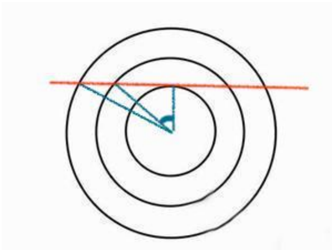
《理论力学A》（2020 年秋季）第一次期中考试

考试时间：2020 年 10 月 30 日，9:45–11:45　(120 分钟)

姓名：_________ 学号：_________ 得分：_________



1. **变分法（25 分）**。

   (a) 根据费马原理，证明光的折射定律：

   $$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{1}$$

   (b) 我们可以将太阳周围的弯曲时空等价为折射率为：$n(r) = 1 - V(r) = 1 + GM_\odot/c^2 r$ 的光学介质，其中 $V(r)$ 为太阳的引力势能。试估算星光掠过太阳表面的偏折角。**提示：**你当然可以根据费马原理直接写出光线的运动方程并求解。另一种简单的思路是，光基本走直线：$r\cos\phi = R_\odot$，其中 ϕ 在近日点取为 0。由于光的折射，从半径 $r \to r + \Delta r$ 之间，导致偏折角的变化为 $\Delta\phi$。两者应该满足如下的光的折射定律：

   $$n(r+\Delta r)\cos(\phi+\Delta\phi) \simeq n(r)\cos\phi \tag{2}$$

2. **哈密顿定理：最小作用量原理（25 分）**。考虑质量为 m 的粒子在地球表面的重力场（重力加速度为 g）中垂向运动。粒子的拉格朗日量为：

   $$L(z,\dot z) = \frac{1}{2}m\dot z^2 - mgz \tag{3}$$

   假设粒子在 $t_0 = 0$ 时的位置为 $z_0 = 0$，在 t_1 时的位置为 $z = z_1$。根据哈密顿原理，我们要猜测粒子的轨道运动方程：$z(t)$，使得作用量：

   $$S[z(t)] = \int_0^{t_1} L(z,\dot z)dt \tag{4}$$

   取极值。假设我们猜测粒子的运动方程有如下的形式：

   $$z(t) = z_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{5}$$

   其中参数 z_0 和 v_0 的选择使得 $z(t)$ 通过两个端点：$(0,0),(t_1,z_1)$。a 是一个可调参数。根据 $z(t)$ 的表达式计算作用量 S 的值。显然，S 是可调参数 a 的函数。如果 S 取极值，那么相应的 a 是多少？

3. **拉格朗日力学（25 分）**。考虑在转动参考系中质量为 m 的自由粒子的运动。假设转动参考系坐标为 (x', y', z')，实验室参考系（惯性系）坐标为 (x, y, z)，开始时两参考系坐标轴重合。转动参考系绕 z' 轴转动：

$$x' = x\cos\theta(t) + y\sin\theta(t), \quad y' = -x\sin\theta(t) + y\cos\theta(t), \quad z' = z \tag{6}$$

其中 $\theta(t)$ 为给定的函数。

(a) 写出系统在转动参考系中的拉格朗日量 $L = L(x', y', z', \dot{x}', \dot{y}', \dot{z}', t)$。

(b) 根据欧拉-拉格朗日方程写出系统在转动参考系中的动力学方程，并说明哪些项分别对应科里奥利力，离心力和欧拉力（与 $d\omega/dt$ 有关，$\omega \equiv \dot{\theta}$）。

4. **Noether 定理（25 分）**。考虑光线在平面介质中的传播。根据费马原理，光线的作用量为：

$$S[x(t), y(t)] = \frac{1}{c}\int_{t_0}^{t_1} n(x(t), y(t))\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt \tag{7}$$

(a) 假设介质的折射率 $n = n(y)$ 只与 y 坐标有关，即系统具有沿着 x 方向的平移不变性。试根据 Noether 定理，证明光的折射定律：$n\cos\theta = \text{const.}$，其中 $\cos\theta = \dot{x}/\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$。

(b) 假设介质折射率相对于原点具有旋转对称性，类似第一题的第二小题（1b）。试根据 Noether 定理证明如下的守恒量–Smith-Helmholtz 不变量：

$$n(x\sin\theta - y\cos\theta) = \text{const.} \tag{8}$$