第 1 章 组合零点定理

零点定理的英文是 Nullstellensatz, 或许这不是个英文而是德文.

定理 1.1 (Hilbert 零点定理)

设 $\mathcal{F}$ 是一个代数闭域, $f, g_1, \cdots, g_m \in \mathcal{F}[x_1, \cdots, x_n]$ 是多项式, 使得 f 在所有 g_i 的零点处为 0, 则存在整数 k 和 $h_1, \cdots, h_m \in \mathcal{F}[x_1, \cdots, x_n]$, 使得

$$f^k = \sum_{i=1}^{m} h_i g_i.$$

♡

定理 1.2 (Hilbert 零点定理的理想版本)

设 $I = \langle g_1, \cdots, g_n \rangle$ 是一个理想, $V(I) = \{I\text{中元素的共同零点}\}$. 设 $\forall s \in V(I)$ 都有 $f(s) = 0$, 则存在 k 使得 $f^k \in I$.

♡

定理 1.3 (组合零点定理)

设 $\mathcal{F}$ 是一个域 (不一定要代数闭的), $f \in \mathcal{F}[x_1, \cdots, x_n]$, $S_i \subseteq \mathcal{F}, i \in [n]$ 是 n 个非空集合.
对于任意的 i, 定义 $g_i(x_1, \cdots, x_n) = g_i(x_i) = \prod_{s \in S_i}(x_i - s)$.
若 $\forall (x_1, \cdots, x_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$, 都有 $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$, 则存在 $h_1, \cdots, h_m \in \mathcal{F}[x_1, \cdots, x_n]$ 使得

$$f = \sum_{i=1}^{n} h_i g_i \quad \text{且} \deg h_i \le \deg f - \deg g_i.$$

♡

我们给出一个辅助引理.

引理 1.1

设 $p \in \mathcal{F}[x_1, \cdots, x_n]$. 设 p 对任意 x_i 的度均小于等于 t_i. 若 $\forall i \in [n], \exists S_i \subseteq \mathcal{F}, |S_i| \ge t_i + 1$, 且任意的 $(s_1, \cdots s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$, 都有 $p(s_1, \cdots, s_n) = 0$, 则 p 是零多项式.

♡

证明 对 n 归纳. $n = 1$ 显然成立. 设定理对所有的 $k \le n_1$ 都成立, 考虑 n 的情形.

设 $p(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=0}^{t_n} q_i(x_1, \cdots, x_{n-1}) x_n^i$, 任取 $(s_1, \cdots s_{n-1}) \in S_1 \times \cdots \times S_{n-1}$, 令

$$q(x_n) = \sum_{i=0}^{t_n} q_i(s_1, \cdots, s_{n-1}) x_n^i.$$

则 $q(S_n) = \{0\}$, 且 $|S_n| \ge t_n + 1$. 由 $n = 1$ 的奠基知 q 为零函数. 再由 $n - 1$ 的奠基知诸 q_i 也是零函数. ■

证明 回组合零点定理. 令 $t_i = |S_i| - 1, \deg g_i = t_i + 1, g_i(x_i) = x_i^{t_i+1} - \sum_{j=0}^{t_i} g_{ij} x_i^j$. 则

$$g_i(s_i) = 0, \forall s_i \in S_i. \text{即}: s_i^{t_i+1} = \sum_{j=0}^{t_i} g_{ij} s_i^j.$$

从 f 开始, 逐步地把使得 $t \ge t_i + 1$ 的 x_i^t 项换成 $x_i^{t-t_i-1} \sum_{j=0}^{t_i} g_{ij} x_i^j, \forall i \in [n]$.
由于 $x_i^t - x_i^{t-t_i-1} g_i = x_i^{t-t_i-1}[\sum_{j=0}^{t_i} g_{ij} x_i^j]$, 这个过程相当于每次减掉一个 $h_i g_i$. 且 $\deg h_i \le \deg f - \deg g_i$.
重复这个过程, 最终可以得到 $\tilde{f} = f - \sum_{i=1}^{n} h_i g_i$, 满足:

1. $\tilde{f}$ 对任意 x_i 的度均小于等于 t_i;
2. 任意的 $(s_1, \cdots s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$, 都有 $\tilde{f}(s_1, \cdots, s_n) = 0$.

于是由引理知, $\tilde{f}$ 是零函数. 于是 $f = \sum_{i=1}^{n} h_i g_i$. ■

实际上我们常用的是上面组合零点定理的推论, 我们写成下面的定理.

定理 1.4 (组合零点定理)

$f \in \mathcal{F}[x_1, \cdots, x_n]$, $\deg f = \sum_{i=1}^n t_i$, $t_i \geq 0$. 设 $\prod_{i=1}^n x_i^{t_i}$ 的系数非零. 对所有的 $i \in [n]$, 取 $S_i \subseteq \mathcal{F}$ 使得 $|S_i| \geq t_i + 1$, 则存在 $s_i \in S_i, \forall i \in [n]$,

$$f(s_1, s_2, \cdots, s_n) \neq 0.$$

♡

证明 反设任意的 $(s_1, \cdots s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$, 均有 $f(s_1, s_2, \cdots, s_n) = 0$.

由组合零点定理, $f = \sum g_i h_i$. 且 $\deg h_i \leq \deg f - \deg g_i$.

观察:f 有 $\prod_{i=1}^n x_i^{t_i}$ 作为其次数最大项, 但是 $\sum g_i h_i$ 中一定有 $x_i^{t_i+1}$ 项. ■

例题 1.1:Permant 引理, 积和式引理

定义 1.1 (矩阵的积和式)

设方阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, 定义 $Per(A) = \sum a_{1i_1} \cdots a_{ni_n}$, 其中求和号是对所有 $[n]$ 的置换 $(i_1, \cdots, i_n)$.

♣

定理 1.5 (Permant 引理)

设 $b \in \mathcal{F}^n$. 任意的 $i \in [n]$, $S_i \subseteq \mathcal{F}$ 且 $|S_i| \geq 2$. A 是 $\mathcal{F}$ 上的 n 阶方阵.

设 $Per(A) \neq 0$, 则存在 $\vec{x} \in S_1 \times \cdots \times S_n$, 使得 $A\vec{x}$ 的每个分量都和 b 不同.

♡

推论 1.1

取 $S_i = \{0, 1\}$, 则 $\vec{x}$ 是一个 0-1 向量. 上面的定理依然对.

即 $\forall b \in \mathcal{F}^n, \forall A \in \mathcal{F}^{n\times n}$ 使得 $Per(A) \neq 0$, 都存在 A 的某些行, 这些行之和的每个分量都和 b 不同.

♡

证明 我们构造组合零点定理中的那个 f. 令 $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$. 令

$$f(\vec{x}) = \prod_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_j \right).$$

取 $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 1$. 计算 f 的中 $\prod_{i=1}^n x_i$ 项的系数, 为 $Per(A) \neq 0$. 于是应用组合零点定理即证. ■

这类问题比较困难的点在于构造 f 与计算 f 的系数.

例题 1.2 加法数论

设 A, B 是 $\mathbb{Z}_p$ 的子集. 令 $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. 考察 $|A + B|$.

定理 1.6 (Cauchy-Davenport 定理)

p 是素数, 设 A, B 是 $\mathbb{Z}_p$ 的非空子集, 则 $|A + B| \geq \min\{p, |A| + |B| - 1\}$.

♡

证明

- 第一种情况: $|A| + |B| - 1 \geq p$. 需要证明 $A + B = \mathbb{Z}_p$. 留作练习.
- 第二种情况: $|A| + |B| - 1 < p$. 需要证明 $|A + B| \geq |A| + |B| - 1$. 用反证法设 $|A + B| \leq |A| + |B| - 2$.
  其中有一个平凡情况: $|A| + |B| - 2 = 0 \iff |A| = |B| = 1$. 此时 $|A + B| = 1$. 下面假设 $|A| + |B| - 2 \geq 1$.
  设 $C \subseteq \mathbb{Z}_p$ 是一个 $|A| + |B| - 2$ 元集合, 且 $A + B \subseteq C$. 构造:$f(x, y) = \prod_{c\in C}(x + y - c)$.
  取 $S_1 = A, S_2 = B, t_1 = |A| - 1, |t_2| = |B| - 1$. 则 $f(S_1 \times S_2) = 0$. 由组合零点定理导出矛盾.

■

我们后面还能看到这个结论的应用.

例题 1.3 n 维超方体的仿射超平面覆盖

定义 1.2

n 维超方体: $B_n=\{0,1\}^n$; 仿射超平面: $H=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n:\langle\vec{a},\vec{x}\rangle=b,\vec{a}\in\mathbb{R}\backslash\{0\},b\in\mathbb{R}\}$.

我们考虑用尽量少个 H 覆盖 B_n 的除了一个点以外的点. 比如: 想覆盖 B_3 除 0 以外的所有点, 可以用 $x_1=1$, $x_2=1,x_3=1$ 三个平面. 一般的, 我们可以用 n 个超平面覆盖 B_n 的除了一个点以外的点.

