《理论力学A》（2021 年秋季）第二次期中考试参考答案

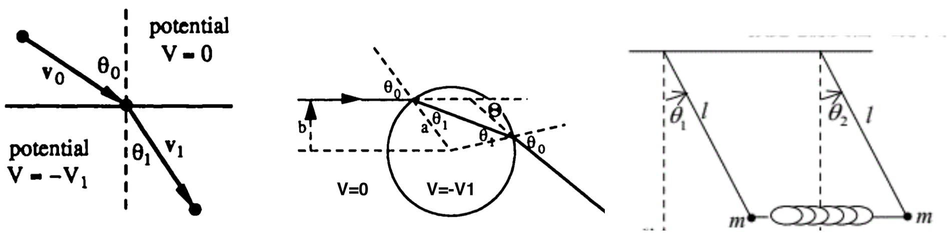

图 1: 第 3 题：粒子分别入射到半无限大平面吸引势场以及球形吸引势场中。第 4 题：耦合双单摆。

1. **诺特（Noether）定理（20 分）**。质量为 m，带电量为 e 的电荷在均匀磁场中运动，磁场方向为 z 方向，磁场强度为 B，则该电荷的拉格朗日量为：

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+\frac{eB}{2c}\left(x\dot{y}-y\dot{x}\right)\quad . \tag{1}$$

(a) 说明该系统沿着任一方向平行移动都保持不变，并找到相应的运动积分；

(b) 说明该系统存在沿着 z 轴转动的对称性，并找到相应的运动积分。

解答：

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}-\frac{eB}{2c}y,\quad p_y=\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=m\dot{y}+\frac{eB}{2c}x,\quad p_z=\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}=m\dot{z} \tag{2}$$

(a) 作如下操作：沿着任一方向 (α,β,γ) 平行移动，即：

$$x_\epsilon=x+\alpha\epsilon,\quad y_\epsilon=y+\beta\epsilon,\quad z_\epsilon=z+\gamma\epsilon \tag{3}$$

因此：

$$\delta x=\alpha,\quad \delta y=\beta,\quad \delta z=\gamma,\quad \delta\dot{x}=\delta\dot{y}=\delta\dot{z}=0 \tag{4}$$

在此平行移动操作下，

$$\delta L=\frac{d}{dt}\frac{eB}{2c}\left(\alpha y-\beta x\right)\equiv\frac{d}{dt}l \tag{5}$$

最终 Noether 荷为：

$$Q=p_x\delta x+p_y\delta y+p_z\delta z-l=\left(m\dot{x}-\frac{eB}{c}y\right)\alpha+\left(m\dot{y}+\frac{eB}{c}x\right)\beta+m\dot{z}\gamma \tag{6}$$

因为 (α,β,γ) 任意，因此：

$$m\dot{x}-\frac{eB}{c}y=const.,\quad m\dot{y}+\frac{eB}{c}x=const.,\quad m\dot{z}=const. \tag{7}$$

(b) 绕 z 轴作转动操作，即：

$$x_\epsilon=x\cos\epsilon+y\sin\epsilon,\quad y_\epsilon=-x\sin\epsilon+y\cos\epsilon,\quad z_\epsilon=z \tag{8}$$

则：

$$\delta x=y,\quad \delta y=-x,\quad \delta z=0;\quad \delta\dot{x}=\dot{y},\quad \delta\dot{y}=-\dot{x},\quad \delta\dot{z}=0. \tag{9}$$

易证，在此转动操作下，

$$\delta L = m(\dot{x}\delta\dot{x} + \dot{y}\delta\dot{y} + \dot{z}\delta\dot{z}) + \frac{eB}{2c}(\delta x\dot{y} + x\delta\dot{y} - \delta y\dot{x} - y\delta\dot{x}) = 0 \tag{10}$$

最终 Noether 荷为：

$$Q = p_x\delta x + p_y\delta y + p_z\delta z = m(x\dot{y} - x\dot{y}) - \frac{eB}{2c}(x^2 + y^2) \tag{11}$$

