理論力学总复习：一个List for test.

一、Lagrangian formalism.

1. 最小作用量原理　拉氏方程.

2. 经典力学下的拉氏量：$\mathcal{L}=T-U$　$\mathcal{L}\equiv\mathcal{L}(q,\dot{q},t)$

2. 经典力学下的拉氏量：此时应注意广义 (通常 $U\equiv U(q,t)$，但也可能为 $U\equiv U(q,\dot{q},t)$，此时应注意广义动量)

3. 拉氏力学解决动力学问题.

二、Nother Th.

1. 对称性，诺特定理的推导.

2. 能量、动量、角动量

3. 题目：寻找系统中的守恒量.

三、Hamiltonian formalism

1. 勒让德变换，哈密顿量 $H=p_i\dot{q}^i(p,q,t)-\mathcal{L}$

1. 最小作用量原理推导哈密顿量与正则方程：

$$\dot{p}_\mu=-\frac{\partial H}{\partial q^\mu}\qquad \dot{q}^\mu=\frac{\partial H}{\partial p_\mu}$$

(不是列出来就完事，要会解！)，e.g. 简谐振子).

2. 正则变换与母函数.

(1) 如何验证一个正则变换？(保辛、保括号、$\frac{\partial(p,q)}{\partial(P,Q)}=1$)

(2) 母函数的微分关系式：

$p_\mu dq^\mu-P_\mu dQ^\mu+(K-H)dt=dF_1$　$F_1\equiv F_1(q,Q,t)$

$p_\mu dq^\mu+Q^\mu dP_\mu+(K-H)dt=dF_2$　$F_2\equiv F_2(q,P,t)$

直接勾式：勒让德变换.

$F_2=F_1+PQ$　$F_3=F_1-pq$　$F_4=F_2-pq=F_1+PQ-pq$ ...

是否存在母函数：可逆性　$F:(p,q)\to(P,Q)$　$\det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q^\mu\partial P_\nu}\right)\neq0$

$-F\ (P,Q)\to(p,q)$

更简单的方法：是否包含全部信息？

$p,q\to P,Q$　若取 $F_2(q,P,t)$　P 中必须包含 p，即 $\frac{\partial P}{\partial p}\neq0$.

依此类推.

(3) 母函数的求解.(例题：以 F_2 为例).

$\cancel{\frac{\partial F_2}{\partial q^\mu}=p_\mu\quad\frac{\partial F_2}{\partial}}$

3. 泊松括号.

(1) $[A,B]=\cancel{\frac{\partial}{\partial p_\mu}A\frac{\partial}{\partial q^\mu}B-\frac{\partial}{\partial q^\mu}A\frac{\partial}{\partial p_\mu}}\ \overbrace{\frac{\partial}{\partial q^\mu}A\frac{\partial}{\partial p_\mu}B}^{qp}-\overbrace{\frac{\partial}{\partial p_\mu}A\frac{\partial}{\partial q^\mu}B}^{pq}$.

(2) 基本性质：① 乘法：$[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B$

② 偏导：$\frac{\partial}{\partial x}[A,B]=[\frac{\partial A}{\partial x},B]+[A,\frac{\partial B}{\partial x}]$

(对 t 也适用).

③ Jacobbi 恒等式.

(3) 运动方程：$\frac{dG}{dt}=\frac{\partial G}{\partial t}+[G,H]$

(4) 守恒与泊松定理：

i) $\frac{\partial G}{\partial t}=-[G,H]$，即 $\frac{dG}{dt}=0\Leftrightarrow G$ 守恒

ii)* 连续对称性由 G 生成 $\Leftrightarrow G$ 守恒

iii) A 守恒，B 守恒 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $[A,B]$ 守恒.

DATE 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 The month
Mon Tue Wed Thu Fri Sat Sun

(3) 几个常见的泊松括号.

~~(i) 时间演化: $[G,H]$~~

~~(ii) 角动量: $[L_i,L_j]$~~

(i) 基本括号: $[q^i,q^j]=0$ $[p_i,p_j]=0$ $[q^i,p_j]=\delta^i_j$

(ii) 时间演化: $[G,H]$

(iii) 角动量 / Longe-Lenz 矢量: $[L_i,L_j]=\epsilon_{ijk}L_k$

~~束缚态的质点: R I~~

(iv) 简谐振子.

4. 哈密顿-Jacobbi 方程.