定理 1.7

设 $H_{i\,i=1}^{m}$ 是 m 个超平面, 它覆盖了 B_n 除原点以外的所有点, 则 $m\geq n$.

证明 设 $m<n$, 想应用零点存在定理, 需要构造集合 S_n 和多项式 f. 设

$$H_i=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n:\langle\vec{a_i},\vec{x}\rangle=b,b_i\neq 0\}.$$

构造 f 使得 $f(B_n)=\{0\}$. 这样就可以选取 $S_i=\{0,1\}$.

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{m}(\langle\vec{a},\vec{x}\rangle-b_i)-\prod_{i=1}^{m}b_i\prod_{i=1}^{m}(1-x_i).$$

这个构造是逐步的: 首先需要除原点以外的点为零, 由覆盖性, 我们可以把 H_i 的方程相乘. 这样 $f(\vec{0})=\prod_{i=1}^{m}b_i\neq 0$. 如果直接减掉这个常数, 那在 B_n 的其他顶点处就不是 0 了. 所以需要乘上掉 $\prod_{i=1}^{m}(1-x_i)$.

这个构造还有一个巧妙的地方: 观察 f 的最高次项, 它一定出自 $\prod_{i=1}^{m}b_i\prod_{i=1}^{m}(1-x_i)$. 具体地, $\deg f=n$, 且 f 的项 $\prod_{i=1}^{m}(1-x_i)$ 的系数为 $(-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{m}b_i\neq 0$.

由零点存在定理, $\exists\vec{x}\in\prod S_i=B_n$ 使得 $f(\vec{n})\neq 0$. 这与 f 构造相矛盾. ■

启发: 用组合零点定理解决问题时候, 构造的 f 常常有两部分, 分别来自不同的条件.

例题 1.4Chevalley-Warning

定理 1.8 (Chevalley-Warning 定理)

p 是素数. $\{f_i\}_{i=1}^{m}\subseteq\mathcal{F}_p[x_1,\cdots,x_n]$. 设 $\sum\deg f_i<n$ 且它们有一个共同零点, 则它们有另一个共同零点.

证明 记共同零点为 $(c_1,\cdots,c_n)$. 假设共同零点只有这个. 为构造 f, 我们使用有限域上的一个小技巧: a^{p-1} 的值只与 a 是不是 0 相关. 令

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=0}^{m}\left(1-f_i(x_1,\cdots,x_n)^{p-1}\right)-\left[\prod_{c\neq c_i}(c_i-c)\right]^{-1}\prod_{i=1}^{n}\prod_{c\neq c_i}(x_i-c).$$

这个 $f=F_1-\delta F_2$ 依然有两项. 第一项使根据条件使得 f_i 的公共零点值为 1, 再减掉第二项使在 $(c_1,\cdots,c_n)$ 处值也为 0, 且承担 f 的次数最大项. 于是 $\forall\vec{x}\in\mathcal{F}_p^n$ 有 $f(\vec{x})=0$.

- $\deg F_1=\sum\deg f_i<n(p-1)=\deg F_2$. 于是 $\deg f=n(p-1)$.
- 取 $S_i=\mathcal{F}_p,t_i=p-1$, f 的 $\prod x_i^{t_i}$ 项系数为 $-\delta\neq 0$.

用组合零点定理, f 在 $\mathcal{F}_p^n$ 上不全为 0, 这与构造矛盾. ■

例题 1.5 零和集

给定一个 n, 对于一个较长序列 $(a_1,\cdots,a_l)$, 是否存在一个子列使得它的和被 n 整除?

定理 1.9

设 p 是素数, 则任意的 $2p-1$ 长的序列中可以找出一个子列, 和为 $0\mod p$.

第一种证明由例题 1.2 加法数论中的 Cauchy-Davenport 定理给出.

证明 不妨 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_{2p-1}$, 不妨设没有连续 p 个相同的元素, 否则这 p 个元素即符合题意.

令 $A_i=\{a_i,a_{i+p-1}\},i\in[p-1]$, 则 A_i 覆盖了 $\{a_i\}_{i=1}^{2p-2}$.

Claim: $A_1+\cdots+A_{p-1}=\mathbb{Z}_p$. 若如此, 有 $-a_{2p-1}\in A_1+\cdots+A_{p-1}$. 即存在 $\sum_j a_{k_j}=-a_{2p-1}$.

多次使用 Cauchy-Davenport 定理, 有

$$\begin{aligned}|A_1+\cdots+A_{p-1}| &\geq \min\{p, |A_2+\cdots+A_{p-1}|+1\} \\ &\geq \min\{p, |A_3+\cdots+A_{p-1}|+2\} \\ &\geq \cdots \geq \min\{p, |A_{p-1}|+p-2\} = p.\end{aligned}$$

■

第二种证明由例题 1.4 的 Chevalley-Warning 定理给出.

证明 用 x_i 表示选没选 a_i: 选了则 $x_i=1$, 否则 $x_i=0$. $\{x_i\}$ 有两个要求:$\sum x_i = p$, $\sum x_i a_i = 0 \mod p$.

$$f_1(x_1,\cdots,x_{2p-1}) = \sum_{i=1}^{2p-1} x_i^{p-1}; \quad f_2(x_1,\cdots,x_{2p-1}) = \sum_{i=1}^{2p-1} a_i x_i^{p-1}.$$

则 $\deg f_1 + \deg f_2 = 2p-2 < 2p-1$, $f_1(\vec{0}) = f_1(\vec{0})$.

由 Chevalley-Warning, f_1 与 f_2 还有一组公共解 $\vec{x_0}$. 令 $I = i : \vec{x}$的第 i 个分量不是0. 则

$$|I| = p, \quad \sum_{i\in I} a_i = 0.$$

■

这一章常用的定理就是组合零点定理 (的推论), 和公共零点的定理. 例子看的足够多了, 我们进入下一章.

第 2 章 图的特征值

定义 2.1 (邻接矩阵)

G 是一个 n 阶图, 定义其邻接矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$: $a_{ij}=1$ 当且仅当 ij 相连.

命题 2.1

1. A 是对称的实矩阵, 对角元为 0;
2. A 有 n 个特征值 $\lambda_1\geq\cdots\lambda_n$, 也称为 G 的特征值. 有互相垂直的单位特征向量 $\vec{v_n}$;
3. $\sum\lambda_i=0=G$ 的邻接矩阵的迹; $\lambda_n<0$; 若 G 是连通图, 则 $\lambda_2<\lambda_1$.

例题 2.1

- K_n 的邻接矩阵 $A=J_n-I_n$, 其中 J_n 是全 1 矩阵, I_n 是单位矩阵. 特征值为一个 $n-1$ 和 $n-1$ 个 -1.
- 完全二部图 $K_{m,n}$. 则 $A=\begin{pmatrix}0 & J_{m,n}\\ J_{n,m} & 0\end{pmatrix}$. 简单的线性代数证明, 非零特征值必为 $\pm\sqrt{mn}$.
- 设 G 是 d-正则的, 即每个点恰连了 n 条边. 则 $A(1,1,\cdots,1)^T=d(1,1,\cdots,1)^T$.
- 设 G 顶点最大度数为 ΔG, 则 $\Delta G\geq\lambda_1$. 于是 d-正则的图最大特征值为 d.

  这是因为: 设 $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 是 λ 对应的特征向量. 设 $x_k=\max\limits_j x_j$ 则

$$\lambda_1x_i=(A\vec{x}^T)_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\leq\deg(i)x_i.\implies\lambda_1\leq\deg(i)\leq\Delta(G).$$

定理 2.1 (Hoffman's Theorem)

G 是一个有 n 个点的 d-正则图, 特征值为 $\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n$. 则图的最大独立集大小有上界.

$$\alpha(G)\leq n\cdot\frac{-\lambda_n}{\lambda_1-\lambda_n}.$$

证明 记 $v(G)=[n]$, $d=\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n$. 诸单位特征向量 $\vec{v_n}$. $\vec{v_1}=\frac{1}{\sqrt{n}}(1,1,\cdots,1)^T$.

设 $I\subseteq[n]$ 为指标集. I 对应着一个向量 $\mathbb{1}_I=\sum\alpha_i\vec{v_i}$. 计算:

$$|I|=\langle\mathbb{1}_I,\mathbb{1}_I\rangle=\sum\alpha_i^2;\quad\langle\mathbb{1}_I,\vec{v_i}\rangle=\alpha_1=\frac{|I|}{\sqrt{n}}.$$

于是计算:

$$\begin{aligned}0=&\mathbb{1}_I^TA\mathbb{1}_I=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbb{1}_I)_i(\mathbb{1}_I)_j=(\sum\alpha_i\vec{v_i})^TA(\sum\alpha_i\vec{v_i})=\sum\lambda_i\alpha_i^2\\ \geq&\lambda_1\alpha_1^2+\lambda_n(\sum_{i\geq2}\alpha_i^2)=\lambda_1\frac{|I|^2}{n}+\lambda_n(|I|-\frac{|I|^2}{n}).\end{aligned}$$

计算即证 $|I|\leq n\frac{-\lambda_n}{\lambda_1-\lambda_n}$. ■

例题 2.2 回顾 EKR 定理: Kneser graph

回顾 EKR 定理:

定理 2.2 (Erdös-Ko-Rado)

设 $n\geq2k$ 且 $\mathcal{F}$ 是 k-一致的相交系, 则 $|\mathcal{F}|\leq\binom{n-1}{k-1}$. 在星形集的时候取到最值.

