《理论力学A》(2021 年秋季)第二次期中考试

考试时间：2021 年 12 月 3 日，9:45–11:45　(120 分钟)

姓名：_________ 学号：_________ 得分：_________

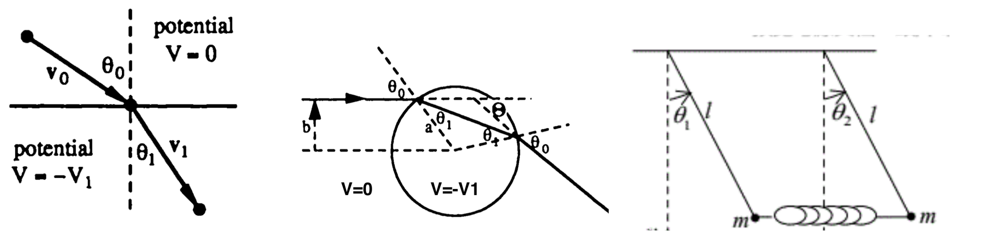

图 1: 第 3 题：粒子分别入射到半无限大平面吸引势场以及球形吸引势场中。第 4 题：耦合双单摆。

1. **诺特（Noether）定理（20 分）**。质量为 m，带电量为 e 的电荷在均匀磁场中运动，磁场方向为 z 方向，磁场强度为 B，则该电荷的拉格朗日量为：

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{eB}{2c}\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right) \quad . \tag{1}$$

   (a) 说明该系统沿着任一方向平行移动都保持不变，并找到相应的运动积分；

   (b) 说明该系统存在沿着 z 轴转动的对称性，并找到相应的运动积分。

2. **有心力场中的运动（20 分）**。讨论质量为 m 的检验粒子在三维的谐振子势场中运动。势能函数为：

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \tag{2}$$

   根据系统的对称性，请采用球坐标求解如下的问题。

   (a) 试通过积分形式的轨道方程，得到粒子的轨道方程为：

$$\frac{L^2}{mE}\frac{1}{r^2} = 1 + \sqrt{1 - \frac{\omega^2 L^2}{E^2}}\cos 2\left(\theta - \theta_0\right) \tag{3}$$

   其中 E, L 为能量和角动量。

   (b) 试说明该轨道为几何中心为力心 $(r = 0)$ 的椭圆轨道，并证明：

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 + b^2), \quad L = m\omega ab \tag{4}$$

   其中 a, b 为椭圆的半长轴和半短轴。

   (c) 证明轨道周期为：$T = 2\pi/\omega$，并通过积分轨道公式，得到 $r = r(t)$ 的表达式如下：

$$r^2 = \frac{E}{m\omega^2}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{\omega^2 L^2}{E^2}}\cos 2\omega\left(t - t_0\right)\right] \tag{5}$$

附：可能用到的积分：$\int^x \frac{dx'}{\sqrt{a^2 - x'^2}} = -\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$。令 $x' = a\cos\Theta$，很容易得到该积分。

3. **弹性碰撞（20 分）**。

   (a) 考虑一个能量为 E 的粒子从势能为零的上半平面入射到势能为 $-V_1$（吸引势）的下半平面。试证明粒子的折射规律类似光的折射定律，满足：

   $$\sin\theta_0 = n\sin\theta_1 \tag{6}$$

   其中 θ_0, θ_1 分别为入射角和折射角，$n = \sqrt{1 + V_1/E}$ 为等效的折射率（提示：从水平和垂直两个方向的能量和动量守恒考虑）。

   (b) 考虑粒子入射到一个球形的吸引势场（对 $r \le a, V(r) = -V_1; r > a$，$V(r) = 0;$）中。如果入射粒子的碰撞参数为 b，证明散射角 Θ 与碰撞参数 b 满足如下的关系：

   $$\frac{b^2}{a^2} = \frac{n^2\sin^2\Theta/2}{n^2 + 1 - 2n\cos\Theta/2} \tag{7}$$

   (c) 计算粒子入射到球形吸引势场中的微分散射截面 $d\sigma/d\Omega$。

4. **微振动（20 分）**。两个全同的单摆通过一个弹簧耦合在一起。单摆的摆长为 l，质量为 m。弹簧的倔强系数为 k，弹簧的原长等于两个单摆之间的距离，也就是说，两个单摆处在铅垂线方向时，就是系统的平衡位置。试求该系统微振动的频率，以及相应的简正坐标。

5. **哈密顿力学（20 分）**。在无摩擦的光滑水平面内有一半径为 R、圆心固定的圆盘，以角速度 ω 绕圆心转动，在转盘边缘挂了一长度为 l、质量可以忽略的轻杆，杆的末端挂了一质量为 m 的小球（像个单摆）。

   (a) 写出小球 m 的哈密顿量 (哈密顿函数)H；

   (b) 通过哈密顿正则方程，讨论在随着圆盘一起转动的参考系中，该小球的运动可以等价于在加速度为 $g = \omega^2 R$ 的引力场中的运动（等效原理!）。