

《理论力学A》(2023年秋季)平时作业七¹

11月7日(星期四)交。

- 1995年10月6日, Michael Mayor & Didier Queloz 发现恒星 51 Pegasi (飞马座) 周围存在一个行星! 据观测, 该恒星为 G5 型, 质量约为 1.06 太阳质量, 温度比太阳略低。下图是观测到的恒星 51 Peg 的视向速度随着轨道位相的变化。观测到的轨道约为: 4.23 天, 视向速度为: $\pm 57\text{m/s}$ 。假设我们的视线方向位于该恒星 - 行星系统的轨道平面内, 试估算恒星 51 Peg 的行星的质量 (以木星的质量为单位)。阅读参考文献:

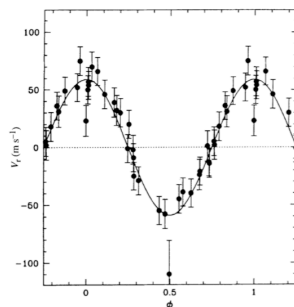


图 1: 恒星 51 Peg 的视向速度随着轨道位相的变化。观测到的轨道周期为: 4.23 天, 视向速度为: $\pm 57\text{m/s}$ 。

Michel Mayor & Didier Queloz, 1995, Nature, **378**, 355, *A Jupiter-mass companion to a solar-type star*. 不用提交。

- (a) 质量为 m 的质点以速度 \vec{v}_1 从一个势能为常数 V_1 的半空间入射到另一个势能为常数 V_2 的半空间, 试求指点运动方向的改变 (参见朗道《力学》第二章 §7 习题)。
(b) 现有一个半径为球形势阱, 即:

$$V = \begin{cases} -V_0, & r < a \\ 0, & r \geq a \end{cases} \quad (1)$$

试求粒子在该场中散射的有效截面 (参见朗道《力学》第四章 §19 习题 2)。

- 有心力场。** 质量为 m 的检验粒子在有心力场 $V(r)$ 中运动时, 径向运动的等效势能为:

$$V_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad (2)$$

其中 L 为粒子的角动量。试定性讨论如下各种有心力场中粒子的运动情况, 并画出可能的轨道草图 (提示: 轨道与 L 的取值有关, 请分类讨论)。

- 三维各向同性谐振子: $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$;
- 球方势阱: $V(r) = -V_1(r < a), V(r) = 0(r > a)$;
- $V(r) = -\frac{k}{r^2}$;
- Yukawa 势 (短程力, 核力模型): $V(r) = -k\frac{e^{-\alpha r}}{r}$.

¹ © 中国科学技术大学物理学院天文学系袁业飞

4. 讨论由质量和摆长分别为 m_1, l_1 以及 m_2, l_2 组成的双摆的微振动。其中摆 1 悬挂在固定点，摆 2 悬挂在 m_1 上（参看讲义 §5.1.3 例题，也可参见朗道 §23 习题 2）。

- (a) 写出微振动条件下，系统的拉格朗日量（近似到二阶小量）。
- (b) 得到系统的动力学方程，并求解，即：求解本征频率和对应的振动解。
- (c) 求解简正坐标、对应的振动解以及简正坐标和原先的广义坐标（例如 θ_1, θ_2 ）之间的坐标变换矩阵。

5. 两个存在耦合的谐振子系统的拉格朗日量为：

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 - \frac{1}{2}k_2y^2 + \alpha xy \quad . \quad (3)$$

- (a) 试求系统的两个微振动圆频率；
 - (b) 试求该系统在做微振动时候的简正坐标。
6. 在有心力场中由于对称性，质点的轨道位于一个平面内，不妨假设该平面为 xy 平面。试求质点在有心力场 $V = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$ 中的运动轨道，其中 k 为常数（参见朗道 §23 习题 3）。