可以用特征值来证明这个定理.

定义 2.2 (Kneser graph)

设 $n \geq 2k$. 定义 Kneser graph, 记作 $K(n,k)$: 在 $\binom{[n]}{k}$ 的元素 A, B 之间连边, 当且仅当 $A \cap B = \varnothing$.

举个例子: $K(2k,k)$ 是 $2k$ 个点的完美匹配.

命题 2.2

$K(n,k)$ 的独立集和 k-一致的相交系 $\mathcal{F}$ 一一对应.

于是我们有 EKR 的另一种等价表述:

定理 2.3

$\alpha(K(n,k)) \leq \binom{n-1}{k-1}$.

证明 $\alpha(K(n,k))$ 是一个 k-正则图, 所以其最大的特征值 $\lambda_1 = \binom{n-k}{k}$.

需要计算最小特征值. 计算复杂, 所以略去. 引用 *GTM207* 的定理 9.43, $\alpha(K(n,k))$ 的特征值为:

$$\binom{n}{j} - \binom{n}{j-1} \text{个} (-1)^j \binom{n-k-j}{k-j}. \forall 0 \leq j \leq k.$$

于是 $\lambda_n = -\binom{n-k-1}{k-1}$. 根据 Hoffman's Theorem,

$$\alpha(G) \leq \binom{n}{k} \frac{\binom{n-k-1}{k-1}}{\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}} = \binom{n}{k} \frac{k}{(n-k)+k} = \binom{n-1}{k-1}.$$

■

$K(5,2)$ 是一个 Peterson 图. 尝试在不使用 *GTM207* 的定理 9.43 下计算它的诸特征值.

注意到 $K(5,2)$ 是 3-正则的, $\{K_3, C_4\}$-自由的. 设 A 是其邻接矩阵. 则

$$(A^2)_{(i,j)} = i,j \text{ 间 2-长路的数目 } = \begin{cases} 3, & i = j; \\ 0, & i \neq j, i \sim j; \\ 1, & i \neq j, i \nsim j \end{cases}$$

$$A^2 = 2I + J - A.$$

已知 3 是其最大特征值, 特征向量是 $(1, \cdots, 1)^T$. 设 $\lambda \neq 3$ 是其特征值, $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

$$\text{则} \lambda^2\vec{x} = A^2\vec{x} = (2I + J - A)\vec{x} \stackrel{*}{=} (2-\lambda)\vec{x}. \Longrightarrow \lambda^2 = 2 - \lambda \Longrightarrow \lambda = 1 \text{或} 2.$$

其中 * 是因为: 作为特征向量, $\vec{x} \perp (1, \cdots, 1)^T$, $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

证明还告诉我们, 特征值 3 只有 1 重, 因为其只有一个特征向量. 设 1 的重数为 a, -2 的重数为 b, 则

$$\begin{cases} a + b + 1 = 10, \\ 3 + a - 2b = 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 5, \\ b = 4. \end{cases}$$

这和 *GTM207* 的定理 9.43 的结果是一样的.

观察: $K(5,2)$ 是 10 阶 3-正则图, K_10 是 10 阶 9-正则图. 但是

命题 2.3

不能将 K_{10} 拆分成三个 $K(5,2)$ 的无交并.

证明 反设可以. 设拆分后的三个图的邻接矩阵是 P_1, P_2, P_3, 则

$$P_1 + P_2 + P_3 = J - I.$$

设 P_1 的特征值 1 生成的特征空间为 V_1, 再设 P_2 的特征值 1 生成的特征空间为 V_2, 则 $\dim(V_1) = 5 = \dim(V_2)$.

由前面讨论知 $V_1 \perp (1,\cdots,1)^T, V_2 \perp (1,\cdots,1)^T$, 于是 $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$.

设 $\vec{x} \in V_1 \cap V_2$, 则 $\begin{cases} \vec{x} \perp (1,\cdots,1)^T; \\ P_1\vec{x} = \vec{x}; \\ P_2\vec{x} = \vec{x}. \end{cases}$ 于是:

$$2\vec{x} + P_3\vec{x} = (P_1 + P_2 + P_3)\vec{x} = (J - I)\vec{x} = -\vec{x}.$$

于是 -3 是 P_3 的特征值. 这与 P_3 是 $K(5,2)$ 的邻接矩阵相矛盾. ■

例题 2.3 Moore 界与 Cages

定义 2.3

G 的最小圈的长度称为 G 的围长, 记作 $\mathrm{girth}(G)$. 在 G 没有圈的时候, 称 $\mathrm{girth}(G) = +\infty$. ♣

命题 2.4

设 G 是一个 d-正则图, $\mathrm{girth}(G) \geq 5$, 则

$$|v(G)| \geq 1 + d + d(d-1).$$

♠

证明 取定一个点, 将带来 d 个新点. 它们不会连接到彼此, 且连出去的新点不会与这 d 个点相连. 于是

$$1 + d + d(d-1) \leq |v(G)|.$$

这个证明是广度优先生成树 (BFS) 算法的来源. ■

定理 2.4 (Moore 界)

设 G 是一个 d-正则图, $\mathrm{girth}(G) \geq 2k-1$, 则

$$|v(G)| \geq 1 + d + \sum_{j=1}^{k-2} d(d-1)^j.$$

♡

证明留做习题.

我们关心在 d 取多少时存在能取到 Moore 界的图.

定理 2.5

G 是一个 $d \geq 3$-正则图, $\mathrm{girth}(G) \geq 5, |v(G)| = 1 + d + d(d-1)$. 则 $d \in \{3, 7, 57\}$. ♡

注记 $d = 3, d = 7$ 的解确实存在, 但是尚未构造出 $d = 57$ 的解.

证明 和前一个 $K(5,2)$ 的讨论一样地有:

$$A^2 = (d-1)I + J - A.\text{且}d\text{是最大的一个特征值}.$$

考虑特征值 $\lambda \neq d$, 特征向量 $\vec{x} \perp (1,\cdots,1)^T$. 则

$$\lambda^2\vec{x} = ((d-1)I + J - A)\vec{x} = (d-1-\lambda)\vec{x}.$$

于是 $\lambda^2 + \lambda - d + 1 = 0$. 得到 $\lambda_2, \lambda_3 = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{4d-3} - 1)$.

设 λ_2, λ_3 对应的阶数分别为 a, b, 则

$$\begin{cases} a + b = n - 1 = d^2; \\ d + \lambda_2 a + \lambda_3 b = 0. \end{cases} \implies (a-b)\sqrt{4d-3} = d^2 - 2d.$$

1. 若 $4d-3$ 不是完全平方数, 则需要 $a = b$. 此时 $0 = d^2 - 2d \to d = 2$. 平凡情况.

2. 若 $4d-3=s^2$ 是完全平方数, 则经整理知:

$$s^5+s^4+6s^3-2s^2+(-32a)s=15.$$

由 Eisenstein 判别法知 $s|15$. 即 $s\in\{1,3,5,15\}$. 根据 $d=\frac{1}{3}(s^2-3)$ 有: $d\in\{1,3,7,57\}$.

综上, 忽略 $d=1,2$ 的平凡情况, 只有 $d\in\{3,7,57\}$. ■

这个例子中我们可以观察到如下结论:

命题 2.5

$$(A^k)_{i,j}=i \text{ 和 } j \text{ 之间的 } k \text{ 长路的数目}.$$

例题 2.4 友谊图定理

定理 2.6

设图 G 的任意两个元素之间有且仅有一个共同邻居, 则存在一个点与其它所有顶点相邻.

证明 设 $n=|v(G)|$.

- 假定 G 是 d-正则图. 此时 G 中任意两个顶点不论相邻与否都有且仅有 1 个公共顶点. 于是 G 是一个 $(n,d,1,1)$-强正则图. 设 A 是它的邻接矩阵, 则

$$A^2=(d-1)I_n+J_n.$$

于是 A^2 的特征值为 1 阶的 $n+d-1$ 与 $n-1$ 阶的 $d-1$. 而 A 是 d-正则的图, 于是

$$d^2=n+d-1.$$

进一步, 可设 A 的所有特征值为 $\begin{cases}\lambda_1=d, \text{阶数为 } 1;\\ \lambda_2=\sqrt{d-1}, \text{阶数为 } a;\\ \lambda_3=-\sqrt{d-1}, \text{阶数为 } b.\end{cases}$ 于是由 $tr(A)=0$ 知:

$$d+a\sqrt{d-1}+b(-\sqrt{d-1})=0. \Longrightarrow (b-a)^2(d-1)=d^2.$$

于是 $d-1|d^2$. 这要求 $d=2$ 且 $n=3$. 于是 $G=K_3$.

