（装订线内不要答题）

中国科学技术大学物理学院

2021～2022 学年第一学期考试试卷

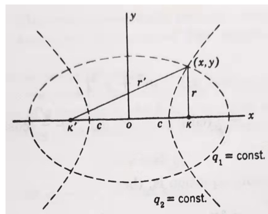
■A 卷　　□B 卷

课程名称：　理论力学　　课程代码：

开课院系：　物理学院　　考试形式：闭卷

姓　名：＿＿＿＿＿　学　号：＿＿＿＿＿　专　业：＿＿＿＿＿

题 号	一	二	三	四	五				总 分
得 分									



一、（25 分）讨论检验粒子（质量为m）在两个固定粒子（k,k'）力场中的运动（如图所示）。由于问题的对称性，我们先在oxy平面讨论之。两个固定粒子的坐标分别为：$(c,0),(-c,0)$，假设两个固定粒子对检验粒子施加的都是向心力，检验粒子的势能为：$V=+\frac{k}{r}+\frac{k'}{r'}$，其$k,k'$为常数，$r,r'$分别为：

$r=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，$r'=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$. 根据问题的特点，进一步引入椭圆坐标系（q_1,q_2）：

$x=c\cosh q_1\cos q_2$，$y=c\sinh q_1\sin q_2$。

(1) 采用椭圆坐标，写出检验粒子的哈密顿量$H(q_1,q_2,p_1,p_2)$；

(2) 根据哈密顿正则方程，写出粒子的运动方程。不用解出p

二、（18 分）谐振子的哈密顿量为：$H(q,p)=\frac{1}{2}(p^2+\omega^2q^2)$。如果我们选第一类生成函数（或称母函数）为：$F_1(q,Q)=\frac{1}{2}\omega q^2\cot(2\pi Q)$。

(1) 写出与母函数F_1对应的正则变换；即 p=　　t=

(2) 写出新的哈密顿量$\widetilde{H}(Q,P)$；

(3) 根据新的哈密顿量写出谐振子的解：$q(t),p(t)$。

三、（16 分）某单自由度体系的哈密顿函数为$H=\frac{p^2}{2}+\frac{1}{q^2}$，假设$q(t=0)=1,p(t=0)=0$，

(1) 试根据哈密顿正则方程，写出体系的动力学方程；

(2) 试利用哈密顿-雅克比（Hamilton-Jacobi）方法求解$q(t)$。

四、（16 分）三维谐振子系统的哈密顿函数为

$$H=\frac{\vec{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}k\vec{x}^2$$

已知二次型力学量G

$$G \overset{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^{3} \left\{ \frac{1}{2} A_{ij} p_i p_j + \frac{1}{2} B_{ij} x_i x_j + C_{ij} x_i p_j \right\}$$

是守恒量，即：$\frac{dG}{dt} = 0$，其中的系数矩阵A, B, C是常数，且A, B是对称矩阵。

(1)利用泊松定理判断：这三个系数矩阵必须满足什么条件？

(2)由上面的结论，推测坐标和动量的二次型中有哪几个线性无关的守恒量，即由 $x_i x_j, p_i p_j, x_i p_j$线性组合的物理量中有哪几种组合量为守恒量（除了$G$）？

五、(25 分）拉格朗日陀螺为在重力场中的对称刚体（$I_1 = I_2 \neq I_3$）。它的拉格朗日量为：$L = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2 - mgl\cos\theta$ 。

(1) 根据L的对称性，找出系统的三个首积分并说明理由；

(2) 根据刚体的欧拉动力学方程，证明广义动量p_φ和p_ψ为运动积分。

进动　章动

附录：可能用到的公式

双曲函数的定义： $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2;\ \cosh x = (e^x + e^{-x})/2.$　**恒等式：** $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$

欧拉-拉格朗日方程： $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$；**哈密顿正则方程：** $\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$

泊松括号的定义： $[f(q_\alpha, p_\alpha; t), g(q_\alpha, p_\alpha; t)] \equiv \sum_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\right)\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}$

泊松定理： $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H]$

总角度速度$\vec{\omega}$在本体坐标系（随动惯性系）中的分量:

$$\omega_x = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi\ ;\ \ \omega_y = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi\ ;\ \ \omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}$$

