

《理论力学 A》(2023 年秋季) 平时作业十¹

11 月 23 日 (星期四) 交。

1. **哈密顿-雅可比方程**。三维各向同性谐振子在笛卡尔坐标系中的势能为: $V(x, y, z) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)$ 。试用哈密顿-雅可比方法在笛卡尔坐标系中求解三维谐振子的动力学方程及其解: $x(t), y(t), z(t), p_x(t), p_y(t), p_z(t)$ 。
2. **哈密顿-雅可比方程**。二维各向同性谐振子在极坐标中的势能为: $V(r, \theta) = \frac{1}{2}kr^2$ 。试用哈密顿-雅可比方法在极坐标中求解二维谐振子的动力学方程及其解 (得到积分形式的解即可)。
3. **(选做题)** 对单粒子而言, 它的相空间是 6 维的。证明相空间中的体积微元 ($d^3x d^3p$) 是洛伦兹变换不变量, 从而进一步说明对辐射场, I_ν/ν^3 是洛伦兹不变量。
4. **Virial 定理**。讨论行星的运动。一质量为 m 的质点 $V(r) = -k/r (k > 0)$ 中做束缚态平面轨道运动 ($E < 0$), 根据对称性, 采用极坐标 (r, θ) 。作用量 I_r, I_θ 分别定义为: $I_r = \oint p_r(r) dr, I_\theta = \oint p_\theta(\theta) d\theta$, 环路积分沿着轨道积分。试根据 Virial 定理证明: $I_r + I_\theta = \oint k/r dt$ 。
5. 阅读讲义 §6.4.5 “转动黑洞时空中检验粒子的运动”。不用提交。

¹© 中国科学技术大学物理学院天文学系袁业飞