- 设 G 不是正则图. 取 $u\nsim v$. 设 $d(u)=k, N(u)=\{w_i, i\in[k]\}$. 则诸 w_i 和 v 有唯一公共点. 记作 z_i. 若存在不相等的 i,j 使得 $z_i=z_j$, 那它将成为 w_i 和 w_j 的第二个公共顶点, 矛盾. 所以 $d(v)\geq k=d(u)$. 对称地, $d(v)\leq d(u)$. 于是任意两个不相邻点有相同度数. 由 G 不是正则图知:

$$\exists v\neq w, d(v)\neq d(w)\Rightarrow v\sim w.$$

设 u 是 vw 的公共邻居, 则 $d(u)\neq d(v)$ 和 $d(u)\neq d(w)$ 至少有一个成立. 不失一般性地设 $d(u)\neq d(v)$.

下面证明 v 和所有顶点相连. 反设不是即存在 $x\nsim v$, 则 $\begin{cases}d(v)=d(x)\neq d(u);\\ d(v)=d(x)\neq d(w).\end{cases}$ 于是得到 C_4 子图, 矛盾.

■

例题 2.5

定义 2.4 (图的直径)

$$Diameter(G)=\max_{u\nsim v}\mathrm{d}(u,v).$$

定理 2.7

$$Diam(G)<G \text{ 的不同特征值的个数}=k.$$

证明 设不同特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$. 构造 A 的极小多项式为 $f(x)=\prod_{i=1}^k(x-\lambda_i)$. 则

$$f(A)=0.\implies \exists\{a_i\}_{i=0}^{k-1}:A^k=a_{k-1}A^{k-1}+\cdots+a_0I.$$

$f(A)=0$ 是极小多项式. 由前面结论, 设 $Diam(G)\geq k$, 则任意的 $i\leq k-1$, 在不相邻的 u,v 之间不存在 i 长路. 于是 $A^i=0$. 这与极小多项式相矛盾. ■

我们讨论特征值的另一种表示方式.

命题 2.6

A 是对称实矩阵, 则

1. $$\lambda_1=\max_{0\neq\vec{x}\in\mathbb{R}^n}\frac{\vec{x}^TA\vec{x}}{\vec{x}^T\vec{x}};\quad \lambda_n=\min_{0\neq\vec{x}\in\mathbb{R}^n}\frac{\vec{x}^TA\vec{x}}{\vec{x}^T\vec{x}};$$
2. Conrant-Fisher 等式:
$$\lambda_k=\max_{U\subseteq\mathbb{R}^n,\dim U=k}\ \min_{0\neq\vec{x}\in U}\frac{\vec{x}^TA\vec{x}}{\vec{x}^T\vec{x}}=\min_{U\subseteq\mathbb{R}^n,\dim U=n-k+1}\ \max_{0\neq\vec{x}\in U}\frac{\vec{x}^TA\vec{x}}{\vec{x}^T\vec{x}}.$$

例题 2.6 λ_1 的估计

定理 2.8

设 $G=(V,E),|V|=n,|E|=m$, 则

$$\frac{2m}{n}\leq\lambda_1\leq\Delta(G).$$

证明 取 $\vec{x}=(1,1,\cdots,1)^T$, 则由握手定理,

$$\lambda_1\geq\frac{\vec{x}^TA\vec{x}}{\vec{x}^T\vec{x}}=\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}=\frac{1}{n}2m.$$

■

命题 2.7

1. 对于 $\lambda_1\geq 0$ 的图 G, 存在其对应的特征向量 $\vec{x}$ 使得其各个分量均 ≥ 0.
2. 设 G 是连通的, 则其最大特征值的重数恰为 1, 且其特征向量只有正的分量. (需要证明)

例题 2.7

定理 2.9

设 G_1 是 G 的子图, 则 $\lambda_1(G_1)\leq\lambda_1(G)$.

证明 设 λ_1 的诸分量均非负的单位特征向量为 $\vec{x}$, 则

$$\lambda_1(G)=\vec{x}^TA\vec{x}=2\sum_{i\sim j\in G}x_ix_j\geq 2\sum_{i\sim j\in G_1}x_ix_j=\lambda_1(G_1).$$

■

推论 2.1

$\lambda_1(G)\geq\sqrt{\Delta}$, 其中 $\Delta(G)$ 指的是顶点最大度数.

证明 取 $G_1=K_{1,\Delta}$ 即得. ■

例题 2.8 矩阵的交错特征值

定理 2.10

设 $A_{n\times n}$ 有特征值 $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n$. 对于 $m \le n$, 设 $N \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $NN^T = I_m$. 考察 $B = NAN^T$ 的特征值 $\mu_1 \ge \cdots \ge \mu_m$, 则 $\forall i \in [m], \lambda_i \ge \mu_i \ge \lambda_{n-m+i}$.
特殊地, $m = n-1$,$\lambda_1 \ge \mu_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \mu_{n-1} \ge \lambda_n$.

证明 设 $\vec{u_i}, i \in [m]$ 是 B 的 m 个特征向量. 定义 $U_k = span\{\vec{u_i}, i \in [k]\}$ 是一个 k 维空间. 于是

$$\forall \vec{0} \ne \vec{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{u_i} \in U_k,\ \mu_k \le \frac{\sum a_i^2 \mu_i}{\sum a_i^2} = \frac{\vec{x}^T B \vec{x}}{\vec{x}^T \vec{x}}.$$

令 $W = \{N^T\vec{x}:\ \vec{x} \in U\}$, 则

$$\forall \vec{0} \ne \vec{y} = N^T\vec{x} \in W, \lambda_k \ge \frac{\vec{y}^T A \vec{y}}{\vec{y}^T \vec{y}} = \frac{\vec{x}^T B \vec{x}}{\vec{x}^T \vec{x}} \ge \mu_k.$$

对于另一个不等号, 考虑 $-A$ 和 $-B$. ■

这个定理在研究子图的时候有很好的效果.

推论 2.2

设 $\alpha(G)$ 是 G 的最大独立集的元素个数, 则 $\lambda_{\alpha(G)} \ge 0 \ge \lambda_{n-\alpha(G)+1}$.

证明 设 I 是这个最大的独立集, 则存在 $N \in \mathbb{R}^{\alpha(G)\times n}$, 其每行分别是 I 对应的单位向量. $NN^T = I_{\alpha(G)}$.
考虑 N^TAN 的意义. 由于 I 是独立集, 因此它对应着 G 的空子图. $N^TAN = O$. 诸 $\mu_i = 0, i \in [\alpha(G)]$. 即证. ■

例题 2.9 回忆估计: 正则图中 $\alpha(G) \ge n\frac{-\lambda_n}{\lambda_1-\lambda_n}$. 在一般的图中是否 $\chi(G)\alpha(G) \ge n$?

定理 2.11

设 G 是连通的, 特征值 $\lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_n$. 则 $\chi(G) \ge 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_n}$.

证明 设 $\chi(G) = m$, 则 G 可以看作一个 m 部图. 于是 G 的邻接矩阵可以进行如下重排分块使得对角线是零方阵.

$$A = \begin{pmatrix} O & A_{1,2} & \cdots & A_{1,m} \\ A_{2,1} & O & & \\ \vdots & & \ddots & \\ A_{m,1} & & & O \end{pmatrix}.$$

对 λ_1 对应的特征向量进行同样大小的分块: $\vec{x} = (\vec{x_1}^T, \vec{x_2}^T, \cdots, \vec{x_m}^T)^T$.
令:

$$N = \begin{pmatrix} \frac{\vec{x_1}^T}{\|\vec{x_1}^T\|} & O & \cdots & O \\ O & \frac{\vec{x_2}^T}{\|\vec{x_2}^T\|} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ O & & & \frac{\vec{x_m}^T}{\|\vec{x_m}^T\|} \end{pmatrix}.$$

则 $NN^T = I_m$. 设 $B = NAN^T$ 的特征值 $\mu_1 \ge \cdots \ge \mu_m$. 由交错特征值定理, $\lambda_1 \ge \mu_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \mu_m \ge \lambda_n$.

