微分流形笔记

黄天一

2023 年 3 月 6 日

目录

Part I

正课笔记

1 微分流形

1.1 拓扑流形

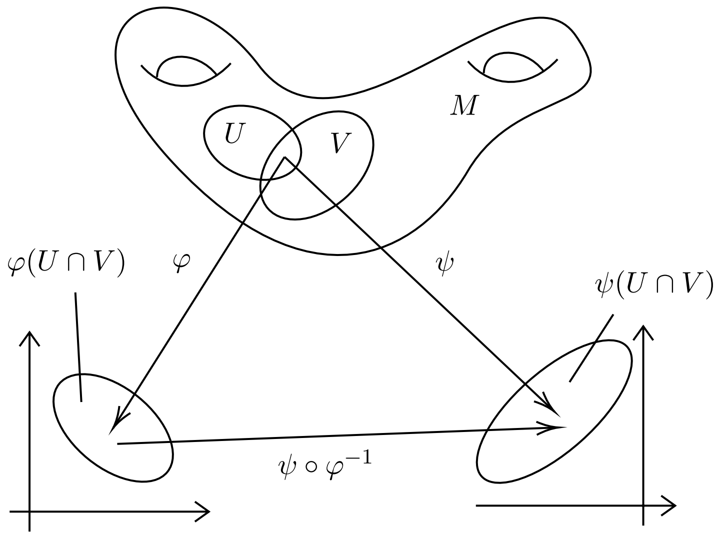
1.1.1 拓扑流形

定义 1.1. 设 $(M, \mathcal{T})$ 为具有可数拓扑基的 Hausdorff 空间. 若 $\forall p \in M$, 存在开邻域 U 使得 U 与 $\mathbb{R}^n$ 中的开集同胚, 则称 M 为一个 n 维**拓扑流形**.

注 1.2.

1. 拓扑流形是局部欧氏的 Hausdorff 空间.
2. 定义中的条件 C_2(具有可数拓扑基), Hausdorff 与局部欧氏彼此独立[1].
3. $\varphi : U \to \varphi(U) \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ 同胚, 称 (U, φ) 是 M 的一个局部坐标.
4. 设 $(U, \varphi), (V, \psi)$ 为 M 的局部坐标, 且 $U \cap V \neq \varnothing$. 称同胚映射 $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \leftrightarrow \psi(U \cap V)$ 为转移映射.

[1]参见第二部分 9.18 习题课给出的例子



定义 1.3. 设 M 是拓扑流形, 若集合 $\mathcal{D}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha):\alpha\in\mathcal{A}\}$ 满足:

1. $\{U_\alpha:\alpha\in\mathcal{A}\}$ 构成 M 的一个开覆盖.

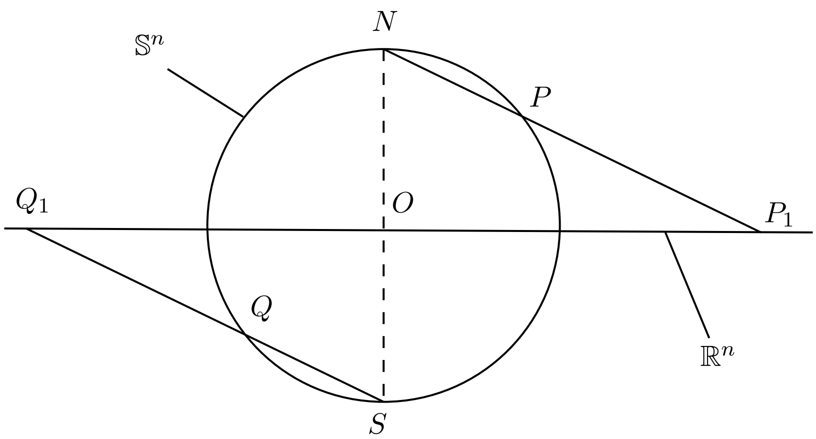
2. $\forall\alpha\in\mathcal{A}$, $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 是 M 的一个局部坐标.

则称 $\mathcal{D}$ 是 M 的一个**局部坐标系**.

注 1.4. 要说明一个拓扑空间是流形, 只需证明 C_2, Hausdorff 并给出它的一个局部坐标系.

下面给出拓扑流形的一个典型例子.

例 1.5. 单位球面 $\mathbb{S}^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}:|x|=1\}$ 是 n 维拓扑流形. C_2 与 Hausdorff 是显然的. 我们记 $N=(0,\cdots,0,1),S=(0,\cdots,0,-1)\in\mathbb{S}^n$ 分别是球面的北极和南极. 设 $U=\mathbb{S}^n\setminus\{N\},V=\mathbb{S}^n\setminus\{S\}$, 则我们可以仿照复变函数的 Riemann 球面构造球极投影, 过程如下.



任取 $P=(x^1,\cdots,x^n)\in U$, 设射线 NP 与 $\mathbb{R}^n$ 相交于点 $P_1=(u^1,\cdots,u^n,0)$. 由 $\overrightarrow{PP_1}=x^{n+1}\overrightarrow{NP_1}$ 可得

$$(u^1-x^1,\cdots,u^n-x^n,-x^{n+1})=x^{n+1}(u^1,\cdots,u^n,-1)\Rightarrow u^i=\frac{x^i}{1-x^{n+1}}.$$

因此北极投影映射为

$$\varphi(x^1,\cdots,x^{n+1})=\left(\frac{x^1}{1-x^{n+1}},\cdots,\frac{x^n}{1-x^{n+1}}\right).$$

类似可以推得南极投影映射为

$$\psi(x^1,\cdots,x^{n+1})=\left(\frac{x^1}{1+x^{n+1}},\cdots,\frac{x^n}{1+x^{n+1}}\right).$$

现在我们验证 $\{(U,\varphi),(V,\psi)\}$ 构成 $\mathbb{S}^n$ 的一组局部坐标系, 即验证 φ,ψ 是同胚映射 (它们的像集均为 $\mathbb{R}^n$). 计算可得

$$\varphi^{-1}(u^1,\cdots,u^n)=\left(\frac{2u^1}{1+|u|^2},\cdots,\frac{2u^n}{1+|u|^2},\frac{|u|^2-1}{|u|^2+1}\right).$$

$$\psi^{-1}(u^1,\cdots,u^n)=\left(\frac{2u^1}{1+|u|^2},\cdots,\frac{2u^n}{1+|u|^2},\frac{1-|u|^2}{1+|u|^2}\right).$$

即证. 由此还可计算得两个转移映射为

$$\psi\circ\varphi^{-1}(u^1,\cdots,u^n)=\varphi\circ\psi^{-1}(u^1,\cdots,u^n)=\left(\frac{u^1}{|u|^2},\cdots,\frac{u^n}{|u|^2}\right).$$

这是 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 到自身的 C^∞ 映射.

1.1.2 流形的构造

本节我们介绍两种构造流形的简单方式.

开子流形 设 M 是拓扑流形, $\mathcal{D}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha):\alpha\in\mathcal{A}\}$ 是 M 的一个局部坐标系. 设 N 是 M 的开集, 取子空间 (限制) 拓扑, 则 $\mathcal{D}'=\{(U_\alpha\cap N,\varphi_\alpha|_N):\alpha\in\mathcal{A}\}$ 是 N 的一个自然的局部坐标系, N 成为一个与 M 的维数相同的拓扑流形, 我们称其为 M 的开子流形.

例 1.6. 一般线性群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\triangleq\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}:\det A\neq 0\}$ 是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的开子流形. 事实上, 考虑连续映射 $\det:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$, 则 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 为开集 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 在 $\det$ 下的原像.

乘积流形 设 M,N 是拓扑流形, $\mathcal{D}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha):\alpha\in\mathcal{A}\}$, $\mathcal{D}'=\{(V_\beta,\psi_\beta):\beta\in\mathcal{A}'\}$ 分别是 M,N 的一组局部坐标系. 在乘积拓扑下, $\{(U_\alpha\times V_\beta,\varphi_\alpha\times\psi_\beta):\alpha\in\mathcal{A},\beta\in\mathcal{A}'\}$ 构成了 $M\times N$ 的一组局部坐标系, 这里

$$\varphi_\alpha\times\psi_\beta:U_\alpha\times V_\beta\to\mathbb{R}^{m+n},\quad (p,q)\mapsto(\varphi_\alpha(p),\psi_\beta(q)).$$

所以 $M\times N$ 为 $m+n$ 维的拓扑流形, 称之为乘积流形.

例 1.7. n-环面 $\mathbb{T}^n=\overbrace{\mathbb{S}^1\times\cdots\times\mathbb{S}^1}^{n}$ 即为 n 维的乘积流形, $\mathbb{S}^m\times\mathbb{S}^n$ 也是拓扑流形.

习题 1.8. 试给出 $\mathrm{SU}(2),\mathrm{SL}(2),\mathrm{SO}(3)$ 的一组局部坐标系. 其中

$$\mathrm{SU}(2)=\left\{\begin{pmatrix} z & w\\ -\bar{w} & \bar{z}\end{pmatrix}:z,w\in\mathbb{C},|z|^2+|w|^2=1\right\}.$$

$$\mathrm{SL}(2)=\{A\in\mathbb{R}^{2\times2}:\det(A)=1\}.$$

$$\mathrm{SO}(3)=\{A\in\mathbb{R}^{3\times3}:A^TA=I_3,\det(A)=1\}.$$

证明. 1. 下面我们总记 $z=a+bi$, $w=c+di$, $A(z,w)=\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$. 定义 SU(2) 中的开集:

$$U_{a^+}=\{A(z,w):a>0\},\quad U_{a^-}=\{A(z,w):a<0\},$$

$$U_{b^+}=\{A(z,w):b>0\},\quad U_{b^-}=\{A(z,w):b<0\},$$

$$U_{c^+}=\{A(z,w):c>0\},\quad U_{c^-}=\{A(z,w):c<0\},$$

$$U_{d^+}=\{A(z,w):d>0\},\quad U_{d^-}=\{A(z,w):d<0\}.$$

则上述给出了 SU(2) 的一个开覆盖. 我们以 U_{a^+},U_{a^-} 为例, 定义映射 $\varphi_{a^\pm}:U_{a^\pm}\to\mathbb{R}^3$ 为

$$\varphi_{a^\pm}(A(z,w))=(b,c,d).$$

容易验证 $\varphi_{a^\pm}$ 是单射, 并且逆映射 $\varphi_{a^\pm}^{-1}:\{x\in\mathbb{R}^3:|x|<1\}\to U_{a^\pm}$ 为

$$\varphi_{a^\pm}^{-1}(b,c,d)=\begin{pmatrix} \pm\sqrt{1-b^2-c^2-d^2}+bi & c+di \\ -c+di & \pm\sqrt{1-b^2-c^2-d^2}-bi \end{pmatrix}.$$

因此 $\varphi_{a^\pm}$ 为同胚映射. 可以类似定义同胚 $\varphi_{b^\pm},\varphi_{c^\pm},\varphi_{d^\pm}$, 在上述局部坐标系下 SU(2) 构成了 3 维的拓扑流形. 可以验证它还是光滑流形.

2. 下面我们总记 $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$. 定义开集

$$U_i=\{A\in \mathrm{SL}(2):a_i\neq 0\}(i=1,2,3,4).$$

则上述给出了 SL(2) 的一个开覆盖. 以 U_1 为例, 定义映射 $\varphi_1:U_1\to\mathbb{R}^3$ 为

$$\varphi_1(A)=(a_1,a_2,a_3).$$

容易验证 φ_1 是单射, 且逆映射 $\varphi_1^{-1}:\{x\in\mathbb{R}^3:x_1\neq 0\}\to U_1$ 为

$$\varphi_1^{-1}(u_1,u_2,u_3)=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & \frac{1+u_2u_3}{u_1} \end{pmatrix}.$$

因此 φ_1 是同胚映射. 可以类似定义同胚 $\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4$, 在上述局部坐标系下 SL(2) 构成了 3 维的拓扑流形. 我们以 $\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}(\{x\in\mathbb{R}^3:x_1,x_2\neq 0\}$ 到自身的映射) 为例计算转移映射:

$$\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}(u_1,u_2,u_3)=\left(u_1,u_2,\frac{1+u_2u_3}{u_1}\right).$$

这是光滑映射. 类似可以验证其余转移映射均光滑, 所以 SL(2) 是 3 维光滑流形.

□

1.2 微分流形

1.2.1 流形的定义

定义 1.9. 设 M 是拓扑流形, $(U,\varphi),(V,\psi)$ 是 M 的局部坐标. 若转移映射 $\psi\circ\varphi^{-1},\varphi\circ\psi^{-1}$ 都是 $C^k(k\geqslant 1)$ 的, 则称 $(U,\varphi),(V,\psi)$ 是 C^k **相容**的.

注 1.10. 1. 若 $U\cap V=\varnothing$, 约定 (U,φ) 和 (V,ψ) 是 C^k 相容的.

2. 定义中的 C^k 可以类比改为 C^∞,C^ω.

3. 定义中 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 和 $\varphi\circ\psi^{-1}$ 均为 C^k 映射, 缺一不可. 反例如下.

例 1.11. 设 $M=\mathbb{R}, U=V=M=\mathbb{R}$. 考虑映射

$$\varphi:U\to\mathbb{R},\quad x\mapsto t=x.$$

$$\psi:V\to\mathbb{R},\quad x\mapsto s=x^3.$$

计算转移映射可得

$$\psi\circ\varphi^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ t\mapsto t^3.\quad \varphi\circ\psi^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ s\mapsto s^{\frac{1}{3}}.$$

由此可见 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 是 C^∞ 的, 但 $\varphi\circ\psi^{-1}$ 甚至不是 C^1 的.

定义 1.12. 设 M 为拓扑流形, $\mathcal{D}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha):\alpha\in\mathcal{A}\}$ 为 M 的局部坐标系. 若 $\forall\alpha,\beta\in\mathcal{A}$, $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 和 (U_β,φ_β) 是 C^k 相容的, 则称 $\mathcal{D}$ 是 C^k **局部坐标系**. 称 $\mathcal{D}$ 是**极大**的, 是指: 若 (U,φ) 是 M 的局部坐标系且与 $\mathcal{D}$ 中任一成员 C^k 相容, 则 $(U,\varphi)\in\mathcal{D}$. 我们称一个极大的 C^k 局部坐标系 $\mathcal{D}$ 为 M 的 C^k **微分结构**, 称 $(M,\mathcal{D})$ 为 (C^k) **微分流形**.

注 1.13. 1. $\mathbb{R}^n,\mathbb{S}^n,\mathbb{T}^n,\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 都是光滑 (C^∞) 流形.

2. 拓扑流形上可能存在多个微分结构, 也有可能并不存在微分结构.

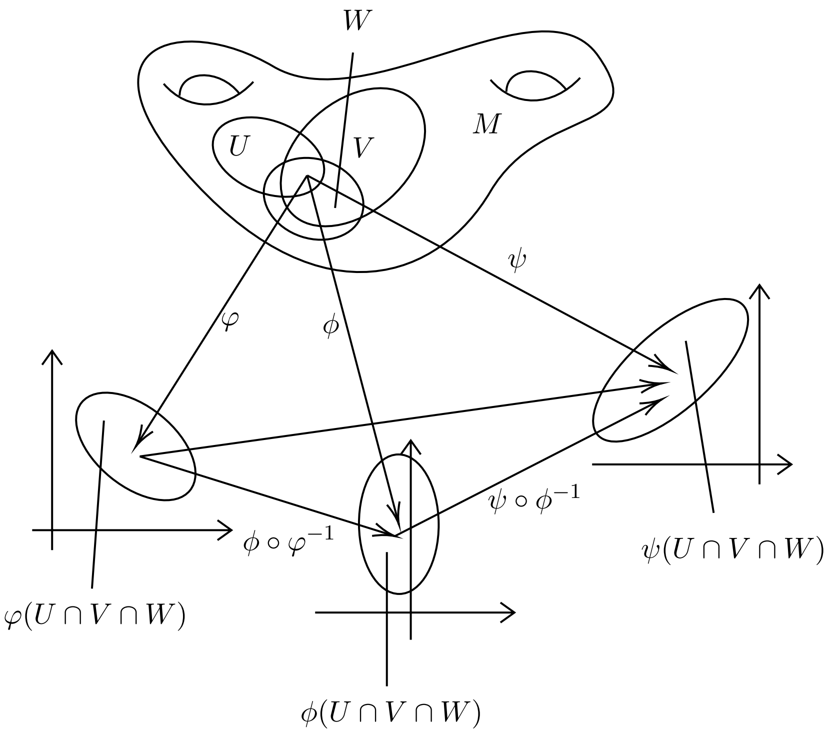
命题 1.14. 设 M 是拓扑流形.

1. M 上的每个 C^k 局部坐标系 $\mathcal{D}$ 包含于唯一的 C^k 微分结构, 称之为 $\mathcal{D}$ 生成的 C^k 微分结构.

2. M 上的两个 C^k 局部坐标系生成相同的微分结构当且仅当它们的并仍为 C^k 局部坐标系.[2]

证明. 定义 $\overline{\mathcal{D}}$ 为与 $\mathcal{D}$ 中任意元素 C^k 相容的所有局部坐标系全体构成的集合. 我们下面验证它是一个 C^k 微分结构. 极大性是显然的, 只需证明其中任意两个局部坐标系 C^k 相容.

[2]本命题为笔者所加, 不属于课程讲授内容.



任取 $\overline{\mathcal{D}}$ 中有交的两个局部坐标系 $(U,\varphi),(V,\psi)$. 要证转移映射 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 是 C^k 的 (由选取的任意性, 我们只需证明一个转移映射是 C^k 的), 我们只需证明对任意 $p\in U\cap V$, 转移映射在 p 附近是 C^k 的. 由 $\overline{\mathcal{D}}$ 的定义, 存在局部坐标系 $(W,\phi)\in\mathcal{D}$, 使得 $p\in U\cap V\cap W$, 且 (U,φ) 与 (W,ϕ), (V,ψ) 与 (W,ϕ) 是 C^k 相容的. 由此可得

$$\phi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V\cap W)\to\phi(U\cap V\cap W),\quad \psi\circ\phi^{-1}:\phi(U\cap V\cap W)\to\psi(U\cap V\cap W)$$

是 C^k 映射. 从而存在 p 的邻域, 在该邻域内 $\psi\circ\varphi^{-1}=(\psi\circ\phi^{-1})\circ(\phi\circ\varphi^{-1})$ 是 C^k 的, 即证. 唯一性可由极大性立得.

任取 M 上的两个 C^k 局部坐标系 $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2$, 若它们的并 $\mathcal{D}=\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2$ 是 C^k 局部坐标系, 则由 1 可得 $\mathcal{D}_i$ 生成相同的微分结构 $\overline{\mathcal{D}}$. 反之, 若 $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2$ 生成相同的微分结构 $\overline{\mathcal{D}}$, 则有 $\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2\subset\overline{\mathcal{D}}$, 自然成为 C^k 局部坐标系. □

注 1.15. 根据这个命题, 我们知道: 要找到拓扑流形 M 上的 (C^k) 微分结构, 只需找到一个 (C^k) 局部坐标系.

例 1.16. 实投影空间 $\mathbb{RP}^n$ 是 n 维光滑流形. 这里我们给出一些等价定义:

$$\begin{aligned}\mathbb{RP}^n&=\{L:L\,\text{是}\,\mathbb{R}^{n+1}\,\text{中过原点的直线}\}\\&=\{V:V\,\text{是}\,\mathbb{R}^{n+1}\,\text{的一维子空间}\}\\&=(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\})/\sim,\quad x\sim y\Leftrightarrow\exists\lambda\neq0,\ \text{s.t. } y=\lambda x\\&=\mathbb{S}^n/\sim,\quad x\sim y\Leftrightarrow x=\pm y.\end{aligned}$$

记商映射为 $\pi:\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}\to\mathbb{RP}^n$, $x\mapsto[x]$. 在 $\mathbb{RP}^n$ 上取自然的商拓扑, 容易验证 $\mathbb{RP}^n$ 是 C_2 且 Hausdorff 的. 记 $U_i=\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}:x^i\neq 0\}(i=1,\cdots,n+1)$, 则 $V_i=\pi(U_i)$ 是 $\mathbb{RP}^n$ 中的开集, 且构成 $\mathbb{RP}^n$ 的开覆盖. 定义映射 $\varphi_i:V_i\to\mathbb{R}^n$ 为

$$\varphi_i([x])=\left(\frac{x^1}{x^i},\cdots,\frac{x^{i-1}}{x^i},\hat{1},\frac{x^{i+1}}{x^i},\cdots,\frac{x^{n+1}}{x^i}\right).$$

良定性、连续性和单射容易验证. φ_i 的像集为 $\mathbb{R}^n$, 计算其逆映射 $\varphi_i^{-1}:\mathbb{R}^n\to V_i$ 可得

$$\varphi_i^{-1}(u^1,\cdots,u^n)=[u^1,\cdots,u^{i-1},1,u^{i+1},\cdots,u^n].$$

任取 i,j, 计算转移映射 $\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}:\{u\in\mathbb{R}^n:u^j\neq 0\}\to\mathbb{R}^n$ 可得

$$\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}(u^1,\cdots,u^n)=\left(\frac{u^1}{u^j},\cdots,\frac{u^{i-1}}{u^j},\frac{1}{u^j},\frac{u^{i+1}}{u^j},\cdots,\frac{u^{j-1}}{u^j},\frac{u^{j+1}}{u^j},\cdots,\frac{u^n}{u^j}\right).$$

这是 C^∞ 映射. 所以 $\mathbb{RP}^n$ 是光滑流形, $\{(V_i,\varphi_i):i=1,\cdots,n+1\}$ 确定了它的一个光滑结构.

习题 1.17. 1. 给出 $M_{k,n}=\{A\in\mathbb{R}^{k\times n}:\mathrm{rank}(A)=k\}$ 的一组 C^∞ 局部坐标系.

2. 给出 Grassmann 流形 $G(k,n)=\{V\subset\mathbb{R}^n:V\text{ 是 }\mathbb{R}^n\text{ 中的 }k\text{ 维子空间}\}$ 的一组 C^∞ 局部坐标系.

证明. 1. 任取 $A\in M_{k,n}$, 则 A 存在非奇异的子阵 $A\left[\begin{smallmatrix}1&\cdots&k\\ j_1&\cdots&j_k\end{smallmatrix}\right]$, 由此可得存在 A 的邻域, 其中任一矩阵 $B\in\mathbb{R}^{k\times n}$ 的子阵 $B\left[\begin{smallmatrix}1&\cdots&k\\ j_1&\cdots&j_k\end{smallmatrix}\right]$ 也是非奇异的, 进而 $\mathrm{rank}(B)=k$. 所以 $M_{k,n}$ 是 $\mathbb{R}^{k\times n}$ 的开子集, 自然成为 kn 维的开子流形. 一个 C^∞ 局部坐标系即为 $(M_{k,n},\iota)$, ι 为嵌入映射.

2. 设 $V\in G(k,n)$, 设 $v_1,\cdots,v_k$ 是 V 的一组基. 若 $u_1,\cdots,u_k$ 也构成 V 的一组基, 则存在 m 阶可逆矩阵 (a_i^j), 使得 $u_i=\sum_{j=1}^k a_i^j v_j$. 由于 V 的每组基表现为满秩的 $k\times n$ 矩阵, 故有 $G(k,n)=M_{k,n}/\sim$, 其中 $A\sim B\Leftrightarrow$ 存在 k 阶可逆阵 P 使得 $A=PB$. 下面我们来证明 $G(k,n)$ 作为商空间成为 $k(n-k)$ 维光滑流形. 首先证明 Hausdorff 与 C_2, 为此需要一个引理:

引理. 设 $\pi:X\to X/\sim, x\mapsto[x]$ 为投影映射. 若拓扑空间 X 是 C_2 的, 则商空间 $X/\sim$ 也是 C_2 的. 若对角线集 $\Delta=\{(x,y)\in X\times X:x\sim y\}$ 是 $X\times X$ 的闭子集, 则 $X/\sim$ 是 Hausdorff 空间.

引理的证明: 若 X 是 C_2 的, 则存在可数拓扑基 $\{U_i:i=1,2,\cdots\}$. 则任取 $X/\sim$ 中开集 V, $\pi^{-1}(V)$ 为 X 中开集, 进而

$$\pi^{-1}(V)=\bigcup_k U_{i_k}\Rightarrow V=\bigcup_k\pi(U_{i_k}).$$

因此开集族 $\{\pi(U_i):i=1,2,\cdots\}$ 构成 $X/\sim$ 的可数拓扑基.

若对角集 Δ 是闭集, 任取 $X/\sim$ 中不同两点 $[x],[y]$, 则有 $(x,y)\notin\Delta$. 进而存在 (x,y) 在 $X\times X$ 中的开邻域 $U\times V$ 使得 $(U\times V)\cap\Delta=\varnothing$. 由此可得 $\pi(U),\pi(V)$ 分别为 $[x],[y]$ 的开邻域, 且任取 $[x']\in\pi(U),[y']\in\pi(V)$, 有 $(x',y')\in U\times V$, 因此 $x'\nsim y'\Rightarrow[x']\neq[y']$. 所以商空间 $X/\sim$ 为 Hausdorff 空间.

由上述引理, 要证明 C_2, 只需证投影 $\pi: M_{k,n} \to M_{k,n}/\sim$ 为开映射. 任取 $M_{k,n}$ 的开集 U, 只需证 $\pi^{-1}([U])$ 为开集. 我们有

$$\pi^{-1}([U]) = \{PA : A \in U, P \in \mathrm{GL}(k,\mathbb{R})\}.$$

由于左乘映射 $\ell_P : A \mapsto PA$ 为同胚映射, 故 $\pi^{-1}([U]) = \bigcup_{P\in\mathrm{GL}(k,\mathbb{R})} \ell_P(U)$ 为开集. 即证.

然后要证 Hausdorff, 只需再证对角线集 Δ 为闭子集. 此时

$$\Delta = \{(A,B) \in M_{k,n} \times M_{k,n} : \exists P \in \mathrm{GL}(k,\mathbb{R}), A = PB\}.$$

设 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)^T, B = (\beta_1, \cdots, \beta_k)^T$, 则

$$(A,B) \in \Delta \Leftrightarrow \mathrm{span}(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) = \mathrm{span}(\beta_1, \cdots, \beta_k).$$

由此, 我们定义函数

$$f(A,B) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{1\leqslant i_1 < \cdots < i_{k+1} \leqslant n} \begin{vmatrix} \alpha_1^{i_1} & \cdots & \alpha_k^{i_k} & \beta_j^{i_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{i_{k+1}} & \cdots & \alpha_k^{i_{k+1}} & \beta_j^{i_{k+1}} \end{vmatrix}^2.$$

则 f 自然连续, 且 $f(A,B) = 0$ 当且仅当 $(A,B) \in \Delta$. 因此 $\Delta = f^{-1}(0)$ 为闭集. 即证.

最后我们来构造 $G(k,n)$ 上的一组光滑局部坐标系. 对于指标 $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$, 我们记它的互补指标为 $1 \leqslant \bar{i}_1 < \cdots < \bar{i}_{n-k} \leqslant n$. 定义

$$U_{i_1\cdots i_k} = \{A \in M_{k,n} : \det A \left[\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{smallmatrix}\right] \neq 0\}.$$

则 $\{U_{i_1\cdots i_k}\}$ 构成了 $M_{k,n}$ 上的一族开覆盖, 从而 $\{\pi(U_{i_1\cdots i_k})\}$ 构成了 $G(k,n)$ 的一族开覆盖. 任取 $A \in U_{i_1\cdots i_k}$, 则

$$A \left[\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{smallmatrix}\right] \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & & & a_1^{\bar{i}_1}(A) & \cdots & a_1^{\bar{i}_{n-k}}(A) \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & 1 & a_k^{\bar{i}_1}(A) & \cdots & a_k^{\bar{i}_{n-k}}(A) \end{pmatrix}.$$

这里为书写方便, RHS 中左边 k 列实际表示 $i_1, \cdots, i_k$ 列, 右边 $n-k$ 列代表 $\bar{i}_1, \cdots, \bar{i}_{n-k}$ 列. 由此, 定义

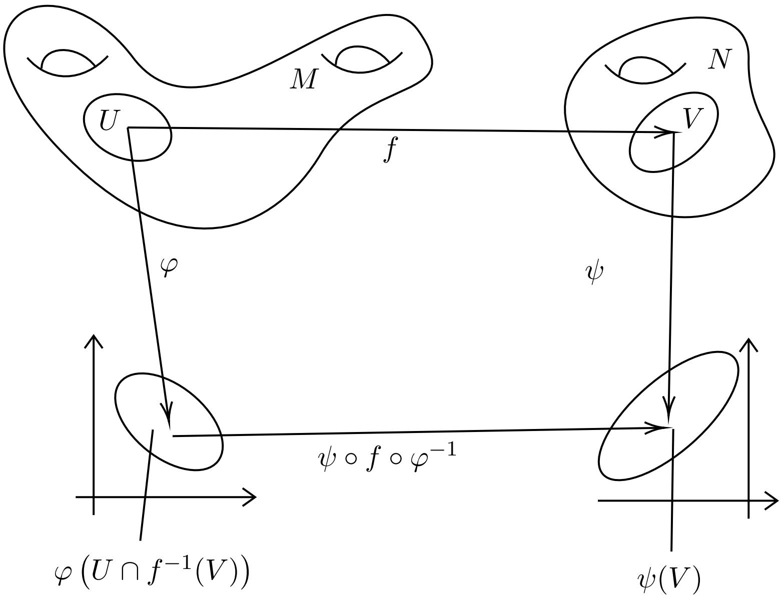
$$\varphi_{i_1\cdots i_k}(A) = \begin{pmatrix} a_1^{\bar{i}_1}(A) & \cdots & a_1^{\bar{i}_{n-k}}(A) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_k^{\bar{i}_1}(A) & \cdots & a_k^{\bar{i}_{n-k}}(A) \end{pmatrix}$$

则不难验证 $\{(U_{i_1\cdots i_k}, \varphi_{i_1\cdots i_k}) : 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n\}$ 即为所求. 因此 $G(k,n)$ 是 $k(n-k)$ 维的光滑流形.

$\square$

1.2.2 流形间的映射

定义 1.18. 设 $f: M \to N$ 是光滑流形 M, N 之间的映射. 若对 M, N 任意的局部坐标 $(U,\varphi),(V,\psi)$, 映射 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap f^{-1}(V))\to\psi(V)$ 是 C^k 的, 则称 f 是 C^k 映射.



例 1.19. 设 M 为光滑流形.

1. 若 $f: M\to\mathbb{R}$ 是光滑的, 称 f 是 M 上的光滑函数, M 上光滑函数全体记为 $C^\infty(M)$.

2. 若映射 $\gamma:\mathbb{R}\to M$ 是光滑的, 称 γ 是 M 上的光滑曲线.

下面我们列举光滑映射的一些基本性质[3].

命题 1.20. 光滑映射 $f: M\to N$ 是连续的.

证明. 由粘接引理, 我们只需证明 f 在任一 $p\in M$ 的开邻域内是连续的. 设 (U,φ) 是包含 p 的一个局部坐标, (V,ψ) 是包含 $f(p)$ 的一个局部坐标. 不妨设 $f(U)\subset V$(不然选取 U 的适当小开子集即可), 则此时有

$$f|_U=\psi^{-1}\circ(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})\circ\varphi.$$

由 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 光滑可知其连续, 而 φ,ψ 又是同胚映射, 因此 $f|_U$ 连续, 进而 f 连续. □

命题 1.21. 设 M, N 是光滑流形, $f: M\to N$ 为一映射.

1. 若对任一 $p\in M$, 存在开邻域 U 使得 $f|_U$ 光滑, 则 f 是光滑的.

2. 反之, 若 f 光滑, 则 f 在 M 的任一开子集上的限制也是光滑的.

[3]下面的命题 1.20-命题 1.24 均为笔者所加, 不在原课程范围.

证明. 任取 M 的局部坐标 (V,φ) 和 N 的局部坐标 (W,ψ) 使得 $V\cap f^{-1}(W)\neq\varnothing$. 任取 $x\in\varphi(V\cap f^{-1}(W))$, 记 $p=\varphi^{-1}(x)$, 则存在 p 的包含于 $V\cap f^{-1}(W)$ 的开邻域 U, 使得 $f|_U$ 是光滑的, 进而 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}|_{\varphi(U)}$ 是光滑的, 进而 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(V\cap f^{-1}(W))\to\psi(W)$ 是光滑的, 即 f 是光滑的. 反之, 任取 M 的开子集 U, 则 U 作为开子流形, 局部坐标形如 $(U\cap V,\varphi|_U)$. 由 f 光滑可得 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(V\cap f^{-1}(W))\to\psi(W)$, 因此 $\psi\circ f|_U\circ\varphi|_U^{-1}:\varphi(U\cap V\cap f^{-1}(W))\to\psi(W)$ 也是光滑映射, 故而 $f|_U$ 是光滑映射. □

推论 1.22 (光滑映射的粘接引理)**.** 设 M,N 为光滑流形, $\{U_\alpha:\alpha\in\mathcal{A}\}$ 是 M 的一个开覆盖. 若 $f_\alpha:U_\alpha\to N$ 为光滑映射, 且满足相容条件 $f_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta}=f_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}$, 则存在光滑映射 $f:M\to N$ 使得 $f|_{U_\alpha}=f_\alpha$.

命题 1.23. 设 M,N,P 为光滑流形.

