一个基 $\{e^\mu\}$ 写成逆变矢量的分量形式:

$$T^\mu = v(e^\mu) = e^\mu(v) = v^\mu$$

把相应的 $\widetilde{v}$ 也写按 e_μ 成分量形式:

$$T_\mu = \widetilde{v}(e_\mu) = g(v, e_m u) = g(T^\nu e_\nu\ e_\mu) = T^\nu g(e_\nu, e_\mu) = T^\nu g_{\nu\mu}$$

我们现在发现，所谓的用度规降指标，其实就是用 L 把一个逆变矢量 v 映射到了一个协变矢量 $(v|\cdot)$. 因为 L 是一一映射，所以这样的 v 和 $(v|\cdot)$ 是一一对应的. L 是可逆的，所以也可以反过来用逆度规升指标.

顺便 $T^\mu = v^\mu$ 还告诉我们，逆变矢量 v 在 $\{e^\mu\}$ 上的表示就是 v 在 $\{e_\mu\}$ 上的展开系数. 所以，有

$$v = T^\mu e_\mu$$

观察上式，当我们对 V 作一个基底变换，v 肯定是不变的，v 要不变，T^μ 和 e^μ 就得反着变. 这再次解释了为什么 T^μ 叫逆变矢量.

4. 类似的讨论也可以照葫芦画瓢用来讨论量子力学中的左矢和右矢. 右矢类比逆变矢量，左矢类比协变矢量，Hilbert 空间的内积类比时空的度规.

4 练习题（不是作业）

注：本节的题目是为了让大家更熟悉 4-矢量的表达方式. 本节题目均采用自然单位制.

4.1 质能动关系（三角关系）

对于运动的粒子，证明

$$E^2 = p^2 + m^2$$

其中 E 是粒子总能量，p 是粒子三维动量的模长，m 是粒子的静质量. 注意：虽然 E 和 p 的值与参考系的选取有关，但质能动关系在不同参考系中总是成立.

提示：该关系直接计算 $p^2 - E^2$ 来证明是很直接简单的. 但是为了巩固所学知识，可以尝试利用粒子的 4-动量 $p^\mu = (E, \vec{p})$ 和常见关系 $u^\mu u_\mu = -1$ 来证明. 注：对于有质量粒子，$p^\mu = (\gamma m, \gamma \vec{v})$; 对于无质量粒子，$p^\mu = (\hbar\omega, \hbar\vec{k})$.

4.2 电磁场的变换

已知电磁场张量

$$F_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

当从一个惯性系 Lorentz 变换到另一个惯性系时，电磁场也会随之变换。考虑两个惯性系：一个是静止的 K，另一个是相对于 K 以速度 v 沿 x 轴运动的 K'.

在 K 系中的电磁场由 $(\vec{E}, \vec{B})$ 表示，而在 K' 系中的电磁场由 $(\vec{E}', \vec{B}')$ 表示。

Lorentz 变换导致以下的电磁场变换关系：

电场的变换:

$$
\begin{aligned}
E'_x &= E_x \\
E'_y &= \gamma(E_y - vB_z) \\
E'_z &= \gamma(E_z + vB_y)
\end{aligned}
$$

磁场的变换:

$$
\begin{aligned}
B'_x &= B_x \\
B'_y &= \gamma(B_y + vE_z) \\
B'_z &= \gamma(B_z - vE_y)
\end{aligned}
$$

其中，γ 是 Lorentz 因子，定义为：

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

4.3 粒子在电磁场中的运动

电磁场对带电粒子的作用可以用四维势 A^μ 描述. 在电磁场中的电荷的作用量可以写作

$$S = S_p + S_{pf}$$

其中

$$S_p = -m \int d\tau$$

是粒子的作用量，

$$S_{pf} = q \int A_\alpha dx^\alpha$$

是粒子与电磁场耦合/相互作用的作用量.

如果把 A^μ 记作 $A^\mu=(\phi,\vec{A})$, 还可以写出系统的拉氏量为

$$L=-\frac{m}{\gamma}+q(\vec{A}\cdot\vec{v}-\phi)$$

注：上式中的积分是在四维时空中沿着粒子世界线积。由上可知，电磁场中粒子的作用量是洛伦兹不变的，符合我们的预期.

只考虑平直时空，请依据最小作用量原理导出粒子的运动方程.

如果把 A^μ 记作 $A^\mu=(\phi,\vec{A})$, 则得到的运动方程为

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=-q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-q\nabla\phi+q\vec{v}\times(\nabla\times\vec{A})$$

定义电场为

$$\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\phi$$

定义磁场为

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

该式就变成了大家高中就学过的形式：

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}$$

这样看来，$\vec{A}$ 就是大家电磁学里学过的磁矢势。如果电磁场不随时间变化，ϕ 就是大家熟知的静电势.