计算:

$$B\begin{pmatrix}\|\vec{x_1}\|\\\|\vec{x_2}\|\\\vdots\\\|\vec{x_m}\|\end{pmatrix}=NAN^T\begin{pmatrix}\|\vec{x_1}\|\\\|\vec{x_2}\|\\\vdots\\\|\vec{x_m}\|\end{pmatrix}=NA\begin{pmatrix}\vec{x_1}\\\vec{x_2}\\\vdots\\\vec{x_m}\end{pmatrix}=NA\vec{x}=\lambda_1N\vec{x}=\lambda_1\begin{pmatrix}\|\vec{x_1}\|\\\|\vec{x_2}\|\\\vdots\\\|\vec{x_m}\|\end{pmatrix}.$$

注意 B 的对角元也都是 0. 于是:

$$tr(B)=0=\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n\geq\lambda_1+(m-1)\mu_m\geq\lambda_1+(m-1)\lambda_m.\Longrightarrow m\geq 1-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}.$$

■

直接可以得到 $\chi(G)\alpha(G)\geq(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_n})(n\frac{-\lambda_n}{\lambda_1-\lambda_n})=n.$

第 3 章 Lovasz 局部引理

回顾一个简单结论. 假设 A_i 是一组随机事件满足:

$$\sum \mathbb{P}(A_i) < 1.$$

那么至少存在一个情况使得 A_i 都不发生, 换句话说, 所有事件的补事件同时发生.

$$\mathbb{P}(\cap A_i^c) > 0.$$

在所有事件相互独立的时候, 这个条件自然是充分必要的. 但是一般的情况下我们不需要这么强的条件.

定理 3.1 (Lovasz 局部引理, 对称版本: Lovasz Local Lemma)

设 $\{A_i\}_{i\in[k]}$ 是一族随机事件, 任意的 i 均有:$\mathbb{P}(A_i) \le p$. 任意事件均与其他事件相互独立, 除了其中的 d 个. 若 $ep(d-1) < 1$, 则所有事件的补事件同时发生的概率大于 0. 即

$$\mathbb{P}(\cap A_i^c) > 0.$$

♡

我们还有 Lovasz 局部引理的非对称版本, 它比对称版本更强.

定义 3.1

先定义一个辅助图. 设 $\mathcal{A} = A_{i i\in[k]}$ 是概率空间 Ω 中的一族随机事件. 定义 $\mathcal{A}$ 的独立图 D: 在 A_iA_j 之间连边, 如果二者不独立.

♣

定理 3.2 (Lovasz 局部引理, 非对称版本)

设 D 中 A_i 的邻居集为 $N(A_i)$. 若存在一个映射 $x : \mathcal{A} \to [0, 1)$ 满足: $\forall A_i$,

$$\mathbb{P}(A_i) \le x(A_i) \prod_{B\in N(A_i)} (1 - x(B)).$$

则所有事件的补事件同时发生的概率大于 0. 即

$$\mathbb{P}(\cap A_i^c) > 0.$$

♡

我们先证明下面这个命题:

命题 3.1

LLL 非对称版本 $\Longrightarrow$LLL 对称版本.

♠

证明 在对称版本的条件下, 设 $p = \max\{\mathbb{P}(A_i)\}$, $d \ge \max \deg A_i$. $ep(d + 1) \le 1$.

构造 $x : \mathcal{A} \to [0, 1) : x(A_i) = \frac{1}{d+1}$. 计算:

$$x(A_i) \prod_{B\in N(A_i)} (1 - x(B)) \ge \frac{1}{d+1} \times \prod(1 - \frac{1}{d+1})^d \ge \frac{1}{e(d+1)} \ge p \ge \mathbb{P}(A_i).$$

于是对称版本的条件被满足. 即证. ■

下面证明非对称版本的定理.

证明 先用归纳法证明以下引理:

引理 3.1

任意的 $A \in \mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, 设 $A \notin \mathcal{B}$, 有:

$$\mathbb{P}[A| \bigcap_{B\in\mathcal{B}} B^c] \le x(A).$$

♡

对 $|\mathcal{B}|$ 作归纳. 在 $|\mathcal{B}|=0$ 时, 显然 $\mathbb{P}(A)\le x(A)$.
设命题对 $|\mathcal{B}|<t$ 的 $(A,\mathcal{B})$ 都成立, 我们证明 $|\mathcal{B}|=t$ 的情况.
令 $\mathcal{B}_1=\mathcal{B}\cap N(A), \mathcal{B}=\mathcal{B}\backslash\mathcal{B}_1$. 考虑:

$$\mathbb{P}\left[A|\bigcap_{B\in\mathcal{B}}B^c\right]=\frac{\mathbb{P}\left[A\cap\bigcap_{B\in\mathcal{B}_1}B^c|\bigcap_{B\in\mathcal{B}_2}B^c\right]}{\mathbb{P}\left[\bigcap_{B\in\mathcal{B}_1}B^c|\bigcap_{B\in\mathcal{B}_2}B^c\right]}$$

计算分子. 注意 $|\mathcal{B}_1|<|\mathcal{B}|$ 可以使用归纳假设.

$$\mathbb{P}\left[A\cap\bigcap_{B\in\mathcal{B}_1}B^c|\bigcap_{B\in\mathcal{B}_2}B^c\right]\le\mathbb{P}\left[A|\bigcap_{B\in\mathcal{B}_2}B^c\right]=\mathbb{P}(A)\le x(A_i)\prod_{B\in N(A_i)}(1-x(B)).$$

计算分母. 设 $\mathcal{B}_1=\{B_1,B_2,\cdots,B_l\}$. 用概率计算的链式法则:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left[\bigcap_{B\in\mathcal{B}_1}B^c|\bigcap_{B\in\mathcal{B}_2}B^c\right]\\
=&\mathbb{P}\left[B_1^c|\bigcap_{s\ge2}^{l}B_i^c\cap\bigcap_{B\in\mathcal{B}_2}B^c\bigcap_{B\in\mathcal{B}_2}B^c\right]\times\mathbb{P}\left[B_2^c|\bigcap_{s\ge3}^{l}B_i^c\cap\bigcap_{B\in\mathcal{B}_2}B^c\bigcap_{B\in\mathcal{B}_2}B^c\right]\\
&\times\cdots\times\mathbb{P}\left[B_l^c|\bigcap_{B\in\mathcal{B}_2}B^c\bigcap_{B\in\mathcal{B}_2}B^c\right]\\
\ge&\prod_{s=1}^{l}(1-x(B_s)).\end{aligned}$$

于是知:

$$\mathbb{P}\left[A|\bigcap_{B\in\mathcal{B}}B^c\right]\le\frac{x(A_i)\prod_{B\in N(A_i)}(1-x(B))}{\prod_{s=1}^{l}(1-x(B_s))}\le x(A).$$

引理得证. 最后说明 $\mathbb{P}(\cap A_i^c)>0$. 还是使用链式法则.

$$\mathbb{P}(\cap A_i^c)=\prod_{i=1}^{k}\mathbb{P}\left[A_i|\bigcap_{s=i+1}^{k}A_s\right]\ge\prod_{i=1}^{k}(1-x(A_i))>0.$$

■

看几个例子.

例题 3.1 超图的二染色

取一个超图, 它可二染色是指: 用两种颜色染它的顶点使得其所有边都不是单色的.

定理 3.3

H 是一个可二染色的 k-一致超图, 如果其任意一条边都至多和 $\mathrm{e}^{-1}2^{k-1}-1$ 条边相交. ♡

这个结论是局部的.

证明 考虑对 $v(H)$ 的随机二染色, 每个顶点等概率地随机染红或者蓝. 记其某条边 e 是单色为事件 A_e. 则

$$\mathbb{P}(A_e)=2^{1-k}.$$

则: 任意事件 A_e 均与其他事件相互独立, 除了其中的 $\mathrm{e}^{-1}2^{k-1}-1$ 个. 又

$$\mathrm{e}(2^{1-k})(\mathrm{e}^{-1}2^{k-1}-1+1)=1$$

于是用对称版本的 Lovasz Local Lemma, 存在一种染色使得所有 A_e 都不发生. ■

推论 3.1

在 $k\ge9$ 时, k-一致的 k-正则超图一定可以二染色. ♡

证明 注意到 $k\geq 9$ 时, $k\leq \mathrm{e}^{-1}2^{k-1}-1$ 即可. ■

例题 3.2 对称 Ramsey 数

令 $r(t)=R(t,t)$. 一个上界是 $r(t)\leq \binom{2t-1}{t-1}\leq 4^t$. Erdös 下界有 $r(t)\geq (1-o(1))\frac{t}{\sqrt{2}\mathrm{e}}\sqrt{2}^t$.

定理 3.4 (Spencer, 1977)

用 LLL 给出一个比 Erdös 好一倍的上界.

$$r(t)\geq (1-o(1))\frac{\sqrt{2}t}{\mathrm{e}}\sqrt{2}^t.$$

♡

证明 令 $n=(1-o(1))\frac{\sqrt{2}t}{\mathrm{e}}\sqrt{2}^t-1$. 考虑 K_n 的随机二染色. 对于任意 $T\in\binom{[n]}{t}$, A_T 代表 T 同色的事件. 则

$$\mathbb{P}(A_T)=2^{1-\binom{t}{2}}.$$

还是考察相交图 D. 在 A_T 和 $A_{T'}$ 之间连边当且仅当它们不独立, 也当且仅当 $|T\cap T'|\geq 2$.