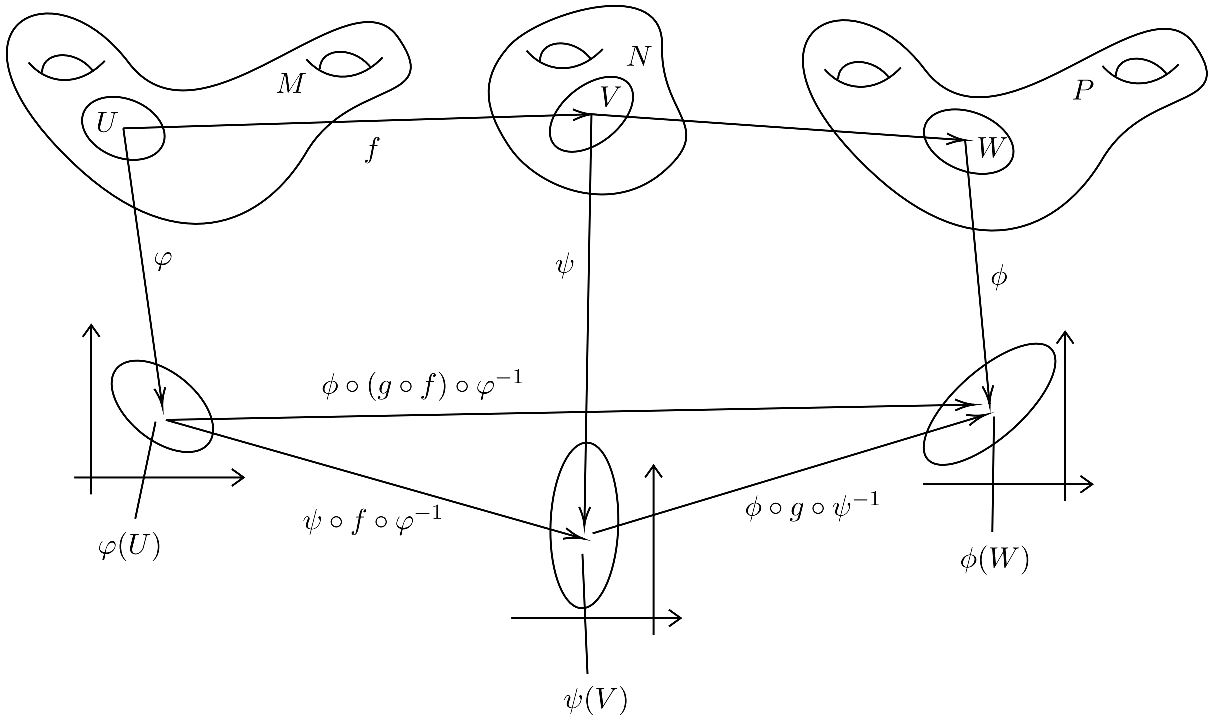
1. 常值映射 $c:M\to N$ 是光滑的.
2. M 上的恒同映射是光滑的.
3. 设 U 是 M 的开子集, 则嵌入映射 $\iota:U\hookrightarrow M$ 是光滑的.
4. 设 $f:M\to N$, $g:N\to P$ 是光滑的, 则 $g\circ f:M\to P$ 是光滑的.

证明. 1. 此时 $\psi\circ c\circ\varphi^{-1}$ 即为常值映射 $x\mapsto\psi(c)$, 所以光滑.

2. 由于 $\psi\circ\mathbb{1}\circ\varphi^{-1}$ 即为转移映射 $\psi\circ\varphi^{-1}$, 所以光滑.
3. 开子流形 U 的局部坐标形如 $(U\cap V,\varphi|_U)$, 此时 $\psi\circ\iota\circ\varphi|_U^{-1}=(\psi\circ\varphi^{-1})|_{\varphi(U\cap V\cap W)}$ 为光滑函数. 所以 ι 光滑.
4. 我们只需证明 $g\circ f$ 在任一点 $p\in M$ 附近光滑. 取定包含 p 的局部坐标 (U,φ), 设局部坐标 (V,ψ) 包含 $f(p)$, (W,ϕ) 包含 $g(f(p))$. 不妨设 $U\subset f(V)$, $V\subset g(W)$. 从而在 $\varphi(U)$ 上,

$$\phi\circ(g\circ f)\circ\psi=(\phi\circ g\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})$$

是光滑函数的复合, 自然光滑.



□

命题 1.24. 设 $M_1, \cdots, M_k, N$ 是光滑流形, 记 $\pi_i (i = 1, \cdots, k)$ 为 $M_1 \times \cdots \times M_k$ 到 M_i 的投影映射. 则 $f : N \to M_1 \times \cdots \times M_k$ 光滑当且仅当每个分量 $f_i = \pi_i \circ f : N \to M_i$ 光滑.

证明. 不难验证每个 π_i 是光滑映射. 若 f 光滑, 则复合映射 $\pi_i \circ f$ 自然光滑. 反之, 任取 N 的局部坐标 (U, φ) 和 $M_1 \times \cdots \times M_k$ 的局部坐标 $(V_1 \times \cdots \times V_k, \psi)$. 其中 $\psi = \psi_1 \times \cdot \times \psi_k$, 则

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = (\psi_1 \circ (\pi_1 \circ f) \circ \varphi_1^{-1}, \cdots, \psi_k \circ (\pi_k \circ f) \circ \varphi_k^{-1})$$

光滑. 所以 f 为光滑映射. □

定义 1.25. 设 $f : M \to N$ 是光滑流形间的映射, 若 f 满足:

1. f 是同胚.
2. f 与 f^{-1} 是光滑的.

则称 f 是 M, N 之间的**微分同胚映射**, 这时称 M, N **微分同胚**.

注 1.26. 我们已证明了光滑映射必定连续, 所以性质 1 可以弱化为 f 是双射.

例 1.27. [4]设 $\mathbb{B}^n$ 为 n 维单位球 $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. 则考虑映射 $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$, 定义为

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - |x|^2}}.$$

[4]例 1.27, 命题 1.28 为笔者所加

则 f 是光滑的双射, 且其逆映射为

$$f^{-1}(y)=\frac{y}{\sqrt{1+|y|^2}}.$$

也是光滑的. 因此 f 是微分同胚映射, $\mathbb{B}^n$ 同 $\mathbb{R}^n$ 微分同胚.

命题 1.28. 这里列举微分同胚的几条性质.

1. 微分同胚的复合仍为微分同胚.
2. 微分同胚的有限乘积仍为微分同胚.
3. 微分同胚 f 在开子集 U 上的限制是 U 到 $f(U)$ 的微分同胚.

证明. 以下我们总设 $f:M\to N, g:N\to P, f_k:M\to N_k(k=1,\cdots,n)$ 是微分同胚

1. $g\circ f$ 自然是光滑双射, 且 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ 是光滑映射的复合, 从而光滑. 故 $g\circ f$ 是微分同胚.
2. $f_1\times\cdots\times f_n$ 自然是光滑双射, 且由定义可得 $(f_1\times\cdots\times f_n)^{-1}=f_1^{-1}\times\cdots\times f_n^{-1}$ 为光滑映射的乘积, 从而光滑. 故 $f_1\times\cdots\times f_n$ 是微分同胚.
3. $f|_U:U\to f(U)$ 自然是光滑双射, 而 $f(U)$ 是 N 的开子集, 故 $(f|_U)^{-1}=f^{-1}|_{f(U)}$ 光滑. 因此 $f|_U$ 是微分同胚.

□

习题 1.29.

1. 设 $F:\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^n$ 为光滑映射, 试研究什么条件下 $M\triangleq\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+m}:F(x,y)=0\}$ 称为光滑流形, 并给出它的一组局部坐标系.
2. 利用 (1) 证明下列集合是光滑流形, 并计算其维数.

$$\mathrm{SO}(n)\triangleq\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}:AA^T=I_n,\det A=1\}.$$
$$\mathrm{SU}(n)\triangleq\{A\in\mathbb{C}^{n\times n}:AA^H=I_n,\det A=1\}.$$
$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})\triangleq\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}:\det A=1\}.$$

1.3 切向量和切空间

本节的目标是用不依赖于坐标的观点定义 $\mathbb{R}^n$ 上的切向量, 并进一步推广到流形上.

1.3.1 $\mathbb{R}^n$ 的切向量

定义 1.30. 设 $p=(p^1,\cdots,p^n)\in\mathbb{R}^n$, 定义 $\mathbb{R}^n$ 在 p 处的切空间为

$$T_p\mathbb{R}^n\triangleq\{(p,v):v\in\mathbb{R}^n\}.$$

$T_p\mathbb{R}^n$ 中的元素 (p,v) 称为 p 点处的一个**切向量**.

注 1.31.

1. $T_p\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^n$ 同构. 同构映射为 $\mathcal{A}:T_p\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,(p,v)\mapsto v$.
2. 在同构 $\mathcal{A}$ 下, 称 $\{e_i=(0,\cdots,0,1^{\mathrm{ith}},0,\cdots,0):i=1,\cdots,n\}$ 为 $T_p\mathbb{R}^n$ 的一组标准基. 但不同点处 e_i 的意义不同, 因为它们的起点不同.

曲线的相切　设 $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n, t\mapsto p(t)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一条曲线, $(\mathbb{R}^n,\varphi;x^i)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个坐标. 我们称 $r(t)=(\varphi\circ\gamma)(t)$ 为 γ 的一个参数表示. 记 $p_0=\gamma(0)$. 现在的问题是: 能否称 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}$ 为 $\gamma(t)$ 在 p_0 处的切向量? 答案是否定的. 这是因为:

1. $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}$ 依赖于参数 t 的选取. 作参数变换 $t\mapsto s$ 使得 $t(0)=0$, 记 $\tilde{r}(s)=r(t(s))$, 则
$$\frac{\mathrm{d}\tilde{r}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0}.$$
2. $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}$ 依赖于 $\mathbb{R}^n$ 的坐标选取. 设另一个坐标为 $(\mathbb{R}^n,\psi;y^j)$, 记 $J(x)=(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x))$(即转移映射的 Jacobi 阵). 则 $\tilde{r}=\psi\circ\gamma=(\psi\circ\varphi^{-1})\circ r$, 故而
$$\frac{\mathrm{d}\tilde{r}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}J(x_0).$$
这里 $x_0=\varphi(p_0)$.

定义 1.32. 设 $\gamma_1,\gamma_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ 为两条光滑曲线, $(\mathbb{R}^n,\varphi;x^i)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个局部坐标. 设 $r_i=\varphi\circ\gamma_i$. 若 r_1,r_2 满足:

1. $r_1(0)=r_2(0)=x_0$.
2. $\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}$.

则称曲线 γ_1,γ_2 **相切于** $p_0=\varphi^{-1}(x_0)$.

根据定义以及上述讨论, 我们立即得到:

命题 1.33. 曲线的相切与参数变换、坐标选取无关.

定义 1.34. 我们记 Γ_p 为过 p 点的光滑曲线全体, 则 Γ_p 上可以定义等价关系 $\gamma_1\sim\gamma_2\Leftrightarrow\gamma_1$ 与 γ_2 相切于点 p. 我们称 $\Gamma_p/\sim$ 中的元素 $[\gamma]$ 为 $\mathbb{R}^n$ 在 p 点处的一个**切向量**, 一般用 X 来表示.

方向导数

定义 1.35. 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $p\in\mathbb{R}$. 若存在 p 的邻域 U 使得 $f|_U$ 是 C^∞ 的, 则称 f 在 p 点**局部** C^∞. 记 p 点处局部 C^∞ 函数的全体为 C_p^∞.

注 1.36. 若 $f,g\in C_p^\infty$, 则 $f\pm g, fg\in C_p^\infty$.

定义 1.37. 设 $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $t\mapsto\gamma(t)$ 为过 $p=\gamma(0)$ 的光滑曲线. 设 $f\in C_p^\infty$, 定义 $\frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}$ 为 f 在 p 点沿曲线 γ 的**方向导数**.

由定义不难证明, 对任意 $\tilde{\gamma}\in[\gamma]$, 成立 $\frac{\mathrm{d}f(\tilde{\gamma}(t))}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}$. 因此, 可以定义 $X(f)=[\gamma](f)=\frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}$. 下面两条性质是显然的:

1. $\mathbb{R}$ 线性: $X(\alpha f+\beta g)=\alpha X(f)+\beta X(g), \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}, f,g\in C_p^\infty$.

2. Leibnitz 规则: $X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g)$.

这两条是核心的性质:

定义 1.38. 若算子 $X : C_p^\infty \to \mathbb{R}$ 满足 $\mathbb{R}$ 线性和 Leibnitz 规则, 则称 X 为 p 点的一个**方向导子**. 所有的方向导子全体构成一个线性空间.

例 1.39. 设 $(\mathbb{R}^n, \varphi; x^i)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个局部坐标, $p \in \mathbb{R}^n$, 记 $x_0 = \varphi(p)$. 定义:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : C_p^\infty \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i}(f) \triangleq \left.\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{x=x_0}.$$

则不难证明 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 是 p 点的一个方向导子, 也称为坐标 x 下的偏导数算子.

定理 1.40. $\{\frac{\partial}{\partial x_i} : i = 1, \cdots, n\}$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 中 p 点方向导子空间的一组基.

证明. 我们首先证明任一方向导子 X 可以写为 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 的线性组合. 为此, 需要说明两件事:

1. 对任意常值函数 c, $X(c) = 0$. 由线性只需证明 $X(1) = 0$. 由 Leibnitz 规则可得

$$X(1) = X(1 \cdot 1) = 2X(1) \Rightarrow X(1) = 0.$$

2. 任取 $f \in C_p^\infty$, 取定局部坐标 $(\mathbb{R}^n, \varphi; x^i)$, 记 $x_0 = \varphi(p)$. 设 $g = f \circ \varphi^{-1}$, 在 x_0 附近任取一点 x, 考虑邻域内的线段 $x(t) = x_0 + t(x - x_0)$, 则有

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}g(x(t))}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + g(x_0) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x(t))(x^i - x_0^i)\mathrm{d}t + g(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(x(t))\mathrm{d}t + g(x_0) \triangleq \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) f_i(x) + g(x_0). \end{aligned}$$

设 $q = \varphi^{-1}(x)$, 由此即可得

$$f(q) = \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) f_i(x) + f(p), \quad f_i(x_0) = \frac{\partial}{\partial x^i} f.$$

(式中将 x, x^i 视作关于 q 的函数)

由上述即可得

$$X(f) = \sum_{i=1}^n X(x^i - x_0^i) f_i(x_0) = \left(\sum_{i=1}^n X(x^i - x_0^i)\frac{\partial}{\partial x^i}\right) f \Rightarrow X = \sum_{i=1}^n X(x^i - x_0^i)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

然后我们来证明偏导数算子的线性无关性. 设 $X = \sum\limits_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} = 0$. 取 f 为坐标映射 $f = x^i$, 则 $a_i = X(f) = 0$. 即证. □

注 1.41. 1. 在基 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ 下, X 由其在坐标函数 x^i 上的作用唯一确定.

2. 对 $\mathbb{R}^n$ 中的点 p, 有两个线性空间: 切向量空间和方向导子空间. 存在对应 $e_i \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x^i}$, 由此建立了两个空间之间的一一对应.

3. 方向导子的定义没有用到局部坐标, 只用到了局部 C^∞ 这一概念. 因此, 切向量的定义可以推广到一般的光滑流形上.

1.3.2 流形上的切向量

定义 1.42. 设 M 是 n 维光滑流形, $p \in M$, C_p^∞ 表示 p 点局部 C^∞ 函数全体. 若算子 $X : C_p^\infty \to \mathbb{R}$ 满足:

1. $\mathbb{R}$ 线性: $X(\alpha f + \beta g) = \alpha X(f) + \beta X(g)$.

2. Leibnitz 规则: $X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g)$.

其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in C_p^\infty$. 则称 X 为 M 在 p 点的一个**切向量**.

注 1.43. M 在 p 点的所有切向量全体记为 T_pM, 在 T_pM 上可以引入自然的加法和数乘使其成为线性空间.

下面我们来做一些具体的计算, 来看看不同局部坐标下偏导数算子对应的切向量之间的关系.

例 1.44. 设 $(U, \varphi; x^i), (V, \psi; y^i)$ 为 M 的局部坐标, $p \in U \cap V$, $\varphi(p) = x_0, \psi(p) = y_0$. 任取 $f \in C_p^\infty$, 定义

$$X_i(f) \triangleq \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{x_0}(f \circ \varphi^{-1}), \quad Y_i(f) \triangleq \frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_{y_0}(f \circ \psi^{-1}).$$

容易证明 $X_i, Y_i \in T_pM$. 并且

$$X_i(f) = \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{x_0}(f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi^{-1}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_{y_0}(f \circ \psi^{-1})\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x_0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x_0)Y_j(f).$$

因此

$$X_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x_0)Y_j.$$

1.4 切映射和子流形

1.4.1 切映射

定义 1.45. 设 M, N 是光滑流形, $F : M \to N$ 是光滑映射. 设 $p \in M, q = F(p) \in N$. 定义线性映射 $F_* : T_pM \to T_qN$, $X \mapsto F_*X$, 其中

$$(F_*X)(f) = X(f \circ F), \quad \forall f \in C_q^\infty.$$

我们称 F_* 为 F 在 p 点的**切映射**.

命题 1.46. 设 M, N, L 均为光滑流形.

1. 若 $F : M \to N, G : N \to L$ 为光滑映射, 则 $(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$.

2. 设 $F : M \to N$ 为微分同胚, 则 F_* 为线性同构, 且 $(F_*)^{-1} = (F^{-1})_*$.

证明. 1. 任取 $p \in M$, 设 $q = F(p) \in N, r = G(q) \in L$. 任取 $X \in T_pM$, $f \in C_r^\infty$, 则

$$((G \circ F)_*X)f = X(f \circ (G \circ F)) = (F_*X)(f \circ G) = ((G_* \circ F_*)X)(f).$$

由此即可得 $(F \circ G)_* = G_* \circ F_*$.

2. 由于 M, N 的切空间维数相同且有限, 要证 F_* 为线性同构, 只需证明它为单射. 若 $X \in T_pM$ 使得 $F_*X = 0$, 则

$$0 = (F^{-1})_*(F_*X) = (F^{-1} \circ F)_*X = X.$$

即证. 且由 $F_* \circ (F^{-1})_* = (F \circ F^{-1})_* = \mathbb{1}$ 可得 $(F_*)^{-1} = (F^{-1})_*$.

□

例 1.47. 设 $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 为光滑映射, $x \in \mathbb{R}^m$ 且 $y = F(x)$. 则

$$T_x\mathbb{R}^m = \operatorname{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right\}, \quad T_y\mathbb{R}^n = \operatorname{span}\left\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right\}.$$

现在我们来求 $F_*\frac{\partial}{\partial x^i}$. 任取 $f \in C_y^\infty$, 则

$$\left(F_*\frac{\partial}{\partial x^i}\right) f = \frac{\partial(f \circ F)}{\partial x^i} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f}{\partial y^\alpha}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} = \left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) f.$$

因此 $F_*\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}$.

例 1.48. 设 M 为光滑流形, $(U, \varphi; x^i)$ 是 M 的一个局部坐标. 设 $p \in U$, $\varphi(p) = x_0 \in \mathbb{R}^n$. 由于 $\varphi : U \to \varphi(U)$ 是微分同胚, 则有

1. $\forall X \in T_pM$, 存在 $a_i \in \mathbb{R}$, 使得 $\varphi_*X = \sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial}{\partial x^i}$.
2. $\{X_i = (\varphi^{-1})_*\frac{\partial}{\partial x^i} : i = 1, \cdots, n\}$ 构成 T_pM 的一组基.

注 1.49. 由于 $(\varphi^{-1})_*$ 是同构, 今后我们不再区分 X_i 和 $\frac{\partial}{\partial x^i}$.

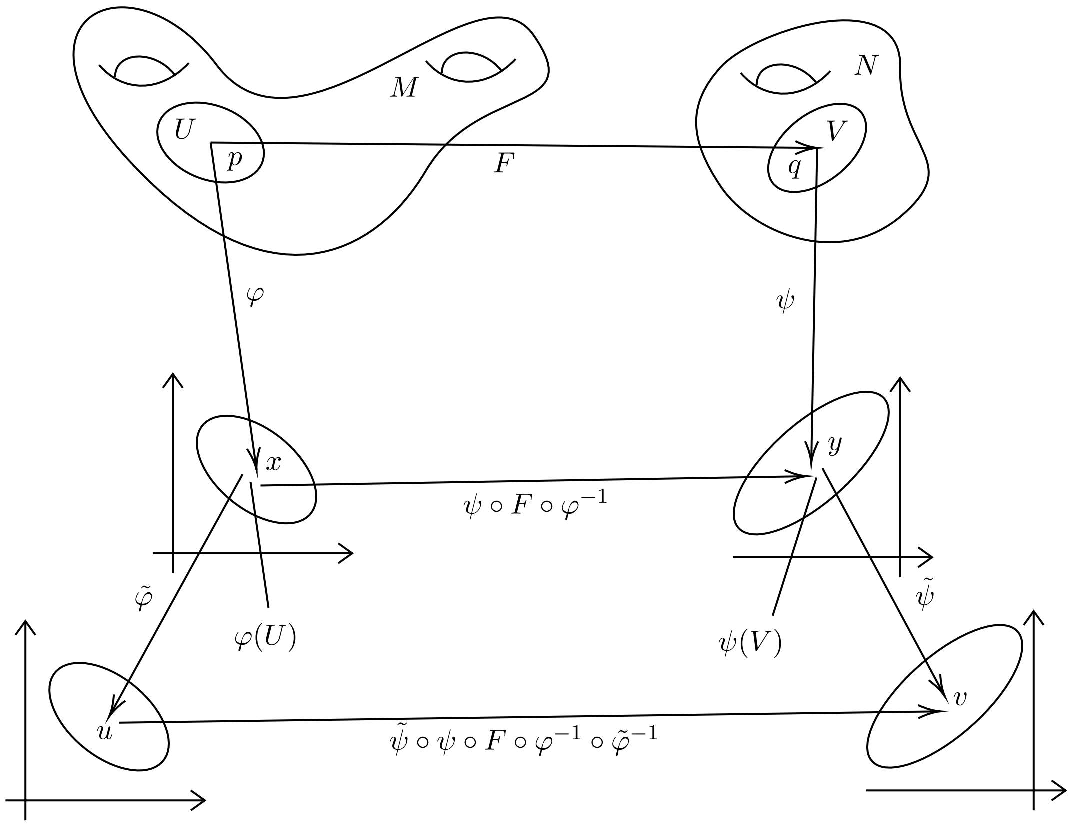
问题: 对单变量函数 $f(x)$, 若 $f'(x_0) \neq 0$ 可知 $f(x)$ 在 x_0 附近单调增或减, 从而 $f(x)$ 在 x_0 附近是单射. 那么对于流形间的映射是否有类似的结论?

定义 1.50. 设 M, N 为光滑流形, $\dim M = m, \dim N = n$. 设 $p \in M, q = F(p) \in N$. 若 $F_* : T_pM \to T_qN$ 为单射, 则称 F 在 p 点为**浸入**. 若 F 在每一点都是浸入, 则称 F 为**浸入映射**.

注 1.51. 由浸入的定义立得 $m \leqslant n$.

定理 1.52. 设 F 是光滑流形 M, N 间的光滑映射, 且 F 在 p 点处是浸入, 那么 F 在 p 点处是局部单射.

注 1.53. 定理的逆不正确. 例如 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto t^3$ 是单射, 但在 $t = 0$ 处不是浸入.



证明. 选取 M 上包含 p 的局部坐标 $(U,\varphi;x^i)$, 以及 N 上包含 $q=F(p)$ 的局部坐标 $(V,\psi;y^A)$. 不妨设 $F(U)\subset V$. 则转移映射的切映射为

$$(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})_*\frac{\partial}{\partial x^i}=\sum_{A=1}^{n}\frac{\partial y^A}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^A}.$$

由 $F_{*,p}$ 是单射可得 $(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})_{*,x_0}$ 也是单射. 因此 Jacobi 矩阵 $(\frac{\partial y^j}{\partial x^i},\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i})_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant m\\ m+1\leqslant\alpha\leqslant n}}$ 是行满秩的. 不妨设 $(\frac{\partial y^j}{\partial x^i})$ 是非奇异阵, 由逆映射定理可得在 x_0 附近, x 可以表示为 $y^1,\cdots,y^m$ 的函数. 由此可作局部的坐标变换:

$$\tilde{\varphi}:x\mapsto(y^1(x),\cdots,y^m(x))\triangleq(u^1,\cdots,u^m).$$

计算可得

$$\psi\circ F\circ\varphi^{-1}\circ\tilde{\varphi}^{-1}:\begin{cases}y^i=u^i, & 1\leqslant i\leqslant m\\ y^\alpha=y^\alpha(x)\triangleq g^\alpha(u), & m+1\leqslant\alpha\leqslant n\end{cases}$$

然后我们考虑函数 $\tilde{\psi}:y\mapsto v$, 定义为

$$v^i=y^i(1\leqslant i\leqslant m),\quad v^\alpha=y^\alpha-g^\alpha.$$

其 Jacobi 矩阵为 $\begin{pmatrix}I_m & O\\ * & I_{n-m}\end{pmatrix}$, 故 $\tilde{\psi}$ 为局部的可逆变换. 计算可得

$$\tilde{\psi}\circ\psi\circ F\circ\varphi^{-1}\circ\tilde{\varphi}^{-1}(u)=(u^1,\cdots,u^m,0,\cdots,0).$$

所以上述映射为局部单射, 进而 F 也是局部单射. $\square$

1.4.2 常秩映射

[5]本小节我们讨论局部微分同胚和常秩映射, 主要目标是推出流形上的秩定理.

定义 1.54. 设 M, N 为光滑流形, $F: M \to N$ 为光滑映射, 我们定义 F 在 $p \in M$ 处的秩为线性映射 $F_{*,p}$ 的**秩**. 若 F 在 M 任一点处的秩恒为常数, 则称 F 为**常秩映射**.

注 1.55. F 在 p 处为浸入当且仅当在 p 处 $\operatorname{rank} F = \dim M$, F 在 p 处为淹没 (即切映射 $F_{*,p}$ 为满射) 当且仅当在 p 处 $\operatorname{rank} F = \dim N$.

命题 1.56. 设 $F: M \to N$ 为光滑映射, $p \in M$. 若 F 在 p 处为浸入 (resp. 淹没), 则存在 p 的邻域 U 使得 F 在 U 上为浸入 (resp. 淹没).

证明. 记 $\dim M = m, \dim N = n$. 设 F 在 p 处是浸入, 则 $F_{*,p}$ 为单射. 设其矩阵表示为 $J(p)$, 则 $J(p)$ 存在非奇异的 m 阶子阵. 从而存在 p 的邻域 U, 使得 J 在对应邻域内总存在非奇异的 m 阶子阵 (det 的连续性), 故 F 在 U 内为浸入. 淹没同理. □

定义 1.57. 称光滑流形间的光滑映射 $F: M \to N$ 为**局部微分同胚**, 是指 $\forall p \in M$, 存在开邻域 U 使得 $F(U)$ 是开集且 $F|_U: U \to F(U)$ 为微分同胚.

定理 1.58 (流形上的逆映射定理)**.** 设 M, N 为光滑流形, $F: M \to N$ 为光滑映射. 设 $p \in M$ 处 $F_{*,p}$ 可逆, 则存在 p 和 $q = F(p)$ 的连通邻域 U_0, V_0, 使得 $F|_{U_0}: U_0 \to V_0$ 为微分同胚.

证明. 选取 p, q 处的局部坐标 $(U, \varphi; x), (V, \psi; y)$, 记 $x_0 = \varphi(p), y_0 = \psi(q)$. 不妨设 $F(U) \subset V$. 考虑映射 $\tilde{F} \triangleq \psi \circ F \circ \varphi: \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$. 由于 $F_{*,p}$ 可逆, 故 $\tilde{F}_{*,x_0}$ 可逆. 由 $\mathbb{R}^n$ 上的逆映射定理可得存在 x_0, y_0 的连通邻域 $\tilde{U}, \tilde{V}$, 使得 $\tilde{F}|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \to \tilde{V}$ 是微分同胚. 取 $U_0 = \varphi^{-1}(\tilde{U}), V_0 = \psi^{-1}(\tilde{V})$, 即有 U_0, V_0 是 p, q 的连通邻域, 且 $F|_{U_0}$ 是微分同胚. □

推论 1.59. 设 M, N 为光滑流形, $F: M \to N$ 为光滑映射.

1. F 是局部微分同胚当且仅当 F 既是浸入又是淹没.
2. 若 $\dim M = \dim N$, 且 F 是浸入或者淹没, 则 F 是局部微分同胚.

证明.

1. 若 F 既是浸入又是淹没, 则 $\forall p \in M$, $F_{*,p}$ 均可逆. 由流形上的逆映射定理即可得 F 是局部微分同胚.

   反之, 若 F 是局部微分同胚, 则任取 $p \in M$, 存在 p 的邻域 U 使得 $F|_U: U \to V$ 是微分同胚, 进而 $F_{*,p}$ 是线性同构, 即 F 既是浸入又是淹没.

2. 若 $\dim M = \dim N$, 计算维数可得若 F 为浸入则为淹没. 反之亦然.

□

作为上一节的局部单射定理的拓展, 我们来证明如下常秩映射的秩定理.

[5]本小节为笔者所加

定理 1.60 ($\mathbb{R}^n$ 上的秩定理)**.** 设 U 为 $\mathbb{R}^m$ 的开集, $F : U \to \mathbb{R}^n$ 为秩为 r 的常秩映射, 则 $\forall x_0 \in U$, 存在 $x_0, y_0 = F(x_0)$ 的邻域 U_0, V_0, 以及坐标变换 $\varphi : U_0 \to \mathbb{R}^m$, $\psi : V_0 \to \mathbb{R}^n$, 使得 $\varphi(x_0) = 0, \psi(y_0) = 0$, 且

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x) = (x^1, \cdots, x^r, 0, \cdots, 0).$$

证明. 不妨设 $x_0 = 0, y_0 = 0$, 不然作平移即可. 为方便起见, 我们改写:

$$x = (x^1, \cdots, x^r),\ x' = (x^{r+1}, \cdots, x^n);\ y = (y^1, \cdots, y^r),\ y' = (y^{r+1}, \cdots, y^n).$$

由于 F 的 Jacobi 矩阵 JF 秩恒为 r, 我们不妨设子阵 $JF\left[\begin{smallmatrix}1 & \cdots & r\\ 1 & \cdots & r\end{smallmatrix}\right]$ 在局部总是可逆的 (不然重排坐标顺序即可). 我们设 $F(x, x') = (P(x, x'), Q(x, x'))$, 这里 $P : U \to \mathbb{R}^r$, 定义

$$\varphi(x, x') = (P(x, x'), x').$$

则有

$$J\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial P^i}{\partial x^j} & \frac{\partial P^i}{\partial x^\alpha} \\ O & I_{m-r} \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, \cdots, r, \alpha = r+1, \cdots, m.$$

而 $(\frac{\partial P^i}{\partial x^j}) = JF\left[\begin{smallmatrix}1 & \cdots & r\\ 1 & \cdots & r\end{smallmatrix}\right]$ 在 x_0 处是可逆的, 所以存在 x_0 的邻域 U_1, 使得 $\varphi|_{U_1}$ 是坐标变换. 若设 $\varphi^{-1}(x, x') = (A(x, x'), B(x, x'))$, 则有

$$(x, x') = \varphi(A(x, x'), B(x, x')) = (P(A(x, x'), B(x, x')), B(x, x')).$$

由此可得 $\varphi^{-1}(x, x') = (A(x, x'), x')$. 所以

$$(F \circ \varphi^{-1})(x, x') = ((P \circ A)(x, x'), Q(A(x, x'), x')) \triangleq (x, R(x, x')).$$

注意到 $F \circ \varphi^{-1}$ 在 $U_0 \triangleq \varphi(U_1)$ 内也是秩为 r 的常秩映射. 计算 Jacobi 矩阵可得

$$J(F \circ \varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ \frac{\partial R^\alpha}{\partial x^i} & \frac{\partial R^\alpha}{\partial x^\beta} \end{pmatrix}.$$

其秩恒为 r, 所以 $\frac{\partial R^\alpha}{\partial x^\alpha}$ 在 U_0 内恒为零. 因此 $R(x, x') = R(x)$. 然后考虑映射 $\psi : F \circ \varphi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n$, 定义为 $\psi(y, y') = (y, y' - R(y))$. 注意到 ψ 的逆映射是显式的: $\psi^{-1}(y, y') = (y, y' + R(y))$, 因此 ψ 也是坐标变换. 并且

$$(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x, x') = \psi(x, R(x)) = (x, 0).$$

即证. □

定理 1.61 (流形上的秩定理)**.** 设 M, N 为光滑流形, $\dim M = m, \dim N = n$. 设 $F : M \to N$ 为秩为 r 的常秩光滑映射, 则 $\forall p \in M$, 存在以 p 为中心的局部坐标 (U, φ)[6]和以 $F(p)$ 为中心的局部坐标 (V, ψ) 使得 $F(U) \subset V$, 且

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x) = (x^1, \cdots, x^r, 0, \cdots, 0).$$

证明. 用 $\mathbb{R}^n$ 上的秩定理容易证明, 仿照前文逆映射定理的手法即可. □

[6]即 $\varphi(p) = 0$.

秩定理刻画了映射的局部性态. 实际上, 我们可以来刻画一些特殊常秩映射的整体性质. 为此我们要回顾 Baire 纲定理:

定理 1.62 (Baire 纲定理)**.** 设 X 为 LCH 空间[7], 则第二纲集不存在内点.

定理 1.63 (整体秩定理)**.** 设 M, N 为光滑流形, $F : M \to N$ 为常秩光滑映射.

1. 若 F 为满射, 则 F 为淹没.
2. 若 F 为单射, 则 F 为浸入.
3. 若 F 为双射, 则 F 为微分同胚.

证明. 1. 假设存在 $p \in M$ 使得 F 不是淹没, 则有 $r < \dim N$. 由秩定理可得存在以 p 和 $F(p)$ 为中心的局部坐标 $(U, \varphi; x^i)$ 和 $(V, \psi; y^j)$, 使得 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x) = (x^1, \cdots, x^r, 0, \cdots, 0)$. 不妨设 $F(\overline{U}) \subset\subset V$, 则 $\psi \circ F(\overline{U}) \subset \{y \in \mathbb{R}^n : y^{r+1} = \cdots = y^n = 0\}$, 因此 V 的任一非空开集不包含于 $F(\overline{U})$, 进而 $F(\overline{U})$ 是疏集. 由 Lindelöf 性质可得流形总存在可数的局部坐标系, 因此 $F(M)$ 是可数个疏集的并, 为第二纲集, 由 Baire 纲定理可得它不存在内点, 所以 $F(M) \neq N$, F 不是满射, 矛盾!

2. 假设存在 $p \in M$ 使得 F 不是浸入, 则有 $r < \dim M$. 由秩定理可得存在以 p 和 $F(p)$ 为中心的局部坐标 $(U, \varphi; x^i)$ 和 $(V, \psi; y^j)$, 使得 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x) = (x^1, \cdots, x^r, 0, \cdots, 0)$. 由此可得 F 在 $\varphi^{-1}(0, \cdots, 0, \varepsilon)$ 处的取值同 $\varphi^{-1}(0)$ 处的取值相同, 这与 F 是单射矛盾.

3. 由 1, 2 可得 F 既是浸入和淹没, 从而是局部微分同胚. 再由 F 是双射可得 F 为微分同胚.

□

1.4.3 子流形

定义 1.64. 设 $F : M \to N$ 是光滑映射, 若 F 既是单射又是浸入, 则称 (M, F) 是 N 的**浸入子流形**.

例 1.65. 1. 函数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ 是浸入但不是单射, 故 $(\mathbb{R}, F)$ 不是 $\mathbb{R}^2$ 的浸入子流形.

