《理论力学 A》（2023 年秋季）第一次期中考试参考答案

考试时间：2023 年 11 月 02 日，14:00–15:30　(90 分钟)

1. **变分法**。（25 分）考虑一个修正的最速下降线问题，其中粒子具有非零初始速度 v_0。试证明在这种初始条件下，最速下降线仍然为圆滚线，但曲线的尖端点（最高点）比初始的位置高 $h = v_0^2/2g$。 $v = \sqrt{v_0^2+2gy}$ -2

解：

$$t_{01} = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+(dy/dx)^2}{v_0^2+2gy}}dx \equiv \int_0^{x_1} f(y,y')dx \qquad -6 \tag{1}$$

被积函数 $f(y,y')$ 不显含 x，存在首积分：

$$H = \frac{\partial f}{\partial y'}y' - f = \frac{-1}{\sqrt{(v_0^2+2gy)(1+y'^2)}} = 常数 \qquad -6 \tag{2}$$

令：$v_0^2 = 2gh$，根据上式有：

$$(h+y)(1+y'^2) = 2a \qquad -2 \tag{3}$$

分离变量有：

$$\int_0^y \sqrt{\frac{h+y}{2a-h-y}}dy = x \qquad -2 \tag{4}$$

积分变量代换：

$$h+y = a(1-\cos\phi), \quad dy = a\sin\phi d\phi \qquad -2 \tag{5}$$

4

于是有：

$$x = a\int_{\phi_0}^{\phi}(1-\cos\phi)d\phi = a[(\phi-\sin\phi)-(\phi_0-\sin\phi_0)] \qquad -2 \tag{6}$$

上式显然是圆滚线方程，尖端点位置为：$\phi = 0$，即：

$$\begin{aligned} x &= -a(\phi_0-\sin\phi_0) \qquad (7)\\ y &= -h \equiv -v_0^2/2g \qquad (8) \end{aligned}$$

-3

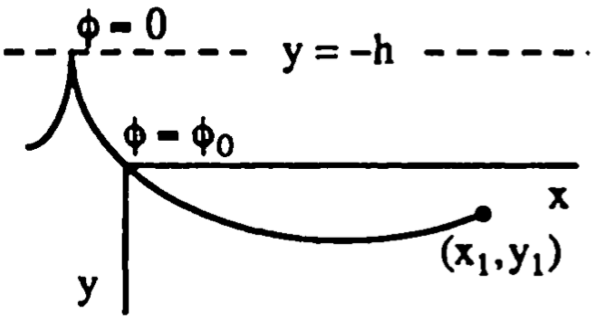

图 1: 第一题

2. **拉格朗日力学**。（25 分）考察悬挂点按 $y = h(t)$ 规律运动的简单平面摆问题，其中 $h(t)$ 是给定的时间函数。

   (a) 求单摆的拉格朗日量，取摆与垂线的夹角 θ 作为广义坐标。

   (b) 根据欧拉 - 拉格朗日方程，推导出系统的动力学方程。该结果表明单摆等价于在引力场 $g + \ddot{h}(t)$ 中的单摆一样摆动（等效原理，类似爱因斯坦电梯），其中 $\ddot{h}(t) \equiv d^2h(t)/dt^2$。

解：

13 (a)

$$x = l\sin\theta, \quad y = h(t) - l\cos\theta \qquad -4 \tag{9}$$

系统的动能为：

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{h}l\dot{\theta}\sin\theta + \dot{h}^2) \qquad -2 \tag{10}$$

系统的势能为：

$$V = mgy = mg(h - l\cos\theta) \qquad -2 \tag{11}$$

最终的拉氏量为：

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{h}l\dot{\theta}\sin\theta + \dot{h}^2) - mg(h - l\cos\theta) \qquad -5 \tag{12}$$

12 (b)

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(l^2\dot{\theta}) + \dot{h}l\sin\theta), \quad Q_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} = m\dot{h}l\dot{\theta}\cos\theta - mgl\sin\theta \qquad -4 \tag{13}$$

代入 E-L 方程，得到：$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta}\right] = 0$ -5

$$ml^2\ddot{\theta} = -m(g + \ddot{h})\sin\theta = -mg_{\text{eff}}\sin\theta \qquad -3 \tag{14}$$

