《理论力学A》（2023 年秋季）平时作业三

第一题和第二题 9 月 28 日（星期四）交。第三题和第四题 10 月 10 日（星期四）交。

1. 假设地球内部的物质是均匀分布的，取地球中心的引力势能为零，则地球内部单位质量的引力势能 $V(r)$ 为 $V(r) = \frac{1}{2}(g/R)r^2$，其中 g 为地球表面的重力加速度，R 为地球的半径，r 为地球内部距离地球中心的距离。

   (a) 假设从地球表面的两端（例如 A、B 两点）建造一条直线隧道，一个检验粒子从 A 点开始静止无摩擦地下落到 B，试证明该运动为简谐振动，粒子从 A 下落到 B 所需的时间为：$\tau_0 = \pi\sqrt{R/g} \simeq 42.2$ 分钟，且该结果与 A、B 两点的位置无关。

   (b) 考虑在 A、B 建造一条所需时间最短的隧道，假设该隧道的方程为：$r = r(\theta)$，试通过变分法得到 $r(\theta)$ 所满足的方程，并得到如下的首次积分方程：

   $$\frac{r^2}{\sqrt{(dr/d\theta)^2 + r^2}\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{r_0}{\sqrt{R^2 - r_0^2}} \ , \tag{1}$$

   其中 r_0 为隧道距离地球中心最近的点。进一步积分上式，得到：

   $$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{R}{r_0}\sqrt{\frac{r^2 - r_0^2}{R^2 - r^2}}\right) - \frac{r_0}{R}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{r^2 - r_0^2}{R^2 - r^2}}\right) \tag{2}$$

   其中已取 r_0 处 $\theta = 0$。易证，A、B 两点的角度差为：

   $$\Delta\theta = \pi(1 - r_0/R) \ . \tag{3}$$

   (c) 引入参数：

   $$\tan\frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{r^2 - r_0^2}{R^2 - r^2}} \tag{4}$$

   因此，在 $r = r_0$ 处，$\phi = 0$。在 A、B 两点：$\phi = \pm\pi$。证明隧道方程可以取如下的形式：

   $$r^2 = \frac{1}{2}\left(R^2 + r_0^2\right) - \frac{1}{2}\left(R^2 - r_0^2\right)\cos\phi \tag{5}$$

   $$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{R}{r_0}\tan\frac{\phi}{2}\right) - \frac{r_0}{2R}\phi \ . \tag{6}$$

   证明该方程其实为内摆线（圆内圆滚线）方程：是半径为 $a = \frac{1}{2}(R - r_0)$ 的小圆沿着半径为 R 的大圆在其内部无滑动的滚动过程中，小圆上某固定点的轨迹方程。

   (d) 考虑粒子从 A 到 B 参量随时间的变化。证明：$\phi = 2\pi(t/\tau)$，其中 $\tau = \tau_0\sqrt{1 - (r_0/R)^2}$ 是粒子从 A 到 B 所需的时间。试比较一下从合肥到北京两点之间 τ 与 τ_0 的差别。

2. 测地线方程。在三维欧几里得空间中，如果我们选取球坐标：$x^i = (x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, \phi)$，其中 $i = 1, 2, 3$。则空间中两相邻点之间的距离为：

   $$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \equiv g_{ij}dx^i dx^j \tag{7}$$

   其中 $g_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ 称作为度规。下面我们讨论一般的 n 维空间，假设该空间的度规为 (希腊字母取 $1, 2, \cdots, n$): $g_{\mu\nu}(x^\gamma)(\mu, \nu, \gamma = 1, 2, \cdots, n)$，则经过给定的两点 A, B 之间的曲线 $x^\mu(\lambda)$ 的长度为：

   $$S = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}d\lambda \tag{8}$$

(a) 试求当 S 取极值时，曲线 $x^\mu(\lambda)$ 所满足的方程称之为短程线，又称测地线方程。如果我们取 $\lambda = s$，注意到：

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 1 \tag{9}$$

则测地线方程也可以等价地由如下作用量得到：

$$S_{\text{eff}} = \int f\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}\right) ds \equiv \frac{1}{2}\int g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} ds \tag{10}$$

试推导如下著名的测地线方程：

$$g_{\mu\rho}\frac{d^2x^\rho}{ds^2} = -\Gamma_{\mu,\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds} \tag{11}$$

其中：

$$\Gamma_{\mu,\rho\sigma} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu}\right) \tag{12}$$

称之为克里斯托弗联络（Christoffel connection）。可以将测地线方程改写为：

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds} = 0 \tag{13}$$

其中：

$$\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu,\rho\sigma} \tag{14}$$

上指标的度规函数 $g^{\mu\nu}$ 为下指标的度规函数 $g_{\mu\nu}$ 的逆矩阵：$g^{\mu\nu}g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$。

(b) 在狭义相对论中，时空是 4 维的，时空间隔（四维时空中的距离，已令 $c = 1$）为：

$$ds^2 \equiv -d\tau^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{15}$$

试求参数化的测地线方程：$t = t(\tau), \vec{r} = \vec{r}(\tau)$。积分常数用初始位置 $t_0, \vec{r}_0$ 以及速度 $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ 表示。