2. $F : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, 则 $((0, 2\pi), F)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的浸入子流形.

3. $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^3, 0)$ 是单射但不是浸入, 所以 $(\mathbb{R}, F)$ 不是 $\mathbb{R}^2$ 的浸入子流形.

4. $\mathbb{R}^3$ 中的正则曲面是浸入子流形.

回忆两种常见的拓扑:

- 限制拓扑: 即常见的子空间拓扑 $\mathcal{T}_A = \{A \cap U : U \in \mathcal{T}\}$.

[7]即局部紧 (locally compact) 的 Hausdorff 空间. 不难验证, 任一拓扑流形都是 LCH 空间.

- 诱导拓扑: 设 f 是从 $(X, \mathcal{T})$ 到 Y 的映射, 则 $\mathcal{T}_f = \{V \subset Y : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}$ 是 Y 上使得 f 连续的最细拓扑, 称为 f 诱导的拓扑[8].

定义 1.66. 设 $F : M \to N$ 为光滑映射, (M, F) 是 N 的浸入子流形. 若 $F(M)$ 的限制拓扑和诱导拓扑相同, 则称 (M, F) 是 N 的**嵌入子流形**.

注 1.67. 换言之, 在限制拓扑的意义下, 有 $M \cong F(M)$, 同胚映射为 F.

下面的例子说明诱导拓扑和限制拓扑未必相同.

例 1.68 (“8” 字曲线)**.** 考虑函数 $F : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\sin t, \sin 2t)$.

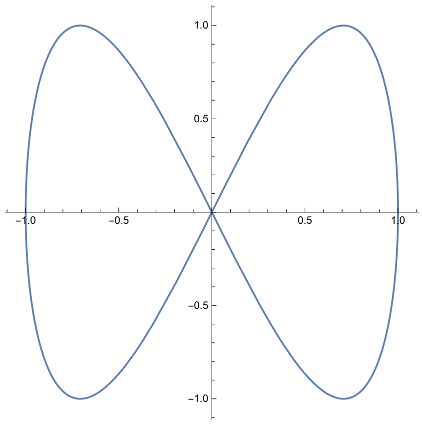


图 1: “8” 字曲线

设 $A = F((-\varepsilon, \varepsilon))$(即原点附近的一小段曲线), 则 $F^{-1}(A) = (-\pi, -\pi + \varepsilon) \cup (-\varepsilon, \varepsilon) \cup (\pi - \varepsilon, \pi)$ 为开集, 因此 $F((-\varepsilon, \varepsilon))$ 是诱导拓扑下的开集. 但它不是限制拓扑下的开集 (因为原点附近的开集在子空间限制下应该是两截曲线). 综上, $((-\pi, \pi), F)$ 是浸入子流形, 但不是嵌入子流形.

例 1.69. 考虑环面 $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, 任取无理数 α. 定义曲线

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2, \quad t \mapsto (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t}).$$

不难验证 $(\mathbb{R}, \gamma)$ 是 $\mathbb{T}^2$ 的浸入子流形, 我们这里来证明它不是嵌入子流形. 为此, 需要一个简单的引理:

引理 1.70. 给定 $\alpha \in \mathbb{R}$ 和 $N \in \mathbb{N}_+$, 则存在整数 m, n 满足 $1 \leqslant n \leqslant N$, 使得 $|n\alpha - m| < \frac{1}{N}$.

证明. 记 $\{x\}$ 为实数 x 的小数部分, 即 $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)$. 考虑 $k = 0, 1, \cdots, N$ 共 $N + 1$ 个整数, 以及 $[0, 1)$ 的一个 N-划分 $[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}) : j = 1, \cdots, N$. 由鸽巢原理可得存在 $0 \leqslant k < \ell \leqslant N$ 使得 $\{k\alpha\}, \{\ell\alpha\}$ 落在同一个划分里, 进而 $(\ell - k)\alpha$ 的小数部分小于 $\frac{1}{N}$, 即证. □

回到原例的证明. 实际上我们只需证明 $\gamma(0)$ 是 $\gamma(\mathbb{Z})$ 的一个聚点, 则 $\mathbb{R} \ncong \gamma(\mathbb{R})$. 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $n \in \mathbb{Z}_+$ 和 $m \in \mathbb{Z}$ 使得 $|n\alpha - m| < \varepsilon$. 不难验证 $|e^{ix} - e^{iy}| \leqslant |x - y| (x, y \in \mathbb{R})$, 因此

$$|\gamma(n) - \gamma(0)| = |e^{2\pi i n \alpha} - 1| = |e^{2\pi i n \alpha} - e^{2\pi i m}| \leqslant 2\pi\varepsilon.$$

[8] 在火箭的讲义上, 这个拓扑叫余诱导拓扑 (co-induced topology).

即证.

[9]下面我们来更深入地讨论嵌入子流形的相关概念与刻画.

定义 1.71. 设 (S,F) 为 M 的嵌入子流形, 称 $\dim M - \dim S$ 为 S 的**余维数**, 记作 $\operatorname{codim} S$. 称余维数为 1 的嵌入子流形为**嵌入超曲面**.

注 1.72. 例如 $\mathbb{R}^3$ 中的紧致正则曲面为 $\mathbb{R}^3$ 中的嵌入超曲面.

先看几个简单的嵌入子流形.

命题 1.73. 设 M 为光滑流形, $S \subset M$. 则 S 是余维数为零的嵌入子流形当且仅当 S 是开子流形.

证明. 若 S 为开集, 设 $\iota: S \hookrightarrow M$ 为嵌入映射. 由开子流形局部坐标系的选取即可得 ι 的坐标表示即为恒同映射. 所以 (S,ι) 为浸入子流形, 又因为 S 上的拓扑即为限制拓扑, 不难看出 (S,ι) 成为嵌入子流形. 反之, 若 (S,ι) 为嵌入子流形且余维数为零, 则 ι 为浸入且 $\dim S = \dim M$, 所以 ι 为局部微分同胚, 自然为开映射. 所以 S 是 M 的开子流形. $\square$

命题 1.74. 设 M, N 为光滑流形, 则 M 和 N 都是 $M \times N$ 的嵌入子流形.

证明. 这里只证 M 是 $M \times N$ 的嵌入子流形. 取定一点 $q \in N$, 考虑嵌入映射 $\iota: M \to M \times N$, $p \mapsto (p,q)$. 容易验证 (M,ι) 即为嵌入子流形. $\square$

命题 1.75. 设 M 为 m 维光滑流形, N 为 n 维光滑流形. U 是 M 的开集, $f: U \to N$ 为光滑映射. $\Gamma(f) \subset M \times N$ 为 f 的图, 定义为

$$\Gamma(f) = \{(x,y) \in M \times N : x \in U, y = f(x)\}.$$

则 $\Gamma(f)$ 是 $M \times N$ 的 m 维嵌入子流形.

证明. 考虑映射 $F: M \to \Gamma(f)$, $x \mapsto (x, f(x))$, 在图的自然坐标下容易验证 F 为微分同胚. 而 M 为嵌入子流形, 故 $\Gamma(f)$ 也为 $M \times N$ 的嵌入子流形. $\square$

下面我们来给出一个相当重要的嵌入子流形的等价刻画, 有些流形书上也将其作为嵌入子流形的定义, 往往称之为**正则子流形** (regular submanifold). 首先给出切片的定义:

定义 1.76. 设 U 为 $\mathbb{R}^n$ 的开子集, 则定义形如

$$S = \{(x^1, \cdots, x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n) \in U : x^{k+1} = c^{k+1}, \cdots, x^n = c^n\}$$

的子集为 U 的 **k-切片** (slice). 类似地, 在光滑流形 M 上, 设 (U,φ) 为一个光滑局部坐标, 若 $S \subset U$ 使得 $\varphi(S)$ 为 $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ 的 k-切片, 则称 S 为 U 的 **k-切片**. 我们称 $S \subset M$ 满足**局部 k-切片条件**, 是指对任意 $p \in S$, 存在此处的局部坐标 (U,φ), $S \cap U$ 是 U 的 k-切片.

[9]本小节余下的内容由笔者所加

定理 1.77. 设 M 为 n 维光滑流形. 若 $S \subset M$ 为 k 维嵌入子流形, 则 S 满足局部 k-切片条件. 反之, 若 S 满足 k-切片条件, 则在子空间拓扑下 S 成为 k 维拓扑流形, 并且存在微分结构使其成为 M 的 k 维嵌入子流形.

例 1.78. $\mathbb{S}^n$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的嵌入子流形.

证明. 定义

$$U_i^+ = \{(x^1, \cdots, x^{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x^i > 0\}, \quad U_i^+ = \{(x^1, \cdots, x^{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x^i < 0\}.$$

则 $\{U_i^\pm : i = 1, \cdots, n+1\}$ 构成 $\mathbb{S}^n$ 的开覆盖. 定义

$$\varphi_i^\pm(x^1, \cdots, x^{n+1}) = (x^1, \cdots, \hat{x}^i, \cdots, x^{n+1}).$$

则容易验证 $\{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm) : i = 1, \cdots, n+1\}$ 构成 $\mathbb{S}^n$ 的一组光滑局部坐标系, 其中

$$(\varphi_i^\pm)^{-1} = (x^1, \cdots, x^{i-1}, \pm\sqrt{1 - (x^1)^2 - \cdots - (x^{i-1})^2 - (x^{i+1})^2 - \cdots - (x^{n+1})^2}, x^{i+1}, \cdots, x^{n+1}).$$

由此可得 $\mathbb{S}^n$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的 n 维嵌入子流形. □

1.4.4 水平集

[10]本节我们来介绍一类特殊而又十分常见的嵌入子流形.

定义 1.79. 设 $\Phi : M \to N$ 为一映射, c 为 N 中的固定点, 则称 $\Phi^{-1}(c)$ 为 Φ 的**水平集**.

注 1.80. 若 $N = \mathbb{R}^n$, $c = 0$, 则往往称 $\Phi^{-1}(0)$ 为 Φ 的零点集.

定理 1.81 (常秩水平集定理)**.** 设 M, N 为光滑流形, $\Phi : M \to N$ 为秩为 r 的光滑常秩映射, 则 Φ 的任一水平集都是 M 的嵌入子流形, 余维数为 r.

证明. 任取 $c \in N$, 设 $S = \Phi^{-1}(c)$ 为水平集. 任取 $p \in S$, 由秩定理可得存在 M 在 p 处的局部坐标 (U, φ) 和 N 在 $\Phi(p)$ 处的局部坐标 (V, ψ) 使得

$$\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}(x^1, \cdots, x^n) = (x^1, \cdots, x^r, 0, \cdots, 0).$$

而在 $S \cap U$ 内, $\Phi(p)$ 恒为 c, 因此

$$\varphi(S \cap U) = \{x \in \varphi(U) : x^1 = x_0^1, \cdots, x^r = x_0^r\}.$$

所以 S 满足局部 $m - r$-切片条件, 因此 S 是余维数为 r 的嵌入子流形. □

推论 1.82. 若 $\Phi : M \to N$ 是光滑淹没, 则 Φ 的任一水平集都是 M 的嵌入子流形, 余维数为 $\dim N$.

证明. 任一淹没是秩为 $\dim N$ 的常秩映射, 即证. □

[10]本小节为笔者所加

上述推论虽然有效, 但对 Φ 过于苛求. 事实上, 我们只需要让 Φ 在所研究的水平集上是淹没就足够了. 这里我们给出一些概念:

定义 1.83. 设 $\Phi: M \to N$ 为光滑映射, 称 $p \in M$ 为 Φ 的**正则点**, 是指 $\Phi_{*,p}$ 为满射; 反之则称 p 是 Φ 的**临界点**. 类似地, 若水平集 $\Phi^{-1}(c)$ 中均为正则点, 则称 $c \in N$ 为 Φ 的**正则值**, 并称 $\Phi^{-1}(c)$ 为**正则水平集**. 反之则称 c 为 Φ 的**临界值**.

注 1.84. 映射 Φ 的正则点全体是 M 的开子集, 因为我们已证明过若 f 在 p 点为淹没, 则存在 p 的邻域 U 使得 $f|_U$ 为淹没.

推论 1.85. $\Phi: M \to N$ 的每个正则水平集都是 M 的嵌入子流形, 余维数为 $\dim N$.

例 1.86. 再回头看前面已出现的例子: $\mathbb{S}^n$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的 n 维嵌入子流形. 考虑光滑映射 $f: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^2$. 计算可得 $f_{*,x}(v) = 2\sum_i x^i v^i$, 其中 $v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. 因此除原点外, f 均为淹没. 由此即得 $\mathbb{S}^n = f^{-1}(1)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 维嵌入子流形.

例 1.87. 考虑 n 维正交群

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) : A^T A = I\}.$$

定义映射 $f: \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \mapsto A^T A$. 我们来证明 f 是常秩映射, 这需要一点小技巧. 任取 $P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, 定义左乘映射 $\ell_P : A \mapsto PA$ 和右乘映射 $r_P : A \mapsto AP$, 则

$$P^T A^T AP = (AP)^T(AP) \Rightarrow \ell_{P^T} \circ r_P \circ f = f \circ r_P.$$

两边求切映射可得

$$(\ell_{P^T,*})_{A^TAP} \circ (r_{P,*})_{A^TA} \circ f_{*,A} = f_{*,AP} \circ (r_{P,*})_A.$$

由于 ℓ_P, r_P 均为微分同胚, 因此 $\mathrm{rank}(f_{*,A}) = \mathrm{rank}(f_{*,AP})$. 由于 P 是任取的, 故 f 为常秩映射. 为求出 f 的秩, 只需求出 f 在单位阵 I 处的秩. 可以计算得到[11] $f_{*,I}(X) = X^T + X$. 线性映射 $X \mapsto X^T + X$ 的像集为 n 阶实对称阵全体, 故其秩为 $\frac{n(n+1)}{2}$. 综上可得 f 是秩为 $\frac{n(n+1)}{2}$ 的常秩映射, 因此 $\mathrm{O}(n)$ 为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 维嵌入子流形.

现在我们已经研究清楚了: 常秩映射的水平集是嵌入子流形. 那反之又如何呢? 事实上, 虽然嵌入子流形在整体上不总能成为一个水平集, 但在局部是成立的:

命题 1.88. 设 M 为 m 维光滑流形, $S \subset M$. S 是 M 的 k 维嵌入子流形当且仅当 $\forall p \in S$, 存在 p 的邻域 U 使得 $U \cap S$ 为某个光滑淹没 $\Phi: U \to \mathbb{R}^{m-k}$ 的水平集.

证明. 若 S 为 k 维嵌入子流形, 任取 $p \in S$, 设 (U, φ) 为 p 点的一个局部坐标, 使得 $S \cap U$ 是 U 的 k-切片. 定义映射 $\Phi: U \to \mathbb{R}^{m-k}$, $q \mapsto (x^{k+1}, \cdots, x^n)$, $x = \varphi(q)$, 即有 $S \cap U$ 是 Φ 的水平集, 并且容易验证 Φ 是光滑淹没.

反之, 若对任意 $p \in S$, 存在 p 的邻域 U, 使得 $U \cap S$ 为某个光滑淹没 $\Phi: U \to \mathbb{R}^{m-k}$ 的水平集, 则 $S \cap U$ 是 U 的 k 维嵌入子流形, 从而它满足局部 k-切片条件, 进而 S 也满足 k-切片条件, 故 S 是 M 的 k 维嵌入子流形. □

[11]具体计算过程在 9.18 习题课里有

注 1.89. 设 S 为 M 的嵌入子流形. 若存在光滑映射 $\Phi: M \to N$ 使得 S 为 Φ 的正则水平集, 则称 Φ 为 S 的**定义映射** (defining map). 更一般地, 设 U 为 M 的开集, 若光滑映射 $\Phi: U \to N$ 使得 $S \cap U$ 为 Φ 的正则水平集, 则称 Φ 为 S 的**局部定义映射**.

例 1.90 (旋转面)**.** 设 $H = \{(r,z) : r > 0\}$ 为半平面, $C \subset H$ 为 1 维嵌入子流形. 我们定义 C 生成的旋转面为

$$S_C = \{(x,y,z) : (\sqrt{x^2+y^2}, z) \in C\} \subset \mathbb{R}^3.$$

此时 C 称为母线. 设 (U, φ) 为 C 的任一局部坐标, 其中 $\varphi: U \to \mathbb{R}$. 则我们可以得到旋转面的一个局部定义映射:

$$\Phi(x,y,z) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2}, z).$$

其定义域为 $\tilde{U} = \{(x,y,z) : (\sqrt{x^2+y^2}, z) \in U\}$.

1.5 向量场

1.5.1 向量场

定义 1.91. 设 M 为光滑流形, 定义 M 的**切丛**为

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM.$$

习题 1.92. 设 $\dim M = m$, 证明切丛 $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$ 是 $2m$ 维光滑流形.

证明. 定义投影映射: $\pi: TM \to M$, $(p,v) \mapsto p$. 设 M 的一个光滑局部坐标系为 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$, 则 $\{\pi^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ 构成 TM 的一族开覆盖. 定义映射 $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \mathbb{R}^{2m}$ 为

$$\psi_\alpha(p,v) = (\varphi(p), v).$$

则容易验证 ψ_α 是同胚, 其逆映射为 $\psi_\alpha^{-1}(x,v) = (\varphi_\alpha^{-1}(x), v)$. 计算转移映射可得

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(x,v) = (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x), v).$$

由 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 光滑即可得 $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ 光滑. □

定义 1.93. 设 M 是光滑流形, U 为 M 的开集. 若光滑映射 $X: U \to TM$ 满足 $\pi \circ X = \mathbb{1}_U$, 则称 X 是 U 上的**光滑向量场**. 这里 $\pi: TM \to M$, $(p,v) \mapsto v$ 是自然投影. 我们记 U 上光滑向量场全体为 $\mathfrak{X}(U)$.

注 1.94. 换言之, 开集 U 上的向量场即在流形上每点处指定一个切向量.

设 $X \in \mathfrak{X}(U)$, 则在每点 p 处有

$$X_p = X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p.$$

我们称函数 $X^i : U \to \mathbb{R}$ 为 X 的分量.

命题 1.95. 设 M 是光滑流形, U 是 M 上的开集. 则 $X \in \mathfrak{X}(U) \Leftrightarrow$ 在局部坐标下 X 的分量为 C^∞ 函数.

证明. 这里切丛的局部坐标即为习题中所给出的. 任取 M 中的局部坐标 (U, φ) 和 TM 中的局部坐标 $(\pi^{-1}(V), \psi)$. 由 X 的定义可得 $X(U) \cap \pi^{-1}(V) \neq \varnothing \Leftrightarrow U = V$, 故我们即取 $V = U$. 任取 $x \in \varphi(U)$, 设 $\varphi(p) = x$, 则

$$(\psi \circ X \circ \varphi^{-1})(x) = \psi(p, X_p) = (x^1, \cdots, x^n, X^1, \cdots, X^n).$$

由此即可得 X 光滑当且仅当 $X^1, \cdots, X^n$ 均光滑. □

[12]下面的讨论我们即考虑 M 上的光滑向量场 $\mathfrak{X}(M)$. 任取 $X \in \mathfrak{X}(M)$ 和 $f \in C^\infty(U)$(U 为 M 的开集), 则我们可以定义函数 $Xf : U \to \mathbb{R}$ 为

$$Xf(p) \triangleq X_p(f).$$

容易证明 Xf 也是光滑函数. 所以我们可以将光滑向量场 X 视为 $C^\infty(M)$ 到自身的线性映射. 并且 X 也满足 Leibnitz 规则:

$$X(fg) = X(f)g + fX(g).$$

由此我们定义:

定义 1.96. 称映射 $D : C^\infty \to C^\infty$ 为一个**导数** (derivation), 是指它满足 $\mathbb{R}$ 线性与 Leibnitz 条件.

前面我们已经说明了任意光滑向量场可以视为一个导数. 反之, 也有类似的结论:

命题 1.97. 设 M 为光滑流形, 映射 $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ 为导数当且仅当存在 $X \in \mathfrak{X}(M)$ 使得 $Df = Xf, \forall f \in C^\infty(M)$.

证明. 定义 $X : M \to TM$ 为 $X_p f = (Df)(p)$. 只需证明 $X \in \mathfrak{X}(M)$.

1. 由 D 满足 $\mathbb{R}$ 线性和 Leibnitz 条件容易推得 X_p 也满足上述两条, 所以 $X_p \in T_pM$, 进而 X 是向量场.

2. 任取开集 $W \subset M$, 以及 $f \in C^\infty(W)$, 我们先来证 $Xf \in C^\infty(W)$. 事实上, 只需证明 Xf 在任意 $p \in W$ 附近光滑. 选取截断函数 $\psi \in C^\infty(M; [0,1])$, 使得 ψ 在 p 的一个邻域 V 内取值恒为 1, 且 $\operatorname{supp}\psi \subset U$. 则在 V 内有 $Xf = X(f\psi) = D(f\psi) \in C^\infty$. 即证. 要证 X 光滑, 只需证对任意局部坐标 $(U, \varphi; x^i)$, 分量函数 X^i 是光滑函数. 事实上, 有

$$Xx^i = \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial}{\partial x^j}(x^i) = X_i.$$

而由前面演示的结论可知 $X_i = Xx^i \in C^\infty(U)$, 即证.

□

[12]本小节余下的内容均为笔者所加

注 1.98. 因此我们此后往往将 $C^\infty(M)$ 到自身的导数全体与光滑向量场全体 $\mathfrak{X}(M)$ 等同起来.

下面我们来讨论不同流形间的向量场的关系. 设 $F: M \to N$ 为光滑映射, $X \in \mathfrak{X}(M)$, 则我们总可以在 $F(p)$ 处给定一个切向量 $F_{*,p}(X_p)$. 但是我们不一定能由此得到 N 上的一个光滑向量场: (1) 若 F 不是满射, 则无法在每点处都给定一个切向量; 若 F 不是单射, 则可能存在不同点 p, p', 满足 $F(p) = F(p') = q$, 但是 $F_{*,p}(X_p) \neq F_{*,p'}(X_{p'})$.

但是, 受上述启发, 我们可以定义 M, N 上光滑向量场之间的关系:

定义 1.99. 设 $F: M \to N$ 是光滑映射, 称 $X \in \mathfrak{X}(M), Y \in \mathfrak{X}(N)$ 是 F-**相关**的, 是指 $Y_{F(p)} = F_{*,p}(X_p), \forall p \in M$.

命题 1.100. 设 $F: M \to N$ 为光滑映射, $X \in \mathfrak{X}(M), Y \in \mathfrak{X}(N)$. 则 X, Y 是 F-相关的当且仅当对任意 $\forall f \in C^\infty_{F(p)} (p \in M)$, 有

$$X(f \circ F) = (Yf) \circ F.$$

证明. 计算可得

$$X(f \circ F)(p) = X_p(f \circ F) = (F_{*,p}X_p)f, \quad (Yf) \circ F(p) = Y_{F(p)}f.$$

由此即证. □

例 1.101. 考虑光滑映射 $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$. 则 $X = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ 和 $Y = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ 是 F-相关的.

证明. 任取 $t \in \mathbb{R}$ 以及 $f \in C^\infty_{F(t)}$, 计算可得

$$X(f \circ F) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\cos t, \sin t) = \cos t \frac{\partial f}{\partial y} - \sin t \frac{\partial f}{\partial x} = (Yf) \circ F.$$

□

最后我们来讨论最开始提出的问题: 何时 $F_* X$ 能成为 N 上的光滑向量场? 根据前面的讨论, 我们可以得到如下命题:

命题 1.102. 设 $F: M \to N$ 为微分同胚, 则对任意 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 存在唯一的 $Y \in \mathfrak{X}(N)$, 使得 X 与 Y 是 F-相关的.

证明. 我们定义 N 上的向量场 Y 为

$$Y_q = F_{*,F^{-1}(q)}(X_{F^{-1}(q)}), \quad \forall q \in N.$$

注意到 Y 实际上是下述光滑映射链的复合:

$$N \xrightarrow{F^{-1}} M \xrightarrow{X} TM \xrightarrow{F_*} TN.$$

因此 $Y \in \mathfrak{X}(N)$. 唯一性是自然的. □

我们称上述定义的光滑向量场 Y 为 X 在 F 下的**推出** (pushforward).

例 1.103. 考虑如下 $\mathbb{R}^2$ 中的开子流形:

$$M=\{(x,y):y>0,x+y>0\},\quad N=\{(u,v):u>0,v>0\}.$$

光滑映射 $F:M\to N$ 定义为 $F(x,y)=(x+y,\frac{x}{y}+1)$. 计算可得 F 的逆为

$$F^{-1}(u,v)=\left(u-\frac{u}{v},\frac{u}{v}\right).$$

由此可得 F 是微分同胚. 若我们考虑 $X\in\mathfrak{X}(M)$, 定义为

$$X_{(x,y)}=y^2\frac{\partial}{\partial x}\bigg|_{(x,y)},$$

则可以求解 X 在 F 下的推出 Y, 这里演示具体计算过程. 首先计算 F 的 Jacobi 矩阵为

$$JF(x,y)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2}\end{pmatrix}.$$

由于 $X_{F^{-1}(u,v)}=\frac{u^2}{v^2}\frac{\partial}{\partial x}\big|_{(u-\frac{u}{v},\frac{u}{v})}$, 因此 $Y_{(u,v)}$ 在基 $\{\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}\}$ 下的坐标为

$$Y_{(u,v)}=JF\left(u-\frac{u}{v},\frac{u}{v}\right)\begin{pmatrix}\frac{u^2}{v^2}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \frac{v}{u} & \frac{v-v^2}{u}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{u^2}{v^2}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{u^2}{v^2}\\ \frac{u}{v}\end{pmatrix}.$$

因此

$$Y_{(u,v)}=\frac{u^2}{v^2}\frac{\partial}{\partial u}\bigg|_{(u,v)}+\frac{u}{v}\frac{\partial}{\partial v}\bigg|_{(u,v)}.$$

1.5.2 李括号

本节我们介绍向量场之间的一类运算.

定义 1.104. 设 $X,Y\in\mathfrak{X}(U)$, 则称 $[X,Y]\triangleq XY-YX$ 为向量场 X,Y 的**李括号**. 这里 XY 表示将 XY 视作 C^∞ 到自身的映射的复合, 即 $(XY)f=X(Yf)$.

注 1.105. 引入李括号的动机是: 我们希望能给出向量场之间的一个封闭运算, 第一想到的自然是复合. 但是不难发现仅作一次复合后得到的映射并不一定满足 Leibnitz 性质 (例如 $X=\frac{\partial}{\partial x},Y=x\frac{\partial}{\partial y}$), 这才创建了李括号这一运算.

命题 1.106. 对任意 $X,Y\in\mathfrak{X}(U)$, $[X,Y]\in\mathfrak{X}(U)$.

证明. 光滑性和 $\mathbb{R}$-线性是显然的, 这里我们仅证明 Leibnitz 性质. 任取 $f,g\in C^\infty(U)$, 则有

$$\begin{aligned}[X,Y](fg)&=X(Y(fg))-Y(X(fg))\\&=X(Y(f)g+fY(g))-Y(X(f)g+fX(g))\\&=XY(f)g+Y(f)X(g)+X(f)Y(g)+XY(g)f-\\&\quad YX(f)g-X(f)Y(g)-Y(f)X(g)-YX(g)f\\&=[X,Y](f)g-f[X,Y](g).\end{aligned}$$

$\square$

命题 1.107. 李括号满足如下性质:

1. $\mathbb{R}$-线性: $[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, Y] = \alpha_1[X_1, Y] + \alpha_2[X_2, Y]$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$.
2. 反交换性: $[X, Y] = -[Y, X]$.
3. $\forall f \in C^\infty(U)$, $[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X$. 这里 fX 定义为 $(fX)(p) = f(p)X_p$[13].
4. Jacobi 恒等式: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

证明. 性质 1, 2 是显然的, 性质 4 计算即可, 我们只证明性质 3. 任取 $g \in C^\infty(U)$, 则

$$\begin{aligned}[fX, Y](g) &= fXY(g) - Y(fX(g)) \\ &= fXY(g) - fYX(g) - Y(f)X(g) \\ &= (f[X, Y] - Y(f)X)(g).\end{aligned}$$

因此 $[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X$. □

李括号的局部计算 下面我们来实际计算下述光滑向量场在局部坐标 $(U, \varphi; x^i)$ 内的李括号.

$$X = \sum_{i=1}^m a^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{j=1}^m b^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

首先由上一条性质可得

$$[fX, gY] = f[X, gY] - gY(f)X = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$

再由 $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$ 可得

$$\begin{aligned}[X, Y] &= \sum_{i,j=1}^n \left[a^i\frac{\partial}{\partial x^i}, b^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right] = \sum_{i,j=1}^n \left(a^i\frac{\partial b^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} - b^j\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \left(a^j\frac{\partial b^i}{\partial x^j} - b^j\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\right)\right]\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^n (X(b^i) - Y(a^i))\frac{\partial}{\partial x^i}.\end{aligned}$$

命题 1.108. 设 (M, F) 是 N 的浸入子流形, X, Y 是 M 上的向量场. 则

$$F_*[X, Y] = [F_*X, F_*Y].$$

证明. 任取 M, N 的局部坐标 $(U, \varphi; x^i), (V, \psi; y^j)$ 使得 $F(U) \subset V$. 设 $X = \sum\limits_{i=1}^m a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \sum\limits_{i=1}^m b^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, 则有

$$F_*[X, Y] = F_*\left(\sum_{i=1}^n (X(b^i) - Y(a^i))\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n (X(b^i) - Y(a^i))\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}.$$

[13]这其实定义了光滑向量场的一种数乘运算, 由此可以验证 $\mathfrak{X}(U)$ 是 $C^\infty(U)$-模.

另一方面, 有

$$
\begin{aligned}
[F_*X, F_*Y] &= \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial y^j}, \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} b^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial y^j}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i,k=1}^{m} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(b^k \frac{\partial y^j}{\partial x^k}\right) - \sum_{i,k=1}^{m} b^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(a^k \frac{\partial y^j}{\partial x^k}\right)\right]\frac{\partial}{\partial y^j} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i,k=1}^{m}\left(a^i \frac{\partial b^k}{\partial x^i} - b^i \frac{\partial a^k}{\partial x^i}\right)\frac{\partial y^j}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial y^j} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(X(b^i) - Y(a^i))\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}.
\end{aligned}
$$

即证. □

本命题可以换一种表述方法, 如下所述:

命题 1.109. 设 $F: M \to N$ 为光滑浸入, 设 $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ 分别与 $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ 是 F-相关的, 则 $[X_1, X_2]$ 与 $[Y_1, Y_2]$ 也是 F-相关的.

证明. 只需证 $[X_1, X_2](f \circ F) = ([Y_1, Y_2]f) \circ F, \forall f \in C^{\infty}_{F(p)}, \forall p \in M$. 计算可得

$$
\begin{aligned}
[X_1, X_2](f \circ F) &= X_1(X_2(f \circ F)) - X_2(X_1(f \circ F)) \\
&= X_1(Y_2 f \circ F) - X_2(Y_1 f \circ F) \\
&= Y_1(Y_2 f) \circ F - Y_2(Y_1 f) \circ F \\
&= [Y_1, Y_2] f \circ F.
\end{aligned}
$$

□

1.5.3 积分曲线

设 $\gamma: \mathbb{R} \to U$ 为光滑曲线, 其中 U 为 M 的开集. 则 $\gamma_* \frac{\partial}{\partial t}$ 是沿着曲线 $\gamma(t)$ 的切向量场. 问题: 给定 U 上的光滑向量场 X, 以及任一 $p \in U$, 能否找到一条光滑曲线过 p 点且 $\gamma_* \frac{\partial}{\partial t} = X_{\gamma(t)}$?

定义 1.110. 设 $X \in \mathfrak{X}(U)$. 若 $\gamma: I \to U$ 满足 $\gamma_* \frac{\partial}{\partial t} = X_{\gamma(t)}$, 则称 $\gamma(t)$ 为 X 的**积分曲线**. 若给定 $p \in U$ 以及 $t_0 \in I$, 满足 $\gamma(t_0) = p$, 则称 γ 是 X 过 p 点的积分曲线.

注 1.111. 一般 I 取作小开区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$, t_0 取作 0. 不难发现这其实是一阶 ODE 在流形上的版本.

定理 1.112. 设 $X \in \mathfrak{X}(U)$, 则 X 过 U 上任意一点有且仅有一条积分曲线 $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$.

证明. 不妨设 $(U, \varphi; x^i)$ 为局部坐标, 设 $X = \sum\limits_{i=1}^{n} a^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$. 则下述 ODE 的初值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t} = a^1(x^1, \cdots, x^n) \\
\vdots \\
\dfrac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}t} = a^n(x^1, \cdots, x^n) \\
x(0) = p
\end{cases}
$$

在某小区间 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 内存在唯一解. 记 $\tilde{\gamma}=(x^1,\cdots,x^n):(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^n$, 记 $\gamma=\varphi^{-1}\circ\tilde{\gamma}$, 则 γ 即为 X 过 p 的唯一积分曲线. □

定义 1.113. 设 M 为光滑流形. 称向量场组 $(X_1,\cdots,X_k)$ 在 M 的子集 A 上**线性无关**, 是指对任意 $p\in A$, 切向量组 $(X_1|_p,\cdots,X_k|_p)$ 在 T_pM 内是线性无关的.

定义 1.114. 设 $X\in\mathfrak{X}(U)$, 且 $p\in U$. 若 $X(p)=0$, 则称 p 是 X 的**奇点**或**零点**.

注 1.115. 向量场在奇点处的形态较为复杂, 这一点可以类比 ODE 系统.

习题 1.116.

1. 设 $\mathbb{S}^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 为 n 维单位球面.
   (a) 构造 $\mathbb{S}^2$ 上两个向量场 X,Y, 使得它们分别有且仅有一个、两个奇点.
   (b) 在 $\mathbb{S}^3$ 上构造三个线性无关的向量场.
   (c) 在 $\mathbb{S}^{2n+1}$ 上构造一个处处非零的向量场.
2. 在环面 $\mathbb{T}^2$ 上构造两个线性无关的向量场.
3. 在 n 维旋转群 $\mathrm{SO}(n)=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}:A^TA=I_n,\det A=1\}$ 上构造 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个线性无关的向量场.

向量场在非奇点处的形态很好, 即如下定理 (这一点也可以类比 ODE 系统的轨线在常点处可以"拉直"):

定理 1.117. 设 $X\in\mathfrak{X}(U)$, $p\in U$ 不是 X 的奇点. 则存在 p 点处的局部坐标 $(V,\psi;t^i)$ 使得 $\psi_*X=\frac{\partial}{\partial t^1}$.

