《理论力学A》（2021 年秋季）第一次期中考试

考试时间：2021 年 10 月 22 日，9:45–11:45　(120 分钟)

姓名：_________ 学号：_________ 得分：_________

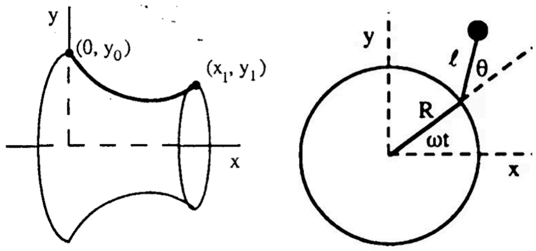

图 1: 第 1 题和第 3 题：最小回转面和转动参考系中的运动。

1. **变分法（25 分）**。讨论经典的最小回转面问题。在 $x-y$ 平面寻找连接两个固定点 $(0, y_0)$ 和 (x_1, y_1) 的平面曲线：$y = y(x)$，让该曲线绕 x 轴旋转，形成的曲面的面积最小。试根据变分原理，得到该平面曲线的函数形式。 $ds = 2\pi y \cdot dl$

2. **最小作用量原理（25 分）**。考虑某一维物理系统的运动。如果系统的物理状态由该质点的位置、速度和加速度决定（注意：仅仅是假定！考完就忘掉。），即系统的拉格朗日量为：$L = L(x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t))$，定义系统的作用量 $S[x(t)]$ 为：

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t))dt \tag{1}$$

试根据最小作用量原理 $\delta S = 0$，得到系统的动力学方程，即新的欧拉-拉格朗日方程。在等时变分过程中，在 t_1, t_2 处的 $x(t), \dot{x}(t)$ 保持不变，即：$\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = \delta \dot{x}(t_1) = \delta \dot{x}(t_2) = 0$。

3. **拉格朗日力学（25 分）**。在无摩擦的光滑水平面内有一半径为 R、圆心固定的圆盘，以角速度 ω 绕圆心转动，在转盘边缘挂了一长度为 l、质量可以忽略的轻杆，杆的末端挂了一质量为 m 的小球（像个单摆）。

   (a) 写出小球 m 的拉格朗日量；

   (b) 通过欧拉-拉格朗日方程，讨论在随着圆盘一起转动的参考系中，该小球的运动可以等价于在加速度为 $g = \omega^2 R$ 的引力场中的运动（等效原理！）。

4. **运动积分（25 分）**。带电粒子在均匀磁场中做螺旋线运动。假设带电粒子的质量为 m，电荷为 q。磁场沿着 z 方向，磁场强度为 B，采用柱坐标系 (r, θ, z)，静磁场可以用磁矢量势 $\vec{A}(r, \theta, z)$ 代替，比如在本问题中，取：$A_r = A_z = 0, A_\theta = \frac{1}{2}Br$。电荷在磁场中的势能为：$-\frac{q}{c}\vec{v} \cdot \vec{A}$，其中 $\vec{v}$ 为电荷的速度。

   (a) 验证 $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$；

   (b) 写出电荷的拉格朗日量，并代入欧拉-拉格朗日方程得到运动方程；

   (c) 试找出电荷在均匀磁场中运动时的三个首积分常数，即三个含广义速度的积分常数。

附：柱坐标中的旋度公式。

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z \tag{2}$$