《理论力学 A》(2023 年秋季) 平时作业十二[1]

12 月 28 日(星期四)交。

1. **典型题**。质量为 m 的粒子在三维各向同性谐振子势阱中运动:

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2+z^2\right) = \frac{1}{2}m\omega^2\left(\rho^2+z^2\right) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2. \tag{1}$$

   (a) 在直角坐标系 (x, y, z) 中分离 Hamilton-Jacobi 方程,找出作用 (量) 变量,并以此表示哈密顿量。找出频率 $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$;

   (b) 在柱坐标系 (ρ, φ, z) 中分离 Hamilton-Jacobi 方程,找出作用 (量) 变量,并以此表示哈密顿量。找出频率 $(\omega_\rho, \omega_\varphi, \omega_z)$;

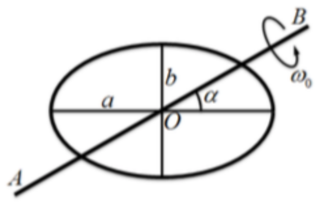
   (c) 在球坐标系 (r, θ, φ) 中分离 Hamilton-Jacobi 方程,找出作用 (量) 变量,并以此表示哈密顿量。找出频率 $(\omega_r, \omega_\theta, \omega_\phi)$。

2. 章动角不变, 进动角速度和自转角速度均为常数的刚体定点转动称为规则运动, 相应的欧拉角可用下式表示:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + at, \quad \theta(t) = \theta_0, \quad \psi(t) = \psi_0 + ct. \tag{2}$$

   式中 a, b, c 均为常数,求此情况下刚体角速度在刚体本体坐标系 (或刚体随动惯性系) 中的表示式。

3. 质量为 M, 半长轴 a、半短轴为 b 的椭圆形匀质盘绕通过其中心且在盘平面内的固定轴 $\vec{e}_{\mathrm{AO}}$ 作匀速转动,角速度为 $\vec{\omega}$。转轴与椭圆半长轴的夹角为 α,转轴质量可以忽略。



   (a) 求主转动惯量;

   (b) 写出角速度在主轴系中的分量;

   (c) 写出匀质盘的转动动能。

4. 半径为 a 的匀质圆柱在半径为 R 的圆柱形曲面内滚动,试求圆柱的动能和微振动频率(参见朗道《力学》§32 " 惯量张量" 习题 6)。

5. 试计算均质的圆锥体分别绕顶点和重心转动的转动惯量。圆锥的质量为 M,底面半径为 r,高度为 h。

6. 试求在平面上滚动的匀质圆锥的动能(参见朗道《力学》§32 " 惯量张量" 习题 7)。

---

7. 均质正方体，质量和边长分别为 M, a，取参考点为其一个顶点 A，选 A 为坐标原点，三条边为坐标轴。匀质正方体相对其顶点 A 的转动惯量为：

$$I = \begin{bmatrix} 2/3 & \text{-}1/4 & \text{-}1/4 \\ \text{-}1/4 & 2/3 & \text{-}1/4 \\ \text{-}1/4 & \text{-}1/4 & 2/3 \end{bmatrix} Ma^2 \tag{3}$$

试将该惯量张量对角化，即求三个主转动惯量及其对应的三个惯量主轴。