第一次习题课补充内容讲稿

2023 年 10 月 23 日

1 张量计算

1.1 符号规则

爱因斯坦求和约定：重复指标代表求和。

例：

$$A \cdot B = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i = A_i B_i$$

3 维情形使用拉丁字母 i,j,k，一般情形使用希腊字母 μ, ν, σ 等。表示四维矢量的分量时一般用 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

指标平衡：同一指标最多出现 2 次；等式两边不重复的上下指标数目应相等。

1.2 矢量

线性空间（矢量空间）V 中的元素定义为矢量。满足 7 条性质：

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1$$

$$(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$$

$$\text{存在 0 元，} 0 + v = v, 0 \cdot v = 0$$

$$a_1(a_2 v) = (a_1 a_2) v$$

$$(a_1 + a_2) v = a_1 v + a_2 v$$

$$a(v_1 + v_2) = a v_1 + a v_2$$

$$\text{单位元 } 1 \cdot v = v$$

矢量的例子：三维空间的“箭头”，列矩阵，函数（无穷维），量子态矢量 $|\psi\rangle$

采用更本质的特征定义矢量。考虑“箭头”，一个好的函数可以沿箭头方向求方向导数得到一个数，即这个矢量是函数空间到数域的映射。类比可以给出流形上的矢量是流形上函数空间到 R 的映射。对流形上 p 点函数 f,g，实数 a,b, 矢量 v 满足

$$v(af + bg) = a v(f) + b v(g)$$

$$v(fg) = f|_p v(g) + g|_p v(f)$$

类比方向导数的性质。流形上的函数可用数域上的函数表征，流形上函数 f 对应 F。定义流形上 p 点的 n 个矢量 X_μ，它们作用在 f 上得到

$$X_\mu(f) = \frac{\partial F(x^1, ...x^n)}{\partial x^\mu}$$

可以证明这些 X_μ 组成 p 点矢量空间的一组基，记作 $X_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. 任一矢量 v 可展开为 $v = v^\mu X_\mu$. 在坐标变换 $x^\mu \to x'^\nu$ 下，

$$X_\mu(f) = \frac{\partial F(x^1, ...x^n)}{\partial x^\mu} = \frac{\partial F'(x'^1, ...x'^n)}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} X'_\nu(f)$$

由 v 的展开式，v 分量的变换规律（逆变）

$$v'^\nu = v^\mu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}$$

这也是矢量的另一种定义方式。

流形上每一点定义一个矢量成为矢量场。

1.3 对偶矢量

对偶矢量：实现将一个矢量映射成一个数的操作。例如，列矩阵和行矩阵可以视为矢量和对偶矢量的关系；量子态矢量 $|\psi\rangle$ 无法直接得到，观测得到的量是波函数 $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$，即用对偶矢量 $\langle x|$ 作用在 $|\psi\rangle$ 上得到的数（两个矢量的内积）。或者说用基矢 $|x\rangle$ 展开 $|\psi\rangle$ 的分量。由于集合之间的映射与诱导的集合上函数的映射是反向的，对偶矢量与矢量的变换规律不同。

例：考虑 δ 函数，它是函数空间的对偶空间（称为广义函数空间）中的矢量。函数 f(x) 在 x_0 处的值：

$$f(x_0) = \int f(x)\delta(x - x_0)dx$$

即 δ 函数将函数 f(x) 映射到一个数。这个结果也可以写成

$$f(x_0) = \int f(x + x_0)\delta(x)dx$$

可见矢量与对偶矢量的变换是反向的。

对偶矢量是一种泛函（任意矢量空间到 R 的映射都称为泛函。特别地，作用量是“路径空间”到 R 的映射，才有 Euler-Lagrange 方程）。对偶矢量对矢量的作用不等于内积。