估计 $\Delta(D)$. 我们只需要很松的一个上届: $\Delta(D)\leq\binom{t}{2}\binom{n}{t-2}$. 可验证对称 LLL 的条件:

$$\mathrm{e}\times 2^{1-\binom{t}{2}}\left(\binom{t}{2}\binom{n}{t-2}+1\right)\leq 1.$$

于是对于这个 n, 存在不包含同色 K_t 的 K_n 二染色. 于是 $r(t)>n$. ■

例题 3.3 非对称 Ramsey 数

我们考察 $R(3,l)$. 显然的上界是 $R(3,l)\leq\binom{l+1}{2}=\frac{1}{2}(l+1)(l)$.

定理 3.5

$$R(3,l)=H\times\left(\frac{l^2}{\log l}\right).$$

♡

这个定理的证明是很困难的. 我们可以用 LLL 给出它的下界一边的弱化版本.

定理 3.6

$$R(3,l)\geq C\times\frac{l^2}{(\log l)^2}.\text{对于一般的 } s \text{ 和充分大的 } l,\ R(s,l)\geq C\times\left(\frac{l}{\log l}\right)^{\frac{1}{2}(s+1)}.$$

♡

证明 我们对于充分大的 l 证明. 还是对 K_n 的边以概率 p 染红色, 概率 $1-p$ 染蓝色, p 待定.

记 A_T 为三元集 T 构成蓝色 K_3 的事件, B_S 是 l 元集构成红色 K_l 的事件. $P(A_T)=p^3$; $P(B_S)=(1-p)^{\binom{l}{2}}$.

构造图 G. $v(G)=\{A_T: T\in\binom{[n]}{3}\}\cup\{B_S: S\in\binom{[n]}{l}\}$, 连边情况:

$$\begin{cases} A_T\sim A_{T'} & \Longleftrightarrow |T\cap T'|\geq 2;\\ B_S\sim B_{S'} & \Longleftrightarrow |S\cap S'|\geq 2;\\ A_T\sim B_S & \Longleftrightarrow |T\cap S|\geq 2.\end{cases}$$

考察 G 中每个点的度数. 做估计的时候只需要估计 n 的主值.

$$\begin{cases} \forall A_T: & \deg A_T\leq\binom{3}{2}(n-3)+\binom{3}{2}\binom{n-3}{l-2}\leq 3n+\binom{n}{l};\\ \forall B_S: & \deg B_S\leq\binom{l}{2}n+\binom{3}{2}\binom{n-3}{l-2}\leq\binom{l}{2}n+\binom{n}{l}.\end{cases}$$

为了使用 LLL 证明 $R(3,l)\geq n$, 只需要找合适的 x,y,p 使得对于充分大的 l, 以下两条成立

$$\begin{cases} p^3\leq x(1-x)^{3n}(1-y)^{\binom{n}{l}};\\ (1-p)^{\binom{l}{2}}\leq y(1-x)^{n\binom{l}{2}}(1-y)^{\binom{n}{l}}.\end{cases}$$

我们猜 $y=\binom{n}{l}^{-1}$, 则 $(1-y)^{\binom{n}{l}}\sim e^{-1}$. 用 $\mathrm{e}^{-x}>1-x$ 和 $(1-m^{-1})^m\approx e^{-1}$ 估阶:

$$\begin{cases} p^3\le x; \\ \mathrm{e}^{-p\binom{l}{2}}\approx(1-p)^{\binom{l}{2}}\le(1-x)^{n\binom{l}{2}}\approx\mathrm{e}^{-xn\binom{l}{2}}. \end{cases}\quad\Longrightarrow p\ge xn\ge p^3n.$$

于是 $p\le n^{\frac{1}{2}}, x\sim n^{-\frac{3}{2}}$. 再由第二条,

$$\mathrm{e}^{-p\binom{l}{2}}\le y\sim\binom{n}{l}^{-1}\approx\mathrm{e}^{-l\log n}\Longrightarrow pl^3\ge p\binom{l}{2}\ge l\log n.$$

于是 $l\ge p^{-1}\log n\ge\sqrt{n}\log n$. 以上为对问题的猜测分析, 具体地, 我们取:

$$l\ge 20\sqrt{n}\log n;\quad y=\binom{n}{l}^{-1};\quad x=\frac{1}{9n^{\frac{3}{2}}};\quad p=\frac{1}{3\sqrt{n}}.$$

经过一些蹇弹的嚆计算可以验证前述两条成立. 于是由 LLL 的非对称版本, $R(3,l)\ge n$. ■

例题 3.4 独立截断

定理 3.7

设 $G=(V,E)$ 中点的最大度数为 Δ, $V=\bigcup_{i=1}^{r}V_r$ 是 V 的一个剖分, 从每个 V_i 中取出一个点 v_i 构成集合 V 称为 G 的截断.

若所有的 $|V_i|\ge 2\mathrm{e}\Delta$, 则存在截断 V 使得 V 还是 G 的独立集. ♡

证明 不妨假设 $|V_i|=\lceil 2\mathrm{e}\Delta\rceil=k$. 对每个 i, 独立地等概率随机选取 $v_i\in V_i$. 定义事件 $A_{i,j}$ 为 v_i 和 v_j 连边. 则 $\mathbb{P}(A_{i,j})\le\frac{\Delta}{k}$. 在独立图中每个 $A_{i,j}$ 度数小于等于 $2k\Delta$. 验证:

$$\mathrm{e}\frac{\Delta}{k}(2k\Delta)<1\text{不成立!}$$

以上思路是错误思路. 我们需要重新找事件进行计算. 任取 $e\in E$, 设 B_e 为 e 的两个端点都被选取了的事件. 则

$$\mathrm{e}\mathbb{P}(A_e)(\deg A_e+1)\le\mathrm{e}k^{-2}(2k\Delta+1)\le 1.$$

即证一定存在一个选取使得所有边都不会两个顶点都被选取, 即存在独立截断. ■

例题 3.5 d-正则的有向图

称有向图 G 是 d-正则的, 如果所有顶点的出度和入度都是 d.

命题 3.2

设 G 是每个顶点的度数都是偶数的图, 则一定存在一个赋向方式使得每个顶点出度与入度相同.

特殊地, 设 G 是 $2d$-正则的, 则可给 G 每条边赋向使得其成为 d-正则的有向图. ♠

证明 由 Euler 一笔画定理即证. ■

定理 3.8

任意整数 k, 存在 d 使得任意 d-正则有向图 G, 存在圈长被 k 整除的圈. ♡

定理 3.9

设 G 的顶点最小出度为 δ, 最大入度为 Δ, 则给定

$$k\le\frac{\delta}{1+\log(1+\delta\Delta)}.$$

则 G 存在长可被 k 整除的圈. ♡

证明 不妨假设每个点的出度恰为 δ. 构造随机变量 $\{x_v\}_{v\in v(G)}$ 独立同分布, 等概率取 $\mathbb{Z}_k$ 的值.

记事件 A_v 为: 不存在 $v \to w$ 使得 $x_w = x_v + 1$. 则 $\mathbb{P}(A_v) = (1-\frac{1}{k})^\delta \le \mathrm{e}^{\frac{\delta}{k}}$.

A_v 依赖于 $B_v\{x_w : w = v, \text{或者} v \to w\}$. 构造图: 在 A_v 和 A_w 之间连边当且仅当其不独立. 此时必有 $B_v \cap B_w$ 非空. 于是 $\deg A_v \le \Delta + \delta + \delta(\Delta+1) = \Delta + \delta\Delta = d$.

我们考虑使对称的 LLL 的条件满足的 k.

$$p\mathrm{e}(d+1) \le (1-\frac{1}{k})^\delta \le \mathrm{e}^{\frac{\delta}{k}} \Rightarrow k \le \frac{\delta}{1+\Delta+\log(1+\delta\Delta)}.$$

这个条件和题目中的条件相差了一个 Δ. 我们进行改进. 注意到当 $w \to v$ 时, $B_w \cap B_v \neq \varnothing$, 但是 A_v 和 A_w 无关. 于是对 $\deg A_v$ 的估计中可以去掉第一项的 Δ. 即证. ■

第 4 章　Szemerédi 正则引理

设 G 是一个图. X 和 Y 是两个不交的顶点集. 称它们间的边密度为

$$d(X,Y)=\frac{e_G(X,Y)}{|X||Y|}\in[0,1].$$

定义 4.1

一个二部图 (A,B) 被称作是 ε-正则的, 若任意的 $X\subseteq A, Y\subseteq B$ 使得 $|X|\geq\varepsilon|A|, |Y|\geq\varepsilon|B|$,

$$|d(X,Y)-d(A,B)|\leq\varepsilon.$$

♣

任意的 k, 可将 $V(G)$ 划分成 k 块使得任意两块之间点数相差不超过 1. 称这种划分为平均划分.

定义 4.2

一个大小为 k 的平均划分是 ε-正则的, 若 (V_i,V_j) 都是 ε-正则的, 除了其中的 εk^2 对.