证明. 设 p 点处的局部坐标为 $(U,\varphi;x^i)$, $X=\sum\limits_{i=1}^n a^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$. 由于 p 不是奇点, 不妨设在 $x_0=\varphi(p)$ 处 $a^1(x_0)\neq 0$. 考虑下列 ODE 方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t^1}=a^i(x^1,\cdots,x^n)(i=1,\cdots,n)\\ x^1(0)=0,\ x^\alpha(0)=t^\alpha(\alpha=2,\cdots,n)\end{cases}$$

该 Cauchy 问题存在唯一光滑解 $\gamma(t^1,\cdots,t^n)=(x^1,\cdots,x^n)$. 计算可得在 $t_1=0$ 处 Jacobi 矩阵为 $J=\begin{pmatrix}a^1 & \mathbf{0}\\ * & I_{n-1}\end{pmatrix}$ 为可逆阵. 所以在 x 附近 γ 是光滑的坐标变换. 选取 $\psi=\gamma^{-1}\circ\varphi$, 则 $(V,\psi;t^i)$ 为 p 点处的局部坐标, 且容易验证 $\psi_*X=\frac{\partial}{\partial t^1}$. □

习题 1.118. 已知 $\mathbb{R}^2$ 上的向量场 $X=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}$, 求:

1. 过 (x_0,y_0) 处的积分曲线.
2. $\mathbb{R}^2$ 的局部坐标 (t,s)(不包含奇点 $(0,0)$) 使得 $X=\frac{\partial}{\partial t}$.

解答. 1. 此时积分曲线的定义式即对应 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y, & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x \\ x(0) = x_0, & y(0) = y_0 \end{cases}$$

由此求解可得积分曲线为

$$\gamma(t; x_0, y_0) = (x(t), y(t)) = (x_0 \cos t - y_0 \sin t, y_0 \cos t + x_0 \sin t).$$

2. 不妨设 $y_0 \neq 0$(非奇点). 取 $x_0 = 0, y_0 = s$, 则 $\gamma(t; 0, s) = (-s \sin t, s \cos t)$. 在非奇点附近, 上述给出了一个坐标变换 $x = -s \sin t, y = s \cos t$. 反解可得

$$t = -\arctan \frac{x}{y}, \quad s = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

故上述即给出了 $\mathbb{R}^2$ 的局部坐标, 且使得 $X = \frac{\partial}{\partial t}$. 若 $x_0 \neq 0$ 可同理求之.

□

1.5.4 流

[14]作为本小节的开始, 我们先来证明积分曲线的一些简单性质:

命题 1.119. 设 $X \in \mathfrak{X}(U)$, $\gamma : I \to U$ 为 X 的积分曲线. 则对任意 $a \in \mathbb{R}$, $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \to U, t \mapsto \gamma(at)$ 是 aX 的积分曲线, 这里 $\tilde{I} = \{t : at \in I\}$.

证明. 任取 $t_0 \in \tilde{I}$, 以及 $f \in C^\infty_{\tilde{\gamma}(t_0)}$, 则

$$\left(\tilde{\gamma}_{*,t_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) f = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} (f \circ \tilde{\gamma}) = a \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{at_0} (f \circ \gamma) = a \left(\gamma_{*,at_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) f = aX_{\gamma(at_0)} f = aX_{\tilde{\gamma}(t_0)} f.$$

由此可得 $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \to U$ 是 aX 的积分曲线. □

命题 1.120 (平移不变性)**.** 设 $X \in \mathfrak{X}(U)$, $\gamma : I \to U$ 为 X 的积分曲线. 则对任意 $b \in \mathbb{R}$, $\hat{\gamma} : \hat{I} \to U$, $t \mapsto \gamma(t + b)$ 也是 X 的积分曲线, 这里 $\hat{I} = b + I$.

证明. 容易验证. □

命题 1.121 (积分曲线的泛性质)**.** 设 M, N 为光滑流形, $F : M \to N$ 为光滑映射. 则 $X \in \mathfrak{X}(M)$ 和 $Y \in \mathfrak{X}(N)$ 是 F-相关的当且仅当 F 将 X 的积分曲线映为 Y 的积分曲线.

证明. 若 X, Y 是 F-相关的, 设 γ 是 X 的积分曲线, 则

$$(F \circ \gamma)_{*,t_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = F_{*,\gamma(t_0)} \left(\gamma_{*,t_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) = F_{*,\gamma(t_0)}(X_{\gamma(t_0)}) = Y_{(F \circ \gamma)(t_0)}.$$

由此可得 $F \circ \gamma$ 是 Y 的积分曲线.

任取 $p \in M$, 则 X 存在过 p 点的积分曲线 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$. 由于 $F \circ \gamma$ 是 Y 的积分曲线, 因此

$$F_{*,p}(X_p) = F_{*,\gamma(0)}(X_{\gamma(0)}) = F_{*,\gamma(0)} \left(\gamma_{*,0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) = (F \circ \gamma)_{*,0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = Y_{(F \circ \gamma)(0)} = Y_{F(p)}.$$

□

[14]本小节为笔者所加

现在我们从另一角度来看待向量场的积分曲线族, 这一部分是 ODE 里动力系统的延拓. 设 M 为光滑流形, $X \in \mathfrak{X}(M)$, 则 M 上的任一点 p 确定了唯一一条 X 的积分曲线, 记作 $\theta^{(p)}:\mathbb{R}\to M$[15]. 从而对任意 $t\in\mathbb{R}$, 可以定义映射 $\theta_t : M\to M$ 为

$$\theta_t(p)=\theta^{(p)}(t).$$

该映射相当于 M 上所有积分曲线在时刻 t 的 “切片”(slice). 由平移不变性, $t\mapsto\theta^{(p)}(t+s)$ 表示 X 过 $q=\theta^{(p)}(s)$ 的积分曲线. 由过一点积分曲线的唯一性可得 $\theta^{(q)}(t)=\theta^{(p)}(t+s)$. 换言之, 有

$$\theta_t\circ\theta_s(p)=\theta_{t+s}(p).$$

不难发现 $\theta_0(p)=p$. 由上述可得: $\theta:\mathbb{R}\times M\to M$ 是加法群 $\mathbb{R}$ 在流形 M 上的一个作用. 由此, 我们给出下述定义:

定义 1.122. 定义光滑流形 M 上的**整体流** (或者**单参数群作用**) 为 M 上的连续 $\mathbb{R}$-左作用, 即满足下述条件的连续映射 $\theta:\mathbb{R}\times M\to M$:

$$\theta(t,\theta(s,p))=\theta(t+s,p)(\forall t,s\in\mathbb{R}),\quad \theta(0,p)=p.$$

注 1.123. 类似上面的讨论, 我们定义以下映射:

1. 对任意 $t\in\mathbb{R}$, $\theta_t:M\to M$ 定义为 $\theta_t(p)=\theta(t,p)$. 该映射满足群运算律

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s},\quad \theta_0=\mathbb{1}_M.$$

   此时每个 θ_t 均为同胚. 若流 θ 还是光滑的, 则 θ_t 成为微分同胚.

2. 对任意 $p\in M$, 定义 $\theta^{(p)}(t)=\theta(t,p)$.

定义 1.124. 设 $\theta:\mathbb{R}\times M\to M$ 为光滑整体流, 定义向量场 X 为

$$X_p=\theta^{(p)}_{*,0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t},\quad \forall p\in M.$$

我们称 X 为 θ 的**无穷小生成元** (infinitesimal generator).

命题 1.125. 光滑整体流 θ 的无穷小生成元 $X\in\mathfrak{X}(M)$, 并且对任意 $p\in M$, $\theta^{(p)}$ 是 X 过 p 点的积分曲线.

证明. 要证 $X\in\mathfrak{X}(M)$, 只需证明对任意开集 $U\subset M$ 和 $f\in C^\infty(U)$, $Xf\in C^\infty(U)$. 计算可得

$$Xf(p)=\left(\theta^{(p)}_{*,0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)f=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}f(\theta^{(p)}(t))=\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{(0,p)}f(\theta(t,p)).$$

由于 f,θ 均为光滑映射, 故 Xf 也是光滑的.

任取 $t_0\in\mathbb{R}$, 设 $q=\theta^{(p)}(t_0)$, 由流的定义可得

$$\theta^{(p)}(t_0+t)=\theta(t,\theta(t_0,p))=\theta^{(q)}(t).$$

[15]这里我们假定积分曲线在 $t\in\mathbb{R}$ 上有定义

因此任取 $f \in C^\infty_{\theta^{(p)}(t_0)}$, 有

$$\begin{aligned}\left(\theta^{(p)}_{*,t_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)f &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=t_0} f(\theta^{(p)}(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} f(\theta^{(p)}(t_0+t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} f(\theta^{(q)}(t)) \\ &= \left(\theta^{(q)}_{*,0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)f = X_q f = X_{\theta^{(p)}(t_0)}f.\end{aligned}$$

由此即可得 $\theta^{(p)}$ 是 X 过 p 的积分曲线. □

上面我们已经看到: 任一光滑整体流的无穷小生成元必为光滑向量场, 并且可以由流给出该向量场的积分曲线. 我们现在来考虑逆命题: 是否每个光滑向量场都能成为某个光滑整体流的无穷小生成元? 首先我们将看到, 该命题并不总是成立的, 因为积分曲线未必能在 $\mathbb{R}$ 上存在. 例如:

例 1.126. 设 $M = \mathbb{R}^2$, $X = x^2\frac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{X}(M)$. 计算可得 X 过 $(1,0)$ 的积分曲线为

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{1-t}, 0\right).$$

该积分曲线的存在区间向右至多延伸至 1.

为此, 我们需要把整体流的概念减弱为局部流.

定义 1.127. 设 M 为光滑流形. 称开集 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times M$ 为一个**流域**, 是指对任意 $p \in M$, $\mathcal{D}^{(p)} \triangleq \{t \in \mathbb{R} : (t,p) \in \mathcal{D}\}$ 是 $\mathbb{R}$ 内包含 0 的开区间. 定义 M 上的 **(局部) 流**为流域上的连续函数 $\theta : \mathcal{D} \to M$, 满足:

1. $\theta(0,p) = p$.
2. 对任意满足 $s + t \in \mathcal{D}^{(p)}$ 的 $s \in \mathcal{D}^{(p)}$ 和 $t \in \mathcal{D}^{\theta(s,p)}$, 都有 $\theta(t, \theta(s,p)) = \theta(t+s, p)$.

注 1.128. 对于局部流 θ, 可以类似定义映射 $\theta^{(p)}$ 和 θ_t, 对于光滑流也同样可以定义其无穷小生成元.

对于局部流, 我们有完全类似的结论, 证明略去.

命题 1.129. 设 $\theta : \mathcal{D} \to M$ 为光滑流, 则其无穷小生成元 X 为光滑向量场, $\forall p \in M$, $\theta^{(p)}$ 是 X 过 p 的积分曲线.

定义 1.130. 称积分曲线 $\gamma : I \to M$ 是**极大的**, 是指 γ 以 I 为极大存在区间. 称流 $\theta : \mathcal{D} \to M$ 是**极大的**, 是指 θ 以 $\mathcal{D}$ 为极大流域.

定理 1.131 (流的基本定理)**.** 设 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 则存在唯一的极大流 $\theta : \mathcal{D} \to M$ 以 X 为无穷小生成元. 并且此流还满足:

1. $\forall p \in M$, $\theta^{(p)} : \mathcal{D}^{(p)} \to M$ 为 X 过 p 的唯一极大积分曲线.
2. 若 $s \in \mathcal{D}^{(p)}$, 则 $\mathcal{D}^{(\theta(s,p))} = \mathcal{D}^{(p)} - s$.
3. 对任意 $t \in \mathbb{R}$, $M_t \triangleq \{p \in M : (t,p) \in \mathcal{D}\}$ 为 M 的开子集, 且 $\theta_t : M_t \to M_{-t}$ 为微分同胚, 其逆为 θ_{-t}.

证明. 证明较为初等但繁长, 主要运用 ODE 的一系列方法, 可以参考 GTM218(P212-214). □

注 1.132. 由存在唯一性, 我们总称基本定理中给出的极大流为向量场 X 生成的流, 或者直接称为 X 的流.

命题 1.133 (流的泛性质)**.** 设 M,N 为光滑流形, $F:M\to N$ 为光滑映射, $X\in\mathfrak{X}(M), Y\in\mathfrak{X}(N)$. 设 θ 为 X 的流, η 为 Y 的流. 若 X,Y 是 F-相关的, 则下述图表是可交换的:

$$\begin{tikzcd} M_t \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\theta_t"'] & N_t \arrow[d, "\eta_t"] \\ M_{-t} \arrow[r, "F"'] & N_{-t} \end{tikzcd}$$

1.6 Frobenius 可积性定理

1.6.1 第一可积性定理

我们知道, 向量场在非奇点处总是可以找到局部坐标下是坐标切向量. 那么, 对于开集 $U\subset M$ 上 ℓ 个线性无关的向量场 $X_1,\cdots,X_\ell$, 能否找到局部坐标 $(t^1,\cdots,t^m)$ 使得 $X_i=\frac{\partial}{\partial t^i}$, $i=1,\cdots,\ell$. 注意到若存在这样的局部坐标, 则必有 $[X_i,X_j]=0$, $\forall 1\leqslant i,j\leqslant\ell$? 我们将要证明这也是充分条件, 亦即 Frobenius 第一可积性定理.

定理 1.134 (Frobenius 第一可积性定理)**.** 设 $X_1,\cdots,X_\ell$ 是开集 U 上线性无关的光滑向量场, 则存在局部坐标 $(t^1,\cdots,t^n)$ 使得 $X_i=\frac{\partial}{\partial t^i}$ 当且仅当 $[X_i,X_j]=0$, $1\leqslant i,j\leqslant\ell$. 这样的局部坐标称为**平坦坐标**.

证明. 只证充分性, 用归纳法. 当 $\ell=1$ 时, 即为已证结论. 设定理对 $1\leqslant\ell<n$ 成立, 设 $X_1,\cdots,X_{\ell+1}$ 为线性无关光滑向量场, 且 $[X_i,X_j]=0$. 由归纳假设, 存在局部坐标 $(x^1,\cdots,x^n)$ 使得 $X_i=\frac{\partial}{\partial x^i}(i=1,\cdots,\ell)$. 设

$$X_{\ell+1}=\sum_{j=1}^{\ell}a^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}+\sum_{\alpha=\ell+1}^{n}a^\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

由此可得对任意 $1\leqslant i\leqslant\ell$, 有

$$0=[X_i,X_{\ell+1}]=\sum_{j=1}^{\ell}\frac{\partial a^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}+\sum_{\alpha=\ell+1}^{n}\frac{\partial a^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

由此可得 a^j,a^α 均仅依赖于 $x'=(x^{\ell+1},\cdots,x^n)$. 设 $\tilde{X}=\sum\limits_{\alpha=\ell+1}^{n}a^\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, 由线性无关可得 $\tilde{X}\neq 0$, 因此存在坐标变换

$$y^j=x^j,\quad y^\alpha=y^\alpha(x'),$$

使得

$$X_i=\frac{\partial}{\partial y^i}(1\leqslant i\leqslant\ell),\quad X_{\ell+1}=\sum_{j=1}^{\ell}a^j(y')\frac{\partial}{\partial y^j}+\frac{\partial}{\partial y^{\ell+1}}.$$

设坐标变换 $(y^1,\cdots,y^n)\mapsto(t^1,\cdots,t^n)$ 使得 $X_i=\frac{\partial}{\partial t^i},X_{\ell+1}=\frac{\partial}{\partial t^{\ell+1}}$. 则比对可得须满足

$$\frac{\partial y^A}{\partial t^i}=0,\quad \frac{\partial y^i}{\partial t^i}=1(1\leqslant i\leqslant \ell,1\leqslant A\leqslant n,A\neq i).$$

$$\frac{\partial y^j}{\partial t^{\ell+1}}+a^j(y')=0(1\leqslant j\leqslant \ell),\quad \frac{\partial y^{\ell+1}}{\partial t^{\ell+1}}=1,\quad \frac{\partial y^\alpha}{\partial t^{\ell+1}}=0(\ell+1<\alpha\leqslant n).$$

基于此我们可以构造坐标变换

$$\begin{cases} y^i=t^i-\displaystyle\int^{t^{\ell+1}}a^j(s,t^{\ell+2},\cdots,t^n)\mathrm{d}s(1\leqslant i\leqslant \ell)\\ y^\alpha=t^\alpha(\ell+1\leqslant\alpha\leqslant n)\end{cases}$$

从而在坐标 $(t^1,\cdots,t^n)$ 下有 $X_i=\frac{\partial}{\partial t^i},X_{\ell+1}=\frac{\partial}{\partial t^{\ell+1}}$, 即证. □

注 1.135. 定理也可以用一阶偏微分方程理论来证明. 设在坐标 $(U,\varphi;x^\alpha)$ 下 $X_i=\sum\limits_{\alpha=1}^m a_1^\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$. 那么存在局部坐标 $(t^1,\cdots,t^n)$ 使得 $X_i=\frac{\partial}{\partial t^i}$ 等价于方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial t^i}=a_i^\alpha(x)\\ x^\alpha(0)=x_0^\alpha\end{cases}$$

有解, 这又等价于 $\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial t^i\partial t^j}=\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial t^j\partial t^i}$, 即 $[X_i,X_j]=0$.

上述证明给出了归纳性的构造, 但用其给出的算法实际求解则过于困难. 实际上, 我们可以应用流来构造一个相当简单的求解算法, 亦即下述的第二种非归纳的证明. 为此, 需要一个引理.

定义 1.136. 称 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ 是**可交换**的, 是指 $XY=YX$, 即 $[X,Y]=0$. 称 M 上的两个流 θ,ψ 是**可交换**的, 是指任取 $p\in M$, 若包含 0 的开区间 I,J 使得 $\theta_t\circ\psi_s(p)$ 和 $\psi_s\circ\theta_t(p)$ 中的一者在 $(t,s)\in I\times J$ 上有定义, 则另一者在 $I\times J$ 上也有定义, 并且 $\theta_t\circ\varphi_s(p)=\varphi_s\circ\theta_t(p)$.

引理 1.137. $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ 可交换当且仅当它们的流也可交换.

注 1.138. 本引理的证明需要用到李导数, 故略去不表, 可以参考 GTM218: P231-233.

第一可积性定理的构造性证明. 因为定理完全是局部的性质, 故我们不妨设 $M=\mathbb{R}^n$. 任取 $p\in U$, 设 $(V,\varphi;x^i)$ 为以 p 为中心的局部坐标, 使得

$$T_pM=\operatorname{span}\left\{X_1|_p,\cdots,X_\ell|_p,\frac{\partial}{\partial x^{\ell+1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right\}.$$

设 θ_i 为 X_i 对应的流, 则存在 p 的邻域 $W\subset V$, 使得对任意 s_i 满足 $|s_i|<\varepsilon$, $(\theta_1)_{s_1}\circ\cdots\circ(\theta_\ell)_{s_\ell}$ 有定义且 W 在该复合下的像集包含于 V. 定义

$$\Omega=\{(t^{\ell+1},\cdots,t^n)\in\mathbb{R}^{n-\ell}:(0,\cdots,0,t^{\ell+1},\cdots,t^n)\in W\}.$$

以及

$$\Phi(t^1,\cdots,t^n)=(\theta_1)_{t^1}\circ\cdots\circ(\theta_\ell)_{t^\ell}(0,\cdots,0,t^{\ell+1},\cdots,t^n).$$

由 $[X_i, X_j]=0$ 可得 θ_i 是两两可交换的, 因此

$$\begin{aligned}\left(\Phi_{*,t_0}\frac{\partial}{\partial t^i}\right)f &= \frac{\partial}{\partial t^i}\bigg|_{t_0} f((\theta_1)_{t^1}\circ\cdots\circ(\theta_\ell)_{t^\ell}(0,\cdots,0,t^{\ell+1},\cdots,t^n)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t^i}\bigg|_{t_0} f((\theta_i)_{t^i}\circ(\theta_1)_{t^1}\circ\cdots\circ(\theta_{i-1})_{t^{i-1}}\circ(\theta_{i+1})_{t^{i+1}}\circ\cdots\circ(\theta_\ell)_{t^\ell}(0,\cdots,0,t^{\ell+1},\cdots,t^n)).\end{aligned}$$

注意到 $t\mapsto(\theta_i)_t(q)$ 是 X_i 的积分曲线, 故上式即等于 $(X_i)_{\Phi(t_0)}f$, 由此可得 $\frac{\partial}{\partial t^i}$ 和 X_i 是 Φ-相关的, 从而 $\Phi_{*,0}\frac{\partial}{\partial t^i}=(X_i)_p$. 由于 $\Phi(0,\cdots,0,t^{\ell+1},\cdots,t^n)=(0,\cdots,0,t^{\ell+1},\cdots,t^n)$ 可得 $\Phi_{*,0}\frac{\partial}{\partial t^i}=\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$. 综上可得 $\Phi_{*,0}$ 将 $T_0\mathbb{R}^n$ 的一组基 $\{\frac{\partial}{\partial t^i}: i=1,\cdots,n\}$ 映成了 T_pM 的一组基 $\{X_1|_p,\cdots,X_\ell|_p,\frac{\partial}{\partial x^{\ell+1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\}$, 由此可得 $\Phi_{*,0}$ 是可逆的. 由逆映射定理可得 Φ 在 0 附近为微分同胚, 进而 Φ^{-1} 即为坐标变换, 使得 $\Phi_*^{-1}X_i=\frac{\partial}{\partial t^i}$. □

例 1.139. 考虑 $\mathbb{R}^2$ 上的向量场

$$X=x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x},\quad Y=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}.$$

计算可得 $[X,Y]=0$. 且计算可得 X 的流为

$$\theta_t(x,y)=(x\cos t-y\sin t, x\sin t+y\cos t).$$

Y 的流为

$$\eta_s(x,y)=(xe^s,ye^s).$$

在 $p=(1,0)$ 附近, X,Y 是线性无关的. 此时定义

$$\Phi(t,s)=\theta_t\circ\eta_s(1,0)=(e^s\cos t, e^s\sin t).$$

由此可得 X,Y 在 $(1,0)$ 处的一个平坦坐标为

$$(t,s)=\Phi^{-1}(x,y)=\left(\arctan\frac{y}{x},\ln\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

1.6.2 分布的可积性

设 (M,F) 是 N 的浸入子流形, 则

$$L\triangleq\bigcup_{p\in M}F_*(T_pM)$$

在 N 上每一点 $q=F(p)$ 的切空间 T_qN 处确定了一个 m 维子空间. 反之, 在 N 上每点 q 处指定一个 ℓ 维子空间 L_q, 是否存在 N 的浸入子流形 (M,F) 使得 $F_{*,p}(T_pM)\subset L_{F(p)},\forall p\in M$ 呢?

定义 1.140. 设 U 为 M 的开集. 若 L 满足:

1. $\forall p\in U$, $L_p\subset T_pM$ 为 ℓ 维子空间.

2. 局部上, 存在线性无关的光滑向量场 $X_1,\cdots,X_\ell$ 使得 $L_p=\mathrm{span}\{X_1(p),\cdots,X_\ell(p)\}$.

则称 L 为 U 上的 ℓ **维分布**.

定义 1.141. 设 L 是 N 上的 ℓ 维分布, (M,F) 为 N 的浸入子流形. 若 $\forall p\in M$, $F_{*,p}(T_pM)\subset L_{F(p)}$, 则称 (M,F) 为 L 的一个**积分子流形**. 如果对 $\forall q\in N$, L 存在过 q 点的积分子流形, 则称分布 L 是**完全可积的**.

注 1.142. 一维的积分子流形也称为积分曲线. 任何分布总存在一维的积分子流形, 因此积分子流形是积分曲线的推广 (可以将积分曲线到积分子流形的转变视作 ODE 到一阶 PDE 的转变).

定义 1.143. 设 L 是 U 上的 ℓ 维分布, $X\in\mathfrak{X}(U)$. 若 $\forall p\in U$, $X_p\in L_p$, 则记 $X\in L$. 如果对任意 $X,Y\in L$, 都有 $[X,Y]\in L$, 则称分布 L 是**对合**的.

命题 1.144. 设 L 是 U 上的 ℓ 维分布, 则 L 是对合的 $\Leftrightarrow$ 存在 L 的基向量场 $X_1,\cdots,X_\ell$, 存在函数 C_{ij}^k 使得

$$[X_i,X_j]=\sum_{k=1}^{\ell}C_{ij}^kX_k,\quad C_{ij}^k=-C_{ji}^k.$$

证明. $\Rightarrow$ 是显然的, 只需证 $\Leftarrow$. 任取 $X=\sum\limits_{i=1}^{\ell}a^iX_i$, $Y=\sum\limits_{j=1}^{\ell}b^jX_j$. 则

$$\begin{aligned}[X,Y]&=\sum_{i,j=1}^{\ell}[a^iX_i,b^jX_j]\\&=\sum_{i,j=1}^{\ell}(a^ib^j[X_i,X_j]-b^jX_j(a^i)X_i+a^iX_i(b^j)X_j)\\&=\sum_{i,j,k=1}^{\ell}a^ib^jC_{ij}^kX_k-\sum_{i=1}^{\ell}(X(b^i)-Y(a^i))X_i\in L.\end{aligned}$$

□

定理 1.145. 设 L 是开集 $U\subset N$ 上的 ℓ 维分布, 则 L 完全可积 $\Leftrightarrow$ L 对合.

证明. 若 L 完全可积, 设 (M,F) 为 L 的一个 ℓ 维积分子流形, 由此可选取 M 上的 ℓ 个线性无关向量场 $\{X_1,\cdots,X_\ell\}$, 对应的 $\{Y_1,\cdots,Y_\ell\},Y_i=F_*X_i$ 是 L 的基向量场. 设 $[X_i,X_j]=\sum\limits_{k=1}^{\ell}C_{ij}^kX_k(C_{ij}^k=-C_{ji}^k)$, 则

$$[Y_i,Y_j]=F_*[X_i,X_j]=F_*\sum_{k=1}^{\ell}C_{ij}^kX_k=\sum_{k=1}^{\ell}C_{ij}^kY_k.$$

因此 L 是对合的.

反之, 若 L 是对合的, 设 $(U,\varphi;x^A)$ 是 N 的局部坐标. 设 $\{X_1,\cdots,X_\ell\}$ 为 L 的基向量场, 设

$$X_i=\sum_{j=1}^{\ell}a_i^j\frac{\partial}{\partial x^j}+\sum_{\alpha=\ell+1}^{n}a_i^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

由于线性无关, 不妨设 (a_i^j) 为可逆阵. 设 $(b_i^j) = (a_i^j)^{-1}$, 以及 $Y_i = \sum\limits_{j=1}^{\ell} b_i^j X_j$. 计算可得

$$Y_i = \sum_{j=1}^{\ell} b_i^j \left(\sum_{k=1}^{\ell} a_j^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{\alpha=\ell+1}^{n} a_j^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=\ell+1}^{n} c_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

计算可得

$$[Y_i, Y_j] = \left[\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=\ell+1}^{n} c_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{\alpha=\ell+1}^{n} c_j^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right] = \sum_{\alpha=\ell+1}^{n} d_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

另一方面, 由于 $\{Y_1, \cdots, Y_\ell\}$ 线性无关, 故

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{k=1}^{\ell} C_{ij}^k Y_k = \sum_{k=1}^{\ell} C_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{\alpha=\ell+1}^{n} C_{ij}^k c_k^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

比对系数即可得 $C_{ij}^k = 0$, 因此 $[Y_i, Y_j] = 0$. 由 Frobenius 第一可积性定理可得存在局部坐标 $(V, \psi; t^A)$ 使得 $Y_i = \frac{\partial}{\partial t^i}$. 任取 $p \in N$, 设 $t_0 = \psi(p)$, 设 $\Sigma_{t_0} = \{t \in \mathbb{R}^n : t^\alpha = t_0^\alpha, \ell + 1 \leqslant \alpha \leqslant n\}$, 则 $\psi^{-1}(\Sigma_{t_0})$ 为 N 过点 p 的 ℓ 维积分子流形. □

习题 1.146. 设 $X = \frac{\partial}{\partial x} + a(x,y)\frac{\partial}{\partial z}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial z}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的两个向量场.

1. 求分布 $\mathrm{span}\{X, Y\}$ 完全可积的条件.
2. 求积分曲面的表达式.

解答. 1. 完全可积等价于对合, 即等价于 $[X, Y] \in \mathrm{span}(X, Y)$. 计算可得

$$[X, Y] = \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial z}.$$

因此 $\mathrm{span}\{X, Y\}$ 完全可积当且仅当 $a_y = b_x$.

2. 定理证明即给出了积分曲面的求解算法. 此时 X, Y 立即可交换, 我们来求在任一点 (x, y) 处的平坦坐标. 求解

$$\begin{cases} x'(t) = 1, \quad y'(t) = 0, \quad z'(t) = a(x,y) \\ x(0) = x, \quad y(0) = y, \quad z(0) = z \end{cases}$$

可得 X 的流为

$$\theta_t(x,y,z) = \left(x + t, y, z + \int_0^t a(x+\tau, y) \mathrm{d}\tau \right).$$

求解

$$\begin{cases} x'(t) = 0, \quad y'(t) = 1, \quad z'(t) = b(x,y) \\ x(0) = x, \quad y(0) = y, \quad z(0) = z \end{cases}$$

可得 Y 的流为

$$\psi_s(x,y,z) = \left(x, y + s, z + \int_0^s b(x, y+\tau) \mathrm{d}\tau \right).$$

构造映射

$$\Phi(t,s,u)=\theta_t\circ\psi_s(0,0,u)=\left(t,s,u+\int_0^s b(0,\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^t a(\tau,s)\mathrm{d}\tau\right).$$

按照 $(t,s,u)=\Phi^{-1}(x,y,z)$ 即给出了一个平坦坐标. 此时

$$t=x,\quad s=y,\quad u=z-\int_0^x a(\tau,y)\mathrm{d}\tau-\int_0^y b(0,\tau)\mathrm{d}\tau.$$

取 u 为任意常数 C, 即可得积分曲面

$$\Sigma=\left\{(x,y,z):z=\int_0^x a(\tau,y)\mathrm{d}\tau+\int_0^y b(0,\tau)\mathrm{d}\tau+C\right\}.$$

$\square$

2 张量代数

2.1 张量代数

2.1.1 双线性型

定义 2.1. 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的 n 维线性空间. 若映射 $f: V \times V \to \mathbb{R}$ 满足

1. $f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 f(u_1, v) + \lambda_2 f(u_2, v)$.

2. $f(u, \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) = \mu_1 f(u, v_1) + \mu_2 f(u, v_2)$.

则称 f 是 V 上的一个**双线性型**. 这里 $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$, $u_i, v_i, u, v \in V$.

注 2.2. 所有的双线性型在自然的加法和数乘下构成一个向量空间, 记为 $T^{(0,2)}$.

定义 2.3. 设 $f, g \in V^*$, 定义 $f \otimes g : V \times V \to \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto f(u)g(v)$. 则 $f \otimes g$ 是 V 上的一个双线性型, 称为 f 与 g 的**张量积**.

注 2.4. 一般地, 有 $f \otimes g \neq g \otimes f$.

例 2.5. 设 $V = \mathrm{span}(e_1, \cdots, e_n), V^* = \mathrm{span}(f^1, \cdots, f^n)$, 其中 $f^i(e_j) = \delta^i_j$. 则

1. $f^i \otimes f^j(e_k, e_\ell) = f^i(e_k) f^j(e_\ell) = \delta^i_k \delta^j_\ell$.

2. $u = \sum a^k e_k, v = \sum b^\ell e_\ell$, 则

$$f^i \otimes f^j(u, v) = f^i(u) f^j(v) = a^i b^j.$$

3. $f = \sum a_i f^i, \sum g = b_j f^j$, 则 $f \otimes g = \sum a_i b_j f^i \otimes f^j$.

命题 2.6. $\{f^i \otimes f^j : 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ 构成 $T^{(0,2)}$ 的一组基.

证明. 设 $a_{ij} \in \mathbb{R}$ 使得 $\sum a_{ij} f^i \otimes f^j = 0$. 则 $a_{k\ell} = (\sum a_{ij} f^i \otimes f^j)(e_k, e_\ell) = 0$. 因此 $\{f^i \otimes f^j : 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ 线性无关. 另一方面, 任取 $f \in T^{(0,2)}$, 则有 $f = \sum f(e_i, e_j) f^i \otimes f^j$. □

注 2.7. (1) $\dim T^{(0,2)} = n^2$. (2) 由此, 有时也记 $T^{(0,2)} = V^* \otimes V^*$.

定义 2.8. 设 $f \in T^{(0,2)}$, 若 $\forall u, v \in V$, 有 $f(u, v) = f(v, u)$, 则称 f 是**对称的**. 若 $f(u, v) = -f(v, u)$, 则称 f 是**反称的**. 若 $\forall u \in V$, 有 $f(u, u) \geqslant 0$, 且 $f(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$, 则称 f 是**正定的**.

注 2.9. 1. 设 $f = a_{ij} f^i \otimes f^j$, 则 f 对称 $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$, f 反称 $\Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji}$.

2. 若 g 是 V 上对称正定的双线性型, 则 (V, g) 是一个欧氏空间.

3. f 正定 $\Leftrightarrow$ 矩阵 $(a_{ij}) > 0$.

习题 2.10. 1. 设 $f \in T^{(0,2)}$, 则 f 可以唯一分解为 $f = g + h$, 其中 g 对称, h 反称.

2. 设 $e=\{e_1,\cdots,e_n\}$, $\tilde{e}=\{\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_n\}$ 的对偶基分别为 $\{f^1,\cdots,f^n\}$, $\{\tilde{f}^1,\cdots,\tilde{f}^n\}$, 设 $f=\sum b_{ij}f^i\otimes f^j=\sum \tilde{b}_{ij}\tilde{f}^i\otimes\tilde{f}^j$. 证明: 若 $\tilde{e}_i=\sum a_i^j e_j$, 则 $\tilde{b}_{ij}=\sum b_{k\ell}a_i^k a_j^\ell$.

证明. 1. 定义 $g,h\in T^{(0,2)}$ 为

$$g(u,v)=\frac{f(u,v)+f(v,u)}{2},\quad h(u,v)=\frac{f(u,v)-f(v,u)}{2}.$$

则 g 对称, h 反称且 $f=g+h$.

2. 由 $\tilde{e}_i=\sum a_i^j e_j$ 可得 $f^i=\sum a_j^i\tilde{f}^j$. 因此

$$\sum\tilde{b}_{ij}\tilde{f}^i\otimes\tilde{f}^j=\sum b_{ij}f^i\otimes f^j=\sum b_{ij}(a_k^i\tilde{f}^k)\otimes(a_\ell^j\tilde{f}^\ell)=\sum(b_{k\ell}a_i^k a_j^\ell)\tilde{f}^i\otimes\tilde{f}^j.$$

即有 $\tilde{b}_{ij}=\sum b_{k\ell}a_i^k a_j^\ell$.

