中国科学技术大学物理学院

2019～2020 学年第一学期考试试卷

■A 卷　　□B 卷

课程名称：　理论力学　　课程代码：

开课院系：　物理学院　　考试形式：闭卷

姓　名：　　　学　号：　　　专　业：

题 号	一	二	三	四	五	六			总 分
得 分									

（装订线内不要答题）

（以下为试卷正文）

一、（20 分）位于坐标原点具有磁荷b的磁单极子产生磁场，其矢势在球坐标系(r, θ, φ)中可以表示为$\vec{A} = \frac{b(1-cos\theta)}{r\ sin\theta}\vec{e}_\varphi$，其中$\vec{e}_\varphi$为方位角的单位矢量。考虑一个电荷为e、质量为$m$的粒子在该磁场中的运动。

1. 写出球坐标系中该带电粒子的拉格朗日函数的具体表达式，并找出至少两个独立的运动积分；
2. 在直角坐标系(x, y, z)中写下相应的哈密顿函数 H 以及关于第三个自由度(z, p_z)的哈密顿正则方程。

二、（10 分）以向下为x-轴的正方向，讨论落体运动。

1. 设初始时刻的位移为$x(t=0) = x_0$，动量为$p(t=0) = p_0$，证明：

$$x(t), p(t) \rightarrow x_0, p_0$$

是正则变换。用哈密顿力学求x(t)与p(t)

2. 对此变换判断第三、第四种生成函数是否存在；若存在，则求出各生成函数表达式和哈密顿函数$K(t, x_0, p_0)$。

三、（25 分）质量为m的拉格朗日陀螺，即重力场中绕定点转动的对称陀螺的三个主转动惯量为：$I_1 = I_2 \neq I_3$，其中质心到固定点的距离为l。

1. 写出选取三个欧拉角作为广义坐标时的刚体的哈密顿函数$H(\varphi,\theta,\psi,P_\varphi,P_\theta,P_\psi)$；

2. 通过哈密顿-雅可比方程求积分形式的哈密度主函数$S(\varphi,\theta,\psi,t;C_1,C_2,C_3)$，其中$C_1,C_2,C_3$为运动积分。

3. 根据主函数$S(\varphi,\theta,\psi,t;C_1,C_2,C_3)$，试导出刚体积分形式的运动方程。

四、（25 分）讨论质量为m的人造卫星围绕地球（质量为M）作束缚态轨道运动。假设地球非球对称质量分布所引起的引力势为高阶小量（一般作球谐函数展开），显然卫星的轨道近似为椭圆。设卫星的轨道半长轴为a，引入无量纲化的卫星的角动量和 Runge-Lenz 矢量(偏心率矢量)：

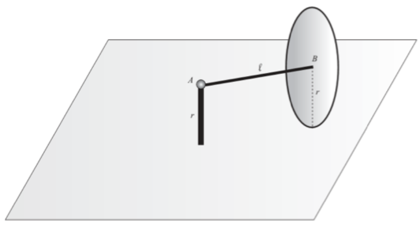
$$\vec{j}=\frac{1}{\sqrt{GMa}}\vec{r}\times\vec{p},\quad \vec{e}=\frac{1}{GM}\vec{p}\times(\vec{r}\times\vec{p})-\frac{\vec{r}}{r}$$

试证明：

1. $[x_i,L_j]=\epsilon_{ijk}x_k$；　$[p_i,L_j]=\epsilon_{ijk}p_k$；$[L_i,L_j]=\epsilon_{ijk}L_k$；其中$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$；

2. $[j_i,j_j]=\frac{1}{\sqrt{GMa}}\epsilon_{ijk}j_k$；　$[j_i,e_j]=\frac{1}{\sqrt{GMa}}\epsilon_{ijk}e_k$；　$[e_i,e_j]=\frac{1}{\sqrt{GMa}}\epsilon_{ijk}j_k$　。

五、（20 分）如图所示，质量为m, 半径为r的匀质圆盘竖直放置于水平面上，圆盘中心 B 通过长为l并垂直于盘面的轻杆光滑连接到固定点 A，A 点高出水平面的距离也为r，这样 AB 始终平行于水平面，盘面始终保持竖直。当圆盘在水平面上作无滑动滚动时，其中心 B 绕着 A 点作圆周运动。如果圆盘中心 B 围绕 A 点以大小为ω_0的角速度作匀速圆周运动，求圆盘对水平面施加的力（只需求出力的大小即可）。



附录：可能用到的公式

欧拉-拉格朗日方程：$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0$；哈密顿正则方程：$\dot{q}_\alpha=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha},\dot{p}_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$

泊松括号的定义：$[f(q_\alpha,p_\alpha;t),g(q_\alpha,p_\alpha;t)]\equiv\sum_\alpha(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha})$

总角度速度$\vec{\omega}$在本体坐标系（随动惯性系）中的分量：

$$\omega_x=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi\text{；}\ \omega_y=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi\text{；}\ \omega_z=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}$$

刚体运动的欧拉方程:

$$I_1\dot{\omega}_1-(I_2-I_3)\omega_2\omega_3=N_1,\ I_2\dot{\omega}_2-(I_3-I_1)\omega_3\omega_1=N_2,\ I_3\dot{\omega}_3-(I_1-I_2)\omega_1\omega_2=N_3$$

正则变换（第一类母函数）：

$$dF_1(q,Q,t)=pdq-PdQ+\frac{\partial F_1}{\partial t}dt$$

哈密顿-雅克比方程：$\frac{\partial}{\partial t}S(q_\alpha,t)+H\left(q_\alpha,\frac{\partial S}{\partial q_\alpha},t\right)=0$

$$\mathrm{S}=-\mathrm{E}t+\mathrm{W}(\mathrm{q}_\alpha)+\mathrm{A},\ H\left(q_\alpha,\frac{\partial W}{\partial q_\alpha}\right)=E$$

在笛卡尔坐标系(x,y,z)，柱坐标系(r,ϕ,z)以及球坐标系(r,θ,ϕ)中两点之间的距离分别为：

$$ds^2=dx^2+dy^2+dx^2=dr^2+r^2d\phi^2+dz^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2$$