刚体运动的欧拉动力学方程:

$$I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = N_1,\ I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = N_2,\ I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = N_3$$

正则变换（第一类母函数）:

$$dF_1(q, Q, t) = pdq - PdQ + \frac{\partial F_1}{\partial t}dt$$

哈密顿-雅克比方程： $\frac{\partial}{\partial t}S(q_\alpha, t) + H\left(q_\alpha, \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, t\right) = 0$

$$\mathrm{S} = -\mathrm{Et} + \mathrm{W}(\mathrm{q}_\alpha) + \mathrm{A},\ H\left(q_\alpha, \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}\right) = E$$

在笛卡尔坐标系(x, y, z)，柱坐标系(r, ϕ, z)以及球坐标系(r, θ, ϕ)中两点之间的距离分别为:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dx^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2$$

参考答案

一、解答：

（1）根据坐标变换，易得：

$$V=\frac{k}{c}(\cosh q_1-\cos q_2)^{-1}+\frac{k'}{c}(\cosh q_1+\cos q_2)^{-1}$$

$$T=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\frac{mc^2}{2}(\cosh^2 q_1-\cos^2 q_2)\left(\dot{q_1}^2+\dot{q_2}^2\right)$$

正则动量的定义为：

$$p_1=\frac{\partial L}{\partial \dot{q_1}}=mc^2(\cosh^2 q_1-\cos^2 q_2)\dot{q_1}$$

$$p_2=\frac{\partial L}{\partial \dot{q_2}}=mc^2(\cosh^2 q_1-\cos^2 q_2)\dot{q_2}$$

根据勒让德变换：

$$H=p_1\dot{q_1}+p_2\dot{q_2}-L$$

得到系统的哈密顿量为：

$$H=\frac{1}{2mc^2}(\cosh^2 q_1-\cos^2 q_2)^{-1}(p_1^2+p_2^2)+\frac{k}{c}(\cosh q_1-\cos q_2)^{-1}+\frac{k'}{c}(\cosh q_1+\cos q_2)^{-1}$$

（2）代入哈密顿正则方程，得到如下的动力学方程：

$$\dot{q_1}=\frac{\partial H}{\partial p_1}=\frac{1}{mc^2}(\cosh^2 q_1-\cos^2 q_2)^{-1}p_1,$$

$$\dot{p_1}=-\frac{\partial H}{\partial q_1}=\frac{1}{2mc^2}(\cosh^2 q_1-\cos^2 q_2)^{-2}\sinh 2q_1\,(p_1^2+p_2^2)+\frac{k}{c}(\cosh q_1-\cos q_2)^{-2}\sinh q_1$$

$$+\frac{k'}{c}(\cosh q_1+\cos q_2)^{-2}\sinh q_1$$

$$\dot{q_2}=\frac{\partial H}{\partial p_2}=\frac{1}{mc^2}(\cosh^2 q_1-\cos^2 q_2)^{-1}p_2,$$

$$\dot{p_2}=-\frac{\partial H}{\partial q_2}=\frac{1}{2mc^2}(\cosh^2 q_1-\cos^2 q_2)^{-2}\sin 2q_2\,(p_1^2+p_2^2)+\frac{k}{c}(\cosh q_1-\cos q_2)^{-2}\sin q_2$$

$$-\frac{k'}{c}(\cosh q_1+\cos q_2)^{-2}\sin q_2$$

二、解答：

（1）由母函数的微分关系：

$$dF_1(q,Q,t)=pdq-PdQ+\left(\widetilde{H}-H\right)dt$$

易得：

$$p=\frac{\partial F_1}{\partial q}=\omega q\cot(2\pi Q)\,,\qquad P=-\frac{\partial F_1}{\partial Q}=\pi\omega q^2 cosec^2(2\pi Q)$$

整理后可得相应的正则变换为：

$$q=\left(\frac{P}{\pi\omega}\right)^{1/2}\sin(2\pi Q)\,,\qquad p=\left(\frac{P\omega}{\pi}\right)^{1/2}\cos(2\pi Q)$$

（2）新的哈密顿函数为：

$$\widetilde{H}(Q,P)=\frac{\partial F_1}{\partial t}+H=H\left(q(Q,P),p(Q,P)\right)=\frac{\omega}{2\pi}P\equiv \nu P$$