□

注 2.11. 由 2 可得 $T^{(0,2)}$ 中元素分量的变换与 $e\mapsto\tilde{e}$ 的变换一致, 由此也称 $T^{(0,2)}$ 中元素为二阶协变张量.

2.1.2 高阶张量

定义 2.12. 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上 n 维线性空间, 映射 $f:V^*\times\cdots\times V^*\times V\times\cdots\times V\to\mathbb{R}$ 满足:

1. $f(\varphi^1,\cdots,\lambda\varphi^i+\mu\phi^i,\cdots,\varphi^r,u_1,\cdots,u_s)=\lambda f(\varphi^i,\cdots,\varphi^i,\cdots,\varphi^r,u_1,\cdots,u_s)+\mu(\varphi^1,\cdots,\phi^i,\cdots\varphi^r,u_1,\cdots,u_s)$.

2. $f(\varphi^1,\cdots,\varphi^r,u_1,\cdots,\lambda u_i+\mu v_i,\cdots,v_s)=\lambda f(\varphi^1,\cdots,\varphi^r,u_1,\cdots,u_i,\cdots,u_s)+\mu f(\varphi^1,\cdots,\varphi^r,u_1,\cdots,v_i,\cdots,u_s)$.

称 f 是 V 上的一个 r 阶反变 s 阶协变张量, 其中 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\varphi^i,\phi^i\in V^*$, $u_i,v_i\in V$.

注 2.13. 所有的 r 阶反变 s 阶协变张量全体构成的集合记为 $T^{(r,s)}$, 在 $T^{(r,s)}$ 上引入自然的加法和数乘成为线性空间.

例 2.14.

1. $T^{(0,0)}=\mathbb{R}$.
2. $T^{(0,1)}=V^*$.
3. $T^{(1,0)}=V$.
4. $T^{(1,1)}\cong L(V,V)$.
5. $T^{(0,2)}=V$ 上双线性型全体.

定义 2.15. 设 $\xi\in T^{(r_1,s_1)}$, $\eta\in T^{(r_2,s_2)}$. 若对任意 $\varphi^1,\cdots,\varphi^{r_1+r_2}\in V^*$, $v_1,\cdots,v_{s_1+s_2}\in V$, 定义

$$\xi\otimes\eta(\varphi^1,\cdots,\varphi^{r_1+r_2},v_1,\cdots,v_{s_1+s_2})=\xi(\varphi^1,\cdots,\varphi^{r_1},v_1,\cdots,v_{s_1})\eta(\varphi^{r_1+1},\cdots,\varphi^{r_1+r_2},v_{s_1+1},\cdots,v_{s_1+s_2}).$$

易知 $\xi\otimes\eta\in T^{(r_1+r_2,s_1+s_2)}$, 称为 ξ 与 η 的**张量积**.

由定义立得下述性质:

命题 2.16. 1. 双线性性:

$$(\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2)\otimes\eta=\lambda_1\xi_1\otimes\eta+\lambda_2\xi_2\otimes\eta,\quad \xi\otimes(\lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2)=\lambda_1\xi\otimes\eta_1+\lambda_2\xi\otimes\eta_2.$$

其中 $\lambda_i\in\mathbb{R}$, $\xi,\xi_i\in T^{(r_1,s_1)}$, $\eta,\eta_i\in T^{(r_2,s_2)}$.

2. 结合律: $(\xi\otimes\eta)\otimes\zeta=\xi\otimes(\eta\otimes\zeta)$.

3. 一般不可交换性: $\xi\otimes\eta\neq\eta\otimes\xi$.

类似前文可以证明:

命题 2.17. 设 $V=\mathrm{span}(e_1,\cdots,e_n)$, $V^*=\mathrm{span}(f^1,\cdots,f^n)$, 其中 $f^i(e_j)=\delta^i_j$. 则 $\{e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_s}:1\leqslant i_k,j_\ell\leqslant n\}$ 构成了 $T^{(r,s)}$ 的一组基. 进而 $\dim T^{(r,s)}=n^{r+s}$.

注 2.18. 现在我们来解释一下 $T^{(1,1)}=L(V,V)$. 任取 $\mathcal{A}\in T^{(1,1)}$, 设 $\mathcal{A}=\sum_{i,j=1}^n a^i_je_i\otimes f^j$. 任取 $v\in V$, 则可以定义

$$\mathcal{A}v=\sum_{i,j=1}^n a^i_jf^j(v)e_i.$$

例 2.19. 设 $\xi=\sum a^{i_1\cdots i_{r_1}}_{j_1\cdots j_{s_1}}e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{r_1}}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_{s_1}}$, $\eta=\sum b^{k_1\cdots k_{r_2}}_{\ell_1\cdots\ell_{s_2}}e_{k_1}\otimes\cdots\otimes e_{k_{r_2}}\otimes f^{\ell_1}\otimes\cdots\otimes f^{\ell_{s_2}}$. 则

$$\xi\otimes\eta=\sum a^{i_1\cdots i_{r_1}}_{j_1\cdots j_{s_1}}b^{k_1\cdots k_{r_2}}_{\ell_1\cdots\ell_{s_2}}e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{r_1}}\otimes e_{k_1}\otimes\cdots\otimes e_{k_{r_2}}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_{s_1}}\otimes f^{\ell_1}\otimes\cdots\otimes f^{\ell_{s_2}}.$$

2.1.3 协变张量

本节我们采用记号: $T^r\triangleq T^{(0,r)}$, $P(r)$ 表示 r 阶置换群.

定义 2.20. 设 $T\in T^r$, $\sigma\in P(r)$. 对任意 $v_1,\cdots,v_r\in V$, $(\sigma T)(v_1,\cdots,v_r)\triangleq T(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(r)})$, 则 $\sigma T\in T^r$, 称之为 T 关于 σ 的**置换张量**.

例 2.21. 1. 设 $T=\sum a_{ij}f^i\otimes f^j\in T^2$, $\sigma=(2,1)\in P(2)$ 则 $\sigma T=\sum a_{ji}f^i\otimes f^j$.

2. $T=\sum a_{i_1\cdots i_r}f^{i_1}\otimes\cdots\otimes f^{i_r}$, $\sigma\in P(r)$. 设 $\sigma T=\sum\tilde{a}_{i_1\cdots i_r}f^{i_1}\otimes\cdots\otimes f^{i_r}$. 则

$$\tilde{a}_{i_1\cdots i_r}=\sigma T(e_{i_1},\cdots,e_{i_r})=T(e_{i_{\sigma(1)}},\cdots,e_{i_{\sigma(r)}})=a_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(r)}}.$$

即有 $\sigma T=\sum a_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(r)}}f^{i_1}\otimes\cdots\otimes f^{i_r}$.

命题 2.22. 设 $T\in T^r$, $\sigma,\tau\in P(r)$, 则 $(\sigma\tau)T=\sigma(\tau T)$.

证明. 任取 $v_1,\cdots,v_r\in V$, 令 $u_i=v_{\sigma(i)}$, 则

$$\begin{aligned}(\sigma\tau)T(v_1,\cdots,v_r)&=T(v_{\sigma(\tau(1))},\cdots,v_{\sigma(\tau(r))})=T(u_{\tau(1)},\cdots,u_{\tau(r)})\\&=\tau T(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(r)})=\sigma(\tau T)(v_1,\cdots,v_r).\end{aligned}$$

因此 $(\sigma\tau)T=\sigma(\tau T)$. □

命题 2.23. 设 $\xi \in T^k, \eta \in T^\ell$, 以及

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & k+\ell \\ \ell+1 & \cdots & \ell+k & 1 & \cdots & \ell \end{pmatrix},$$

则 $\sigma_0(\xi \otimes \eta) = \eta \otimes \xi$.

证明. 任取 $v_1, \cdots, v_{k+\ell} \in V$, 则

$$\begin{aligned} \sigma_0(\xi \otimes \eta)(v_1, \cdots, v_{k+\ell}) &= (\xi \otimes \eta)(v_{\ell+1}, \cdots, v_{\ell+k}, v_1, \cdots, v_\ell) \\ &= \xi(v_{\ell+1}, \cdots, v_{\ell+k})\eta(v_1, \cdots, v_\ell) \\ &= (\eta \otimes \xi)(v_1, \cdots, v_{k+\ell}). \end{aligned}$$

因此 $\sigma_0(\xi \otimes \eta) = \eta \otimes \xi$. □

定义 2.24. 设 $T \in T^r$, 若对任意 $\sigma \in P(r)$, 成立 $\sigma T = T$, 则称 T 为 r 阶**对称张量**. 若对任意 $\sigma \in P(r)$ 有 $\sigma T = (-1)^\sigma T$, 则称 T 为 r 阶**反称张量**.

注 2.25. 设 $T = \sum a_{i_1 \cdots i_r} f^{i_1} \otimes \cdots \otimes f^{i_r}$, $\sigma \in P(r)$, 则前面已计算过 $\sigma T = \sum a_{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(r)}} f^{i_1} \otimes \cdots \otimes f^{i_r}$. 因此 T 对称当且仅当 $a_{i_1 \cdots i_r} = a_{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(r)}}$, T 反称当且仅当 $a_{i_1 \cdots i_r} = (-1)^\sigma a_{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(r)}}$.

定义 2.26. 设 $T \in T^r$, 称 $\mathcal{S}_r(T) \triangleq \frac{1}{r!}\sum_\sigma \sigma T$ 为 T 的**对称化**, $\mathcal{A}_r(T) \triangleq \frac{1}{r!}\sum_\sigma (-1)^\sigma \sigma T$ 为 T 的**反称化**.

例 2.27. $T = f^{i_1} \otimes f^{i_2}$, 则

$$\mathcal{S}_2(T) = \frac{1}{2}(f^{i_1} \otimes f^{i_2} + f^{i_2} \otimes f^{i_1}), \quad \mathcal{A}_2(T) = \frac{1}{2}(f^{i_1} \otimes f^{i_2} - f^{i_2} \otimes f^{i_1}).$$

习题 2.28. 设 $T = f^{i_1} \otimes f^{i_2} \otimes f^{i_3}$, 求 $\mathcal{S}_3(T)$ 和 $\mathcal{A}_3(T)$.

证明. 由定义可得

$$\sigma \bigotimes_{i=1}^r f^i = \bigotimes_{i=1}^r f^{\sigma^{-1}(i)}.$$

所以有

$$\mathcal{S}_3(T) = \frac{1}{3!}\sum_{\sigma \in P(3)} f^{i_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes f^{i_{\sigma^{-1}(2)}} \otimes f^{i_{\sigma^{-1}(3)}}.$$

$$\mathcal{A}_3(T) = \frac{1}{3!}\sum_{\sigma \in P(3)} (-1)^\sigma f^{i_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes f^{i_{\sigma^{-1}(2)}} \otimes f^{i_{\sigma^{-1}(3)}}.$$

□

定理 2.29. 设 $T \in T^r$, 则 T 对称当且仅当 $\mathcal{S}_r(T) = T$, T 反称当且仅当 $\mathcal{A}_r(T) = T$.

证明. 仅证明反称的结论, 对称可完全类似证明. 若 T 是反称的, 则 $(-1)^\sigma T = T$, 因此 $\mathcal{A}_r(T) = T$. 反之, 任取 $\tau \in P(r)$, 则

$$\begin{aligned}\tau T &= \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in P(r)}(-1)^\sigma \tau(\sigma T) = (-1)^\tau \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in P(r)}(-1)^{\tau\sigma}(\tau\sigma)T \\ &\xlongequal{\tau'=\tau\sigma} (-1)^\tau \frac{1}{r!}\sum_{\tau'\in P(r)}(-1)^{\tau'}\tau' T = (-1)^\tau T.\end{aligned}$$

因此 T 是反称的. □

命题 2.30. 设 $T \in T^r$, $\sigma \in P(r)$, 则 $\mathcal{A}_r(\sigma T) = (-1)^\sigma \mathcal{A}_r(T)$.

证明. 直接计算可得

$$\mathcal{A}_r(\sigma T) = \frac{1}{r!}\sum_{\tau\in P(r)}(-1)^\tau \tau(\sigma T) = (-1)^\sigma \frac{1}{r!}\sum_{\tau\in P(r)}(-1)^{\tau\sigma}(\tau\sigma)T = (-1)^\sigma \mathcal{A}_r(T).$$

□

命题 2.31. $\xi \in T^r$, $\eta \in T^s$, $\sigma \in P(r), \tau \in P(s)$, 则

1. $\mathcal{A}_{r+s}(\xi\otimes\eta) = (-1)^{rs}\mathcal{A}_{r+s}(\eta\otimes\xi)$.
2. $\mathcal{A}_{r+s}(\sigma\xi\otimes\eta) = (-1)^{\sigma}\mathcal{A}_{r+s}(\xi\otimes\eta)$.
3. $\mathcal{A}_{r+s}(\xi\otimes\tau\eta) = (-1)^{\tau}\mathcal{A}_{r+s}(\xi\otimes\eta)$.

证明. 1. 选取 $\sigma_0 \in P(r+s)$ 为

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & r & r+1 & \cdots & r+s \\ s+1 & \cdots & r+s & 1 & \cdots & s \end{pmatrix}.$$

此前已证明过 $\xi\otimes\eta = \sigma_0(\eta\otimes\xi)$, 而 σ_0 的逆序数为 rs, 因此

$$\mathcal{A}_{r+s}(\xi\otimes\eta) = \mathcal{A}_{r+s}(\sigma_0(\eta\otimes\xi)) = (-1)^{rs}\mathcal{A}_{r+s}(\eta\otimes\xi).$$

2. 选取 $\tilde\sigma \in P(r+s)$ 为

$$\tilde\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & r & r+1 & \cdots & r+s \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(r) & r+1 & \cdots & r+s \end{pmatrix} = (\sigma, \mathrm{id}).$$

则有

$$\mathcal{A}_{r+s}(\sigma\xi\otimes\eta) = \mathcal{A}_{r+s}(\tilde\sigma(\xi\otimes\eta)) = (-1)^{\tilde\sigma}\mathcal{A}_{r+s}(\xi\otimes\eta) = (-1)^{\sigma}\mathcal{A}_{r+s}(\xi\otimes\eta).$$

3. 与 2 同理.

□

命题 2.32. 设 $\xi \in T^k$, $\eta \in T^\ell$, 则 $\mathcal{A}_{k+\ell}(\mathcal{A}_k(\xi)\otimes\eta) = \mathcal{A}_{k+\ell}(\xi\otimes\mathcal{A}_\ell(\eta)) = \mathcal{A}_{k+\ell}(\xi\otimes\eta)$.

证明. 直接计算可得

$$\mathcal{A}_{k+\ell}(\mathcal{A}_k(\xi)\otimes\eta) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in P(k)}(-1)^\sigma \mathcal{A}_{k+\ell}(\sigma\xi\otimes\eta) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in P(k)}\mathcal{A}_{k+\ell}(\xi\otimes\eta) = \mathcal{A}_{k+\ell}(\xi\otimes\eta).$$

另一个等式同理可证. □

2.2 Grassmann 代数

2.2.1 Grassmann 代数

设 V 为 $\mathbb{R}$ 上的 n 维线性空间, V^* 为对偶空间. $\Lambda^k(V^*)$ 定义为 V 上的 k 阶反称协变张量全体. 在 $\Lambda^k(V^*)$ 上可以引进自然的加法和数乘, 使 $\Lambda^k(V^*)$ 成为线性空间. 我们约定: $\Lambda^1(V^*) = V^*$, $\Lambda^0(V^*) = \mathbb{R}$.

定义 2.33. 设 $\xi \in \Lambda^k(V^*)$, $\eta \in \Lambda^\ell(V^*)$. 定义

$$\xi \wedge \eta \triangleq \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!}\mathcal{A}_{k+\ell}(\xi \otimes \eta) \in \Lambda^{k+\ell}(V^*)$$

称为 ξ 和 η 的**外积**.

注 2.34. $\wedge : \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^\ell(V^*) \to \Lambda^{k+\ell}(V^*)$, $(\xi, \eta) \mapsto \xi \wedge \eta$.

命题 2.35. 外积运算满足如下性质:

1. 分配律:
$$(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2) \wedge \eta = \lambda_1\xi_1 \wedge \eta + \lambda_2\xi_2 \wedge \eta.$$
$$\xi \wedge (\lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2) = \lambda_1\xi \wedge \eta_1 + \lambda_2\xi \wedge \eta_2.$$

2. 外交换性: $\forall \xi \in \Lambda^k(V^*), \eta \in \Lambda^\ell(V^*)$, 则 $\xi \wedge \eta = (-1)^{k\ell}\eta \wedge \xi$. 特别地, 若 k 为奇数, 则 $\xi \wedge \xi = 0$; 更特别地, $f \wedge f = 0$, $\forall f \in V^*$.

3. 结合律: $\forall \xi \in \Lambda^k(V^*)$, $\eta \in \Lambda^\ell(V^*)$, $\zeta \in \Lambda^m(V^*)$, 则 $(\xi \wedge \eta) \wedge \zeta = \xi \wedge (\eta \wedge \zeta)$.

证明. 1. 容易验证.

2. 依定义可得
$$\xi \wedge \eta = \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!}\mathcal{A}_{k+\ell}(\xi \otimes \eta) = (-1)^{k\ell}\frac{(\ell+k)!}{\ell!k!}\mathcal{A}_{\ell+k}(\eta \otimes \xi) = (-1)^{k\ell}\eta \wedge \xi.$$

3. 直接计算可得
$$\begin{aligned}(\xi \wedge \eta) \wedge \zeta &= \frac{(k+\ell!)}{k!\ell!}\mathcal{A}_{k+\ell}(\xi \otimes \eta) \wedge \zeta \\ &= \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!}\frac{(k+\ell+m)!}{(k+\ell)!m!}\mathcal{A}_{k+\ell+m}(\mathcal{A}_{k+\ell}(\xi \otimes \eta) \otimes \zeta) \\ &= \frac{(k+\ell+m)!}{k!\ell!m!}\mathcal{A}_{k+\ell+m}(\xi \otimes \eta \otimes \zeta).\end{aligned}$$

类似也可计算得 $\xi \wedge (\eta \wedge \zeta) = \text{RHS}$, 所以 $(\xi \wedge \eta) \wedge \zeta = \xi \wedge (\eta \wedge \zeta)$.

□

习题 2.36. 1. 设 $f^1, f^2 \in V^*$, 则 $f^1 \wedge f^2 = f^1 \otimes f^2 - f^2 \otimes f^1$.

2. 设 $f^1, f^2, f^3 \in V^*$, 计算 $f^1 \wedge f^2 \wedge f^3$.

3. 设 $f^1, \cdots, f^r \in V^*$, 计算 $\bigwedge_{i=1}^r f^i$.

证明. 我们直接计算 3. 断言:

$$\bigwedge_{i=1}^r f^i = r!\mathcal{A}_r\left(\bigotimes_{i=1}^r f^i\right) = \sum_{\sigma\in P(r)} (-1)^\sigma \bigotimes_{i=1}^r f^{\sigma^{-1}(i)}.$$

用归纳法证明. 当 $r=2$ 时, 即有

$$f^1\wedge f^2 = 2!\mathcal{A}_2(f^1\otimes f^2) = f^1\otimes f^2 - f^2\otimes f^1.$$

设命题对 $r\geqslant 2$ 成立, 则

$$\begin{aligned}\bigwedge_{i=1}^{r+1} f^i &= r!\mathcal{A}_r\left(\bigotimes_{i=1}^r f^i\right)\wedge f^{r+1}\\ &= (r+1)!\mathcal{A}_{r+1}\left(\mathcal{A}_r\left(\bigotimes_{i=1}^r f^i\right)\otimes f^{r+1}\right)\\ &= (r+1)!\mathcal{A}_{r+1}\left(\bigotimes_{i=1}^{r+1} f^i\right).\end{aligned}$$

即证. □

设 $V=\operatorname{span}(e_1,\cdots,e_n)$, $V^*=\operatorname{span}(f^1,\cdots,f^n)$, $f^i(e_j)=\delta^i_j$, 则只有 $i_1,\cdots,i_r$ 互不相同时才有 $f^{i_1}\wedge\cdots\wedge f^{i_2}\neq 0$. 当 $r>n$ 时 $f^{i_1}\wedge\cdots\wedge f^{i_r}=0$. 此时计算可得

$$\begin{aligned}(f^{i_1}\wedge\cdots\wedge f^{i_r})(e_{j_1},\cdots,e_{j_r}) &= r!\mathcal{A}_r(f^{i_1}\otimes\cdots\otimes f^{i_r})(e_{j_1},\cdots,e_{j_r})\\ &= \sum_{\sigma\in P(r)}(-1)^\sigma f^{i_1}\otimes\cdots\otimes f^{i_r}(e_{j_{\sigma(1)}},\cdots,e_{j_{\sigma(r)}})\\ &= \sum_{\sigma\in P(r)}(-1)^\sigma \delta^{i_1}_{j_{\sigma(1)}}\cdots\delta^{i_r}_{j_{\sigma(r)}}\\ &= \det(\delta^{i_k}_{j_\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant r} \triangleq \delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}.\end{aligned}$$

我们称 $\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}$ 为**广义 Kronecker delta**. 下面我们来讨论 $\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}$ 的取值. 若 $\{i_1,\cdots,i_r\}\neq\{j_1,\cdots,j_r\}$, 则存在全为零的一行 (列), 此时 $\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}=0$. 所以存在 $\sigma\in P(r)$, 使得 $j_k=i_{\sigma(k)}$. 此时

$$\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r} = \sum_{\tau\in P(r)}(-1)^\tau\delta^{i_1}_{i_{\tau\sigma(1)}}\cdots\delta^{i_r}_{\tau\sigma(r)} = (-1)^{\sigma^{-1}} = (-1)^\sigma.$$

因此 σ 为偶置换时, $\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}=1$; σ 为奇置换时, $\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}=-1$.

定理 2.37. $\{f^{i_1}\wedge\cdots\wedge f^{i_r}: 1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n\}$ 构成 $\Lambda^r(V^*)$ 的一组基, 进而 $\dim\Lambda^r(V^*)=\binom{n}{r}$.

证明. 约定: $\sum\limits_{i<}$ 表示对所有满足 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant n$ 的指标求和, $\sum\limits_{(i)}$ 表示对所有不同指标 $1\leqslant i_1,\cdots,i_r\leqslant n$ 求和.

- 线性无关: 设 $\xi = \sum\limits_{i<} a_{i_1\cdots i_r} f^{i_1}\wedge\cdots\wedge f^{i_r} = 0$, 则

$$a_{j_1\cdots j_r} = \xi(e_{j_1},\cdots,e_{j_r}) = 0,\quad \forall 1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_r\leqslant n.$$

- 线性组合. 任取 $\xi = \sum\limits_{(i)} a_{i_1\cdots i_r} f^{i_1}\otimes\cdots\otimes f^{i_r}\in\Lambda^r(V^*)$, 则 $a_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(r)}} = (-1)^\sigma a_{i_1\cdots i_r}$. 因此

$$\xi = \mathcal{A}_r(\xi) = \sum_{(i)} a_{i_1\cdots i_r}\mathcal{A}_r\left(\bigotimes_{k=1}^r f^{i_k}\right) = \frac{1}{r!}\sum_{(i)} a_{i_1\cdots i_r} f^{i_1}\wedge\cdots\wedge f^{i_r} = \sum_{i<} a_{i_1\cdots i_r} f^{i_1}\wedge\cdots\wedge f^{i_r}.$$

□

注 2.38. (1) $\Lambda(V^*) = \sum\limits_{r=0}^n \Lambda^r(V^*)$ 关于外积构成一个代数, 称为 Grassmann 代数. (2) 上述讨论完全适用于反变反称张量.

2.2.2 应用

命题 2.39. $v_1,\cdots,v_r\in V$ 线性无关 $\Leftrightarrow v_1\wedge\cdots\wedge v_r = 0$.

证明. $\Rightarrow$: 不妨设 $v_r = \sum\limits_{i=1}^{r-1}\alpha_i v_i$, 则

$$\bigwedge_{i=1}^r v_i = \sum_{i=1}^{r-1}\alpha_i(v_1\wedge\cdots\wedge v_{r-1}\wedge v_i) = 0.$$

$\Leftarrow$: 假设 $v_1,\cdots,v_r$ 线性无关, 则可以扩充为 V 的一组基 $v_1,\cdots,v_r,v_{r+1},\cdots,v_n$, 从而 $\{v_{i_1}\wedge\cdots\wedge v_{i_r} : 1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n\}$ 构成 $\Lambda^r(V)$ 的一组基, 这与 $v_1\wedge\cdots\wedge v_r = 0$ 矛盾. □

命题 2.40. 设向量组 $u_1,\cdots,u_r$ 和 $v_1,\cdots,v_r$ 线性无关, 则 $\mathrm{span}(u_1,\cdots,u_r) = \mathrm{span}(v_1,\cdots,v_r)\Leftrightarrow \exists\lambda\neq 0$ 使得 $u_1\wedge\cdots\wedge u_r = \lambda v_1\wedge\cdots\wedge v_r$.

证明. $\Rightarrow$: 设 $u_i = \sum\limits_{j=1}^n a_{ij}v_j$, 则

$$\begin{aligned}\bigwedge_{i=1}^r u_i &= \sum_{(j)} a_{1j_1}\cdots a_{rj_r} v_{j_1}\wedge\cdots\wedge v_{j_r}\\ &= \left(\sum_{\sigma\in P(r)}(-1)^\sigma a_{1\sigma(1)}\cdots a_{r\sigma(r)}\right)\bigwedge_{i=1}^r v_i\\ &= \det(a_{ij})\cdot\bigwedge_{i=1}^r v_i.\end{aligned}$$

由线性无关可得 $u_1\wedge\cdots\wedge u_r\neq 0$, 自然有 $\det(a_{ij})\neq 0$.

$\Leftarrow$: 若存在 $\lambda\neq 0$ 使得 $u_1\wedge\cdots\wedge u_r = \lambda v_1\wedge\cdots\wedge v_r$, 则对任意 $i\in[n]$, $u_i\wedge(v_1\wedge\cdots\wedge v_r) = 0$, 从而 $u_i\in\mathrm{span}(v_1,\cdots,v_r)$. 由此即可得 $\mathrm{span}(u_1,\cdots,u_r) = \mathrm{span}(v_1,\cdots,v_r)$. □

命题 2.41 (E. Cartan)**.** 设 $v_1,\cdots,v_r$ 线性无关, 向量组 $u_1,\cdots,u_r$ 满足方程 $\sum\limits_{i=1}^{r} u_i\wedge v_i = 0$, 则 $u_i=\sum\limits_{j=1}^{r} a_i^j v_j$, $a_i^j=a_j^i$.

证明. 将 $v_1,\cdots,v_r$ 扩充为 V 的一组基 $v_1,\cdots,v_n$. 设 $u_i=\sum\limits_{j=1}^{r} a_i^j v_j+\sum\limits_{\alpha=r+1}^{n} a_i^\alpha v_\alpha$. 则有

$$\begin{aligned}0=\sum_{i=1}^{r} u_i\wedge v_i&=\sum_{i,j=1}^{r} a_i^j v_j\wedge v_i+\sum_{i=1}^{r}\sum_{\alpha=j+1}^{n} a_i^\alpha v_\alpha\wedge v_i\\&=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}(a_j^i-a_i^j)v_i\wedge v_j-\sum_{\alpha=r+1}^{n} a_i^\alpha v_i\wedge v_\alpha.\end{aligned}$$

由于 $\{v_i\wedge v_j:1\leqslant i<j\leqslant n\}$ 构成 $\Lambda^2(V)$ 的一组基, 故 $a_i^j=a_j^i$ 且 $a_i^\alpha=0$, 即证. □

问题: 对任意 $v_1,\cdots,v_r\in V$, $v_1\wedge\cdots\wedge v_r\in\Lambda^r(V)$. 反之, 给定 $T\in\Lambda^r(V)$, 是否一定存在 $v_1,\cdots,v_r\in V$, 使得 $T=v_1\wedge\cdots\wedge v_r$?

定义 2.42. 设 $T\in\Lambda^r(V)$, 若存在 $v_1,\cdots,v_r\in V$, 使得 $T=v_1\wedge\cdots\wedge v_r$, 则称 T 是**可分解的**.

命题 2.43. 设 $T\in\Lambda^2(V)$. 则 T 可分解当且仅当 $T\wedge T=0$.

证明. 若 T 可分解, 则 $T=u\wedge v$. 容易验证此时 $T\wedge T=0$.

反之, 先任取 V 的一组基 $v_1,\cdots,v_n$, 设 $T=\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_i^j v_i\wedge v_j$, 则 $A=(a_i^j)$ 是实反对称阵. 从而存在正交阵 P 使得

$$PAP^T=\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}0&b_1\\-b_1&0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0&b_s\\-b_s&0\end{pmatrix},O\right)(b_1,\cdots,b_s\neq 0).$$

因此在基 $u_i=\sum p_i^j v_j$ 下, 有

$$T=\sum_{i=1}^{s} b_i u_{2i-1}\wedge u_{2i}.$$

然后作替换 $u_{2i-1}\mapsto b_i u_{2i-1}$, 在这组基下即有 $T=\sum\limits_{i=1}^{s} u_{2i-1}\wedge u_{2i}$. 结合 $T\wedge T=0$ 可得 $s=1$, 因此 $T=u_1\wedge u_2$ 可分解. □

命题 2.44. 设 $\dim V=n$, 则任一 $T\in\Lambda^{n-1}(V)$ 可解.

证明. 任取一组基 $v_1,\cdots,v_n$, 设 $T=\sum\limits_{i=1}^{n} a^i v_1\wedge\cdots\wedge\hat{v}_i\wedge\cdots\wedge v_n\neq 0$. 定义 $U=\{v\in V:v\wedge T=0\}$, 容易验证 U 是 V 的线性子空间. 任取 $v=\sum\limits_{i=1}^{n} b^i v_i\in V$, 则有

$$v\wedge T=\left(\sum_{i=1}^{n} a^i b^i\right)v_1\wedge\cdots\wedge v_n.$$

由此可得 $\dim U = n-1$. 取 U 的一组基 $u_1,\cdots,u_{n-1}$, 并将其延拓为 V 的一组基 $u_1,\cdots,u_n$. 设 $T=\sum\limits_{i=1}^{n} c^i u_1\wedge\cdots\wedge\hat{u}_i\wedge\cdots\wedge u_n$, 则

$$0 = u_i\wedge T = (-1)^{i-1}c^i u_1\wedge\cdots\wedge u_n \Rightarrow c^i = 0, \quad i=1,\cdots,n-1.$$

因此 $T = c^n u_1\wedge\cdots\wedge u_{n-1}$ 可分解. □

习题 2.45. 1. 试用归纳法证明上述两个关于可解的命题.

2. 设 $\dim V = n$, $T\in\Lambda^r(V)(2<r<n-1)$. 试给出 T 可分解的充要条件.

3. 设 $\dim V = 4$, g 是 V 上的一个欧氏内积.

   (a) 设 $\{e_1,\cdots,e_4\}$ 是 V 的一组单位正交基, $\theta^1,\cdots,\theta^4$ 是其对偶基, 则 $g=\sum\limits_{i=1}^{4}\theta^i\otimes\theta^i$.

   (b) 定义

   $$\varphi_1^+ \triangleq \theta^1\wedge\theta^2+\theta^3\wedge\theta^4, \quad \varphi_2^+ \triangleq \theta^1\wedge\theta^3-\theta^2\wedge\theta^4, \quad \varphi_3^+ \triangleq \theta^1\wedge\theta^4+\theta^2\wedge\theta^3.$$

   则 $\Lambda_g^+ \triangleq \mathrm{span}(\varphi_1^+,\varphi_2^+,\varphi_3^+)$ 作为 $\Lambda^2(V)$ 的子空间不依赖于 (a) 中正交基的选取, 且 $\dim\Lambda_g^+ = 3$.

   (c) 记 $\mathrm{d}V_g = \theta^1\wedge\cdots\theta^4$, 定义映射

   $$\Lambda:\Lambda^2(V)\times\Lambda^2(V)\to\mathbb{R}, \quad (\varphi_1,\varphi_2)\mapsto\frac{\varphi_1\wedge\varphi_2}{\mathrm{d}V_g}.$$

   则 Λ 是 $\Lambda^2(V)$ 上的一个双线性型, 其正负惯性指数为 3.

   (d) 称 $\Lambda^2(V)$ 中的一个子空间 $\tilde\Lambda$ 是正定的, 是指映射 Λ 限制在 $\tilde\Lambda$ 上为正定双线性型. 试证: 给定 $\Lambda^2(V)$ 中一个正定的 3 维子空间 $\tilde\Lambda$, 存在 V 上唯一的内积 $\tilde g$, 使得 $\mathrm{d}V_{\tilde g} = \mathrm{d}V_g$, $\tilde\Lambda = \Lambda_{\tilde g}^+$.

4. 证明: Grassmann 流形 $G(2,4)\cong(\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2)/\mathbb{Z}^2$.

证明. 1. 命题 2.43 的证明: 对 V 的维数作归纳. 若 $\dim V = 1,2$, 则结论显然. 假设 $\dim V = n-1$ 时命题成立. 设 $\dim V = n$, $T\in\Lambda^2(V)$. 已知 $T\wedge T = 0$, 设 V 的一组基为 $v_1,\cdots,v_n$, 则可设

$$T=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i^j v_i\wedge v_j = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1} a_i^j v_i\wedge v_j + \sum_{i=1}^{n-1}(a_i^n - a_n^i)v_i\wedge v_n \triangleq S + v\wedge v_n.$$

设 $U=\mathrm{span}(v_1,\cdots,v_{n-1})$ 为 $n-1$ 维子空间, 则 $S\in\Lambda^2(U)$. 由于

$$0 = T\wedge T = S\wedge S + 2(S\wedge v)\wedge v_n.$$

因此 $S\wedge v = 0$ 且 $S\wedge S = 0$. 由归纳假设可得存在 $u_1,u_2\in U$ 使得 $S = u_1\wedge u_2$(不妨设 u_1,u_2 线性无关, 不然 $S=0$, $T = v\wedge v_n$ 即可分解). 再由 $S\wedge v = u_1\wedge u_2\wedge v = 0$ 可得存在 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 使得 $v=\alpha u_1+\beta u_2$. 因此

$$T = u_1\wedge u_2 + u_1\wedge(\alpha v_n) - (\beta v_n)\wedge u_2 = (u_1-\beta v_n)\wedge(u_2+\alpha v_n)$$

可分解.

