中国科学技术大学物理学院

2020～2021 学年第一学期考试试卷

■A 卷　　□B 卷

课程名称：　理论力学　　　课程代码：

开课院系：　物理学院　　　考试形式：闭卷

姓　名：＿＿＿＿＿＿　学　号：＿＿＿＿＿＿　专　业：＿＿＿＿＿＿

题 号	一	二	三	四	五				总 分
得 分									

（装订线内不要答题）

一、质量、电量分别为m,q的电荷在给定的电磁场中运动时的广义势能为：$V=q\phi(\vec{r},t)-q\,\vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)$，其中$\phi(\vec{r},t)$, $\vec{A}(\vec{r},t)$分别为标量势和矢量势，对应的电磁场分别为：$\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\partial_t\vec{A}$; $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$.

1. 试求系统的哈密定量$H\left(\vec{r},\vec{p};\,\vec{A}(\vec{r},t),\phi(\vec{r},t)\right)$，其中$\vec{A}(\vec{r},t),\phi(\vec{r},t)$为外场；
2. 试根据正则方程求带电粒子在电磁场中的运动方程。

二、电磁势$\phi(\vec{r},t)$, $\vec{A}(\vec{r},t)$在如下的变换（规范变换）下保持电场和磁场（$\vec{E},\vec{B}$）不变：$\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}\psi$, $\phi'=\phi-\partial_t\psi$，其中$\psi(\vec{r},t)$为任一函数。在规范变换下，带电粒子的哈密顿量将发生变化（因为它是以电磁势作为外场，而不是直接以电磁场作为外场）。试说明规范变换等价于如下形式的正则变换：$\vec{r}'=\vec{r}$, $\vec{p}'=\vec{p}+q\vec{\nabla}\psi$。

1. 证明以上相空间坐标变换的确是正则变换；
2. 写出该正则变化的母函数（生成函数）；
3. 写出新的哈密顿函数$\tilde{H}\left(\vec{r}',\vec{p}';\,\vec{A}(\vec{r},t),\phi(\vec{r},t)\right)$。

三、讨论行星的运动。一质量为m的质点在引力势$V(r)=-\frac{k}{r}$ $(k>0)$中做束缚态平面轨道运动$(E<0)$，根据对称性，采用极坐标(r,θ)。

1. 作用量I_r,I_θ分别定义为：$I_r\equiv\oint p_r(r)dr$；$I_\theta\equiv\oint p_\theta(\theta)d\theta$，环路积分沿着轨道积分。试根据位力（Virial）定理证明：$I_r+I_\theta=\oint k/r\,dt$；

2. 试根据求解哈密顿-雅克比方程，求解哈密度主函数$W(r,\theta)=W_r(r)+W_\theta(\theta)$；

3. 根据哈密顿主函数$W_r(r),W_\theta(\theta)$，计算相应的作用量I_r,I_θ(你可能用到的公式：$\int_{x_{min}}^{x_{max}}\frac{\sqrt{-a+2bx-x^2}}{x}dx=\pi\left(b-\sqrt{a}\right)$，其中积分上下限为被积函数的两个根)。

附录：可能用到的公式

欧拉-拉格朗日方程： $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_\alpha}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0$；**哈密顿正则方程：** $\dot{q}_\alpha=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha},\dot{p}_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$

泊松括号的定义： $[f(q_\alpha,p_\alpha;t),g(q_\alpha,p_\alpha;t)]\equiv\sum_\alpha(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha})$

总角度速度$\overline{\omega}$在本体坐标系（随动惯性系）中的分量：

$$\omega_x=\dot{\varphi}\sin\,\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi\text{；}\ \omega_y=\dot{\varphi}\sin\,\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi\text{；}\ \omega_z=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}$$

刚体运动的欧拉方程:

$$I_1\dot{\omega}_1-(I_2-I_3)\omega_2\omega_3=N_1,\ I_2\dot{\omega}_2-(I_3-I_1)\omega_3\omega_1=N_2,\ I_3\dot{\omega}_3-(I_1-I_2)\omega_1\omega_2=N_3$$

正则变换（第一类母函数）：

$$dF_1(q,Q,t)=pdq-PdQ+\frac{\partial F_1}{\partial t}dt$$

哈密顿-雅克比方程： $\frac{\partial}{\partial t}S(q_\alpha,t)+H\left(q_\alpha,\frac{\partial S}{\partial q_\alpha},t\right)=0$

$$\mathrm{S}=-\mathrm{Et}+\mathrm{W}(\mathrm{q}_\alpha)+\mathrm{A},\ H\left(q_\alpha,\frac{\partial W}{\partial q_\alpha}\right)=E$$

在笛卡尔坐标系(x,y,z)，柱坐标系(r,ϕ,z)以及球坐标系(r,θ,ϕ)中两点之间的距离分别为：

$$ds^2=dx^2+dy^2+dx^2=dr^2+r^2d\phi^2+dz^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2$$