其中$\nu\equiv\frac{\omega}{2\pi}$为谐振子的频率。

（3）根据哈密顿正则方程有：

$$\dot{Q}=\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial P}=\nu,\qquad \dot{P}=-\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial Q}=0$$

积分上两式：

$$Q(t)=\nu(t-t_0),\qquad P(t)=const.=\frac{E}{\nu}$$

代入正则变换，得：

$$q(t)=a\sin\omega(t-t_0),\qquad p(t)=a\,\omega\cos\omega(t-t_0)$$

其中为a谐振子的振幅，定义为：

$$a\equiv\frac{\sqrt{2E}}{\omega}$$

三、解答：

（1）

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}=p,\quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}=\frac{2}{q^3}$$

（2）哈密顿-雅可比方程为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2+\frac{1}{q^2}=P$$

所以

$$S=W-Pt=\int\sqrt{2\left(P-\frac{1}{q^2}\right)}dq-Pt$$

因而

$$Q=\frac{\partial S}{\partial P}=\int\frac{dq}{\sqrt{2\left(P-1/q^2\right)}}-t=\frac{\sqrt{Pq^2-1}}{\sqrt{2}P}-t$$

利用初始条件得到$P=H=1$，$Q=0$。由此给出

$$t=\sqrt{\frac{q^2-1}{2}}$$

由此得到$q(t)=\sqrt{1+2t^2}$。

四、解答：

（1）由泊松定理，

$$\left[\frac{p^2}{2m},G\right]=\sum_{i=1}^{3}\frac{p_i}{m}[p_i,G]=-\sum_{i=1}^{3}\frac{p_i}{m}\frac{\partial G}{\partial x_i}=-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{3}\left(B_{ij}p_ix_j+C_{ij}p_ip_j\right)$$

$$\left[\frac{1}{2}kx^2,G\right]=k\sum_{i=1}^{3}x_i[x_i,G]=k\sum_{i=1}^{3}x_i\frac{\partial G}{\partial p_i}=k\sum_{i=1}^{3}\left(A_{ij}x_ip_j+C_{ij}x_ix_j\right)$$

$$\frac{dG}{dt}=[G,H]=-kA_{ij}x_ip_j+\frac{1}{m}B_{ij}p_ix_j+\frac{1}{m}C_{ij}p_ip_j-kC_{ij}x_ix_j=0\Longrightarrow B=kmA,C^T=-C$$

即A,B必须是成正比的对称矩阵，

$$B=mkA$$

并且C是反对称矩阵。

（2）共有 9 个守恒量，分别为对称张量

$$\frac{1}{2m}p_ip_j+\frac{1}{2}kx_ix_j$$

有 6 个独立分量；以及反对称张量

$$x_ip_j-x_jp_i$$

有 3 个独立分量（是角动量）。

五、解答：

(1)拉格朗日量L不显含时间，因此哈密顿量$H=E$为守恒量。另外，ψ,φ为循环坐标，因此正则动量p_ψ,p_φ为守恒量，即：

$$\frac{I_1}{2}\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)+\frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta\right)^2-mgl\cos\theta=E=const.$$

$$p_\psi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}=I_3\left(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta\right)=const.$$

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=(I_3\cos^2\theta+I_1\sin^2\theta)\dot{\varphi}+I_3\dot{\psi}\cos\theta=const$$

(2)力矩的方向显然同时垂直于刚体的z轴和实验室系的z'方向，因此，

$$N_3=0,N_{3'}=0$$

根据欧拉动力学公式有：

$$\boldsymbol{I_3\dot{\omega}_3-(I_1-I_2)\omega_1\omega_2=\ \ I_3\dot{\omega}_3=0}$$

即:

$$p_\psi=L_3=I_3\omega_3=I_3\left(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta\right)=const.$$

另外，

$$\frac{d}{dt}(L_{3'})=N_{3'}=0$$

易得：

$$p_\varphi=L_{3'}=(I_3\cos^2\theta+I_1\sin^2\theta)\dot{\varphi}+I_3\dot{\psi}\cos\theta=const.$$

其中刚体绕实验室系的z'轴的转动惯量为：

$$I_{3'}=I_3\cos^2\theta+I_1\sin^2\theta$$