其中：$g_{\text{eff}} \equiv g + \ddot{h}$。

3. **哈密顿定理**。（25 分）考察一自由粒子的运动。

   (a) 假设粒子从 $(t_0, \vec{x}_0)$ 到 $(t_1, \vec{x}_1)$ 的运动分为两段：以匀直线运动从 $(t_0, \vec{x}_0)$ 到 $(t', \vec{x}')$；以匀直线运动从 $(t', \vec{x}')$ 到 $(t_1, \vec{x}_1)$。一般来说，这两段的速度是不一样的。试写出 $S(t', \vec{x}')$ 的表达式。

   (b) 假设给定 $t_0 < t' < t_1$，通过调整 $\vec{x}'$ 的值，使得 $S(t', \vec{x}')$ 取极小值, 证明在这种情况下，粒子在这两段路径中速度相等。

解：

5

(a) 粒子的拉氏量为：$L = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{x}}^2|$，则有：

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \frac{m}{2}\frac{|\vec{x}' - \vec{x}_0|^2}{t' - t_0} + \frac{m}{2}\frac{|\vec{x}_1 - \vec{x}'|^2}{t_1 - t'} \qquad 10 \tag{15}$$

(b)

$$0 = \frac{\partial S}{\partial \vec{x}'} = m\frac{\vec{x}' - \vec{x}_0}{t' - t_0} - m\frac{\vec{x}_1 - \vec{x}'}{t_1 - t'} \qquad 10 \tag{16}$$

因此，两段路径粒子的速度相等。

4. **Noether 定理**。（25 分）一维简谐振子（SHO）的拉格朗日量为：

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \ . \tag{17}$$

(a) 证明在如下的双参数 (ϵ_1, ϵ_2) 变换下（可以理解为两个独立的单参数变换），

$$x(t;\epsilon_1,\epsilon_2) = x + \epsilon_1 \sin\omega t + \epsilon_2 \cos\omega t \ , \tag{18}$$

系统具有对称性。

(b) 根据 Noether 定理，得到系统的两个运动积分。

(c) 利用（b）的结果写出 SHO 运动方程的通解，即谐振子的通解。

解：

(a) 在参数 ϵ_1 变换下：

$$\delta x = \sin\omega t, \quad \delta\dot{x} = \omega\cos\omega t. \tag{19}$$

3

则有：

$$\begin{aligned}\delta L &= m\dot{x}\delta\dot{x} - m\omega^2 x\delta x = m\dot{x}\omega\cos\omega t - m\omega^2 x\sin\omega t \\ &= \frac{d}{dt}\left[mx\omega\cos\omega t\right] \equiv \frac{dl_1}{dt}\end{aligned} \tag{20}$$

5

即系统在 $x \to x + \epsilon_1 \sin\omega t$ 的操作下，拉氏量“不变”，具有对称性。

同理，在参数 ϵ_2 变换下：

$$\delta x = \cos\omega t, \quad \delta\dot{x} = -\omega\sin\omega t. \tag{21}$$

3

则有：

$$\begin{aligned}\delta L &= m\dot{x}\delta\dot{x} - m\omega^2 x\delta x = -m\dot{x}\omega\sin\omega t - m\omega^2 x\cos\omega t \\ &= \frac{d}{dt}\left[-mx\omega\sin\omega t\right] \equiv \frac{dl_2}{dt}\end{aligned} \tag{22}$$

5

即系统在 $x \to x + \epsilon_2 \cos\omega t$ 的操作下，拉氏量“不变”，具有对称性。

(b) 根据 Noether 定理，两个守恒量（Noether 荷）为：

$$Q_1 = p\delta x - l_1 = m\dot{x}\sin\omega t - mx\omega\cos\omega t \tag{23}$$

2

$$Q_2 = p\delta x - l_2 = m\dot{x}\cos\omega t + mx\omega\sin\omega t \tag{24}$$

2

(c) 由上两式得到：

$$m\omega x(t) = -Q_1\cos\omega t + Q_2\sin\omega t, \quad m\dot{x}(t) = Q_1\sin\omega t + Q_2\cos\omega t. \tag{25}$$

上两式即为 SHO 的标准解。

5