命题 2.44 的证明:

2. 我们仿照命题 2.44 的证明给出一个充要条件: $T \in \Lambda^r(V)$ 可分解当且仅当 $U = \{v \in V : v \wedge T = 0\}$ 是 r 维的线性子空间. 例如: 设 $v_1, \cdots, v_4$ 是 V 的一组基, $T = v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4$. 则任取 $v = \sum a^i v_i$, 有

$$v \wedge T = a^3 v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 + a^4 v_1 \wedge v_2 \wedge v_4 + a^1 v_1 \wedge v_3 \wedge v_4 + a^2 v_2 \wedge v_3 \wedge v_4.$$

由此可得此时 $U = \{0\}$. 故 $T = v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4$ 不是可分解的.

现在我们来证明上面给出的充要条件. 若 T 可分解, 设 $T = u_1 \wedge \cdots \wedge u_r$, 这里 $u_1, \cdots, u_r$ 线性无关. 从而 $U = \mathrm{span}(u_1, \cdots, u_r)$ 为 r 维线性子空间.

反之, 设 $u_1, \cdots, u_r$ 是 U 的一组基, 则可以将其延拓为 V 的一组基 $u_1, \cdots, u_n$. 设

$$T = \sum_{<} a^{i_1 \cdots i_r} u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_r}.$$

由 $u_1 \wedge T = 0$ 可得 $a^{i_1 \cdots i_r} = 0 (1 < i_1 < \cdots < i_r \leqslant n)$. 因此

$$T = \sum_{2 \leqslant i_2 < \cdots < i_r \leqslant n} a^{1 i_2 \cdots i_r} u_1 \wedge u_{i_2} \wedge \cdots \wedge u_{i_r}.$$

再由 $u_2 \wedge T = 0$ 可得 $a^{1 i_2 \cdots i_r} = 0 (2 < i_1 < \cdots < i_r \leqslant n)$. 以此类推, 即可得 $T = a^{12 \cdots r} u_1 \wedge \cdots \wedge u_r$ 可分解.

3. (a) 只需证明它们在 $(e_\alpha, e_\beta), 1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 4$ 处的取值相同. 计算可得

$$\sum_{i=1}^{4} \theta^i \otimes \theta^i (e_\alpha, e_\beta) = \sum_{i=1}^{4} \delta^i_\alpha \delta^i_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad g(e_\alpha, e_\beta) = \delta_{\alpha\beta}.$$

即证.

$\square$

3 外微分形式

3.1 余切向量场

3.1.1 余切空间

定义 3.1. 设 M 为光滑流形, $p \in M$, 称切空间 T_pM 的对偶空间 T_p^*M 为 M 在点 p 处的**余切空间**, T_p^*M 中的元素称为**余切向量**. 不难看到 $\dim T_p^*M = \dim M$.

定义 3.2. 设 M 为光滑流形, $p \in M$, $f \in C_p^\infty$. 定义 $(\mathrm{d}f)_p : T_pM \to \mathbb{R}$, $X \mapsto X(f)$. 易知 $(\mathrm{d}f)_p \in T_p^*M$, 称之为 f 在 p 点处的**微分**.

注 3.3.

1. 称 $(U, \varphi; x^i)$ 为 M 的局部坐标, 则坐标函数 $x^i \in C_p^\infty$, $(\mathrm{d}x^i)_p \in T_p^*M$.
2. $\{\mathrm{d}x^1, \cdots, \mathrm{d}x^m\}$ 构成 T_p^*M 的一组基, 与 $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^m}\}$ 互为对偶基.
3. $(\mathrm{d}f)_p$ 与通常函数的微分一致, 即 $\mathrm{d}f = \sum\limits_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$.

微分的形式不变性 设 $(U, \varphi; x^i)$, $(V, \psi; y^i)$ 是 M 的局部坐标, 且 $U \cap V \neq \varnothing$. 在 $(U, \varphi; x^i)$ 上 $\mathrm{d}f = \sum\limits_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$; 在 $(V, \psi; y^i)$ 上 $\mathrm{d}f = \sum\limits_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial y^i}\mathrm{d}y^i$. 问是否成立 $\sum\limits_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i = \sum\limits_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial y^i}\mathrm{d}y^i$?

证明. 注意到 $\mathrm{d}y^j = \sum\limits_{i=1}^m \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$, 因此

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)\mathrm{d}x^i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y^j}\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y^j}\mathrm{d}y^j.$$

□

注 3.4. 函数微分与偏导数的本质区别在于微分不依赖于坐标的选取, 但偏导数与坐标选取有关.

习题 3.5. 设 M 为 m 维光滑流形, 记 $T^*M = \bigcup\limits_{p \in M} T_p^*M = \{(p, \theta) : p \in M, \theta \in T_p^*M\}$.

1. 证明: T^*M 为 $2m$ 维光滑流形, 我们称 T^*M 为 M 的余切丛.
2. 证明: 投影映射 $\pi : T^*M \to M, (p, \theta) \mapsto p$ 为光滑映射.

证明. 设 M 的光滑坐标系为 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$, 考虑题设投影 π. 由此可得 $\{\pi^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ 是 T^*M 的开覆盖. 定义映射

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \mathbb{R}^{2m}, \quad \left(p, \sum_{i=1}^m v_i \mathrm{d}x^i\right) \mapsto (\varphi_\alpha(p), v^1, \cdots, v^m).$$

容易证明 ψ_α 是同胚, 计算转移映射可得

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(x, v) = (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x), v).$$

由 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 光滑可得 $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ 光滑. 因此 T^*M 是 $2m$ 维光滑流形.

投影 π 在上述坐标下的表示

$$\varphi_\beta\circ\pi\circ\psi_\alpha^{-1}(x,v)=\varphi_\beta\circ\pi(\varphi_\alpha^{-1}(x),\sum v_d\mathrm{d}x^i)=\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}(x)$$

光滑, 因此 π 是光滑映射. □

3.1.2 余切向量场

定义 3.6. 设 M 为光滑流形, $\pi:T^*M\to M$ 为自然投影. 若光滑映射 $\theta:M\to T^*M$ 满足 $\pi\circ\theta=\mathbb{1}_M$, 则称 θ 为 M 上的 **(光滑) 余切向量场**或**线性微分式**.

注 3.7.
1. M 上的一余切向量场就是在每一点指定一个余切向量, 并且光滑得依赖于 M 的点.
2. 对任意 $f\in C^\infty(M)$, $\mathrm{d}f$ 是 M 上的一个线性微分式.
3. 在局部坐标下, 余切向量场 $\theta=\sum\limits_{i=1}^m a_i(x)\mathrm{d}x^i$, 其中 $a^i(x)$ 是光滑的.

定义 3.8. 设 $F:M\to N$ 是光滑映射, $\forall p\in M$, 定义 F 在 p 点的**余切映射**为 $F^*:T^*_{F(p)}N\to T^*_pM$, $\theta\mapsto F^*\theta$, 这里 $F^*\theta(X)=\theta(F_*X)$.

命题 3.9. 设 $F:M\to N, G:N\to L$ 为光滑流形间的光滑映射, 则 $(G\circ F)^*=F^*\circ G^*$. 特别地, F 是微分同胚时, $(F^{-1})^*=(F^*)^{-1}$.

证明. 任取 $p\in M$, 记 $q=G(F(p))\in L$, 任取 $\theta\in T_q^*L$ 及 $X\in T_pM$, 有

$$((G\circ F)^*\theta)X=\theta((G\circ F)_*X)=\theta((G_*\circ F_*)X)=G^*\theta(F_*X)=((F^*\circ G^*)\theta)X.$$

因此 $(G\circ F)^*=F^*\circ G^*$. □

余切映射的计算 设 $F:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $(x^1,\cdots,x^m)\mapsto y=(y^1(x),\cdots,y^n(x))$ 为光滑映射. 任取 $p\in\mathbb{R}^m$, $q\in\mathbb{R}^n$ 有 $T_p^*\mathbb{R}^m=\{\mathrm{d}x^1,\cdots,\mathrm{d}x^m\}$, $T_q^*\mathbb{R}^n=\{\mathrm{d}y^1,\cdots,\mathrm{d}y^n\}$. 设 $F^*\mathrm{d}y^\alpha=\sum\limits_{i=1}^m a_i^\alpha\mathrm{d}x^i$. 则

$$a_i^\alpha=(F^*\mathrm{d}y^\alpha)\frac{\partial}{\partial x^i}=\mathrm{d}y^\alpha\left(\sum_{j=1}^n\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}\right)=\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}.$$

因此 $F^*\mathrm{d}y^\alpha=\sum\limits_{i=1}^m\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$. 更一般地, 若 $\theta=\sum\limits_{i=1}^n a_\alpha(y)\mathrm{d}y^\alpha$, 则

$$F^*\theta=\sum_{i,\alpha}a_\alpha(y(x))\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i.$$

3.2 外微分形式

3.2.1 张量场

定义 3.10. 设 M 为 m 维光滑流形, $\forall p\in M$, 记 $T_p^{(r,s)}M$ 为切空间 T_pM 上的 (r,s) 型张量全体, 称 $T^{(r,s)}M\triangleq\bigcup\limits_{p\in M}T_p^{(r,s)}M$ 为 M 上的 (r,s) 型**张量丛**.

注 3.11. 1. 可以完全类似地证明 $T^{(r,s)}M$ 为 $m+m^{r+s}$ 维光滑流形.

2. $T^{(1,0)}=TM$, $T^{(0,1)}=T^*M$.

定义 3.12. 设 M 为 m 维光滑流形, $\pi: T^{(r,s)}M\to M$, $(p,\xi)\mapsto p$ 为自然投影. 若光滑映射 $\xi: M\to T^{(r,s)}M$ 满足 $\pi\circ\xi=\mathbb{1}_M$, 则称 ξ 为 M 上的一个 **(光滑)(r,s) 型张量场**. 所有 (r,s) 型张量场构成的集合记为 $\Gamma(T^{(r,s)}M)$. 特别地, 所有 r 阶反称协变张量场全体记为 $\Lambda^r(M)$ 或 $\Omega^r(M)$, 其中的元素称为 r **次外微分形式**.

注 3.13. 1. $\Lambda^0(M)=C^\infty(M)$, $\Lambda^1(M)=\Gamma(T^*M)$.

2. $\Gamma(T^{(0,0)}M)=\Gamma(TM)=\mathfrak{X}(M)$, $\Gamma(T^{(0,1)}M)=\Gamma(T^*M)=\Lambda^1(M)$ 为 M 上所有线性微分式全体.

3. 在局部坐标 $(U,\varphi;x^i)$ 下, $\xi\in\Gamma(T^{(r,s)}M)$ 可以写为

$$\xi=\sum a^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}(x)\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes \mathrm{d}x^{j_1}\cdots\otimes\cdots\mathrm{d}x^{j_s}.$$

$\omega\in\Lambda^r(M)$ 可以写为

$$\omega=\sum a_{i_1\cdots i_r}(x)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r},$$

其中 $a_{i_1\cdots i_r}$ 关于下标反称.

4. 设 $g\in\Gamma(T^{(0,2)}M)$ 是正定对称的, 称 g 是 M 上的一个 Riemann 度量, (M,g) 称为一个 Riemann 流形. g 的正定对称性是指: $\forall p\in M$, g_p 是 T_pM 上的一个内积.

5. 外微分形式关于外积有分配律, 外交换律, 结合律.

定义 3.14. 设 $F: M\to N$ 为光滑映射, $\xi\in\Gamma(T^{(0,r)}N)$. 定义 $F^*: T^{(0,r)}_{F(p)}N\to T^{(0,r)}_pM$, $F^*\xi(v_1,\cdots,v_r)\triangleq\xi(F_*v_1,\cdots,F_*v_r)$.

例 3.15. 设 $F:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $x\mapsto y(x)$ 为光滑映射.

1. $\omega=\mathrm{d}y^{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}y^{\alpha_r}$, 求 $F^*\omega$.

2. 若 $m=n$, $\omega=\mathrm{d}y^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^n$, 求 $F^*\omega$.

证明. 1. 首先计算可得

$$\begin{aligned}(F^*\omega)\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right)&=\omega\left(F_*\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\cdots,F_*\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right)\\&=(\mathrm{d}y^{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}y^{\alpha_r})\left(\sum_{\alpha=1}^n\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^{i_1}}\frac{\partial}{\partial y^\alpha},\cdots,\sum_{\alpha=1}^n\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^{i_r}}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)\\&=\frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial y^{\alpha_r}}{\partial x^{i_r}}.\end{aligned}$$

因此

$$F^*\omega=\sum\frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial y^{\alpha_r}}{\partial x^{i_r}}\mathrm{d}x^{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{i_r}.$$

2. 计算可得

$$
\begin{aligned}
(F^*\omega)\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{i_n}}\right) &= \omega\left(F_*\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\cdots,F_*\frac{\partial}{\partial x^{i_n}}\right)\\
&= (\mathrm{d}y^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^n)\left(\sum_{\alpha=1}^n\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^{i_1}}\frac{\partial}{\partial y^\alpha},\cdots,\sum_{\alpha=1}^n\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^{i_n}}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)\\
&= \sum_{\sigma\in P_n}(-1)^\sigma\frac{\partial y^1}{\partial x^{i_{\sigma(1)}}}\cdots\frac{\partial y^n}{\partial x^{i_{\sigma(n)}}}\\
&= \delta_{i_1\cdots i_n}^{1\cdots n}\sum_{\sigma\in P_n}(-1)^{\tau\sigma}\frac{\partial y^1}{\partial x^{\tau(\sigma(1))}}\cdots\frac{\partial y^n}{\partial x^{\tau(\sigma(n))}}\quad(\tau(k)=i_k,\forall k)\\
&= \delta_{i_1\cdots i_n}^{1\cdots n}\det\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\right).
\end{aligned}
$$

因此

$$
F^*\omega=\sum_{i_1,,\cdots,i_n}\delta_{i_1\cdots i_n}^{1\cdots n}\det\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\right)\mathrm{d}x^{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{i_n}=\det\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\right)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n.
$$

□

习题 3.16. 设 $\mathbb{S}^n$ 为 n 维球面, $\iota:\mathbb{S}^n\hookrightarrow\mathbb{R}^{n+1}$ 为嵌入映射, 考虑

$$
\omega=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}x^i\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{n+1}.
$$

设 $(\mathbb{S}^n\setminus\{N\},\varphi;u^i)$, $(\mathbb{S}^n\setminus\{S\},\psi;v^i)$ 分别为 $\mathbb{S}^n$ 的北极和南极投影坐标, 求 $(\iota\circ\varphi^{-1})^*\omega,(\iota\circ\psi^{-1})^*\omega$.

解答. 这里我们仅计算南极投影下的余切映射, 北极类似. 计算可得

$$
F\triangleq\iota\circ\psi^{-1}:(u^1,\cdots,u^n)\mapsto\left(\frac{2u^1}{1+|u|^2},\cdots,\frac{2u^n}{1+|u|^2},\frac{1-|u|^2}{1+|u|^2}\right).
$$

其 Jacobi 矩阵为

$$
JF=\begin{pmatrix}
\frac{2(1+|u|^2-2(u^1)^2)}{(1+|u|^2)^2} & -\frac{4u^1u^2}{(1+|u|^2)^2} & \cdots & -\frac{4u^1u^n}{(1+|u|^2)^2} & -\frac{4u^1}{1+|u|^2}\\
-\frac{4u^1u^2}{(1+|u|^2)^2} & \frac{2(1+|u|^2-2(u^2)^2)}{(1+|u|^2)^2} & \cdots & -\frac{4u^2u^n}{(1+|u|^2)^2} & -\frac{4u^2}{(1+|u|^2)^2}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
-\frac{4u^1u^n}{(1+|u|^2)^2} & -\frac{4u^2u^n}{(1+|u|^2)^2} & \cdots & \frac{2(1+|u|^2-2(u^n)^2)}{(1+|u|^2)^2} & -\frac{4u^n}{(1+|u|^2)^2}
\end{pmatrix}.
$$

下面我们记 J_i 为删去第 i 列的 n 阶子阵 $JF\left[\begin{smallmatrix}1&\cdots&i-1&i&\cdots&n\\1&\cdots&i-1&i+1&\cdots&n+1\end{smallmatrix}\right]$, 首先有

$$
J_{n+1}=\frac{2}{1+|u|^2}I_n-\begin{pmatrix}\frac{2u^1}{1+|u|^2}\\ \vdots\\ \frac{2u^n}{1+|u|^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2u^1}{1+|u|^2} & \cdots & \frac{2u^n}{1+|u|^2}\end{pmatrix}\triangleq\frac{2}{1+|u|^2}I_n-\alpha^T\alpha.
$$

因此

$$
\det J_{n+1}=\left(\frac{2}{1+|u|^2}\right)^{n-1}\left(\frac{2}{1+|u|^2}-\alpha\alpha^T\right)=\frac{2^n(1-|u|^2)}{(1+|u|^2)^{n+1}}.
$$

对于 $\det J_i(1\leqslant i\leqslant n)$, 将第 $k(1\leqslant k<i)$ 列减去 u^k 倍的第 n 列, 第 $k(i\leqslant k<n)$ 列减去 u^{k+1} 倍的第 n 列, 可以得到

$$\det J_i=\begin{vmatrix} \frac{2}{1+|u|^2} & & & & & & -\frac{4u^1}{(1+|u|^2)^2}\\ & \ddots & & & & & \vdots\\ & & \frac{2}{1+|u|^2} & & & & -\frac{4u^{i-1}}{(1+|u|^2)^2}\\ & & & & & & -\frac{4u^i}{(1+|u|^2)^2}\\ & & & \frac{2}{1+|u|^2} & & & -\frac{4u^{i+1}}{(1+|u|^2)^2}\\ & & & & \ddots & & \vdots\\ & & & & & \frac{2}{1+|u|^2} & -\frac{4u^n}{(1+|u|^2)^2}\end{vmatrix}=(-1)^{n+i+1}\frac{2^{n+1}u^i}{(1+|u|^2)^{n+1}}.$$

我们记 $\omega_i=(-1)^{i+1}x^i\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{n+1}$, 则

$$F^*\omega_i=(-1)^{i+1}\frac{2u^i}{1+|u|^2}\cdot\det(J_i)\mathrm{d}u^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^n=\frac{(-2)^{n+2}(u^i)^2}{(1+|u|^2)^{n+2}}\mathrm{d}u^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^n(1\leqslant i\leqslant n).$$

$$F^*\omega_{n+1}=(-1)^{n+2}\frac{1-|u|^2}{1+|u|^2}\cdot\det(J_{n+1})\mathrm{d}u^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^n=\frac{(-2)^n(1-|u|^2)^2}{(1+|u|^2)^{n+2}}\mathrm{d}u^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^n.$$

因此

$$F^*\omega=\sum_{i=1}^{n+1}F^*\omega_i=\left(-\frac{2}{1+|u|^2}\right)^n\mathrm{d}u^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^n.$$

□

3.2.2 外微分算子

定义 3.17. 设 M 为光滑流形, 定义**外微分算子**为 $\mathrm{d}:\Lambda^r(M)\to\Lambda^{r+1}(M)$,

$$\omega=\sum_I a_I(x)\mathrm{d}x^I\mapsto\mathrm{d}\omega\triangleq\sum_I\mathrm{d}a_I(x)\wedge\mathrm{d}x^I.$$

其中 $I=(i_1,\cdots,i_r)$, $\mathrm{d}x^I=\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}$.

注 3.18. 考虑光滑函数 $f\in\Lambda^0(M)$, 则 $\mathrm{d}f$ 即为函数的微分.

命题 3.19. d 的定义与局部坐标的选取无关.

证明. 仅证明 $r=1$ 的情形. 设 $\omega=\sum_i a_i(x)\mathrm{d}x^i=\sum_j b_j(y)\mathrm{d}y^j$, 则有 $a_i(x)=\sum_j b_j(y(x))\frac{\partial y^j}{\partial x_i}$. 因此

$$\mathrm{d}a_i\wedge\mathrm{d}x^i=\sum_j\mathrm{d}b_j\wedge\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i+\sum_{j,k}b_j\frac{\partial^2y^j}{\partial x^i\partial x^k}\mathrm{d}x^k\wedge\mathrm{d}x^i.$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_i\mathrm{d}a_i\wedge\mathrm{d}x^i&=\sum_j\mathrm{d}b_j\wedge\left(\sum_i\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\right)+\sum_j b_j\left(\sum_{i<k}\left(\frac{\partial^2y^j}{\partial x^k\partial x^i}-\frac{\partial^2y^j}{\partial x^i\partial x^k}\right)\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^k\right)\\&=\sum_j\mathrm{d}b_j\wedge\mathrm{d}y^j.\end{aligned}$$

□

命题 3.20. 1. $\forall f \in C^\infty(M)$, $\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0$.

2. $\forall \omega \in \Lambda^k(M)$, $\theta \in \Lambda^\ell(M)$, $\mathrm{d}(\omega \wedge \theta) = \mathrm{d}\omega \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\theta$.

证明. 1. 在局部坐标 $(U, \varphi; x^i)$ 下, 计算可得

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i = \sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = 0.$$

2. 设 $\omega = \sum_I a_I \mathrm{d}x^I$, $\theta = \sum_J b_J \mathrm{d}x^J$, 其中 $|I| = k, |J| = \ell$, 则 $\omega \wedge \theta = \sum_{I,J} a_I b_J \mathrm{d}x^I \wedge \mathrm{d}x^J$, 因此

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\omega \wedge \theta) &= \sum_{I,J} b_J \mathrm{d}a_I \wedge \mathrm{d}x^I \wedge \mathrm{d}x^J + \sum_{I,J} a_I \mathrm{d}b_J \wedge \mathrm{d}x^I \wedge \mathrm{d}x^J \\
&= \left(\sum_I \mathrm{d}a_I \wedge \mathrm{d}x^I\right) \wedge \left(\sum_J b_J \mathrm{d}x^J\right) + (-1)^k \left(\sum_I a_I \mathrm{d}x^I\right) \wedge \left(\sum_J \mathrm{d}b_J \wedge \mathrm{d}x^J\right) \\
&= \mathrm{d}\omega \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

□

命题 3.21 (Poincare)**.** $\forall \omega \in \Lambda^r(M)$, $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$.

证明. 容易验证 $\mathrm{d}(\mathrm{d}x^I) = 0$, 设 $\omega = \sum_I a_I \mathrm{d}x^I$, 则

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}\sum_I \mathrm{d}a_I \wedge \mathrm{d}x^I = \sum_I \mathrm{d}(\mathrm{d}a_I) \wedge \mathrm{d}x^I - \sum_I \mathrm{d}a_I \wedge \mathrm{d}(\mathrm{d}x^I) = 0.$$

□

命题 3.22. 设 $F : M \to N$ 为光滑映射, 则 $\mathrm{d}F^* = F^*\mathrm{d}$.

注 3.23. 须注意 $\mathrm{d}F^* = F^*\mathrm{d}$ 左右两边的 d 分别是流形 M, N 上的外微分算子.

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^r(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Lambda^{r+1}(M) \\
\Lambda^r(N) \arrow[r, "\mathrm{d}"'] \arrow[u, "F^*"] & \Lambda^{r+1}(N) \arrow[u, "F^*"']
\end{tikzcd}$$

证明. 不难验证 $F^*(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k) = F^*\omega_1 \wedge \cdots \wedge F^*\omega_k$, 因此

$$F^*\mathrm{d}y^I = F^*\mathrm{d}y^{i_1} \wedge \cdots \wedge F^*\mathrm{d}y^{i_r} = \sum_J \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{j_r}}\mathrm{d}x^J \triangleq \sum_J \frac{\partial y^I}{\partial x^J}\mathrm{d}x^J.$$

任取 $\omega = \sum_I a_I \mathrm{d}y^I \in \Lambda^r(N)$, 则

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(F^*\omega) &= \mathrm{d}\sum_{I,J} a_I(y(x)) \frac{\partial y^I}{\partial x^J}\mathrm{d}x^J \\
&= \sum_{I,J} \mathrm{d}a_I(y(x)) \wedge \frac{\partial y^I}{\partial x^J}\mathrm{d}x^J + \sum_{I,J} a_I(y(x))\mathrm{d}\left(\frac{\partial y^I}{\partial x^J}\right) \wedge \mathrm{d}x^J \\
&= \sum_I \mathrm{d}a_I(y(x)) \wedge F^*\mathrm{d}y^I = F^*(\mathrm{d}\omega).
\end{aligned}$$

□

命题 3.24. 设 $\omega \in \Lambda^1(M)$, 则对任意光滑向量场 X, Y 有 $\mathrm{d}\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])$.

证明. 设 $X = \sum\limits_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \sum\limits_{j=1}^n Y_j \frac{\partial}{\partial x^j}$, $\omega = \sum\limits_{k=1}^n a_k \mathrm{d}x^k$, 则

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega(X,Y) &= \sum_{i,k} \frac{\partial a_k}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^k \left(\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
&= \sum_{i,k} \frac{\partial a_k}{\partial x^i} (\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^k - \mathrm{d}x^k \otimes \mathrm{d}x^i) \left(\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
&= \sum_{i,k} \frac{\partial a_k}{\partial x^i} (X_i Y_k - X_k Y_i).
\end{aligned}$$

另一方面, 也有

$$X(\omega(Y)) = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sum_{k=1}^n a_k Y_k \right) = \sum_{i,k=1}^n X_i \left(\frac{\partial a_k}{\partial x^i} Y_k + a_k \frac{\partial Y_k}{\partial x^i} \right).$$

$$Y(\omega(X)) = \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sum_{k=1}^n a_k X_k \right) = \sum_{i,k=1}^n Y_i \left(\frac{\partial a_k}{\partial x^i} X_k + a_k \frac{\partial X_k}{\partial x^i} \right).$$

$$\omega([X,Y]) = \sum_{k=1}^n a_k \mathrm{d}x^k \sum_{i,j=1}^n \left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x^i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i,k=1}^n a_k \left(X_i \frac{\partial Y_k}{\partial x^i} - Y_i \frac{\partial X_k}{\partial x^i} \right).$$

综上可得

$$\mathrm{d}\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]).$$

□

注 3.25. 更一般地, 我们有:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega(X_1, \cdots, X_{r+1}) = &\sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} X_i (\omega(X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_{r+1})) + \\
&\sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, X_{r+1}).
\end{aligned}$$

有的教材用上式作为外微分算子 d 的定义式, 称为 d 的**不变定义式**.

证明. 这里我们来证明这个不变定义式, 首先证明该式对单项式 $\omega = f\mathrm{d}x^I = f\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}$ 成立. 计算可得

$$\mathrm{d}\omega \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{r+1}}} \right) = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x^k} \mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^I \left(\frac{\partial}{\partial x^J} \right) = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x^k} \delta_J^{kI}.$$

根据 δ_J^{kI} 的定义, 若不存在 ℓ 使得 $k = j_\ell$, 则 $\delta_J^{kI} = 0$. 若 $k = j_\ell$, 对行列式 δ_J^{kI} 的第 1 行第 ℓ 列展开, 可得 $\delta_J^{kI} = (-1)^{\ell+1} \delta_{\hat{J}_\ell}^I$. 因此

$$\mathrm{d}\omega \left(\frac{\partial}{\partial x^J} \right) = \sum_{\ell=1}^{r+1} (-1)^{\ell+1} \frac{\partial f}{\partial x^{j_\ell}} \delta_{\hat{J}_\ell}^I.$$

注意到此时 $[X_i, X_j]=0$, 只需计算 RHS 的第一项. 有

$$\sum_{\ell=1}^{r+1}(-1)^{\ell+1}\frac{\partial}{\partial x^{j_\ell}}\left(\omega\frac{\partial}{\partial x^{\hat{j}_\ell}}\right)=\sum_{\ell=1}^{r+1}\frac{\partial f}{\partial x^{j_\ell}}\delta^I_{\hat{j}_\ell}.$$

即证. 下面我们只需证明 RHS(记作 $\varphi(X_1,\cdots,X_{r+1})$) 是多重线性函数. 换言之, 要证明

$$\varphi(X_1,\cdots,gX_k,\cdots,X_{r+1})=g\varphi(X_1,\cdots,X_{r+1}).$$

设 φ 中的两项分别为 φ_1,φ_2. 首先有

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(X_1,\cdots,gX_k,\cdots,X_{r+1})\\
=&\sum_{i\neq k}(-1)^{i+1}(X_i(g)\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{r+1})+\\
&gX_i(\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{r+1})))+(-1)^{k+1}gX_k(\omega(X_1,\cdots\hat{X}_k,\cdots,X_{r+1}))\\
=&g\varphi_1(X_1,\cdots,X_{r+1})+\sum_{i\neq k}(-1)^{i+1}X_i(g)\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{r+1}).
\end{aligned}$$

对于 φ_2, 回忆有:

$$[gX_k,X_j]=g[X_k,X_j]-X_j(g)X_k,\quad [X_i,gX_k]=g[X_i,X_k]+X_i(g)X_k.$$

因此有

$$\begin{aligned}
&\varphi_2(X_1,\cdots,gX_k,\cdots,X_{r+1})\\
=&\sum_{k\neq i<j\neq k}(-1)^{i+j}g\omega([X_i,X_j],X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{r+1})+\\
&\sum_{k<j}(-1)^{k+j}\omega(g[X_k,X_j]-X_j(g)X_k,X_1,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{r+1})+\\
&\sum_{i<k}(-1)^{i+k}\omega(g[X_i,X_k]+X_i(g)X_k,X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,X_{r+1})\\
=&g\varphi_2(X_1,\cdots,X_{r+1})-\sum_{j>k}(-1)^{j+1}X_j(g)\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{r+1})-\\
&\sum_{i<k}(-1)^{i+1}X_i(g)\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{r+1})\\
&=g\varphi_2(X_1,\cdots,X_{r+1})-\sum_{i\neq k}(-1)^{i+1}X_i(g)\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{r+1}).
\end{aligned}$$

综上即证. □

习题 3.26. 用 d 的不变定义式证明 Poincaré 引理.

证明. 任取 $\omega \in \Lambda^{r-1}(M)$, 以及 $I=(i_1,\cdots,i_{r+1})$, 则

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^I}\right) &= \sum_{k=1}^{r+1}(-1)^{k+1}\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\left(\mathrm{d}\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\cdots,\frac{\hat{\partial}}{\partial x^{i_k}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{i_{r+1}}}\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{r+1}(-1)^{k+1}\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\left(\sum_{1\leqslant \ell<k}(-1)^{\ell+1}\frac{\partial}{\partial x^{i_\ell}}\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\cdots,\frac{\hat{\partial}}{\partial x^{i_k}},\cdots,\frac{\hat{\partial}}{\partial x^{i_\ell}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{i_{r+1}}}\right)+\right.\\
&\quad\left.\sum_{k<\ell\leqslant r+1}(-1)^{\ell}\frac{\partial}{\partial x^{i_\ell}}\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\cdots,\frac{\hat{\partial}}{\partial x^{i_k}},\cdots,\frac{\hat{\partial}}{\partial x^{i_\ell}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{i_{r+1}}}\right)\right)\\
&= \left(\sum_{\ell<k}-\sum_{k<\ell}\right)(-1)^{k+\ell}\frac{\partial^2}{\partial x^{i_k}\partial x^{i_\ell}}\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\cdots,\frac{\hat{\partial}}{\partial x^{i_k}},\cdots,\frac{\hat{\partial}}{\partial x^{i_\ell}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{i_{r+1}}}\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Poincaré 引理即证. □

现在我们回顾目前已知的 d 的性质:

1. 线性: $\mathrm{d}(\omega_1+\omega_2)=\mathrm{d}\omega_1+\mathrm{d}\omega_2$.

2. 若 $f\in C^\infty(M)$, $\mathrm{d}f$ 是 f 的微分.

3. 若 $f\in C^\infty(M)$, $\mathrm{d}(\mathrm{d}f)\triangleq \mathrm{d}^2f=0$.

4. 广义 Leibniz 公式: $\mathrm{d}(\omega\wedge\theta)=\mathrm{d}\omega\wedge\theta+(-1)^r\omega\wedge\mathrm{d}\theta$, 其中 $\omega\in\Lambda^r(M)$.

定理 3.27. 设 M 为光滑流形, 在 M 上存在唯一算子 $\mathrm{d}:\Lambda^r(M)\to\Lambda^{r+1}(M)$ 适合上述性质 $1\sim 4$.

证明. 我们首先证明 d 是局部算子, 即: 若 $\omega,\eta\in\Lambda^r(M)$ 以及开集 $U\subset M$ 使得 $\omega|_U=\eta|_U$, 则 $\mathrm{d}\omega|_U=\mathrm{d}\eta|_U$. 由线性, 只需证明 $\omega|_U=0\Rightarrow \mathrm{d}\omega|_U=0$. 任取 $V\subset\subset U$, 存在从属于 (V,U) 的截断函数 $\varphi\in C^\infty(M)$, 即满足 $0\leqslant\varphi\leqslant 1$, $\varphi|_V\equiv 1$ 以及 $\varphi|_{M\setminus U}\equiv 0$. 因此 $\varphi\omega\equiv 0$, 由此可得

$$0=\mathrm{d}(\varphi\omega)=\mathrm{d}\varphi\wedge\omega+\varphi\mathrm{d}\omega=\varphi\mathrm{d}\omega.$$

由此可得 $\mathrm{d}\omega|_V=0$. 结合 V 的任意性可得 $\mathrm{d}\omega|_U=0$. 即证. 任取 $\omega\in\Lambda^r(M)$ 以及任一局部坐标 $(U,\varphi;x^i)$, 设 $\omega=\sum_I a_I\mathrm{d}x^I$, 则

$$\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}\left(\sum_I a_I\mathrm{d}x^I\right)=\sum_I\mathrm{d}(a_I\mathrm{d}x^I)=\sum_I(\mathrm{d}a_I\wedge\mathrm{d}x^I+a_I\mathrm{d}^2x^I)=\sum_I\mathrm{d}a^I\wedge\mathrm{d}x^I.$$

综上即证 d 只能是外微分算子. □

3.2.3 Frobenius 定理的对偶形式

设 M 为 n 维流形, U 是 M 的开集. $X_1,\cdots,X_\ell$ 为 U 上处处线性无关的向量场, 则 $L=\mathrm{span}(X_1,\cdots,X_\ell)$ 是 U 上的 ℓ 维分布. 我们可以补上 $X_{\ell+1},\cdots,X_n$ 使得 $X_1,\cdots,X_n$ 构成 U 上的一组基向量场, 其对偶记为 $\omega^1,\cdots,\omega^n$. 由对偶性可得, 分布 L 等价于 Paff 方程组 $\{\omega^\alpha=0:\alpha=\ell+1,\cdots,n\}$, 即 $L=\{X\in T_pM:p\in U,\omega^\alpha(X)=0,\alpha=\ell+1,\cdots,n\}$.

