1. $H=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+\frac{p_z^2}{2m}+\frac12kx^2+\frac12ky^2+\frac12kz^2$.

由H不显含t，可令$S=W-Et$. 注意到W可以进一步分离变量 $W=W_1(x)+W_2(y)+W_3(z)$，进而可以求解，但这样没有能充分利用H形式上的对称性。

三个自由度独立"变化，互不干扰！

注意到 $H=(\frac{p_x^2}{2m}+\frac12kx^2)+(\frac{p_y^2}{2m}+\frac12ky^2)+(\frac{p_z^2}{2m}+\frac12kz^2)=H_x+H_y+H_z$.

三个方向各不互相干扰，那么也可以单独分离变量，$S=S_x(x)+S_y(y)+S_z(z)$.

对x方向：$S_x=W_x(x)-E_xt$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_x}{\partial x}\right)^2+\frac12kx^2=E_x \Rightarrow \frac{\partial W_x}{\partial x}=\sqrt{2mE_x-kmx^2}\Rightarrow W_x=\int\sqrt{2mE_x-kmx^2}\,dx.$$

$$\phi_x=\frac{\partial S_x}{\partial E_x}=-t+\int\frac{m\,dx}{\sqrt{2mE_x-kmx^2}}=-t+\sqrt{\frac mk}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=-t+\sqrt{\frac mk}\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E_x}}x\right)\Rightarrow x=\sqrt{\frac{2E_x}{k}}\sin(\omega t+\phi_x)$$

$p_x=\left(\frac{\partial W_x}{\partial x}\right)=\cdots$ 这里可以积分求解，但更方便的是用$p_x=m\dot{x}$.

(其中我们将$\sqrt{\frac km}$吸收到ϕ_x中，都是常数无所谓)，$\omega=\sqrt{\frac km}$.

同理对y, z有：$y=\sqrt{\frac{2E_y}{m}}\sin(\omega t+\phi_y)$　$z=\sqrt{\frac{2E_z}{m}}\sin(\omega t+\phi_z)$.，$p_y=\cdots$　$p_z=\cdots$

2. $H=\frac{1}{2m}p_r^2+\frac{1}{2mr^2}p_\theta^2+\frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}p_\phi^2+\frac12kr^2$.

不熟悉这个式子的同学请多推几遍。
比较常见，能顺手写很省事。

由H不显含t，可令$S=W-Et$. 而ϕ、θ、r可以分离变量，$W=W_\phi(\phi)+W_\theta(\theta)+W_r(r)$、

$\left(\frac{\partial W_\phi}{\partial\phi}\right)^2=L^2\Rightarrow\frac{\partial W_\phi}{\partial\phi}=L\Rightarrow W_\phi=L\phi$. 这里不必加常数，W中的(加的)积分常数相当于作用量上加常数，不改变运动方程。

$$\left(p_\theta^2+\frac{1}{\sin^2\theta}p_\phi^2\right)=p_\theta^2+\frac{1}{\sin^2\theta}L^2 \Rightarrow \left(\frac{\partial W_\theta}{\partial\theta}\right)^2+\frac{L^2}{\sin^2\theta}=J\Rightarrow \frac{\partial W_\theta}{\partial\theta}=\sqrt{J-\frac{L^2}{\sin^2\theta}}\Rightarrow W_\theta=\int d\theta\sqrt{J-\frac{L^2}{\sin^2\theta}}.$$

最后：$\frac1{2m}\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{2mr^2}J+\frac12kr^2=E$. 得 $W_r=\int dr\sqrt{2mE-\frac{J}{r^2}-mkr^2}$

注意没有新常数了。3-D的广义动量守恒量有且仅有3个！

逐层剥离 $\frac1{2m}p_r^2+\frac1{2mr^2}p_\theta^2+\frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}p_\phi^2+\frac12kr^2$.

① ② ③

$$Q_r=\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)=-t+\int\frac{m\,dr}{\sqrt{2mE-\frac{J}{r^2}-mkr^2}}$$

$$Q_\theta=\left(\frac{\partial S}{\partial J}\right)=\int\frac{d\theta}{2\sqrt{J-\frac{L^2}{\sin^2\theta}}}-\int\frac{dr/r^2}{\sqrt{2mE-\frac{J}{r^2}-mkr^2}}$$

$$Q_\phi=\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)=\int\frac{L\,d\theta/\sin^2\theta}{\sqrt{J-\frac{L^2}{\sin^2\theta}}}-\phi$$

原则上后续可以求解.

4.

$$I_r+I_\theta=\oint p_r(r)dr+\oint p_\theta(\theta)d\theta=\int_0^\tau p_r(r)\dot r\,dt+\int_0^\tau p_\theta(\theta)\dot\theta\,dt\quad \tau\text{为周期.}$$

写出 $\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\dot r^2+\frac{1}{2}mr^2\dot\theta^2+\frac{k}{r}$ ，$p_r=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot r}=m\dot r$ $p_\theta=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}=mr^2\dot\theta$ 有:

$$I_r+I_\theta=2\int_0^\tau\left(\frac{1}{2}m\dot r^2+\frac{1}{2}mr^2\dot\theta^2\right)dt=2\int_0^\tau T\,dt=2\tau\cdot\frac{1}{\tau}\int_0^\tau T\,dt=2\tau\bar{T}.$$

而: $\oint\frac{k}{r}dt=-\tau\cdot\frac{1}{\tau}\int_0^\tau-\frac{k}{r}dt=-\tau\bar{V}$.

位力定理有: $\bar{T}=\frac{n}{n+2}E$ $\bar{V}=\frac{2}{n+2}E$ 故对 $n=-1$, $\bar{T}=-\frac{1}{2}\bar{V}$.

代入即有: $I_r+I_\theta=\oint\frac{k}{r}dt$. 证毕.

5.

$d\vec{x}\,d\vec{p}=dp_1\wedge dp_2\wedge dp_3\wedge dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$.

洛伦兹变换下: $dp_i\mapsto dp_j'=\Lambda^i{}_j\,dp_i$ $\quad dx^i\mapsto dx'^j=\Lambda^j{}_i\,dx^i$

故而前三项 p 的变化和后三项 x 的变化正好相消. 那么体元不变.