(1) 计算流程 (i) 写出 $H=H(q,p,t)$

(ii) $H(q,\frac{\partial S}{\partial q},t)-(\frac{\partial S}{\partial t})_q=0$

$[dS=(\frac{\partial S}{\partial q})_t dq+(\frac{\partial S}{\partial t})_q dt=pdq-Hdt]$

(iii) 分离变量法分块求解得到 S.

(α) 若 $(\frac{\partial H}{\partial t})_{p,q}=0$, 则可分离出 $-Et$, 即 $S=W(q)-Et$

此时方程变为 $H(q,\frac{\partial W}{\partial q})=E$.

(β) 若有循环坐标, 可分解出 pdq 项.

(-H 是 t 对应的"广义动量")

(2) 常见坐标下分块 (U 不含 t 项)

柱坐标: $T=\frac{1}{2m}p_r^2+\frac{1}{2m\rho^2}p_\phi^2+\frac{1}{2m}p_z^2$

$\Rightarrow S=\int\cdots d\rho+\int\cdots dz+L\phi-Et$

DATE 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 The month
Mon Tue Wed Thu Fri Sat Sun

球坐标: $T=\frac{1}{2m}p_r^2+\frac{1}{2mr^2}p_\theta^2+\frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}p_\phi^2$

步骤: $W=W_r+W_\theta+W_\phi$

$(\frac{\partial W_\phi}{\partial\phi})^2=L_z^2\Rightarrow W_\phi=L_z\phi$ $\quad(\frac{\partial W_\theta}{\partial\theta})^2+\frac{1}{\sin^2\theta}L_z^2=J^2$

$\Rightarrow W_\theta=\int d\theta\sqrt{J^2-\frac{1}{\sin^2\theta}L_z^2}$

$\frac{1}{2m}[(\frac{\partial W_r}{\partial r})^2+\frac{J^2}{r^2}]+U(r)=E\Rightarrow W_r=\int dr\cdots$

(iv) S 中含有常数 $C_1,C_2\cdots C_s$ 个常数, 把它们当作广义动量 $P_1,P_2\cdots P_s$, 写出 $(\frac{\partial S}{\partial P_i})=Q^i$

(v) 用 Q^i P_i 反解出所有 $q^i(t)$ ✓.

四、刚体.

~~1. 刚体的基本性质~~

~~(1) 自由度~~

1. 转动惯量

(1) 基本定义: $I_{ij}=\int dm\,(r^2\delta_{ij}-x_ix_j)$

$L_i=I_{ij}\omega_j$ $\quad T=\frac{1}{2}I_{ij}\omega_i\omega_j$

(2) 惯量主轴及其求法.

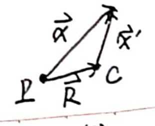
$\det(I-\lambda\mathbb{1})=0\Rightarrow\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3=I_1,I_2,I_3$

代入 $I\vec{n}=\lambda\vec{n}$ (或 $I_{ij}n_j=\lambda n_i$) 解出三个方向 $\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3$.

(两个特征值相等, 则惯量椭球对某轴有对称性, 随手取两个正交轴都行).

(3) 平行轴定理.

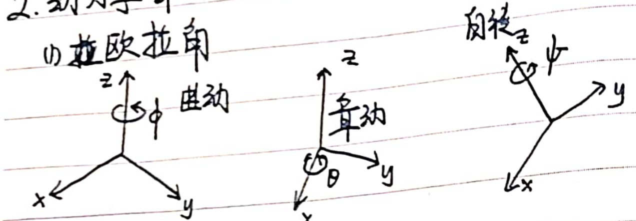
对任意一点 L, 有:



$$I_{ij}^{(P)} = I_{ij}^{(C)} + m(R^2\delta_{ij} + R_iR_j)$$ 由.

2. 动力学部分.

(1) 拉欧拉角



(2) 角速度分量投影.

随动系 $\vec{\omega}_\phi = [\sin\theta\sin\psi, \sin\theta\cos\psi, \cos\theta]\dot{\phi}$

$\vec{\omega}_\theta = [\cos\psi, -\sin\psi, 0]\dot{\theta}$

$\vec{\omega}_\psi = [0, 0, 1]\dot{\psi}$

实验系 $\boxed{\cancel{\vec{\omega}_\phi = [0, 0, 1]\dot{\phi}}}$

$\cancel{\vec{\omega}_\theta = [\cos\phi, \sin\phi, 0]\dot{\theta}}$

$\vec{\omega} = [\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi, -\dot{\psi}\sin\theta\cos\psi, \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}]$

(3) 拉氏量:

$T = \frac{1}{2}I_{ij}\omega_i\omega_j = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T I\omega$

$T = T_c + T_{rotate} = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}^T I^{(c)}\vec{\omega}$

$\mathcal{L} = T - U.$

(4) $I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = N_1$ 交换

$I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = N_2$ 交换 ← 随动系.