V 上全体对偶矢量构成对偶空间 V^*. 可证明二者维数相同。V 的一组基 e_μ 对偶空间 V^* 的一组基 $e^{\mu*}$ 满足

$$e^{\mu*}e_\nu = \delta^\mu_\nu$$

对偶矢量可表示为

$$\omega = \omega_\mu e^{\mu*}$$

分量 $\omega_\mu = \omega(e_\mu)$. 流形上每一点定义一个对偶矢量得到对偶矢量场。定义流形上 f 诱导的对偶矢量场 df 为对 p 点任意矢量 v，df 作用得到结果

$$df|_p(v) = v(f)$$

特别地，取对偶矢量场 dx^μ，

$$dx^\mu(\frac{\partial}{\partial x^\nu}) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu$$

dx^μ 是与 $X_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 对应的对偶坐标基底。可以证明任意对偶矢量可以表示为

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu$$

在坐标变换 $x^\mu \to x'^\nu$ 下，

$$dx^\mu(v) = v(x^\mu) = v^\sigma \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\sigma} = v^\sigma \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}$$

即可得到对偶矢量分量的变换规律 (协变)

$$\omega'_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \omega_\mu$$

1.4 张量

张量是多重线性映射。将流形上的 (k,l) 型张量视为有 k 个上槽和 l 个下槽，分别作用于 k 个对偶矢量和 l 个矢量，得到一个数。例如，(1,1) 型张量 T 作用到 1 个矢量和 1 个对偶矢量上得到一个数，$T(\omega; v) = T^\mu_\nu \omega_\mu v^\nu$。矢量可以视为 (1,0) 型张量，对偶矢量可以视为 (0,1) 型张量。(1,1) 型张量的例子：二次型里面，中间的那个方矩阵。

张量空间的基底是用张量积表示的。定义张量积，两个张量的张量积作用在一组矢量和对偶矢量上的结果是

$$T \otimes T'(\omega^1, ..., \omega^{k+k'}; v_1, ...v_{l+l'}) = T(\omega^1, ..., \omega^k; v_1, ...v_l) T(\omega^{k+1}, ..., \omega^{k+k'}; v_{k+1}, ...v_{l+l'})$$

特别地，并矢

$$v \otimes u$$

是两个矢量的张量积，是 (2,0) 型张量。对 (k,l) 型张量，

$$e^{\sigma...\rho}_{\mu...\nu} = e_\mu \otimes ... \otimes e_\nu \otimes e^{\sigma *} \otimes ... \otimes e^{\rho *}$$

T 的分量变换规律为

$$T'^{\mu_1, ..., \mu_k} \nu_1, ..., \nu_l = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} ... \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_l}} T^{\rho_1, ..., \rho_k}_{\sigma_1, ..., \sigma_l}$$

张量缩并运算：$c^i_j T = T(...e^{\mu *}, ..., e_\mu, ...)$ 即第 i 上槽与第 j 下槽的缩并。体现在分量上，是重复指标。(k,l) 型张量一次缩并后得到（k-1,l-1) 型张量。

例如：矩阵的迹 T^μ_μ;

$$c(v \otimes \omega) = v \otimes \omega(e^{\mu *}; e_\mu) = v(e^{\mu *}) \omega(e_\mu) = v^\mu \omega_\mu$$

是“点乘”。

1.5 度规张量

定义度规张量，使得任意矢量可以对应于一个对偶矢量，这个对应关系是“自然的，与众不同的同构映射”。虽然矢量空间与对偶空间同构，但他们之间的对应关系依赖于基矢量选取，不能“认同”(identify). 度规张量使这两个空间得以“认同”。

V 上的度规张量是对称、非退化的 (0,2) 型张量。

对称：g(v,u)=g(u,v)

非退化：若对 V 中任意 u 有 g(v,u)=0, 则 v=0.