♣

定理 4.1 (Szemerédi 正则引理, Szemerédi's regular lemma)

$\forall\varepsilon>0$, 则存在 $T(\varepsilon)>0$, 使得任意的图 G 存在 ε-正则的 k-平均划分, 且

$$\varepsilon^{-6}\leq k\leq T(\varepsilon).$$

♡

如果不要求上界的话, 可以直接把图拆成单点. 所以这个 $k\leq T(\varepsilon)$ 是很有必要且不平凡的.

证明 假设 $P=\{V_i\}_{i\in[k]}$, 是 $V(G)$ 的一个划分, 记 $|v_i|=a_in$, $\sum a_i=1$. 令 $q(V_i,V_j)=a_ia_jd(V_iV_j)$. 令

$$q(P)=\sum_{i<j}q(V_i,V_j)\in[0,1].$$

定义 4.3

设 $P'=\{V_j'\}_{j\in[l]}$ 是 P 的细分, 若任意的 j, 存在 i 使得 $V_j'\subseteq V_i$.

♣

我们总体思路是对给定的不符合条件的 P 切分, 在切分过程中 $q(P)$ 值会逐渐等幅度增大. 但是 $q(P)$ 是有上届的, 于是切分次数会得到控制. 切到进行不下去地时候, 我们验证这个切分是我们需要的.

引理 4.1

设 P 是一个非 ε-正则的 $k>\varepsilon^{-6}$-平均划分, 则存在一个 P 的细分 P^*, 使得 P^* 是一个 $k^*>\varepsilon^{-6}$-平均划分, 且

$$q(P^*)\geq q(P)+\frac{1}{2}\varepsilon^5, \text{且} k^*\leq 2^{2^k}.$$

♡

在引理的条件下来证明 SRL.

我们从一个大小为 ε^{-6}-的划分开始. 不断地应用上面的引理直到我们得到了 ε-正则的划分. 每次应用将使得 $q(P)$ 增大至少 $\frac{1}{2}\varepsilon^5$, 因此至多进行 $\frac{2}{\varepsilon^5}$ 次划分. 最终的 $k\leq T(\varepsilon)=Tow(\frac{2}{\varepsilon^5})$, 其中

$$Tow(0)=1, Tow(n)=2^{Tow(n)}.$$

至此, SRL 的证明结束. 接下来我们只需要证明这个关键引理即可. ∎

命题 4.1

令 A,B 不交, $|A|=an, |B|=bn$. 设

$$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_t, |A_i|=ax_in, \sum x_i=1;$$
$$B=B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_s, |B_i|=by_in, \sum y_i=1.$$

假设 $d(A_i,B_j)=d(A,B)+\varepsilon_{i,j}$, 则

$$\sum_{i,j} q(A_i,B_j)=q(A,B)+ab\sum x_iy_i\varepsilon_{i,j}^2.$$

证明 设 $d=d(A,B)$, 可计算:

$$d=\sum_{i,j}\frac{e(A_i,B_j)}{abn^2}=\sum_{i,j}\frac{e(A_i,B_j)}{|A_i||B_j|}\frac{|A_i||B_j|}{abn^2}=\sum_{i,j}d(A_i,B_j)x_iy_j=d+\sum_{i,j}x_iy_j\varepsilon_{i,j}.$$

于是:

$$\sum_{i,j}x_iy_j\varepsilon_{i,j}=0.$$

计算:

$$\sum q(A_i,B_j)=\sum_{i,j}abx_iy_j(d+\varepsilon_{i,j})^2=\sum_{i,j}abx_iy_j(d+\varepsilon_{i,j}^2)=q(A,B)+ab\sum x_iy_i\varepsilon_{i,j}^2.$$

■

这个命题将带来两个事实:

- $\sum q(A_i,B_j)\geq q(A,B)$;
- 设 A,B 不是 ε-正则的, $|A|=|B|=\frac{n}{k}$, 则存在 $A_1\subseteq A, B_1\subseteq B, |A_1|\geq\varepsilon|A|, |B_1|\geq\varepsilon|B|$, 使得

$$|d(A_1,B_1)-d(A,B)|>\varepsilon.$$

于是 $\sum_{1\leq i,j\leq 2}q(A_i,B_j)\geq q(A,B)+k^{-2}\varepsilon^4$.

证明 [关键引理]

Step1. 先把 P 做细分成为 P_1 使得 q 值增加 ε^5, 这个 P_1 不一定是平均划分.

设划分 P 使得诸 $|V_i|=\frac{n}{k}$, 且不是 ε-正则的. 令

$$I=\{(i,j):(V_i,V_j)\text{不是 }\varepsilon\text{-正则的},\}\quad |I|\geq\varepsilon k^2.$$

对 $(i,j)\in[I]$, 根据事实 2, 取 $V_1^{(i,j)}\subseteq V_i, V_1^{(j,i)}\subseteq V_j$. 令 $V_2^{(i,j)}=V_i\backslash V_1^{(i,j)}, V_2^{(j,i)}=V_j\backslash V_1^{(j,i)}$.
则 $\mathcal{A}^{(i,j)}=\{V_1^{(i,j)},V_2^{(i,j)}\}$ 是 V_i 的细分, $\mathcal{A}^{(j,i)}=\{V_1^{(j,i)},V_2^{(j,i)}\}$ 是 V_j 的细分. 根据事实,

$$\sum q(A,B)\geq q(V_i,V_j)+k^{-2}\varepsilon^4.\text{求和对 }A\in\mathcal{A}^{(i,j)}, B\in\mathcal{A}^{(j,i)}\ .$$

设 $\mathcal{A}^i$ 是使得所有 $\{\mathcal{A}^{(i,j)}\}_{j\in J}$ 相容的对 V_i 的划分, 其中 $J=\{j:(i,j)\in I\}$. 则 $|\mathcal{A}^i|\leq 2^{k-1}$.
把所有的 $\mathcal{A}^i$ 放到一起称为 P_1, $k_1=|P_1|\leq k2^{k-1}$. 计算 $q(P_1)$.

$$\begin{aligned}
q(P_1)=\sum_{A,B\in P_1}q(A,B)&\geq\sum_{1\leq i<j\leq k}\left(\sum_{A\in\mathcal{A}^i}\sum_{B\in\mathcal{A}^j}q(A,B)\right)\\
&=\sum_{(i,j)\in I}\left(\sum_{A\in\mathcal{A}^i}\sum_{B\in\mathcal{A}^j}q(A,B)\right)+\sum_{(i,j)\notin I}\left(\sum_{A\in\mathcal{A}^i}\sum_{B\in\mathcal{A}^j}q(A,B)\right)\\
&\geq\sum_{(i,j)\in I}q(V_i,V_j)+\sum_{(i,j)\notin I}q(V_i,V_j)+|I|\cdot k^{-2}\varepsilon^4.\\
&=q(P)+\varepsilon^5.
\end{aligned}$$

Step2. 想把 P_1 改造成平均划分 P^*, 使得 $q(P^*)\leq q(P_1)-\frac{10}{k_1}$. 且 $|P^*|=k_2\leq k_1^2\leq 2^{2^k}$.
这里 q 中减少的值一定小于第一问中增加的那部分, 两步综合起来就证完了引理. (未完)

■

例题 4.1 Turan 定理的一个推广

引理 4.2

设 (A,B) 是 ε-正则对, $d=d(A,B)$. 设 $Y\subseteq B$ 使得 $|Y|\geq\varepsilon|B|$. 则除了 $\varepsilon|A|$ 个点以外, 所有 A 中点都在 Y 中至少有 $(d-\varepsilon)|Y|$ 个邻居.

证明 证明是简单的. 令 $X=\{x\in A:|N(x)\cap Y|<(d-\varepsilon)|Y|\}$. 则

$$d(X,Y)=\frac{e(X,Y)}{|X||Y|}<\frac{(d-\varepsilon)|X||Y|}{|X||Y|}=d-\varepsilon.$$

于是 $d(X,Y)<d$. 而 (A,B) 是 ε-正则的, $|Y|\geq\varepsilon|B|$, 于是 $|X|\leq\varepsilon|A|$. ■

注记 实际上, 除了 $2\varepsilon|A|$ 个点以外, 所有 A 中点都在 Y 中有 $(d\pm\varepsilon)|Y|$ 个邻居.

这个引理大约可以刻画选取点与选取边之间的等价性. 从随机图的角度考虑, 边密度大概刻画了存在边的概率. 也即: 任给一个 A 中的点 x, x 大概率地拥有 $d|Y|$ 个邻居在 Y 中. 我们看下面的例子.

引理 4.3 (三角形计数)

设 $|A|=|B|=|C|=n$, 两两之间有一个二部图. 令 $d(A,B)=c$, 同理定义 a,b, 且 $a,b,c>2\varepsilon$. 则

$$|\{(A,B,C)\text{上的三角形}\}|\geq(1-2\varepsilon)(a-\varepsilon)(b-\varepsilon)(c-\varepsilon)|A||B||C|.$$

类似上个定理的注记, 另一面的界也可以被控制.

$$|\{(A,B,C)\text{上的三角形}\}|\leq(1+2\varepsilon)(a+\varepsilon)(b+\varepsilon)(c+\varepsilon)|A||B||C|.$$

证明 直观上理解, 任取 AB 上面两个点, 它们之间有 c 的概率连了边. 于是分别取三个点, 三条边都存在的概率为 abc. 具体证明要用到上面的引理.