$I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = N_3$

(5) 自由陀螺与拉格朗日陀螺.

HW13.

1. $L_i = I_{ij}\omega_j = I_1\omega_1\hat{e}_1 + I_2\omega_2\hat{e}_2 + I_3\omega_3\hat{e}_3$

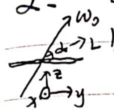
$= I_1(\omega_1\hat{e}_1 + \omega_2\hat{e}_2) + I_3\omega_3\hat{e}_3.$

$\cancel{= I_1[\sin\theta\sin\psi\dot{\phi} + \cos\psi\dot{\theta}]}$

$(\vec{L}\times\vec{\omega})_i = \epsilon_{ijk}I^{(j)}\omega_j\omega_k \Rightarrow (\vec{L}\times\vec{\omega})_3 = \epsilon_{3jk}I^{(j)}\omega_j\omega_k = 0.$

即 $(\vec{L}\times\vec{\omega})\cdot\hat{e}_3 = 0$ 证毕.

2. 随动系: $\omega_{10} = 0$ $\omega_{20} = \omega_0\cos\alpha$ $\omega_{30} = \omega_0\sin\alpha$



由对称陀螺的解: $\omega_2 = \omega_0\cos\alpha\cos\Omega t$ $\quad \Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_{30} = \omega_{30}.$

$\omega_1 = \omega_0\cos\alpha\sin\Omega t$

以初态L的方向为z轴, 代入可以解得 $\dot{\phi} = (\omega_{30} + \Omega)\sec\theta_0$

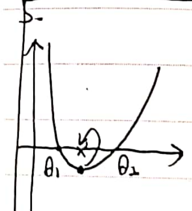
而又有 $L = \frac{1}{4}mr^2\omega_0\cos\alpha\,\hat{e}_2 + \frac{1}{2}mr^2\omega_0\sin\alpha\,\hat{e}_3$

$= \frac{1}{4}mr^2\omega_0(\cos\alpha\,\hat{e}_2 + 2\sin\alpha\,\hat{e}_3)$

故而 $\tan\theta_0 = 2\tan\alpha.$, 代入即有 $\dot{\phi} = 2\omega_0\sin\alpha\tan^{-1}(2\tan\alpha).$

~~4. 取某一时刻一个随动系与~~

5.



$\frac{\partial V_{eff}}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow \frac{2(J_3' - J_3\cos\theta)\cdot(J_3\sin\theta)}{2I_1\sin^2\theta} - \frac{2(J_3' - J_3\cos\theta)^2\cos\theta}{2I_1\sin^3\theta}$

$-mgl\sin\theta = 0$

$\Rightarrow \frac{(J_3' - J_3\cos\theta)}{I_1\sin^3\theta}\left[J_3\sin^2\theta - (J_3' - J_3\cos\theta)\cos\theta\right] = mgl\sin\theta$

$\Rightarrow$

角速度: $\frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 = E \Rightarrow \dot{\theta} = \pm\frac{2E}{I_1}$

一些重要的作业题/考题.

HW2. Q2. 拉氏量性质

HW5. Q2. "线性组合"的动量

HW6 Q4. Longe-Renz 矢量.

HW9. Q1. $q'=q$ $p'\neq p$ 的坐标变换.

Q2. 正则变换标准题

Q4. 大计算量泊松括号(角动量、Longe-Renz).

HW10 Q1 Q_2 H-J方程标准题

Q4. 位力定理.

HW12 Q_1 H-J方程典型题.

Q_6 锥型绕滚问题

Q_7 找惯量主轴.

HW13 Q_2 自由对称刚体的运动.

Q4 锥~~形~~型绕滚问题.

Q_5 拉格朗日陀螺

HW7 Q4 Q5 最基本的多自由度小振动.

MT2 Q1: 你可以想到的一切小振动内容

Q2 简谐振动中常见的泊松括号

Q3 无第一类生成函数.

Q4 小心 $\frac{\partial L}{\partial v}\neq mv$.

FT 2021-2022 Q_1 电磁场中的粒子

Q4 复杂的泊松括号.

FT 2019-2020 Q_2 生成函数存在性、

FT 2020-2021 Q_2 规范变换与H-J方程。