《理论力学A》（2021 年秋季）第一次期中考试参考答案

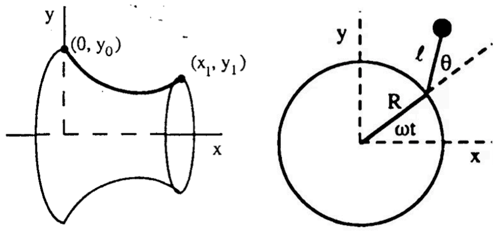

图 1: 第 1 题和第 3 题：最小回转面和转动参考系中的运动。

1. **变分法（25 分）**。讨论经典的最小回转面问题。在 $x-y$ 平面寻找连接两个固定点 $(0, y_0)$ 和 (x_1, y_1) 的平面曲线：$y = y(x)$，让该曲线绕 x 轴旋转，形成的曲面的面积最小。试根据变分原理，得到该平面曲线的函数形式。

   解答：

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y ds = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+(dy/dx)^2}dx \tag{1}$$

   即：

$$f(y, y', x) = 2\pi y\sqrt{1+(y')^2} \tag{2}$$

   这里 $y' \equiv dy/dx$。因为 f 不显含 x，存在首积分：

$$H = y'\frac{\partial f}{\partial y'} - f = -\frac{2\pi y}{\sqrt{1+(y')^2}} = \text{const.} \tag{3}$$

   不失一般性，令：

$$\frac{y}{\sqrt{1+(y')^2}} = a \tag{4}$$

   这里积分常数 a 的几何意义是 y 的最小值。进一步得到：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}\sqrt{y^2-a^2} \tag{5}$$

   看出 a 为 min

   积分上式，得到：

$$\frac{x-b}{a} = \int_a^y \frac{dy}{\sqrt{y^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{y}{a} \tag{6}$$

   显然，这里积分常数 b 的几何意义是 y 取最小值时的 x 值。最终得到曲线的形状为：

$$y = a\cosh(x-b)/a \tag{7}$$

2. **最小作用量原理（25 分）**。考虑某一维物理系统的运动。如果系统的物理状态由该质点的位置、速度和加速度决定（注意：仅仅是假定！考完就忘掉。），即系统的拉格朗日量为：$L = L(x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t))$，定义系统的作用量 $S[x(t)]$ 为：

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t))dt \tag{8}$$

   试根据最小作用量原理 $\delta S = 0$，得到系统的动力学方程，即新的欧拉-拉格朗日方程。在等时变分过程中，在 t_1, t_2 处的 $x(t), \dot{x}(t)$ 保持不变，即：$\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = \delta\dot{x}(t_1) = \delta\dot{x}(t_2) = 0$。

解答：

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\delta x+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x}+\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\delta\ddot{x}\right)dt \tag{9}$$

分步积分并利用边界条件得到：

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}+\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right)\delta x dt \tag{10}$$

因为 δx 任意，因此得到新的欧拉-拉格朗日方程：

$$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}+\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}=0 \tag{11}$$

3. **拉格朗日力学（25 分）**。在无摩擦的光滑水平面内有一半径为 R、圆心固定的圆盘，以角速度 ω 绕圆心转动，在转盘边缘挂了一长度为 l、质量可以忽略的轻杆，杆的末端挂了一质量为 m 的小球（像个单摆）。

   (a) 写出小球 m 的拉格朗日量；

   (b) 通过欧拉-拉格朗日方程，讨论在随着圆盘一起转动的参考系中，该小球的运动可以等价于在加速度为 $g=\omega^2R$ 的引力场中的运动（等效原理!）。

   解答：

   坐标：

$$x=R\cos\omega t+l\cos(\omega t+\theta),\quad y=R\sin\omega t+l\sin(\omega t+\theta) \tag{12}$$

   坐标速度：

$$\dot{\mathbf{x}}=-\mathrm{R}\omega\sin\omega t-\ell(\omega+\dot{\theta})\sin(\omega t+\theta),\quad \dot{y}=R\omega\cos\omega t+\ell(\omega+\dot{\theta})\cos(\omega t+\theta) \tag{13}$$

   粒子的动能：

$$\mathrm{T}=\frac{1}{2}\ \mathrm{m}\left(\dot{\mathrm{x}}^2+\dot{\mathrm{y}}^2\right)=\frac{1}{2}\ \mathrm{m}\left[\mathrm{R}^2\omega^2+2R\ell\omega(\omega+\dot{\theta})\cos\theta+\ell^2(\omega+\dot{\theta})^2\right] \tag{14}$$

   代入欧拉-拉格朗日方程：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=\mathrm{mR}\ell\omega\cos\theta+\mathrm{m}\ell^2(\omega+\dot{\theta}),\quad \frac{\partial T}{\partial\theta}=-\mathrm{mR}\ell\omega(\omega+\dot{\theta})\sin\theta\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial\dot{\theta}}\right)=-\mathrm{mR}\ell\omega\dot{\theta}\sin\theta+\mathrm{m}\ell^2\ddot{\theta}\end{aligned} \tag{15}$$

   最终得到动力学方程：

$$m\ell^2\ddot{\theta}=-mR\omega^2\ell\sin\theta \tag{16}$$

   该结果与在重力场中粒子的运动方程一致（$g=\omega^2R$）!

4. **运动积分（25 分）**。带电粒子在均匀磁场中做螺旋线运动。假设带电粒子的质量为 m，电荷为 q。磁场沿着 z 方向，磁场强度为 B，采用柱坐标系 (r,θ,z)，静磁场可以用磁矢量势 $\vec{A}(r,\theta,z)$ 代替，比如在本问题中，取：$A_r=A_z=0, A_\theta=\frac{1}{2}Br$。电荷在磁场中的势能为：$-\frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}$，其中 $\vec{v}$ 为电荷的速度。

   (a) 验证 $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$；

   (b) 写出电荷的拉格朗日量，并代入欧拉-拉格朗日方程得到运动方程；

(c) 试找出电荷在均匀磁场中运动时的三个首积分常数，即三个含广义速度的积分常数。

解答:

(a) 容易验证 $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = B\vec{e}_z$；

(b)

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \frac{q}{c}\vec{v} \cdot \vec{A} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q}{2c}Br^2\dot{\theta} \tag{17}$$

代入欧拉-拉格朗日方程得到:

r 方向的运动方程:

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + \frac{q}{c}Br\dot{\theta} \tag{18}$$

θ 方向的运动方程:

$$p_\theta \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} + \frac{q}{2c}Br^2 = \text{const.} \tag{19}$$

r 方向的运动方程:

$$p_z \equiv \frac{\partial L}{\partial z} = m\dot{z} = \text{const.} \tag{20}$$

(c) 试找出电荷在均匀磁场中运动时的三个首积分常数，即三个含广义速度的积分常数。上面已得到两个运动积分。L 不显含时间 t，因此，哈密顿量守恒:

$$H = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) = \text{const.} \tag{21}$$

H, p_θ, p_z 守恒，分别对应如下对称性：时间平移不变性、沿 z 轴转动不变性以及沿着 z 轴位置平移不变性。