2. **有心力场中的运动（20 分）**。讨论质量为 m 的检验粒子在三维的谐振子势场中运动。势能函数为：

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \tag{12}$$

根据系统的对称性，请采用球坐标求解如下的问题。

(a) 试通过积分形式的轨道方程，得到粒子的轨道方程为：

$$\frac{L^2}{mE}\frac{1}{r^2} = 1 + \sqrt{1 - \frac{\omega^2 L^2}{E^2}}\cos 2(\theta - \theta_0) \tag{13}$$

其中 E, L 为能量和角动量。

(b) 试说明该轨道为几何中心为力心 ($r = 0$) 的椭圆轨道，并证明：

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 + b^2), \quad L = m\omega ab \tag{14}$$

其中 a, b 为椭圆的半长轴和半短轴。

(c) 证明轨道周期为：$T = 2\pi/\omega$，并通过积分轨道公式，得到 $r = r(t)$ 的表达式如下：

$$r^2 = \frac{E}{m\omega^2}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{\omega^2 L^2}{E^2}}\cos 2\omega(t - t_0)\right] \tag{15}$$

附：可能用到的积分：$\int^x \frac{dx'}{\sqrt{a^2 - x'^2}} = -\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$。令 $x' = a\cos\Theta$，很容易得到该积分。

解答：

(a)

$$\theta - \theta_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{2mV(r)}{L^2}}} = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{m^2\omega^2 r^2}{L^2}}} \tag{16}$$

令：$u = 1/r$，

$$\theta - \theta_0 = -\int_{u_0}^{u} \frac{udu}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2}u^2 - u^4 - \frac{m^2\omega^2}{L^2}}} = -\int_{u_0}^{u} \frac{udu}{\sqrt{\frac{m^2E^2}{L^4}\left(1 - \frac{\omega^2L^2}{E^2}\right) - \left(u^2 - \frac{mE}{L^2}\right)^2}} \tag{17}$$

令：

$$u^2 - \frac{mE}{L^2} = \frac{mE}{L^2}\sqrt{1 - \frac{\omega^2 L^2}{E^2}}\cos\Theta \tag{18}$$

易得：

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\Theta - \Theta_0) \tag{19}$$

因此：

$$u^2 - \frac{mE}{L^2} = \frac{mE}{L^2}\sqrt{1 - \frac{\omega^2 L^2}{E^2}}\cos 2(\theta - \theta_0) \tag{20}$$

注意，其中 Θ_0 已经吸收到 θ_0 中去了。进一步整理得：

$$\frac{L^2}{mE}\frac{1}{r^2}=1+\sqrt{1-\frac{\omega^2L^2}{E^2}}\cos 2(\theta-\theta_0) \tag{21}$$

(b) 在上式中，令：

$$x=r\cos(\theta-\theta_0),\quad y=r\sin(\theta-\theta_0) \tag{22}$$

则轨道方程改写为：

$$\frac{\mathrm{L}^2}{\mathrm{mE}}=\left[1+\sqrt{1-\frac{\omega^2\ \mathrm{L}^2}{\mathrm{E}^2}}\right]\mathrm{x}^2+\left[1-\sqrt{1-\frac{\omega^2\ \mathrm{L}^2}{\mathrm{E}^2}}\right]\mathrm{y}^2 \tag{23}$$

显然，该方程为椭圆方程，椭圆的半长轴和半短轴分别为：

$$a^2=\frac{L^2/mE}{1-\sqrt{1-\omega^2L^2/E^2}},\quad b^2=\frac{L^2/mE}{1+\sqrt{1-\omega^2L^2/E^2}} \tag{24}$$

易得：

$$a^2b^2=\frac{L^2}{m^2\omega^2},\quad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{2mE}{L^2} \tag{25}$$