定理 3.28. 光滑分布 L 对合当且仅当存在 $(n-\ell)^2$ 个线性微分式 θ^α_β, 使得 $\mathrm{d}\omega^\alpha = \sum\limits_{\beta=\ell+1}^{n} \theta^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta$, 或者写作 $\mathrm{d}\omega^\alpha \equiv 0 (\operatorname{mod} \omega^{\ell+1}, \cdots, \omega^n)$.

证明. 定义指标: $A, B = 1, \cdots, n$, $i, j, k = 1, \cdots, \ell$, $\alpha, \beta, \gamma = \ell+1, \cdots, n$. 设

$$\mathrm{d}\omega^\alpha = \sum_{i,j} C^\alpha_{ij}\omega^i \wedge \omega^j + 2\sum_{i,\gamma} C^\alpha_{i\gamma}\omega^i \wedge \omega^\gamma + \sum_{\beta,\gamma} C^\gamma_{\alpha\beta}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma.$$

其中 $C^\alpha_{AB} = -C^\alpha_{BA}$. 由此可得

$$2C^\alpha_{ij} = \mathrm{d}\omega^\alpha(X_i, X_j) = X_i(\omega^\alpha(X_j)) - X_j(\omega^\alpha(X_i)) - \omega^\alpha([X_i, X_j]) = -\omega^\alpha([X_i, X_j]).$$

我们设

$$[X_i, X_j] = \sum_k a^k_{ij} X_k + \sum_\beta a^\beta_{ij} X_\beta.$$

则有

$$2C^\alpha_{ij} = -\omega^\alpha([X_i, X_j]) = -a^\alpha_{ij}.$$

由此即可得 $\mathrm{d}\omega^\alpha \equiv 0 (\operatorname{mod} \omega^{\ell+1}, \cdots, \omega^n)$ 当且仅当 L 对合. □

习题 3.29. 设 $\omega = x^2\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y - \mathrm{d}z$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的 1-形式.

1. 给出 $\omega = 0$ 所确定的分布 L 的一组基向量场.

2. 求上述分布 L 过 $(0,0,1)$ 点的积分曲面.

证明. 由 ω 的定义可得

$$L = \ker\omega = \{X = a\partial_x + b\partial_y + c\partial_z \in \Gamma(T\mathbb{R}^3) : ax^2 + by^2 = c\}.$$

由此可得 L 的一组基向量场

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + x^2\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} + y^2\frac{\partial}{\partial z}.$$

计算可得 $[X, Y] = 0$, 所以 L 是完全可积的. 或者计算可得 $\mathrm{d}\omega = 0$, 因此 L 是完全可积的.

分别计算 X, Y 的流可得

$$\varphi_t(x,y,z) = \left(x+t, y, \frac{(x+t)^3 - x^3}{3} + z\right), \quad \theta_s(x,y,z) = \left(x, y+s, \frac{(y+s)^3 - y^3}{3} + z\right).$$

由此构造映射

$$\Phi(t,s,u) = (\varphi_t \circ \theta_s)(0,0,u) = \left(t, s, u + \frac{s^3+t^3}{3}\right).$$

按照 $(t,s,u) = \Phi^{-1}(x,y,z)$ 即给出了一个平坦坐标. 此时

$$t = x, \quad s = y, \quad u = z - \frac{s^3+t^3}{3}.$$

将 $x=0, y=0, z=1$ 代入可确定 $u=1$, 所以过 $(0,0,1)$ 的积分曲面为

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 + \frac{x^3+y^3}{3}\right\}.$$

□

3.3 de Rham 上同调

3.3.1 定义与例子

定义 3.30. 设 $\omega \in \Omega^r(M)$, 若 $\mathrm{d}\omega = 0$, 则称 ω 是 M 上的**闭形式**. 若存在 $\theta \in \Omega^{r-1}(M)$, 使得 $\mathrm{d}\theta = \omega$, 则称 ω 为 M 上的一个**正合形式**.

注 3.31.
1. 由 Poincaré 引理可得正合形式一定是闭形式.
2. 我们记 $Z^r(M;\mathbb{R})$ 为闭 r-形式全体, $B^r(M;\mathbb{R})$ 为正合 r-形式全体. 它们分别为线性算子 d 的 ker 与 im, 所以是线性空间.

定义 3.32. 称 $H^r(M;\mathbb{R}) \triangleq Z^r(M;\mathbb{R})/B^r(M;\mathbb{R})$ 为流形 M 上的第 r 个 **de Rham 上同调群**, $H^r(M;\mathbb{R})$ 中的元素称为 r **次上同调类**.

注 3.33. de Rham 上同调群实际上反映了闭形式与正合形式的差异.

这里, 我们不加证明地介绍如下定理.

定理 3.34 (de Rham)**.** 设 M 为紧致光滑流形, 则 M 的第 r 个上同调群 $H^r(M;\mathbb{R})$ 与第 r 个拓扑同调群 $H^r(M)$ 同构.

注 3.35. 设 $F: M \to N$ 为光滑映射, 根据 $\mathrm{d}F^* = F^*\mathrm{d}$, 不难验证 F 诱导了良定的线性映射 $F^*: H^r(N;\mathbb{R}) \to H^r(M;\mathbb{R})$, $[\omega] \mapsto [F^*\omega]$.

例 3.36. $H^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & r = 0 \\ \{0\}, & 1 \leqslant r \leqslant n \end{cases}$

证明. $r = 0$ 时, $H^0(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \mathrm{d}f = 0\}$, 即为 $\mathbb{R}$.

当 $r = n$ 时, 对任意 $\omega = a(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$, 我们记

$$b(x) = \int_0^{x^n} a(x', t)\mathrm{d}t,\ \varphi = (-1)^{n+1}b(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{n-1}.$$

则有 $\mathrm{d}\varphi = \omega$, 因此 $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \{0\}$. □

3.3.2 两个定理

4 流形上的积分

4.1 单位分解

4.1.1 截断函数

引理 4.1. 设 $B_a(0) \subset B_b(0) \subset \mathbb{R}^n$, $0 < a < b < \infty$. 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的非负函数 f 满足:

1. $0 \leqslant f \leqslant 1$.

2. $\operatorname{supp}(f) \subset B_b(0)$.

3. $f(x) = 1, \forall x \in B_a(0)$.

称 f 为从属于 $(B_a(0), B_b(0))$ 的截断函数.

证明. 考虑 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数

$$h(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leqslant 0 \end{cases}$$

取 $f(x) = \frac{h(b-|x|)}{h(|x|-a)+h(b-|x|)}$ 即可. □

引理 4.2. 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $V \subset\subset U$, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑函数 f 满足:

1. $0 \leqslant f \leqslant 1$.

2. $f|_V \equiv 1$.

3. $f|_{\mathbb{R}^n \setminus U} \equiv 0$.

称 f 为从属于 (V, U) 的截断函数.

证明. 任取 $x \in V$, 存在 $r_x > 0$ 使得 $B_{r_x}(x) \subset U$. 由于 $\{B_{r_x/2}(x) : x \in V\}$ 构成 $\overline{V}$ 的开覆盖, 故存在有限开覆盖 $\{B_{r_i/2}(x_i) : 1 \leqslant i \leqslant N, r_i = r_{x_i}\}$. 设 f_i 是从属 $(B_{r_i/2}(x_i), B_{r_i}(x_i))$ 的截断函数, 令 $f = 1 - \prod_{i=1}^{N}(1 - f_i)$. 则 $f \in C^\infty$ 且 $0 \leqslant f \leqslant 1$. 另一方面, 任取 $x \in V$, 存在 i 使得 $x \in B_{r_i/2}(x_i) \Rightarrow f_i(x) = 1$, 所以 $f(x) = 1$; 任取 $x \notin U$, 则有 $x \notin B_{r_i}(x_i), \forall i$, 因此 $f_i(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$. 综上可得 f 即为所求. □

4.1.2 单位分解

定义 4.3. 设 $\Sigma = \{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ 是拓扑空间 M 的一个开覆盖.

1. 若 $\forall p \in M$, 存在 p 的邻域只与 Σ 中有限个成员相交, 称 Σ 为局部有限的开覆盖.

2. 若 $\Sigma' = \{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是 M 的另一开覆盖, 满足: $\forall \lambda \in \Lambda$, $\exists \alpha \in \mathcal{A}$ 使得 $V_\lambda \subset U_\alpha$, 则称 Σ' 是 Σ 的一个加细.

例 4.4. 在 $\mathbb{R}^n$ 中, $\{B_n(x) : n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}^n\}$ 是 $\{B_r(0) : r > 0\}$ 的一个加细.

定义 4.5. 设 M 是光滑流形, 如果 $\Sigma=\{(V_\alpha,U_\alpha,\varphi):\alpha\in\mathcal{A}\}$ 满足:

1. $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 是 M 的局部有限坐标系.
2. $\{V_\alpha:\alpha\in\mathcal{A}\}$ 为 M 的开覆盖.
3. $\forall\alpha$, 有 $V_\alpha\subset\subset U_\alpha\subset\subset M$.

则称 Σ 为 M 的一个正则坐标系.

定理 4.6. 设 M 是 C_2 光滑流形, Σ 是 M 的任一开覆盖. 则存在正则坐标系 $\{(V_\alpha,U_\alpha,\varphi_\alpha):\alpha\in\mathcal{A}\}$ 使得 $\{U_\alpha:\alpha\in\mathcal{A}\}$ 是 Σ 的加细.

定义 4.7. 设 $\{f_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是 M 上一族光滑函数, 若它满足:

1. $0\leqslant f_\lambda\leqslant 1$.
2. $\{(\operatorname{supp}f_\lambda)^\circ:\lambda\in\Lambda\}$ 构成 M 的局部有限开覆盖.
3. $\sum_\lambda f_\lambda=1$.

则称 $\{f_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是 M 的一个单位分解. 进一步, 若 $\Sigma=\{U_\alpha:\alpha\in\mathcal{A}\}$ 是 M 的开覆盖, 且 $\forall\lambda\in\Lambda,\exists\alpha\in\mathcal{A}$, 使得 $\operatorname{supp}(f_\lambda)\subset U_\alpha$, 则称 $\{f_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是从属于 Σ 的单位分解.

定理 4.8. 设 M 是 C_2 光滑流形, $\Sigma=\{W_\alpha:\alpha\in\mathcal{A}\}$ 为开覆盖. 则 M 上存在从属于 Σ 的单位分解 $\{f_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$.

证明. 考虑正则坐标系 $\{(V_\lambda,U_\lambda,\varphi_\lambda):\lambda\in\Lambda\}$, 其中 $\{U_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是 Σ 的加细. 设 g_λ 是从属于 (V_λ,U_λ) 的截断函数, 由于 $\{U_\lambda\}$ 局部有限, 故 $g\triangleq\sum_\lambda g_\lambda$ 良定, 由 $\{V_\lambda\}$ 是开覆盖可得 g 非零. 令 $f_\lambda=g_\lambda/g$, 则 $0\leqslant f_\lambda\leqslant 1$ 且 $\sum_\lambda f_\lambda=1$. 又因为 $V_\alpha\subset(\operatorname{supp}f_\lambda)^\circ\subset U_\lambda$, 故 $\{(\operatorname{supp}f_\lambda)^\circ:\lambda\in\Lambda\}$ 构成局部有限开覆盖. 最后, 由 $\{U_\lambda\}$ 是 Σ 的加细可得 $\forall\lambda$, $\exists\alpha$ 使得 $\operatorname{supp}f_\lambda\subset U_\lambda\subset W_\alpha$. 所以 $\{f_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 即为从属于 Σ 的一个单位分解. □

单位分解是微分流形理论中联系局部和整体的桥梁. 下面我们给出一个应用.

4.1.3 Riemann 度量

定义 4.9. 设 M 是 n 维光滑流形, g 是 M 上二阶的对称正定协变张量. 则称 g 是 M 上的一个 Riemann 度量, (M,g) 称为 Riemann 流形.

定理 4.10. 设 M 是具有可数基的 n 维光滑流形, 则 M 上存在 Riemann 度量.

证明. 取 M 的一个正则坐标系 $\{(V_\alpha,U_\alpha,\varphi_\alpha):\alpha\in\mathcal{A}\}$, $\{f_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是从属于 $\{U_\alpha:\alpha\in\mathcal{A}\}$ 的一个单位分解. 设 $\varphi_\alpha:p\mapsto x_\alpha(p)=(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)$, 记 $g_\alpha=\varphi_\alpha^*(\sum_{i=1}^n\mathrm{d}x_\alpha^i\otimes\mathrm{d}x_\alpha^i)$, 则 g_α 是 U_α 上的二阶对称正定协变张量. $\forall\lambda$, 设 $\tau(\lambda)\in\mathcal{A}$ 使得 $\operatorname{supp}f_\lambda\subset U_{\tau(\lambda)}$, 则 $g=\sum_\lambda f_\lambda g_{\tau(\lambda)}$ 是 M 上的 Riemann 度量. □

4.2 流形的定向

4.2.1 向量空间的定向

定义 4.11. 设 V 为 n 维实向量空间, $e=\{e_1,\cdots,e_n\}$, $\tilde{e}=\{\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_n\}$ 均为 V 的基, $\tilde{e}=eA$. 若 $\det A>0$, 则称 e 与 $\tilde{e}$ **定向相同**, 若 $\det A<0$, 则称 e 与 $\tilde{e}$ **定向相反**.

注 4.12. 1. 定向相同是一个等价关系, 我们用 $[e]$ 表示 e 所在的等价类.

2. 给定 V 的一组基 e, 称 $[e]$ 是 V 的一个**定向**, 称 $(V,[e])$ 为**定向向量空间**.

3. 一个向量空间有且仅有两个定向.

例 4.13. 设 $e=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为 V 的一组基, $\sigma\in P_n$, 则 $\tilde{e}=\{e_{\sigma(1)},\cdots,e_{\sigma(n)}\}$ 与 e 的定向关系与 $(-1)^\sigma$ 的符号相同.

4.2.2 流形的定向

定义 4.14. 设 $(U,\varphi;x^i),(V,\psi;y^i)$ 为光滑流形 M 的局部坐标, 其中 $U\cap V\neq\varnothing$. 设 J_{UV} 为转移映射 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 的 Jacobi 矩阵. 若 $\det J_{UV}>0$, 则称 (U,φ) 与 (V,ψ) **定向相同**. 若 $\det J_{UV}<0$, 则称 (U,φ) 与 (V,ψ) **定向相反**.

注 4.15. 1. 若 $U\cap V=\varnothing$, 我们约定 (U,φ) 与 (V,ψ) 定向相同.

2. 设 $p\in U\cap V$, 在坐标 $(U,\varphi;x^i)$ 下切空间 T_pM 的自然基为 $e_x=\{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\}$, 在坐标 $(V,\psi;y^i)$ 下切空间 T_pM 的自然基为 $e_y=\{\frac{\partial}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^n}\}$. 由于 $e_x=e_yJ_{UV}$, 因此 (U,φ) 和 (V,ψ) 定向相同当且仅当 e_x,e_y 作为 $T_pM,\forall p\in U\cap V$ 的基定向相同.

定义 4.16. 设 M 为 n 维光滑流形, 若 $\mathcal{D}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha):\alpha\in A\}$ 满足:

1. $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha):\alpha\in A\}$ 是 M 的局部坐标.

2. $\forall\alpha,\beta\in A$, $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 与 (U_β,φ_β) 定向相同.

则称 $\mathcal{D}$ 为 M 的一个**定向**, 并称 M 是**可定向的**.

注 4.17. 1. 可以用两个坐标 $(U,\varphi),(V,\psi)$ 覆盖的流形在 $U\cap V$ 连通时一定是可定向的, 所以球面可定向.

2. 可定向流形有且仅有两个定向.

下面给出一个判定流形是否可定向的重要定理:

定理 4.18. n 维光滑流形 M 可定向当且仅当 M 上存在 n 次处处非零的微分式.

证明. $\Rightarrow$: 若 M 可定向, 设 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 为一个定向, 则存在定向相同的正则坐标系 $\{(V_\lambda,U_\lambda,\psi_\lambda):\lambda\in\Lambda\}$, 设 $\{f_\lambda\}$ 为从属于 $\{V_\lambda\}$ 的单位分解. 由此我们可以构造 V_λ 上 n 次微分式 $\omega_\lambda=f_\lambda\psi_\lambda^*(\mathrm{d}x_\lambda^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\lambda^n)$, 其中 $\mathrm{supp}(\omega_\lambda)\subset V_\lambda$. 由 V_λ 局部有限可定义 M 上的 n 次微分式 $\omega=\sum_\lambda\omega_\lambda$, 下证 ω 处处非零. 任取 $p\in M$, 则存在 $\lambda_0\in\Lambda$ 使得 $f_{\lambda_0}(p)>0$, 自然有 $p\in V_{\lambda_0}$. 计算可得

$$(\psi_{\lambda_0}^{-1})^*\omega=\sum_\lambda f_\lambda(\psi_\lambda\circ\psi_{\lambda_0}^{-1})^*(\mathrm{d}x_\lambda^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\lambda^n)=\left(\sum_\lambda f_\lambda\det J_{\lambda_0\lambda}\right)\mathrm{d}x_{\lambda_0}^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\lambda_0}^n.$$

由 $f_\lambda\geqslant0$, $\det J_{\lambda\lambda_0}>0$ 以及 $f_{\lambda_0}(p)>0$ 即可得 $\omega|_p\neq0$.

$\Leftarrow$: 设 ω 为 M 上处处非零的 n 次微分式, 任取 M 的一个光滑坐标 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha;x_\alpha^i):\alpha\in A\}$, 则存在光滑非零函数 f_α 使得 $(\varphi_\alpha^{-1})^*\omega=f_\alpha\mathrm{d}x_\alpha^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\alpha^n$. 事实上, 我们可设 $f_\alpha>0,\forall\alpha\in A$. 若某个 $f_\alpha<0$, 则考虑新的坐标系 $\{(U_\alpha,\psi_\alpha;y_\alpha^i):\alpha\in A\}$, 其中 $(y_\alpha^1,\cdots,y_\alpha^n)=(-x_\alpha^1,x_\alpha^2,\cdots,x_\alpha^n)$, 则 y_α^i 关于 x_α^i 的 Jacobi 行列式为 -1. 此时

$$(\psi_\alpha^{-1})^*\omega=-f_\alpha(-y_\alpha^1,\cdots,y_\alpha^n)\mathrm{d}y_\alpha^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_\alpha^n=\tilde f_\alpha\mathrm{d}y_\alpha^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_\alpha^n.$$

其中 $\tilde f_\alpha=-f_\alpha>0$. 在 $f_\alpha>0$ 的情况下, 由 $(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})^*\mathrm{d}x_\beta^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\beta^n=\det(J_{\alpha\beta})\mathrm{d}x_\alpha^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\alpha^n$ 可得

$$f_\alpha\mathrm{d}x_\alpha^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\alpha^n=(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})^*(\varphi_\beta^{-1})^*\omega=f_\beta\det(J_{\alpha\beta})\mathrm{d}x_\alpha^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\alpha^n.$$

因此 $\det J_{\alpha\beta}=\frac{f_\alpha}{f_\beta}>0$, 故 $\{(U_{\alpha,\varphi_\alpha})\}$ 是 M 的一个定向. □

例 4.19. $\omega=\sum\limits_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}x^i\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{n+1}$, 则 $\iota^*\omega$ 是 $\mathbb{S}^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}:|x|^2=1\}$ 上处处非零的 n 次微分式.

例 4.20. n 维实投影空间 $\mathbb{RP}^n$ 可定向当且仅当 n 为奇数.

证明. 若 n 为奇数, 回顾 $\mathbb{RP}^n$ 的自然坐标: 定义 $U_i=\{[x]:x^i\neq0\}(i=1,\cdots,n+1)$, 以及

$$\varphi_i:U_i\to\mathbb{R}^n,\quad [x]\mapsto(u_i^1,\cdots,u_i^n)=\left(\frac{x^1}{x^i},\cdots,\frac{x^{i-1}}{x^i},\frac{x^{i+1}}{x^i},\cdots,\frac{x^{n+1}}{x^i}\right).$$

计算转移映射可得

$$\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}(u_i^1,\cdots,\widehat{u_i^i},\cdots,u_i^{n+1})=\left(\frac{u_i^1}{u_i^j},\cdots,\frac{u_i^{i-1}}{u_i^j},\frac{1}{u_i^j},\frac{u_i^{i+1}}{u_i^j},\cdots,\frac{u_i^{j-1}}{u_i^j},\frac{u_i^{j+1}}{u_i^j},\cdots,\frac{u_i^{n+1}}{u_i^j}\right).$$

记 $\theta_i=\mathrm{d}u_i^1\wedge\cdots\mathrm{d}u_i^{i-1}\wedge\mathrm{d}u_i^{i+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_i^{n+1}$, 则

$$\begin{aligned}\theta_j&=\mathrm{d}\left(\frac{u_i^1}{u_i^j}\right)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\left(\frac{1}{u_i^j}\right)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\left(\frac{u_i^{j-1}}{u_i^j}\right)\wedge\mathrm{d}\left(\frac{u_i^{j+1}}{u_i^j}\right)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\left(\frac{u_i^{n+1}}{u_i^j}\right)\\&=\frac{\mathrm{d}u_i^1}{u_i^j}\wedge\cdots\wedge\frac{-\mathrm{d}u_i^j}{(u_i^j)^2}\wedge\cdots\wedge\frac{\mathrm{d}u_i^{j-1}}{u_i^j}\wedge\frac{\mathrm{d}u_i^{j+1}}{u_i^j}\wedge\cdots\wedge\frac{\mathrm{d}u_i^{n+1}}{u_i^j}\\&=\frac{(-1)^{j-i}}{(u_i^j)^{n+1}}\theta_i.\end{aligned}$$

若 ω 是 $\mathbb{RP}^n$ 上的处处非零 n 次微分式, 则 $(\varphi_i^{-1})^*\omega = f_i\theta_i$, 其中 f_i 为非零函数. 我们只需找到合适的 f_i 使得 $f_i\theta_i = f_j\theta_j, \forall i,j$. 我们选取

$$f_i(u_i^1,\cdots,\widehat{u_i^j},\cdots,u_i^{n+1}) = \frac{(-1)^i}{(1+\sum\limits_{k\neq i}(u_i^k)^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

则有

$$f_j = \frac{(-1)^j}{(1+\sum\limits_{k\neq i,j}(\frac{u_i^k}{u_i^j})^2+\frac{1}{(u_i^j)^2})^{\frac{n+1}{2}}} \xlongequal{n\text{是奇数}} \frac{(-1)^j(u_i^j)^{n+1}}{(1+\sum\limits_{k\neq i}(u_i^k)^2)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{(u_i^j)^{n+1}}{(-1)^{j-i}}f_i.$$

因此即有 $f_i\theta_i = f_j\theta_j$. 由此可得 ω 是整体定义的.

若 n 为偶数, 记对径映射为 $A:\mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^n$, $x\mapsto -x$. 设 $\pi:\mathbb{S}^n\to\mathbb{RP}^n$, $x\mapsto[x]$ 为自然投影, 则有 $\pi=\pi\circ A$. 计算可得 π 的坐标表示的 Jacobi 矩阵总满秩, 进而 π 是局部微分同胚. 假设此时 $\mathbb{RP}^n$ 可定向, 则存在整体定义的非零 n 阶微分式 $\theta\in\Lambda^n(\mathbb{RP}^n)$. 注意到 $\mathbb{S}^n$ 上存在处处非零的 n 阶微分式, 即

$$\omega = \iota^*\left(\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}x^i\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{n+1}\right).$$

故存在处处非零的函数 $f:\mathbb{S}^n\to\mathbb{R}$, 使得 $\pi^*\theta = f\omega$. 由 $\pi=\pi\circ A$ 可得 $f\omega = A^*(\pi^*\theta) = A^*(f\omega) = -f(-x)\omega$, 因此 $f(x) = -f(-x)$. 由 $\mathbb{S}^n$ 连通可得 f 恒为正或恒为负, 立得矛盾. □

习题 4.21. 1. 在 $\mathbb{S}^n$ 上构造定向相同的局部坐标系.

2. 在 $\mathbb{RP}^{2n+1}$ 上构造一组定向相同的局部坐标系.

解答. 1. 考虑球极投影坐标系, 此时 $\mathbb{S}^n$ 上只有北极坐标 (U,φ) 和南极坐标 (V,ψ), 计算可得转移映射为

$$\psi\circ\varphi^{-1}(u^1,\cdots,u^n) = \left(\frac{u^1}{|u|^2},\cdots,\frac{u^n}{|u|^2}\right),$$

其 Jacobi 行列式为

$$\det J_{UV} = \det\left(\frac{1}{|u|^2}I_n - 2\alpha\alpha^T\right) = \frac{1}{|u|^{2n-2}}\det\left(\frac{1}{|u|^2}-\frac{2}{|u|^2}\right) = -\frac{1}{|u|^{2n}} < 0.$$

其中 $\alpha = (\frac{u^1}{|u|^2},\cdots,\frac{u^n}{|u|^2})^T$. 故只需将南极投影修改为

$$\tilde{\psi}(x^1,\cdots,x^{n+1}) = \psi(-x^1,x^2,\cdots,x^{n+1}) = \left(-\frac{x^1}{1+x^{n+1}},\frac{x^2}{1+x^{n+1}},\cdots,\frac{x^n}{1+x^{n+1}}\right).$$

即可得定向相同的局部坐标系.

2. 根据 $\mathbb{RP}^n$ 的定向讨论一例中的计算, 我们知道

$$\theta_j = \frac{(-1)^{j-i}}{(u_i^j)^{2n+2}}\theta_i \Rightarrow \det(J\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}) = \frac{(-1)^{j-i}}{(u_i^j)^{2n+2}}.$$

由此, 我们定义 $\psi_i = (-1)^i\varphi_i$, 则

$$\det(J\psi_j\circ\psi_i^{-1}) = (-1)^{(i+j)(2n+1)}\det(J\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}) = \frac{1}{(u_i^j)^{2n+2}} > 0.$$

此时 $\{(U_i,\psi_i): i=1,2,\cdots,2n+2\}$ 即为定向相同的坐标系.

□

4.2.3 自然诱导定向

本节我们采用如下记号:

$$\mathbb{R}_+^n \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : x^n \geqslant 0\}.$$

$$\partial\mathbb{R}_+^n \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : x^n = 0\} = \mathbb{R}^{n-1}.$$

$$\mathring{\mathbb{R}}_+^n \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : x^n > 0\}.$$

定义 4.22. $\mathbb{R}^n$ 在自然坐标下的基向量场 $e \triangleq \{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上确定了一个定向 $[e]$, 称为 $\mathbb{R}^n$ 的**自然定向**. $[e]$ 在 $\mathbb{R}_+^n$ 的边界 $\partial\mathbb{R}_+^n$ 上诱导了一个定向 $[e']$, 其中 $e' \triangleq \{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\}$, 称为 $\partial\mathbb{R}_+^n$ 的**自然诱导定向**.

注 4.23. $\partial\mathbb{R}_+^n$ 的自然诱导定向可以视作内法向量 (即指向 $\mathbb{R}_+^n$ 内部).

我们现在的目标是把自然诱导定向推广到流形的一类区域上去.

定义 4.24. 设 M 为 n 维流形, $D \subset M$ 为区域. 若 D 满足:

1. ∂D 是 M 的 $n-1$ 维嵌入子流形.
2. $\forall p \in \partial D$, 存在 M 的局部坐标 (U, φ) 使得
   - $\varphi(U \cap D) \subset \mathbb{R}_+^n$.
   - $\varphi(U \cap \partial D) \subset \partial\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1}$.

则称 D 为 M 的**正则区域**.

例 4.25. 单位球 $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant 1\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个正则区域.

引理 4.26. 设 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto y(x)$ 为坐标变换. J 为 φ 的 Jacobi 矩阵. 若 φ 满足:

1. $\det J > 0$.
2. $y^n = y^n(x', x^n) > 0$, $\forall x^n > 0$.
3. $y^n = y^n(x', 0) = 0$.

则映射 $\varphi|_{\partial\mathbb{R}_+^n}$ 的 Jacobi 矩阵 J' 满足 $\det J' > 0$.

证明. 在 $\partial\mathbb{R}_+^n$ 上, 我们由性质 2, 3 可得

$$\frac{\partial y^n}{\partial x^n} = \lim_{x^n \downarrow 0} \frac{y^n(x^1, \cdots, x^n)}{x^n} \geqslant 0.$$

另一方面, 由

$$\det J|_{\partial\mathbb{R}_+^n} = \det \begin{pmatrix} J' & * \\ \mathbf{0} & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} = \det J' \cdot \frac{\partial y^n}{\partial x^n} > 0$$

即可得 $\det J' > 0$. $\square$

定理 4.27. 设 M 为 n 维定向流形, $D\subset M$ 为正则区域, 则 ∂D 可定向.

证明. 由 D 正则可得存在 M 的一组定向相同的坐标系 $\mathcal{D}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha):\alpha\in A\}$, 使得 $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap\mathring{D})\subset\mathring{\mathbb{R}}^n_+$ 且 $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap\partial D)\subset\partial\mathbb{R}^n_+$. 由于 ∂D 是嵌入子流形, 我们可以选取 ∂D 的坐标系为 $\mathcal{D}'=\{(U_\alpha\cap\partial D,\varphi_\alpha|_{\partial D}):\alpha\in A\}$. 由于 $\varphi_{\alpha\beta}=\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ 满足上条引理, 因此 $\mathcal{D}'$ 是 ∂D 的一个定向. □

注 4.28. 我们将上述构造的定向 $\mathcal{D}'$ 称为 ∂D 的**自然诱导定向**.

例 4.29. 设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 的正则区域, $\forall p\in\partial D$, 取 $e_n\in T_p\mathbb{R}^n$ 使得 e_n 是 ∂D 的内法向量, 再取 $T_p(\partial D)$ 的一组基 $e'=\{e_1,\cdots,e_{n-1}\}$ 使得 $e=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 确定的定向是 $\mathbb{R}^n$ 的自然定向, 则 $[e']$ 是 $T_p(\partial D)$ 的自然诱导定向.

注 4.30. 目前, 一般流形上的子流形还没有法向量这个概念.

4.3 流形上的积分

4.3.1 定向流形上的积分

定义 4.31. 设 $\omega=f\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n\in\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$, 且 $\mathrm{supp}(\omega)\subset\subset\mathbb{R}^n$. 称 $\int_{\mathbb{R}^n}\omega\triangleq\int_{\mathbb{R}^n}f\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n$ 为 ω 在 $\mathbb{R}^n$ 上的**积分**.

命题 4.32. 上述定义与保定向的坐标变换无关.

证明. 设 $\varphi:x\mapsto y(x)$ 为保定向的坐标变换, 即 $\det J\varphi>0$. 则有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi^*\omega=\int_{\mathbb{R}^n}f(\varphi(x))\det J\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}f(\varphi(x))|\det J\varphi(x)|\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^n}\omega.$$

□

定义 4.33. 设 M 为 n 维定向流形, $\omega\in\Lambda^n(M)$, $\mathrm{supp}(\omega)\subset\subset M$.

1. 设 (U,φ) 为 M 的一个局部坐标, 称 $\int_U\omega\triangleq\int_{\varphi(U)}(\varphi^{-1})^*\omega$ 为 ω 在 U 上的**积分**.
2. 设 $\{(V_\lambda,U_\lambda,\varphi_\lambda):\lambda\in\Lambda\}$ 为 M 的一个正则坐标, $\{f_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 为从属于它的单位分解. 记 $\omega_\lambda=f_\lambda\omega$, 则 $\mathrm{supp}(\omega_\lambda)\subset\subset U_\lambda$. 称 $\int_M\omega\triangleq\int_M\sum_\lambda\omega_\lambda=\sum_\lambda\int_{U_\lambda}\omega_\lambda$ 为 ω 在 M 上的**积分**.

注 4.34. 由于 ω 具有紧支集, 上式的本质是有限和.

命题 4.35. 积分的定义与正则坐标系和单位分解的选取无关.

证明. 任取 M 的正则坐标系 $\{(\tilde{V}_\alpha,\tilde{U}_\alpha,\psi_\alpha):\alpha\in A\}$ 以及任一从属于它的单位分解 $\{g_\alpha:\alpha\in A\}$, 定义 $W_{\lambda\alpha}=U_\lambda\cap\tilde{U}_\alpha$, 容易验证 $\{f_\lambda g_\alpha:\lambda\in\Lambda,\alpha\in A\}$ 是从属于局部有限开覆盖 $\{W_{\lambda\alpha}:\lambda\in\Lambda,\alpha\in A\}$ 的单位分解. 因此

$$\int_M\sum_\lambda\omega_\lambda=\int_M\sum_\alpha g_\alpha\sum_\lambda\omega_\lambda=\int_M\sum_{\lambda,\alpha}f_\lambda g_\alpha\omega=\sum_{\lambda,\alpha}\int_{W_{\lambda\alpha}}f_\lambda g_\alpha\omega.$$

同理可得

$$\int_M\sum_\alpha\omega_\alpha=\sum_{\lambda,\alpha}\int_{W_{\lambda\alpha}}f_\lambda g_\alpha\omega=\int_M\sum_\lambda\omega_\lambda.$$

□

注 4.36. 我们约定: 当 M 取相反定向时, 积分值相差一个正号.

命题 4.37. 设 M 为可定向光滑流形.

1. $\int_M \omega_1 + \omega_2 = \int_M \omega_1 + \int_M \omega_2$.
2. $\forall c \in \mathbb{R}$, $\int_M c\omega = c\int_M \omega$.
3. $\forall p \in M$, $\int_M \omega = \int_{M\setminus\{p\}} \omega$.

证明. 都是 $\mathbb{R}^n$ 上 Riemann 积分性质的直接推论. □

习题 4.38. 设 $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}x^i \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{n+1}$, 计算积分 $\int_{\mathbb{S}^n} \iota^*\omega$.

解答. 设 ψ 为南极投影映射, 回忆我们曾计算过

$$(\iota \circ \psi^{-1})^*\omega = \left(-\frac{2}{1+|u|^2}\right)^n \mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^n.$$

因此

$$\int_{\mathbb{S}^n} \iota^*\omega = \int_{\mathbb{S}^n\setminus\{S\}} \iota^*\omega = \int_{\mathbb{R}^n} \left(-\frac{2}{1+|u|^2}\right)^n \mathrm{d}u = \int_0^\infty \left(-\frac{2}{1+r^2}\right)^n \cdot n\omega_n r^{n-1}\mathrm{d}r.$$

□

4.3.2 Stokes 公式

定理 4.39. 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为正则区域, $\omega \in \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\mathrm{supp}(\omega) \subset\subset \mathbb{R}^n$, 则

$$\int_D \mathrm{d}\omega = (-1)^n \int_{\partial D} \omega.$$

这里 ∂D 取自然诱导定向.