至少有 $(1-2\varepsilon)|A|$ 个点分别在 B 中有 B_1 作为其邻居, $|B_1|\geq(c-\varepsilon)|B|>\varepsilon|B|$; C 中有 C_1 作为其邻居, $|C_1|\geq(b-\varepsilon)|C|>\varepsilon|C|$. 于是对 B_1 和 C_1 使用 ε-正则条件知它们之间的边密度大于 $a-\varepsilon$. 全部乘起来即证. ■

定理 4.2 (移除三角形引理)

任取 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)$ 使得, 若 n 点的图 G 需要删除掉 εn^2 条边才能成为 K_3-free 的, 那么 G 中至少有 δn^3 个三角形.

理解一下: 假设 G 删掉一个边就可以成为 K_3-free 的, 则 G 只需要一个三角形. 但是如果删边的量级足够大, 那三角形的数目会多一个量级. 实际上图 G 至多有 $\binom{n}{3}$ 个三角形, 所以三角形不会更多了.

证明 在 G 上使用 $\frac{1}{3}\varepsilon$ 的正则引理, 则我们得到了 $\frac{1}{3}\varepsilon$-正则的平均划分.

$$V(G)=V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_k,\quad (\frac{1}{3}\varepsilon)^{-6}\leq k\leq T(\frac{1}{3}\varepsilon).$$

下面我们使用删除方法. 删掉以下的三类边:

1. 删掉 V_i 的内部边;
2. 删掉不是 $\frac{1}{3}\varepsilon$-正则的对 (V_i,V_j) 之间的边;
3. 删掉是 $\frac{1}{3}\varepsilon$-正则的, 但是边密度 $\leq\frac{2}{3}\varepsilon$ 的对 (V_i,V_j) 之间的边.

则此时我们删掉的边的数目

$$<k\cdot\binom{\frac{n}{k}}{2}+\frac{\varepsilon}{3}k^2\left(\frac{n}{k}\right)^2+\binom{k}{2}\frac{2}{3}\varepsilon\left(\frac{n}{k}\right)^2\leq\frac{n^2}{2k}+\frac{\varepsilon n^2}{3}+\frac{\varepsilon n^2}{3}<\varepsilon n^2.$$

由条件, 一定有三角形剩下来, 这三角形的三个顶点将属于三个不同的 V_i, 每两个 V_i,V_j 是 $\frac{1}{3}\varepsilon$-正则的且边密度不小于 $\frac{2}{3}\varepsilon$. 于是由三角形计数, 这三个 V_i 之间至少有

$$(1-\frac{2}{3}\varepsilon)(\frac{1}{3}\varepsilon)^3\left(\frac{n}{k}\right)^3\geq\delta(\varepsilon)n^3.$$

实际上 $\delta(\varepsilon)$ 将是天文数字地小, 因为其中会包含一个 $Tow()$ 函数. 但是我们还是证完了. ■

我们还希望对三角形计数的引理做推广.

引理 4.4 (图计数引理)

设 H 是一个图, $V(H)=[h]$. 任意的 $\varepsilon>0$, 设 G 是一个图使得 $V(G)=\bigcup_{i=1}^{k}V_i$, 使得任意的 $(i,j)\in V(H)$, V_i,V_j 是 ε-正则的. 则我们考虑集合

$$T=\{(v_1,\cdots,v_h)\in V_1\times\cdots\times V_h:(i,j)\in E(H)\Rightarrow(v_i,v_j)\in E(G)\}.$$

对 $|T|$ 分析. 用概率的角度去看, 它的期望大约是 $\prod\limits_{(i,j)\in E(H)}d(V_i,V_j)\times\prod\limits_{i=1}^{k}|V_i|$. 但是现在我们是确定的 G. 需要确定式:

$$\left||T|\times\prod_{i=1}^{k}|V_i|^{-1}-\prod_{(i,j)\in E(H)}d(V_i,V_j)\right|\le\varepsilon e(H).$$

♡

证明 证明基于归纳法. 第一种是对 H 的点数进行归纳, 但是这样做不等式右边可能多出一个常数. 具体证明略.

第二种证明稍巧妙: 我们对 H 的边数归纳. 独立地等概率地在 V_i 中分别选取 v_i. 令

$$p=\mathbb{P}((i,j)\in E(H)\Rightarrow(v_i,v_j)\in E(G)).$$

则要证的结论等价于

$$|p-\prod_{(i,j)\in E(H)}d(V_i,V_j)|\le\varepsilon e(H).$$

设 $12\in H$. 令 H' 为从 H 中删掉 12 的图. 令

$$p'=\mathbb{P}((i,j)\in E(H')\Rightarrow(v_i,v_j)\in E(G)).$$

我们 **Claim:** $|p-d(V_1,V_2)p'|\le\varepsilon$. 如果这个 Claim 成立, 则再由归纳假设,

$$\begin{aligned}|p-\prod_{(i,j)\in E(H)}d(V_i,V_j)|&\le|p-d(V_1,V_2)p'|+d(V_1,V_2)|p'-\prod_{(i,j)\in E(H')}d(V_i,V_j)|\\&\le\varepsilon+d(V_1,V_2)\varepsilon(e(H)-1)\le\varepsilon e(H).\end{aligned}$$

下面证明归纳假设. 我们只需要考虑将 $v_3,\cdots,v_h$ 固定的条件概率. 仍记作 p 和 p'.

此时, $v_1\in A_1=\{v_1:v_1v_j\in E(G),\forall j\in N_H(1)\backslash\{2\}\}\subseteq V_1$; $v_2\in A_2=\{v_2:v_2v_j\in E(G),\forall j\in N_H(2)\backslash\{1\}\}\subseteq V_2$.

p' 对应的状态数对应着 $|A_1||A_2|$, 而 p 对应的状态数对应着 $e(A_1,A_2)$, 因为 p 还要求 $v_1v_2\in E(G)$. 于是需要证:

$$\left|\frac{e(A_1,A_2)}{|V_1||V_2|}-d(V_1,V_2)\frac{|A_1||A_2|}{|V_1||V_2|}\right|\le\varepsilon.$$

- **Case1.** $|A_1|\le\varepsilon|V_1|$, 或者 $|A_1|\le\varepsilon|V_2|$. 则绝对值中的两项都 $\in[0,\varepsilon]$.
- **Case2.** $|A_1|\ge\varepsilon|V_1|$, 且 $|A_1|\ge\varepsilon|V_2|$. 则

$$\left|\frac{e(A_1,A_2)}{|V_1||V_2|}-d(V_1,V_2)\frac{|A_1||A_2|}{|V_1||V_2|}\right|=\frac{|A_1||A_2|}{|V_1||V_2|}|d(A_1,A_2)-d(V_1,V_2)|\le\varepsilon.$$

综上所述, 定理证毕. ■

定理 4.3 (移除图定理)

任意的图 H, 任意 $\varepsilon>0$. 均存在 $\delta=\delta(H,\varepsilon)>0$, 使得对于任意的至多有 $\delta n^{|V(H)|}$ 个 H 作为其子图的 G, 均可以通过删掉 εn^2 条边使得它成为 H-自由的.

♡

证明 这个定理和移除三角形定理几乎完全相同, 只不过换了一种叙述方式, 推广到了一般情形. 证明思路完全一样: 先删掉一部分边, 证明剩下的图里面还会有一定数量级的子图 H. 具体证明略. ■

定义 4.4

记 $h(n)$ 为: 一个有 n 个点的图的最大边数, 使得每条边恰属于一个三角形中.

推论 4.1

$$h(n) = o(n^2).$$

证明 反设不对, 即 $h(n) > \varepsilon n^2$ 对于某个很大的 n. 不妨设 G 是这样的图且恰有 $h(n)$ 条边. 因为每条边恰属于一个三角形中, 所以三角形数目也是 n^2 量级的, 且这些三角形不相交. 因此需要移除 n^2 量级的边才能使得图里面没有三角形. 于是图里面三角形应当有 n^3 量级. 导出矛盾. ■

定理 4.4 (Roth 定理)

令 $r_3(n)$ 是最大的 $[n]$ 的子集 S 的大小, 使得 S 不存在长度为 3 的等差数列. 则

$$r_3(n) \le \frac{h(6n)}{3n} = o(n).$$

证明 令 $A = [n], B = [2n], C = [3n]$. 对于任意的 $x \in [n], s \in S$, 连接三角形 $(x, x+s, x+2s) \in A \times B \times C$. 由于 S 中不存在长度为 3 的非平凡的等差数列, 易于验证在这个图里面每条边恰属于一个三角形. 于是

$$h(6n) \ge 3n|S| = 3nr_3(n).$$

■

大家学习愉快!