在度规下可定义内积 g(v,u)。特别地，g(v,v) 可表示矢量模的平方。$g(u,\cdot)$ 是对偶矢量，因为它作用于矢量 u 上得到一个数。那么 g 可以被视为一个从 V 到 V^* 的映射，可以证明它是一个同构映射。这个映射是不依赖坐标的，将 V 与 V^*“认同”。$g(u,\cdot)$ 与 u 其实是“同一个矢量”，这个映射可记作 $g_{\mu\nu}v^\nu=v^\mu$，即度规张量有升降指标的作用。

对切矢量 T($T^\mu=\frac{dx^\mu}{dt}$,t 是曲线参数)，定义线长 $l=\int\sqrt{|g(T,T)|}dt$, 其中

$$g(T,T)=g(T^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu},T^\nu\frac{\partial}{\partial x^\nu})=T^\mu T^\nu g(\frac{\partial}{\partial x^\mu},\frac{\partial}{\partial x^\nu})=g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}$$

记 $ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ 为“线元”，有

$$l=\int\sqrt{ds^2}$$

特别地，对闵氏空间，

$$ds^2=\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

其中 $\eta_{\mu\nu}=diag(-1,1,1,1)$ 是闵氏空间的度规。

2 狭义相对论

爱因斯坦在最早提出狭义相对论理论时作了 2 个基本假设。

相对性原理：所有的自然规律在不同的惯性参考系中相同。

光速不变：相互作用（信息）传递的最大速度在所有惯性参考系中相同。

依据这两个基本假设推导洛伦兹变换。考虑 K 系中一束光 t_1 时刻由 (x_1,y_1,z_1) 发出，t_2 时刻传播到 (x_2,y_2,z_2)，可记为

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2=0$$

由相对性原理，另一惯性系 K’ 中有

$$(x'_2-x'_1)^2+(y'_2-y'_1)^2+(z'_2-z'_1)^2-c^2(t'_2-t'_1)^2=0$$

令两点无限接近，记作

$$ds^2=-c^2dt^2+dx^2+dy^2+dz^2=0$$

$$ds'^2=-c^2dt'^2+dx'^2+dy'^2+dz'^2=0$$

由于两者是同阶无穷小量，可得两参照系中

$$ds^2 = a ds'^2$$

考虑到惯性系时空均匀，a 只能是两系相对速度大小的函数。为了确定 a 的形式，考虑相对 K 系分别以 v_1,v_2 运动的 K_1,K_2 系，有 $ds_1^2 = a(v_1)ds^2$,$ds_2^2 = a(v_2)ds^2$ 以及 $ds_1^2 = a(v_{12})ds_2^2$. 即可得到

$$a(v_{12}) = \frac{a(v_2)}{a(v_1)}$$

v_{12} 是 K_1 与 K_2 的相对速度。等式左边与 v_1,v_2 的大小和方向均有关，右边仅与 v_1,v_2 的大小有关，随意变换 v_1,v_2 的方向，左边应改变，右边不变，要想让等式仍然成立，a 只能是常数。进一步由此方程解出 a=1. 我们得到了狭义相对论条件下惯性系之间的变换规律：保持"间隔" ds^2 不变。

考虑与一钟相对静止的参照系，在此参照系中钟没有位移，其走过的时间即为其时空间隔，有

$$ds^2 = c^2 d\tau^2$$

定义此时间为"固有时"。由于

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

两边同时除以 dt^2 可得

$$d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

即为钟慢效应。

洛伦兹变换是保持时空间隔不变的变换。可以证明这种变换必然是线性变换。将 (t_1, x_1, y_1, z_1) 记为矢量 x^α，变换记作

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta$$

求解张量 Λ^α_β 的矩阵元。设相对速度的方向为 x 方向，由 y,z 方向空间的均匀性，有 $\Lambda^2_2 = \Lambda^3_3 = 1$，除此之外所有含 2,3 分量的矩阵元均为 0. 考虑低速条件的极限，即无穷小变换，可得到 $\Lambda^0_0 = \Lambda^1_1 = cosh\theta$，$\Lambda^0_1 = \Lambda^1_0 = -sinh\theta$. 其中 $tanh\theta = v/c$. 就得到了逆变 4-vector x^α 的变换规律。用度规张量降指标即可得到对应的协变 4-vector x_α 的变换规律，可自行练习。

