线元：$d\tau=\sqrt{(1-\frac{2GM}{r})dt^2-(1-\frac{2GM}{r})^{-1}dr^2-r^2d\phi^2}$

从而我们可以得到拉氏量：$\mathcal{L}=-\frac{d\tau}{dt}=-\sqrt{(1-\frac{2GM}{r})-(1-\frac{2GM}{r})^{-1}\dot{r}^2-r^2\dot{\phi}^2}$，记 $1-\frac{2GM}{r}=B^2$

下面我们考虑引力较弱的，低速的情况，亦即要求：

$\frac{GM}{r}\ll 1 \quad \dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2=v^2\ll 1.$

级数展开：

(i) 牛顿引力学，保留到 $\sim\frac{2GM}{r}$，也即 $\sim v^2$ 的1阶项

$\mathcal{L}=-1+\frac{GM}{r}+\frac{1}{2}\dot{r}^2+\frac{1}{2}r^2\dot{\phi}^2 \doteq \frac{1}{2}\dot{r}^2+\frac{1}{2}r^2\dot{\phi}^2+\frac{GM}{r}$

注：$\doteq$ 表示舍去拉氏量中的全导数项。

于是我们得到了牛顿力学中的引力情况。

(ii) 水星进动：保留到 $\sim\frac{2GM}{r}$，$\sim v^2$ 的2阶项。

对于水星这样的近似圆周运动的天体：$\frac{GM}{r^2}\sim\frac{v^2}{r}\Rightarrow\frac{GM}{r}\sim v^2$（可以通过解(i)的运动得到）

$\mathcal{L}=-\sqrt{B}+\frac{1}{2}(1+\frac{3GM}{r})\dot{r}^2+\frac{1}{2}(1+\frac{GM}{r})r^2\dot{\phi}^2$

$=-1+\frac{GM}{r}+\frac{1}{8}(\frac{2GM}{r})^2+\frac{1}{2}\dot{r}^2+\frac{1}{2}\frac{3GM}{r}\dot{r}^2+\frac{1}{2}r^2\dot{\phi}^2+\frac{1}{2}\frac{GM}{r}r^2\dot{\phi}^2$

$\doteq\frac{1}{2}\dot{r}^2+\frac{1}{2}r^2\dot{\phi}^2+\frac{GM}{r}+(\frac{G^2M^2}{2r^2}+\frac{3GM}{2r}\dot{r}^2+\frac{1}{2}\frac{GM}{r}r^2\dot{\phi}^2)$

量级分析，通常而言对近似圆周运动的行星：$\dot{r}\ll r\dot{\phi}\Rightarrow\frac{GM}{r}\dot{r}^2\ll\frac{GM}{r}r^2\dot{\phi}^2$

故而留下的部分仅有：

$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\dot{r}^2+\frac{1}{2}r^2\dot{\phi}^2+\frac{GM}{r}+(\frac{G^2M^2}{2r^2}+\frac{1}{2}\frac{GM}{r}r^2\dot{\phi}^2)$

由于：$\dot{\phi}^2r\sim\frac{GM}{r^2}\Rightarrow\dot{\phi}^2\sim\frac{GM}{r^3}\Rightarrow r^2\dot{\phi}^2\sim\frac{GM}{r}$，而 $r^2\dot{\phi}=L$（角动量）

则有：

$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\dot{r}^2+\frac{1}{2}r^2\dot{\phi}^2+\frac{GM}{r}+\frac{G^2M^2}{r^2}$

可见产生了一个修正项。

而又有：$\frac{G^2M^2}{r^2}=\frac{GM}{r}\cdot\frac{GM}{r}\sim\frac{GM}{r}\cdot\frac{L^2}{r^2}=\frac{GML^2}{r^3}$

那么采取有效势能 $U_{eff}=-\frac{GM}{r}-\frac{GML^2}{r^3}+\frac{L^2}{2r^2}$

有对 $r$ 的拉氏量：

$\mathcal{L}_{eff}=\frac{1}{2}\dot{r}^2-\frac{L^2}{2r^2}+\frac{GM}{r}+\frac{GML^2}{r^3}$

这就是修正的水星受力的来源。

注意：不能把 $L$ 直接带进 $\mathcal{L}$ 中去，之后会讲原因。