因此：

$$E=\frac{1}{2}m\omega^2(a^2+b^2),\quad L=m\omega ab \tag{26}$$

(c) 根据开普勒第二定律，即角动量守恒定律有（T 为轨道周期）：

$$\frac{\pi ab}{T}=\frac{L}{2m}=\frac{m\omega ab}{2m}=\frac{\omega ab}{2} \tag{27}$$

因此：

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \tag{28}$$

$$t-t_0=\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{v}=\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m}-\frac{L^2}{m^2r^2}-\omega^2r^2}} \tag{29}$$

无量纲化，即：

$$2\omega(t-t_0)=\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}-\frac{L^2}{m^2\omega^2r^2}-r^2}}=\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{(a^2+b^2)^2-\frac{a^2b^2}{r^2}-r^2}} \tag{30}$$

令：$s=r^2$，整理得：

$$2\omega(t-t_0)=\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\sqrt{\frac{1}{4}(a^2-b^2)^2-[s-\frac{1}{2}(a^2+b^2)]^2}} \tag{31}$$

令：

$$s-\frac{1}{2}(a^2+b^2)=-\frac{1}{2}\cos\Theta \tag{32}$$

积分上式得到：

$$2\omega(t-t_0)=\Theta-\Theta_0 \tag{33}$$

因此，得到 (Θ_0 已吸收到 t_0 中)：

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{1}{2}(a^2+b^2)-\frac{1}{2}\cos 2\omega(t-t_0) \\ &= \frac{E}{m\omega^2}\left[1-\sqrt{1-\frac{\omega^2L^2}{E^2}}\cos 2\omega\left(t-t_0\right)\right] \end{aligned} \tag{34}$$

3. **弹性碰撞（20 分）**。

(a) 考虑一个能量为 E 的粒子从势能为零的上半平面入射到势能为 $-V_1$（吸引势）的下半平面。试证明粒子的折射规律类似光的折射定律，满足：

$$\sin\theta_0 = n\sin\theta_1 \tag{35}$$

其中 θ_0, θ_1 分别为入射角和折射角，$n = \sqrt{1+V_1/E}$ 为等效的折射率（提示：从水平和垂直两个方向的能量和动量守恒考虑）。

(b) 考虑粒子入射到一个球形的吸引势场（对 $r \leq a$, $V(r) = -V_1$; $r > a$，$V(r) = 0$;）中。如果入射粒子的碰撞参数为 b，证明散射角 Θ 与碰撞参数 b 满足如下的关系：

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{n^2\sin^2\Theta/2}{n^2+1-2n\cos\Theta/2} \tag{36}$$

(c) 计算粒子入射到球形吸引势场中的微分散射截面 $d\sigma/d\Omega$。

解答：

(a) 水平方向的动量守恒给出：

$$v_0\sin\theta_0 = v_1\sin\theta_1 \tag{37}$$

垂直方向的能量守恒给出：

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - V_1 \tag{38}$$

根据上两式，易得：

$$\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_1} = \frac{v_1}{v_0} = \sqrt{1+\frac{V_1}{E}} \equiv n \tag{39}$$

(b) 根据“折射定律”有：

$$\sin\theta_0 = \frac{b}{a}, \quad \sin\theta_1 = \frac{1}{n}\sin\theta_0 = \frac{b}{na} \tag{40}$$

散射角 Θ 为：

$$\Theta = 2(\theta_0 - \theta_1) \tag{41}$$

即：

$$\begin{aligned}\cos(\Theta/2) &= \cos\theta_0\cos\theta_1 + \sin\theta_0\sin\theta_1 \\ &\quad - \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\sqrt{1-\frac{b^2}{n^2a^2}} + \frac{b^2}{na^2}.\end{aligned} \tag{42}$$

根据上式，整理得到：

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{n^2\sin^2\Theta/2}{n^2+1-2n\cos\Theta/2} \tag{43}$$

(c) 微分散射截面的定义为：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\Theta}\left|\frac{db}{d\Theta}\right| \tag{44}$$