3. **钱德拉塞卡极限：白矮星的最大质量**。考虑铁白矮星，即白矮星内部由铁原子核加电子组成。白矮星内部的压强主要来自电子的费米简并压。根据统计物理，我们可以得到白矮星的的状态方程如下：

$$\begin{aligned} \rho &= 9.74 \times 10^8 \mu_e x_e^3 \quad \text{kgm}^{-3} && (16)\\ p &= 1.42 \times 10^{24} \phi(x_e) \quad \text{Nm}^{-2} && (17) \end{aligned}$$

其中 μ_e 为电子的平均分子量，即将原子核平均分给每个电子，每个电子分到的核子数。对于铁白矮星，显然，$\mu_\text{e} = 56/26 \simeq 2.15$。公式中 x_e 为无量纲化电子的费米动量，即电子的费米动量 p_F 与 $m_e c$ 的比值：

$$x_e = \frac{p_\text{F}}{m_e c} \tag{18}$$

在密度低的时候，有 $x_e \ll 1$，即电子是非相对论的。在密度高的时候有 $x_e \gg 1$，即电子是极端相对论的。$\phi(x)$ 的表达式为：

$$\phi(x) = \frac{1}{8\pi^2}\left\{x(1+x^2)^{1/2}(2x^2/3 - 1) + \ln[x + (1+x^2)^{1/2}]\right\} \tag{19}$$

简单分析可知：

$$\begin{aligned} \phi(x) &\simeq \frac{1}{15\pi^2}x^5, \quad (x \ll 1) && (20)\\ \phi(x) &\simeq \frac{1}{12\pi^2}x^4, \quad (x \gg 1) && (21) \end{aligned}$$

也就是说，在密度比较低的时候，电子的非相对论的（$x_e \ll 1$），状态方程近似为：

$$p \sim \rho_0^{5/3} \tag{22}$$

在密度比较高的时候，电子变得极端相对论（$x_e \gg 1$），状态方程近似为：

$$p \sim \rho_0^{4/3} \tag{23}$$

请通过数值计算如下的常微分方程组，得到一系列的白矮星的质量和半径关系 (M, R)。其中质量请用太阳质量为单位 ($M_\odot = 1.99 \times 10^{30}$ kg)。

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2}\rho(r) \tag{24}$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \tag{25}$$

注意，为了得到白矮星的最大质量，核心处 ($r = 0$) 的密度 (ρ_c) 应该取高于 $x_e = 1$ 对应的密度。现在有很多现成的小程序可以直接调用，例如 python scipy 中的 odeint，matlab 中的 ode 等等。

数值计算得到的白矮星的最大质量是多少? 请根据计算结果作如下两幅图：(1) $\rho_c - M$; (2) $M - R$。数据点取最大质量附近的系列值（参考文献：Chandrasekhar, S., 1931, Astrophysical Journal, vol. 74, p.81 http://articles.adsabs.harvard.edu/pdf/1931ApJ....74...81C)。

4. **奥本海默极限：中子星的最大质量**。奥本海默在最初研究中子星最大质量的时候，假设中子星由纯中子组成。中子星内部的压强由中子的费米简并压提供。根据统计物理，我们可以得到中子气体的状态方程：

$$\rho = 1.80 \times 10^{20} \chi(x_n) \quad \mathrm{kgm^{-3}} \tag{26}$$

$$p = 1.62 \times 10^{37} \phi(x_n) \quad \mathrm{Nm^{-2}} \tag{27}$$

其中 $x_n = p_F/m_n c$ 为中子无量纲化的费米动量。$\chi(x)$ 的表达式为：

$$\chi(x) = \frac{1}{8\pi^2}\left\{x(1+x^2)^{1/2}(2x^2+1) - \ln[x + (1+x^2)^{1/2}]\right\} \tag{28}$$

简单分析可知：

$$\chi(x) \simeq \frac{1}{3\pi^2}x^3, \quad (x \ll 1) \tag{29}$$

$$\chi(x) \simeq \frac{1}{4\pi^2}x^4, \quad (x \gg 1) \tag{30}$$

对于纯中子气体的状态方程，我们也可以采用如下形式的状态方程：

$$\rho = 5.71 \times 10^{17}(\sinh t - t) \quad \mathrm{kgm^{-3}} \tag{31}$$

$$p = 1.71 \times 10^{34}[\sinh t - 8\sinh(t/2) + 3t] \quad \mathrm{Nm^{-2}} \tag{32}$$

其中:

$$t = 4\mathrm{arcsh}(p_\mathrm{F}/m_n) = 4\ln\left(x_n + \left[1 + x_n^2\right]^{1/2}\right) \tag{33}$$

对于典型的中子星来说，它的半径非常接近同样质量黑洞的 Schwarzschild 半径，因此，我们必须用广义相对论版的流体静力学平衡方程，Tolman-Oppenheimer-Volkoff

方程组处理:

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{G\left[m(r)+\frac{4\pi r^3 p(r)}{c^2}\right]}{r^2\left[1-\frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right]}\left[\rho(r)+\frac{p(r)}{c^2}\right] \tag{34}$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \tag{35}$$

请通过数值计算，得到一系列的中子星的质量和半径关系 (M, R)。

数值计算得到的中子星的最大质量是多少? 请根据计算结果作如下两幅图: (1) $\rho_c - M$; (2) $M - R$ (参考文献: Oppenheimer, J. R.; Volkoff, G. M., 1939, Physical Review, vol. 55, Issue 4, pp. 374-381 https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.55.374)。