

《理论力学 A》(2023 年秋季) 平时作业九¹

11 月 23 日 (星期四) 交。

1. **哈密顿力学**。在拉格朗日力学中我们知道, 两个拉格朗日量 L 和 L' 之间如果仅差某任意函数 $f(q_\alpha, t)$ 对时间的全导数: $L' = L + \frac{df}{dt}$, 则由 L 和 L' 得到的动力学方程完全一致。

(a) 两个正则动量 p_α 和 p'_α 之间的关系? 其中 p_α 和 p'_α 分别为由 L 和 L' 定义的正则动量。

(b) 经过勒让德变换得到的两个哈密顿量 H 和 H' 之间的关系?

(c) 证明: 将 H 和 H' 代入哈密顿正则方程得到的动力学方程完全等价。

2. **正则变换**。通过正则变换求解谐振子问题。系统的拉格朗日量为:

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \quad (1)$$

(a) 证明如下变换为正则变换:

$$q = Q \cos t + p \sin t, \quad p = -Q \sin t + P \cos t \quad (2)$$

(b) 试求第二类母函数 $F_2(q, P, t)$, 以及新的哈密顿函数 $\tilde{H}(Q, P, t)$ 。

(c) 通过新的哈密顿函数, 求解系统的动力学。

3. **正则变换**。对于自由度为 2 的力学系统, 正则变换要满足的条件为:

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 - P_1 dQ_1 - P_2 dQ_2 + (\tilde{H} - H)dt = dF_1(q_1, q_2, Q_1, Q_2, t) \quad (3)$$

试推导类似自由度为 1 情形下 Jacobi 行列式等于 1 的正则变换需要满足的关系式。
提示:

$$dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2 = dP_1 \wedge dQ_1 + dP_2 \wedge dQ_2 \quad (4)$$

4. **泊松括号**。考虑一个质量为 m 的质点在引力势为 $V = -k/r$ 的引力场中运动, 假设轨道平面为 $x-y$ 平面。则质点的哈密顿量为

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m} (\mathbf{p}_x^2 + \mathbf{p}_y^2) - \frac{k}{r} \quad (5)$$

其中 $\mathbf{r} = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。 z 方向的角动量为: $\mathbf{L} = \mathbf{x} \mathbf{p}_y - \mathbf{y} \mathbf{p}_x$, Laplace-Runge-Lenz 矢量 \vec{A} 位于 $x-y$ 平面内, 分量为:

$$A_x = p_y L - \frac{mkx}{r}, \quad A_y = -p_x L - \frac{mky}{r} \quad (6)$$

(a) 证明: $[\mathbf{L}, \mathbf{H}] = \mathbf{0}$, $[\mathbf{A}_x, \mathbf{H}] = \mathbf{0}$, $[\mathbf{A}_y, \mathbf{H}] = \mathbf{0}$, 即 L, \vec{A} 都为运动常数。

(b) 证明: $[\mathbf{A}_x, \mathbf{L}] = -\mathbf{A}_y$, $[\mathbf{A}_y, \mathbf{L}] = \mathbf{A}_x$, $[\mathbf{A}_x, \mathbf{A}_y] = -(2m\mathbf{H})\mathbf{L}$ 。假设质点处于束缚态 $H = -|E|$ 。简单说明新“矢量” $\vec{R} \equiv \left(\frac{\mathbf{A}_x}{\sqrt{2m|E|}}, \frac{\mathbf{A}_y}{\sqrt{2m|E|}}, \mathbf{L} \right)$ 与三维角动量有完全一致的对易关系。

(c) 证明我们新引进的“矢量” \vec{R} 大小为 $\mathbf{R}^2 = \frac{mk^2}{2|E|}$ 。

¹© 中国科学技术大学物理学院天文学系袁业飞