最终得到：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{n^2a^2}{4\cos(\Theta/2)}\frac{(n\cos(\Theta/2)-1)(n-\cos(\Theta/2))}{\left(n^2+1-2n\cos(\Theta/2)\right)^2} \tag{45}$$

4. **微振动（20 分）**。两个全同的单摆通过一个弹簧耦合在一起。单摆的摆长为 l，质量为 m。弹簧的倔强系数为 k，弹簧的原长等于两个单摆之间的距离，也就是说，两个单摆处在铅垂线方向时，就是系统的平衡位置。试求该系统微振动的频率，以及相应的简正坐标。

解答：

如图所示，选用（θ_1,θ_2）为广义坐标，则近似到二阶小量，系统的动能和势能分别为：

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta_1}^2+\dot{\theta_2}^2) \\ V &= \frac{1}{2}mgl(\theta_1^2+\theta_2^2)+\frac{1}{2}kl^2(\theta_1-\theta_2)^2 \end{aligned} \tag{46}$$

动力学方程为：

$$\begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} mgl+kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & mgl+kl^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}=0 \tag{47}$$

假设试探解的形式为：

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}\cos(\omega t+\varphi) \tag{48}$$

代入到动力学方程中，得到本征的振动频率为：

$$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}},\quad \omega_2=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}} \tag{49}$$

以及最终的振动解为：

$$\begin{aligned} \theta_1(t)=a\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+b\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \\ \theta_2(t)=a\cos(\omega_1 t+\varphi_1)-b\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \end{aligned} \tag{50}$$

进一步得到简正坐标：

$$\begin{aligned} a\cos(\omega_1 t+\varphi_1)=\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)\equiv\xi_1(t) \\ b\cos(\omega_2 t+\varphi_2)=\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)\equiv\xi_2(t) \end{aligned} \tag{51}$$

5. **哈密顿力学（20 分）**。在无摩擦的光滑水平面内有一半径为 R、圆心固定的圆盘，以角速度 ω 绕圆心转动，在转盘边缘挂了一长度为 l、质量可以忽略的轻杆，杆的末端挂了一质量为 m 的小球（像个单摆）。

(a) 写出小球 m 的哈密顿量 (哈密顿函数)H；

(b) 通过哈密顿正则方程，讨论在随着圆盘一起转动的参考系中，该小球的运动可以等价于在加速度为 $g=\omega^2R$ 的引力场中的运动（等效原理!）。

解答：

第一次期中考试的时候，我们得到粒子的动能：

$$L=\mathrm{T}=\frac{1}{2}\,\mathrm{m}\left(\dot{\mathrm{x}}^2+\dot{\mathrm{y}}^2\right)=\frac{1}{2}\,\mathrm{m}\left[\mathrm{R}^2\omega^2+2\mathrm{R}\ell\omega(\omega+\dot{\theta})\cos\theta+\ell^2(\omega+\dot{\theta})^2\right] \tag{52}$$

正则动量为：

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\mathrm{mR}\ell\omega\cos\theta+\mathrm{m}\ell^2(\omega+\dot{\theta}) \tag{53}$$

反解得：

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} - \left(\frac{R}{l}\cos\theta + 1\right)\omega \tag{54}$$

经过勒让德变换，得到系统的哈密顿量：

$$H = P_\theta\dot{\theta} - L = \frac{P_\theta^2}{2ml} - \left(\frac{R}{l}\cos\theta + 1\right)\omega P_\theta + \frac{1}{2}m\omega^2R^2(\cos^2\theta - 1) \tag{55}$$

代入哈密顿正则方程，得到：

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} - \left(\frac{R}{l}\cos\theta + 1\right)\omega \\ \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mR\omega^2 l\sin\theta - mR\omega l\sin\theta\dot{\theta} \end{aligned} \tag{56}$$

两式联立得：

$$ml^2\ddot{\theta} = -mR\omega^2 l\sin\theta \tag{57}$$

次方程与单摆运动方程一致，等价的重力加速度为：

$$g = R\omega^2 \tag{58}$$