用度规张量表达无穷小时空间隔（闵氏空间线元），很容易得到满足时空间隔不变的变换用 Lorentz 方程描述

$$\Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\gamma\delta}$$

一般地，将所有像 x^α 那样变换的矢量称为 4-vector，例如 4 维速度矢量 $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$, 容易验证它的变换规律与 x^α 相同。另外，按照上一节的观点，它可以被视为世界线的切矢量。定义 4 维动量矢量 $p^\alpha = mu^\alpha$。可以验证这样定义的动量可以满足动量守恒的 Lorentz 协变，当然，经典的动量 mv 是不能满足的。作为练习，可以验证 Maxwell 方程组的 Lorentz 协变。

在 Lorentz 变换下不变的量是 4-scalar, 例如两个 4-vector 的内积 $A^\alpha B_\alpha$. 像张量那样变换的量是 4-tensor。

仿照经典情形，给出狭义相对论情形下自由粒子的作用量。相对性原理要求作用量是 4-scalar。对自由粒子，最自然的 4-scalar 就是时空间隔。即

$$\int ds = \int \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}}ds$$

可以证明这个作用量能给出作业中的拉氏量。也可以验证动量守恒。

3 测地线：自由粒子的运动

测地线是任意相邻两点切矢量平行的曲线。

欧氏空间中，定义矢量沿曲线的导数，首先要定义平移。在一般的流形上，定义平移：P 点的矢量 $v^\mu(P)$ 平移到紧邻的 Q 点：

$$\delta v^\mu(P) = v^\mu(P \Rightarrow Q) - v^\mu(P) = -\Gamma^\mu_{\lambda\nu}(P)v_\lambda(P)dx^\nu$$

其中 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ 被称为仿射联络。定义协变导数

$$v^\mu_{;\nu} = \lim_{Q\to P}\frac{v^\mu(Q)-v^\mu(P\to Q)}{\Delta x^\nu} = \lim_{Q\to P}(\frac{v^\mu(Q)-v^\mu(P)}{\Delta x^\nu} + \lim_{Q\to P}\frac{v^\mu(P)-v^\mu(P\to Q)}{\Delta x^\nu} = v^\mu_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}(P)v_\lambda(P)$$

$v^\mu_{,\nu}$ 称为普通导数。若任意两点切矢量平行，有

$$v^\mu(Q) = (1+f(\lambda)d\lambda)v^\mu(P\Rightarrow Q) - v^\mu(P)$$

可以理解为只有“伸缩”。λ 是曲线的参数。由此可以得到测地线方程

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = f(\lambda)\frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

选择仿射参量 σ 满足

$$\frac{d^2\sigma}{d\lambda^2} = f(\lambda)\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{d\sigma}{d\lambda}$$

可得到

$$\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma} = 0$$

由切矢量的协变导数为 0 也可得到这个式子。

考虑仿射联络与度规的关系。假定挠率为 0，即 $\Gamma^\mu_{\lambda\nu} = \Gamma^\mu_{\nu\lambda}$（这个条件的意义是空间没有“扭曲”，等价于关于 x^λ 和 x^ν 的协变导数算符对易，可自行验证）。平移操作前后，矢量的“长度”不变，

$$g_{\mu\nu}(Q)v^\mu(P\Rightarrow Q)v^\nu(P\Rightarrow Q) = g_{\mu\nu}(P)v^\mu(P)v^\nu(P)$$

给出

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = g_{\alpha_\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} + g_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\lambda}$$

作两次指标轮换后，三式相加，利用度规是对称张量以及挠率为 0 的条件，得到

$$g_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\lambda\nu} = \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\nu})$$

用 $g^{\nu\kappa}$ 升指标，

$$\Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}g^{\nu\kappa}(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\nu}})$$

即得到了仿射联络的表达式。仿射联络为 0 时，空间平直，对应度规张量的分量是常数。另外，取坐标变换 $x^{\mu} \to x'^{\nu}$ 满足 $\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} = \delta^{\mu}_{\nu}, \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \delta^{\mu}_{\nu}$, $\frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\lambda}} = -\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}$, 可以证明坐标变换后仿射联络变为 0. 也就是说，在黎曼空间中每一点存在一个坐标系使得在此坐标系中此点的邻域是平坦的，弯曲时空的局部可以近似为平直时空。这在广义相对论中有基础性的作用。

测地线也是短程线（即作业 3，题 3），也就是自由粒子的世界线。