第六周作业参考解答

王杰 肖诗麒 2020.10.26

0.第五周作业参考解答朗道书上已经给出，这里不再赘述。

1.（2019 年期中 1 第 4 题）

记 $\delta q=\frac{d}{d\varepsilon}q_\varepsilon|_{\varepsilon=0},\delta L=\frac{d}{d\varepsilon}L(q_\varepsilon,\dot{q}_\varepsilon,t)|_{\varepsilon=0}$，则 $Q=p_i\delta q_i-\int\delta Ldt$。

操作	变换群	δq	δL	Q
时间平移	$\vec{r}_{i\varepsilon}(t)=\vec{r}_i(t+\varepsilon)$	$\delta\vec{r}_i=\dot{\vec{r}}_i$	$\dot{L}$	$\frac{1}{2}(m_1\dot{r}_1^2+m_1\dot{r}_2^2)+V(\|\vec{r}_1-\vec{r}_2\|)$
空间平移	$\vec{r}_{i\varepsilon}=\vec{r}_i+\varepsilon\vec{v}$	$\delta\vec{r}_i=\vec{v}$	0	$(m_1\dot{\vec{r}}_1+m_2\dot{\vec{r}}_2)\cdot\vec{v}$
空间转动	$\vec{r}_{i\varepsilon}=\exp(\varepsilon\vec{X})\cdot\vec{r}_i$	$\delta\vec{r}_i=\vec{X}\cdot\vec{r}_i$	0	$m_1\dot{\vec{r}}_1\cdot\vec{X}\cdot\delta\vec{r}_1+m_2\dot{\vec{r}}_2\cdot\vec{X}\cdot\vec{r}_2$

2.一种比较简单的力学做法，记恒星为 1，行星为 2：

$$m_1w^2r_1=\frac{Gm_1m_2}{(r_1+r_2)^2},m_2w^2r_2=\frac{Gm_1m_2}{(r_1+r_2)^2}\Rightarrow\frac{v_1^3}{w}=\frac{Gm_2^3}{(m_1+m_2)^2}$$

因此 $m_2=v_1[\frac{T(m_1+m_2)^2}{2\pi G}]^{1/3}\approx v_1(\frac{Tm_1^2}{2\pi G})^{1/3}=5.33\times10^{26}kg$ 。

3.即推导讲义（4.35）和（4.45）式。

4.（2018 年期中第 6 题）

为了方便，首先对时间参数化处理 $(x^0,x^1)=(ct,x),x^i=x^i(\sigma)$；

并且记 $(A_0,A_1)=(-\varphi/c,A),g_{ij}=diag\{1,-1\},(x_\varepsilon^0,x_\varepsilon^1)=(c\tau,X),x_\varepsilon^i=\Lambda_j^i(\varepsilon)x^j$ 。

因此作用量可以化为：

$$S=\int\tilde{L}(x,x')d\sigma=\int[-mc\sqrt{g_{ij}x'^ix'^j}+eA_i(x)x'^i]d\sigma$$

因为 A 是洛伦兹不变量，所以 $A_{i\varepsilon}(x_\varepsilon)dx_\varepsilon^i=A_i(x)dx^i$ 为 A 与 φ 的关系。

经验证：$\tilde{L}(x_\varepsilon,x'_\varepsilon)=\tilde{L}(x,x')$，即 $\frac{d}{d\varepsilon}L(x_\varepsilon,x'_\varepsilon)|_{\varepsilon=0}=\frac{df}{dt}=0$，可以取 $f=0$。

因此诺特守恒荷为：

$$Q=\frac{\partial L}{\partial x'^i}\frac{dx_\varepsilon^i}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}-f=p_i\Gamma_k^ix^k=[-mcg_{ij}x'^j+eA_i(x)]\Gamma_k^ix^k$$

其中 $\Gamma_k^i=\frac{d}{d\varepsilon}\Lambda_k^i(\varepsilon)|_{\varepsilon=0}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$。这个结果类似“角动量守恒”。