证明. $\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ 中的元素 ω 总可以写为 $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_i(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$, 从而 $\mathrm{d}\omega = (\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x^i})\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$. 设 $\mathrm{supp}(\omega) \subset\subset U$, 其中 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中开集. 我们考虑两种情况:

1. $U \cap \partial D = \varnothing$, 此时 $U \subset \mathring{D}$ 或 $U \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{D}$. 对于后一种情况, 在 D 上恒有 $\omega = 0$, 在 ∂D 上恒有 $\mathrm{d}\omega = 0$, 结论成立. 对于前一种情况, 考虑以原点为中心的长方体 $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : |x^i| \leqslant b_i\}$, 使得 $U \subset Q$. 则有

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \int_Q \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x^i}\right)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \int_{K_i} \left(\int_{-b_i}^{b_i} \frac{\partial a_i}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\right)\mathrm{d}x^1 \cdots \widehat{\mathrm{d}x^i} \cdots \mathrm{d}x^n = 0.$$

   其中 $K_i = \{(x^1, \cdots, \widehat{x^i}, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^{n-1} : |x^i| \leqslant b_i\}$, 最后的等号成立是因为 $a_i|_{x^i=\pm b_i} = 0$(在支集外). 此时在 ∂D 上亦恒有 $\mathrm{d}\omega = 0$, 因此结论成立.

2. $U\cap\partial D\neq\varnothing$. 此时我们不妨设 $U\cap D\subset\mathbb{R}^n_+$, $U\cap\partial D\subset\partial\mathbb{R}^n_+$, 不然由隐函数定理可局部作坐标变换使得 $\varphi(U\cap D)\subset\mathbb{R}^n_+$. 作长方体 $Q=\{x\in\mathbb{R}^n:|x^i|\leqslant b_i(1\leqslant i\leqslant n-1),0\leqslant x^n\leqslant b_n\}$ 使得 $U\cap D\subset Q$, 首先有

$$\int_{\partial D}\omega=\sum_{i=1}^n(-1)^{i+1}\int_{\partial D}a_i(x',0)\mathrm{d}x^1\cdots\widehat{\mathrm{d}x^i}\cdots\mathrm{d}x^n=(-1)^{n+1}\int_{K'}a_n(x',0)\mathrm{d}x'.$$

其中 $K'=\{x'\in\mathbb{R}^{n-1}:|x^i|\leqslant b_i,1\leqslant i\leqslant n-1\}$. 另一方面, 也有

$$\begin{aligned}\int_D\mathrm{d}\omega&=\sum_{i=1}^n\int_D\frac{\partial a_i}{\partial x^i}\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n-1}\int_K\frac{\partial a_i}{\partial x^i}\mathrm{d}x+\int_K\frac{\partial a_n}{\partial x^n}\mathrm{d}x\\&=\sum_{i=1}^{n-1}\int_{K_i}\left(\int_{-b_i}^{b_i}\frac{\partial a_i}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\right)\mathrm{d}x^1\cdots\widehat{\mathrm{d}x^i}\cdots\mathrm{d}x^n+\int_{K'}\left(\int_0^{b_n}\frac{\partial a_n}{\partial x^n}\mathrm{d}x^n\right)\mathrm{d}x'\\&=-\int_{K'}a_n(x',0)\mathrm{d}x'.\end{aligned}$$

综上结论即证.

□

定理 4.40 (Stokes). 设 D 是 n 维可定向流形 M 上的正则区域, $\omega\in\Lambda^{n-1}(M)$, $\mathrm{supp}(\omega)\subset\subset M$, 则

$$\int_D\mathrm{d}\omega=(-1)^n\int_{\partial D}\omega.$$

其中 ∂D 取自然诱导定向.

证明. 设 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha):\alpha\in A\}$ 是 M 的一个定向相同的坐标系, $\{f_\alpha:\alpha\in A\}$ 为从属于它的一个单位分解, 记 $\omega_\alpha=f_\alpha\omega$, 则

$$\begin{aligned}\int_D\mathrm{d}\omega&=\int_D\mathrm{d}\left(\sum_\alpha\omega_\alpha\right)=\sum_\alpha\int_{U_\alpha\cap D}\mathrm{d}\omega_\alpha=\sum_\alpha\int_{\varphi_\alpha(U_\alpha\cap D)}(\varphi_\alpha^{-1})^*\mathrm{d}\omega_\alpha\\&=\sum_\alpha\int_{\varphi_\alpha(U_\alpha\cap D)}\mathrm{d}((\varphi_\alpha^{-1})^*\omega_\alpha)=(-1)^n\sum_\alpha\int_{\partial\varphi_\alpha(U_\alpha\cap D)}(\varphi_\alpha^{-1})^*\omega_\alpha\\&=(-1)^n\sum_\alpha\int_{\varphi_\alpha(U_\alpha\cap\partial D)}(\varphi_\alpha^{-1})^*\omega_\alpha=(-1)^n\sum_\alpha\int_{U_\alpha\cap\partial D}\omega_\alpha\\&=(-1)^n\int_{\partial D}\omega.\end{aligned}$$

□

注 4.41. 1. 当 n 为偶数时, ∂D 取自然诱导定向. 当 n 为奇数时, ∂D 取与自然诱导定向相反的定向, 称为 ∂D 的 **Stokes 定向**.

2. 当 ∂D 取 Stokes 定向时, Stokes 公式可改写为 $\int_D\mathrm{d}\omega=\int_{\partial D}\omega$.

习题 4.42. 利用外微分形式将数学分析中的 Newton-Leibniz 公式, Green 公式, Gauss 公式和 Stokes 公式写成统一形式.

证明. 当 $n=1$, $D=[a,b]$ 时, 取 $\omega=f$, 则有 $\mathrm{d}\omega=f'(x)\mathrm{d}x$. 此时在 $\partial D=\{a,b\}$ 上取 Stokes 定向 (外法向), 由 Stokes 公式可得 N-L 公式

$$\int_{[a,b]} f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a).$$

当 $n=2$, $D\subset\mathbb{R}^2$ 为平面区域时, 取 $\omega=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$, 则有 $\mathrm{d}\omega=(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$. 此时在 ∂D 上取自然诱导定向 (内法向), 由 Stokes 公式可得 Green 公式

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

当 $n=3$, $D\subset\mathbb{R}^3$ 为三维区域时, 取 $\omega=P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, 则有 $\mathrm{d}\omega=(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$. 此时在 ∂D 上取 Stokes 定向 (外法向), 由 Stokes 公式可得 Gauss 公式

$$\iiint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\partial D}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

在 $\mathbb{R}^3$ 中, 当 $D\subset\mathbb{R}^3$ 为 $n=2$ 维曲面时, 取 $\omega=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$, 则有

$$\mathrm{d}\omega=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x.$$

此时在 ∂D 上取自然诱导定向 (外法向), 由 Stokes 公式可得数分中的 Stokes 公式

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\oint_{\partial D}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.$$

$\square$

5 李群初步

5.1 一般线性群

本节我们采用如下记号:

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \triangleq \{\xi : \xi \in \mathbb{R}^{n\times n}\}.$$

$$G \triangleq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \triangleq \{g \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det g \neq 0\}.$$

$$e \triangleq n\,\text{阶单位阵}.$$

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的自然坐标记为 $X = (x^{ij})$ 或 $Y = (y^{ij})$. 我们的目标是讨论 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 上的群结构与流形相容和的一些性质.

5.1.1 李群结构

命题 5.1. 在 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 的标准微分结构下, 有

1. $\varphi : G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh$ 是光滑的.
2. $\iota : G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ 是光滑的.

证明. 下面设 $g = (g_{ij})$ 和 $h = (h_{ij})$.

1. 注意到 $(gh)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} g_{ik}h_{kj}$ 为多项式, 从而 φ 光滑.
2. $(g^{-1})_{ij} = g^{ij} = \frac{1}{\det g}G_{ij}$, 其中 G_{ij} 是 g 在 ij 处的代数余子式. 由于 G_{ij}, $\det g$ 均为关于 $g_{ij} (1 \leqslant i, j \leqslant n)$ 的多项式, 故 ι 光滑.

□

命题 5.2. 给定 $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $L_g : G \to G$, $h \mapsto gh$ 是微分同胚, 称为 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 的一个左移动.

证明. 由命题5.1可得 L_g 是光滑映射, 又易证 $L_g^{-1} = L_{g^{-1}}$ 光滑, 所以 L_g 是微分同胚. □

注 5.3. 右移动 $R_g : G \to G$, $h \mapsto hg$ 也是微分同胚.

5.1.2 左不变向量场

定义 5.4. 设 $\tilde{\xi} \in \Gamma(TG)$, 若 $\tilde{\xi}$ 满足 $(L_g)_*\tilde{\xi} = \tilde{\xi}, \forall g \in G$, 则称 $\tilde{\xi}$ 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 上的左不变向量场.

注 5.5. 这里 $(L_g)_*\tilde{\xi} = \tilde{\xi}$ 是指: $(L_g)_*\tilde{\xi}|_h = \tilde{\xi}|_{gh}$. 所有的左不变向量场构成一个向量空间, 记为 $\mathfrak{g}$.

命题 5.6. 设 $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in \mathfrak{g}$, 则 $[\tilde{\xi}, \tilde{\eta}] \in \mathfrak{g}$.

证明. 由于 L_g 是微分同胚, 故 $(L_g)_*[\tilde{\xi}, \tilde{\eta}] = [(L_g)_*\tilde{\xi}, (L_g)_*\tilde{\eta}] = [\tilde{\xi}, \tilde{\eta}]$. □

回顾 Lie 括号的几条性质, 我们知道 $\mathfrak{g}$ 中的元素满足:

1. $[\alpha\tilde{\xi}+\beta\tilde{\eta},\tilde{\zeta}]=\alpha[\tilde{\xi},\tilde{\zeta}]+\beta[\tilde{\eta},\tilde{\zeta}]$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

2. $[\tilde{\xi},\tilde{\eta}]=-[\tilde{\eta},\tilde{\xi}]$.

3. $[\tilde{\xi},[\tilde{\eta},\tilde{\zeta}]]+[\tilde{\zeta},[\tilde{\xi},\tilde{\eta}]]+[\tilde{\eta},[\tilde{\zeta},\tilde{\xi}]]=0$.

事实上, 我们有如下更一般的定义:

定义 5.7. 设 V 为实线性空间, 若 $[\cdot,\cdot]:V\times V\to V$ 满足上述三条性质, 则称 $(V,[\cdot,\cdot])$ 是一个**李代数**. 若 $\varphi:(V,[\cdot,\cdot])\to(\tilde{V},[\cdot,\cdot])$ 是保持李括号的线性映射, 则称 φ 是 V 到 $\tilde{V}$ 的**李代数同态**. 特别地, 若 φ 是线性同构, 则称 φ 是 V 到 $\tilde{V}$ 的**李代数同构**.

命题 5.8. $\varphi:\mathfrak{g}\to T_eG$, $\tilde{\xi}\mapsto\xi\triangleq\tilde{\xi}|_e$ 是线性同构.

证明. 线性显然. 我们来验证它是双射.

- 任取 $\tilde{\xi}\in\mathfrak{g}$ 使得 $\xi=\tilde{\xi}|_e=0$, 则对任意 $g\in G$, $\tilde{\xi}|_g=(L_g)_*\xi=0\Rightarrow\tilde{\xi}=0$. 因此 φ 是单射.
- 任取 $\xi\in T_eG$, 定义向量场 $\tilde{\xi}$ 为 $\tilde{\xi}|_g=(L_g)_*\xi$, 则首先有 $\tilde{\xi}|_e=\xi$. 另一方面, 任取 $h\in G$ 有

$$(L_g)_*\tilde{\xi}|_h=(L_g)_*(L_h)_*\xi=(L_{gh})_*\xi=\tilde{\xi}|_{gh}.$$

  所以 $\tilde{\xi}\in\mathfrak{g}$, 故 φ 是满射.

□

注 5.9. 由此立得 $\dim\mathfrak{g}=\dim\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})=n^2$.

定义 5.10. 对任意 $\tilde{\xi},\tilde{\eta}\in\mathfrak{g}$, 记 $\xi=\tilde{\xi}|_e,\eta=\tilde{\eta}|_e\in T_eG$, 定义 $[\xi,\eta]=[\tilde{\xi},\tilde{\eta}]|_e$.

注 5.11. 1. 在上述意义下, $(T_eG,[\cdot,\cdot])$ 构成一个李代数.

2. 此时 $\varphi:\mathfrak{g}\to T_eG$, $\tilde{\xi}\mapsto\xi=\tilde{\xi}|_e$ 为李代数同构.

命题 5.12. 设 $\xi\in T_eG=\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, 由 ξ 确定的左不变向量场记为 $\tilde{\xi}$, 则 $\forall g\in G$, $\tilde{\xi}|_g=g\xi$.

证明. 设 $L_g:x=(x^{ij})\mapsto y(x)=(y^{ij})$, 则有 $y^{ij}=\sum_k g_{ik}x^{kj}$. 因此

$$(L_g)_*\frac{\partial}{\partial x^{ij}}=\sum_{k,\ell}\frac{\partial y^{k\ell}}{\partial x^{ij}}\frac{\partial}{\partial y^{k\ell}}=\sum_{k,\ell,r}g_{kr}\delta_{ir}\delta_{j\ell}\frac{\partial}{\partial y^{k\ell}}=\sum_k g_{ki}\frac{\partial}{\partial y^{kj}}.$$

从而对 $\xi=\sum\xi_{ij}\frac{\partial}{\partial x^{ij}}\in T_eG$, 有

$$(L_g)_*\xi=\sum_{i,j}\xi_{ij}(L_g)_*\frac{\partial}{\partial x^{ij}}=\sum_{k,j}\left(\sum_i g_{ki}\xi_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial y^{kj}}.$$

写成矩阵形式即为 $\tilde{\xi}|_g=g\xi$. □

注 5.13. 记 E_{ij} 为 n 阶方阵中第 (i,j) 元素为 1, 其余为 0 的方阵. 则 $\{\tilde{E}_{ij}=gE_{ij}:1\leqslant i,j\leqslant n\}$ 构成 $\mathfrak{g}$ 的一组基.

命题 5.14. 设 $\xi,\eta\in T_eG$, $\tilde{\xi},\tilde{\eta}$ 为 ξ,η 确定的左不变向量场, 则 $[\tilde{\xi},\tilde{\eta}]|_g=g(\xi\eta-\eta\xi)$.

证明. 设 $g=(x^{ij})$. 由 $\tilde{\xi}|_g=g\xi,\tilde{\eta}|_g=g\eta$ 可得

$$\tilde{\xi}=\sum_{i,j}\left(\sum_k x_{ik}\xi_{kj}\right)\frac{\partial}{\partial x^{ij}},\quad \tilde{\eta}=\sum_{p,q}\left(\sum_r x_{pr}\eta_{rq}\right)\frac{\partial}{\partial x^{pq}}.$$

因此

$$\begin{aligned}
[\tilde{\xi},\tilde{\eta}]&=\sum_{p,q}\tilde{\xi}\left(\sum_r x_{pr}\eta_{rq}\right)\frac{\partial}{\partial x^{pq}}-\sum_{i,j}\tilde{\eta}\left(\sum_k x_{ik}\xi_{kj}\right)\frac{\partial}{\partial x^{ij}}\\
&=\sum x_{ik}\xi_{kj}\frac{\partial}{\partial x^{ij}}(x_{pr}\eta_{rq})\frac{\partial}{\partial x^{pq}}-\sum x_{pr}\eta_{rq}\frac{\partial}{\partial x^{pq}}(x_{ik}\xi_{kj})\frac{\partial}{\partial x^{ij}}\\
&=\sum x_{ik}\xi_{kj}\eta_{rq}\delta_{ip}\delta_{jr}\frac{\partial}{\partial x^{pq}}-\sum x_{pr}\eta_{rq}\xi_{kj}\delta_{ip}\delta_{kq}\frac{\partial}{\partial x^{ij}}\\
&=\sum x_{pk}\xi_{kr}\eta_{rq}\frac{\partial}{\partial x^{pq}}-\sum x_{ir}\eta_{rk}\xi_{kj}\frac{\partial}{\partial x^{ij}}\\
&=\sum x_{ik}(\xi_{kr}\eta_{rj}-\eta_{kr}\xi_{rj})\frac{\partial}{\partial x^{ij}}.
\end{aligned}$$

写成矩阵形式即为 $[\tilde{\xi},\tilde{\eta}]|_g=g(\xi\eta-\eta\xi)$. □

注 5.15. 1. 设 $\tilde{E}_{ij}$ 为 $E_{ij}\in T_eG$ 生成的左不变向量场, 则

$$\begin{aligned}
[\tilde{E}_{ij},\tilde{E}_{k\ell}]|_g&=g(E_{ij}E_{k\ell}-E_{k\ell}E_{ij})=g(\delta_{jk}E_{i\ell}-\delta_{\ell i}E_{kj})\\
&=(\delta_{jk}\tilde{E}_{i\ell}-\delta_{\ell i}\tilde{E}_{kj})|_g=\sum_{p,q}(\delta_{jk}\delta_{ip}\delta_{\ell q}-\delta_{\ell i}\delta_{kp}\delta_{jq})\tilde{E}_{pq}|_g\\
&\triangleq\sum_{p,q}C^{pq}_{ij,k\ell}\tilde{E}_{pq}|_g.
\end{aligned}$$

2. 在 T_eG 中, 有

$$[E_{ij},E_{k\ell}]=[\tilde{E}_{ij},\tilde{E}_{k\ell}]|_\ell=C^{pq}_{ij,k\ell}E_{pq},\quad [\xi,\eta]=\xi\eta-\eta\xi.$$

3. 类似地, 可以讨论右不变向量场.

5.1.3 左不变微分形式

定义 5.16. 设 $\tilde{\omega}\in\Omega^1(G)$, 若 $\forall g\in G$, 有 $(L_g)^*\tilde{\omega}=\tilde{\omega}$, 则称 $\tilde{\omega}$ 是 G 上的**左不变 1-形式**. 左不变 1-形式全体记作 $\mathfrak{g}^*$.

注 5.17. $(L_g)^*\tilde{\omega}=\tilde{\omega}$ 是指: $\forall h\in G$, $(L_g)^*\tilde{\omega}|_h=\tilde{\omega}|_{g^{-1}h}$. 特别地, $(L_g)^*\tilde{\omega}|_g=\tilde{\omega}|_e$, $(L_{g^{-1}})^*\tilde{\omega}|_e=\tilde{\omega}|_g$.

命题 5.18. $\mathfrak{g}^*$ 与 T_e^*G 线性同构.

证明. 考虑映射 $\varphi:\mathfrak{g}^*\to T_e^*G$, $\tilde{\omega}\mapsto\omega\triangleq\tilde{\omega}|_e$. 若 $\tilde{\omega}|_e=0$, 则 $\tilde{\omega}|_g=(L_{g^{-1}})^*\tilde{\omega}|_e=0$, $\forall g\in G$. 由此可得 φ 是单射. 另一方面, 任取 $\omega\in T_e^*G$, 定义 $\tilde{\omega}\in\Omega^1(G)$ 为 $\tilde{\omega}|_g=(L_{g^{-1}})^*\omega$, 容易验证 $\tilde{\omega}\in\mathfrak{g}^*$, 因此 φ 是线性同构. □

命题 5.19. 设 $\tilde{\xi} \in \mathfrak{g}, \tilde{\omega} \in \mathfrak{g}^*$, 则 $\tilde{\omega}(\tilde{\xi})$ 为常数.

证明. 设 $\omega = \tilde{\omega}|_e, \xi = \tilde{\xi}|_e$. 任取 $g \in G$, 有

$$\tilde{\omega}|_g(\tilde{\xi}|_g) = ((L_{g^{-1}})^*\omega)((L_g)_*\xi) = \omega((L_{g^{-1}})_* \circ (L_g)_*\xi) = \omega(\xi).$$

□

命题 5.20. 设 $\omega = \sum\limits_{i,j} a_{ij}\mathrm{d}y^{ij}|_e \in T_e^*G$, 则由 ω 确定的左不变 1-形式为 $\tilde{\omega}|_g = \sum a_{kq}g^{kp}\mathrm{d}x^{pq}|_g$. 这里 $(g^{kp}) = g^{-1}$.

证明. 设 $L_{g^{-1}} : x = (x^{ij}) \mapsto y(x) = (y^{pq})$, 则有 $y^{pq} = \sum_k g^{pk}x^{kq}$. 因此

$$\begin{aligned}
(L_{g^{-1}})^*\mathrm{d}y^{pq} &= \sum_{i,j} \frac{\partial y^{pq}}{\partial x^{ij}}\mathrm{d}x^{ij} = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^{ij}}\left(\sum_k g^{pk}x^{kq}\right)\mathrm{d}x^{ij} \\
&= \sum_{i,j,k} g^{pk}\delta_{ik}\delta_{jq}\mathrm{d}x^{ij} = \sum_k g^{pk}\mathrm{d}x^{kq}.
\end{aligned}$$

进而

$$\tilde{\omega}|_g = (L_{g^{-1}})^*\omega = \sum_{p,q} a_{pq}\sum_k g^{pk}\mathrm{d}x^{kq}.$$

□

注 5.21. 1. 设 $\tilde{\omega}_{ij}$ 为 $\mathrm{d}x^{ij}|_e$ 生成的左不变 1-形式, $\tilde{E}_{ij}$ 是 $\frac{\partial}{\partial x^{ij}}|_e$ 生成的左不变向量场. 由命题可得 $\tilde{\omega}(\tilde{E}_{k\ell}) = \mathrm{d}x^{ij}|_e(\frac{\partial}{\partial x^{k\ell}}|_e) = \delta_{ik}\delta_{j\ell}$. 即 $\{\tilde{\omega}_{ij} : 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ 是 $\{\tilde{E}_{ij} : 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ 的对偶基.

2. 注意到 g 在自然坐标下的坐标为 (x_{ij}), 逆为 (x^{ij}). 首先, 我们来求解 $\frac{\partial x^{ik}}{\partial x_{pq}}$. 为此, 考虑映射 $i : G \to G, g \mapsto g^{-1}$ 在 g 处的切映射. 考虑光滑曲线 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$, $t \mapsto g\mathrm{e}^{th}$, 则 $\gamma(0) = g$ 且 $\gamma'(0) = gh$, 因此

$$i_{*,g}(gh) = (i \circ \gamma)'(0) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(\mathrm{e}^{-th}g^{-1}) = -hg^{-1}.$$

由此可得 $i_{*,g}h = -g^{-1}hg^{-1}$. 故而

$$\frac{\partial x^{ik}}{\partial x_{pq}} = -(g^{-1}E_{pq}g^{-1})_{ik} = -x^{ip}x^{qk}.$$

由此, 可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tilde{\omega}_{ij} &= \mathrm{d}\left(\sum_k x^{ik}\mathrm{d}x_{kj}\right) = \sum_k \mathrm{d}x^{ik} \wedge \mathrm{d}x_{kj} = \sum_{p,q,k} \frac{\partial x^{ik}}{\partial x_{pq}}\mathrm{d}x_{pq} \wedge \mathrm{d}x_{kj} \\
&= -\sum_{p,q,k} x^{ip}x^{qk}\mathrm{d}x_{pq} \wedge \mathrm{d}x_{kj} = -\sum_q \tilde{\omega}_{iq} \wedge \tilde{\omega}_{qj} \\
&= -\sum_{p,q,k,\ell} \delta_{ip}\delta_{kq}\delta_{j\ell}\tilde{\omega}_{pq} \wedge \tilde{\omega}_{k\ell} = -\frac{1}{2}\left(\sum \delta_{ip}\delta_{kq}\delta_{j\ell}\tilde{\omega}_{pq} \wedge \tilde{\omega}_{k\ell} - \sum \delta_{ip}\delta_{kq}\delta_{j\ell}\tilde{\omega}_{k\ell} \wedge \tilde{\omega}_{pq}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\sum(\delta_{ip}\delta_{kq}\delta_{j\ell} - \delta_{ik}\delta_{p\ell}\delta_{jq})\tilde{\omega}_{pq} \wedge \tilde{\omega}_{k\ell} = -\frac{1}{2}\sum_{p,q,k,\ell} C^{ij}_{pq,k\ell}\tilde{\omega}_{pq} \wedge \tilde{\omega}_{k\ell}.
\end{aligned}$$

令 $\tilde{\omega} \triangleq \sum_{i,j} \tilde{\omega}_{ij} \otimes E_{ij}$, $\mathrm{d}\tilde{\omega} = \sum \mathrm{d}\tilde{\omega}_{ij} \otimes E_{ij}$, 则

$$\mathrm{d}\tilde{\omega} = -\frac{1}{2}\sum C^{ij}_{pq,k\ell}(\tilde{\omega}_{pq} \wedge \tilde{\omega}_{k\ell}) \otimes E_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_{p,q,k,\ell}(\tilde{\omega}_{pq} \wedge \tilde{\omega}_{k\ell}) \otimes [E_{pq}, E_{k\ell}] \triangleq -\frac{1}{2}[\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega}].$$

称之为 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 的 **Maurer-Cartan 方程**.

5.1.4 单参数子群

定义 5.22. 设 $\varphi : \mathbb{R} \to G$ 是光滑映射, 若 φ 满足:

1. $\varphi(0) = e$.
2. $\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$.

则称 φ 是 G 的一个**单参数子群**.

命题 5.23. 设 $\xi \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, 定义 $\mathrm{e}^{\xi} \triangleq \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\xi^k$. 则

1. 对任意 $s, t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{(s+t)\xi} = \mathrm{e}^{s\xi}\mathrm{e}^{t\xi}$.
2. $\mathrm{e}^{\xi} \in G$ 且 $(\mathrm{e}^{\xi})^{-1} = \mathrm{e}^{-\xi}$.

证明. 线代内容. □

注 5.24.

1. 称 $\exp : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \to G$, $\xi \mapsto \mathrm{e}^{\xi}$ 为 G 的指数映射.
2. 给定 $\xi \in T_eG = G$, $\varphi_{\xi} : \mathbb{R} \to G$, $t \mapsto \mathrm{e}^{t\xi}$ 是 G 的一个单参数子群.
3. 设 $\varphi : \mathbb{R} \to G$ 为单参数子群, 记 $\xi = \varphi_*(\frac{\partial}{\partial t}|_0) \in T_eG$, $\tilde{\xi}$ 为 ξ 生成的左不变向量场, 则 $\varphi_*(\frac{\partial}{\partial t}) = \tilde{\xi}|_{\varphi(t)}$.

证明. 我们来证明 3. 给定 $t \in \mathbb{R}$, 设 $\psi(s) = \varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s) = L_{\varphi(t)} \circ \varphi(s)$, 则

$$\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \psi_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_0\right) = (L_{\varphi(t)})_* \circ \varphi_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_0\right) = (L_g)_*\xi = \tilde{\xi}|_{\varphi(t)}.$$

换言之, $\varphi(t)$ 是 $\tilde{\xi}$ 过单位元的积分曲线. □

命题 5.25. 设 $\xi \in T_eG$, $\tilde{\xi}$ 是 ξ 生成的左不变向量场. 设 $\gamma(t)$ 是 $\tilde{\xi}$ 过 e 点的积分曲线, 则 $\gamma(t) = \mathrm{e}^{t\xi}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

证明. 容易验证 $\mathrm{e}^{t\xi}$ 是 $\tilde{\xi}$ 过点 e 的积分曲线, 由积分曲线的唯一性即可得 $\gamma(t) = \mathrm{e}^{t\xi}$. □

注 5.26. 由上述可得 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 的单参数子群和 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 的左不变向量场一一对应.

5.1.5 伴随表示

设 $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, 则 $\alpha_g : G \to G$, $h \mapsto ghg^{-1}$ 是微分同胚. 注意到 $\alpha_g(e) = e$, 则 $(\alpha_g)_* : T_eG = \mathfrak{g} \to T_eG = \mathfrak{g}$ 是同构, 即 $(\alpha_g)_* \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$.

定义 5.27. 称 $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$, $g \mapsto (\alpha_g)_*$ 为 G 的**伴随表示**. 记 $\mathrm{ad} \triangleq (\mathrm{Ad})_*|_e : \mathfrak{g} \to \mathrm{gL}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = \mathrm{End}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$.

命题 5.28. $\forall g \in G$, $(\alpha_g)_* = \mathrm{Ad}(g) : T_eG \to T_eG$, $\xi \mapsto g\xi g^{-1}$.

证明. 设 γ 是经过 e 的曲线, 且 $\gamma(\frac{\partial}{\partial t}|_0) = \xi$. 则

$$(\alpha_g)_*(\xi) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\alpha_g \circ \gamma) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (g\gamma(t)g^{-1}) = g\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \gamma(t)\right)g^{-1} = g\xi g^{-1}.$$

□

命题 5.29. $\forall \xi \in T_eG$, $\mathrm{ad} : T_eG \to \mathrm{gL}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$, $\xi \mapsto \mathrm{ad}(\xi)$, $\mathrm{ad}(\xi)(\eta) = [\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi$.

证明. 考虑光滑曲线 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, 满足 $\gamma(0) = e$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\gamma = \xi$, 由此可选取 $\gamma(t) = \mathrm{e}^{t\xi}$. 任取 $\eta \in \mathfrak{g} = T_eG$, 则

$$\mathrm{ad}(\xi)(\eta) = (\mathrm{Ad})_*|_e(\xi)(\eta) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\mathrm{Ad}(\mathrm{e}^{t\xi}))(\eta) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\mathrm{e}^{t\xi}\eta\mathrm{e}^{-t\xi}) = \xi\eta - \eta\xi = [\xi, \eta].$$

□

5.2 李群

5.2.1 定义

定义 5.30. 设 G 为群, 且 G 为 n 维光滑流形. 若 G 满足:

1. $\varphi : G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh$ 是光滑的.
2. $\tau : G \to G, g \mapsto g^{-1}$ 是光滑的.

则称 G 为 n 维**李群** (Lie group).

注 5.31.
1. 左移动 $L_g : G \to G$, $h \mapsto gh$; 右移动 $R_g : h \mapsto hg$ 是 G 上的微分同胚.
2. $L_g \circ R_h = R_h \circ L_g$.

例 5.32. 下列流形均为李群.

1. $(\mathbb{R}^n, +)$.
2. $\mathbb{S}^1$. 首先 $\mathbb{S}^1$ 在复数乘法下构成群. 可以取辐角函数对应的坐标系 (U, θ)(见 Lee 书习题 1-8), 此时乘法即为 $(\theta_1, \theta_2) \mapsto \theta_1 + \theta_2$, 逆运算即为 $\theta \mapsto -\theta$. 显然它们是光滑的.
3. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

4. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \triangleq \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$. 首先看到 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ 既是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 的子群, 又是 n^2-1 维的嵌入子流形. 回忆第二次习题课中所讲的: 设 $F: M \to N$ 为光滑映射, 则

   - 若 $S \subset M$ 为浸入子流形, 则 $F|_S : S \to N$ 为光滑映射.
   - 若 $S \subset N$ 为嵌入子流形, 则 $F: M \to S$ 是光滑映射.

   设 G 为李群, H 为 G 的子群, 也为嵌入子流形. 设 φ 为 G 上的乘法运算, 由 H 是浸入子流形可得 $\varphi|_{H\times H} : H \times H \to G$ 为光滑映射. 再由 H 是嵌入子流形可得 $\varphi|_{H\times H} : H\times H \to H$ 是光滑映射. 类似可证 H 上的逆运算光滑, 故 H 为李群. 由此即得 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ 是李群.

5. $\mathrm{SO}(n) \triangleq \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : AA^T = I\}$. 我们在例 1.87 中曾证明过 $\mathrm{SO}(n)$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 维嵌入子流形, 由 4 中结论可得 $\mathrm{SO}(n)$ 为李群.

6. $\mathbb{S}^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x|^2 = 1\}$. 它显然是 $\mathbb{R}^4$ 的嵌入子流形, 同时它作为四元数群 $\mathbb{H}$ 的子集为子群 $\{p \in \mathbb{H} : pp^* = 1\}$.

7. G, H 为李群, 在 $G\times H$ 上定义乘法: $(g_1,h_1)(g_2,h_2) = (g_1g_2, h_1h_2)$, 则 $G\times H$ 为李群.

5.2.2 左不变向量场

定义 5.33. 设 $\tilde{\xi} \in \Gamma(TG)$, 若 $\forall g \in G$, 有 $(L_g)_*\tilde{\xi}|_h = \tilde{\xi}|_{gh}$, 即 $(L_g)_*\tilde{\xi} = \tilde{\xi}$, 则称 $\tilde{\xi}$ 是 G 上的**左不变向量场**.

注 5.34. 1. G 上所有的左不变向量场全体记为 $\mathfrak{g}$, 构成一个李代数.

2. 左不变向量场 $\tilde{\xi}$ 由它在单位元处的值 $\xi = \tilde{\xi}|_e$ 唯一确定.

3. 对任意 $\xi, \eta \in T_eG$, 定义 $[\xi,\eta] = [\tilde{\xi},\tilde{\eta}]|_e$, 则 T_eG 构成了一个李代数.

4. $\varphi : \mathfrak{g} \to T_eG$, $\tilde{\xi} \to \varphi(\tilde{\xi}) = \tilde{\xi}|_e$ 是李代数同构, 因此 $\dim\mathfrak{g} = \dim T_eG = n$. 今后不再区分 $\mathfrak{g}$ 与 T_eG.

5. 取 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $\{\tilde{\xi}_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 或 $\{\xi_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$, 则存在常数 $C_{ij}^k, C_{ij}^k = -C_{ji}^k$ 使得 $[\tilde{\xi}_i, \tilde{\xi}_j] = \sum\limits_{k=1}^n C_{ij}^k \tilde{\xi}_k$, 称 C_{ij}^k 为 $\mathfrak{g}$ 的**结构常数** (与基有关). 此前我们计算过, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 的左不变向量场 $\mathfrak{g}$ 关于基 $\{\tilde{E}_{ij} : 1 \leqslant i,j \leqslant n\}$ 的结构常数为 $C_{ij,k\ell}^{pq} = \delta_{jk}\delta_{ip}\delta_{q\ell} - \delta_{i\ell}\delta_{kp}\delta_{jq}$.

5.2.3 左不变 1-形式

定义 5.35. 设 $\tilde{\omega} \in \Omega^1(G)$, 若 $\forall g \in G$, $(L_g)^*\tilde{\omega}|_h = \tilde{\omega}|_{g^{-1}h}$, 即 $(L_g)^*\tilde{\omega} = \tilde{\omega}$, 则称 $\tilde{\omega}$ 为 G 上的**左不变 1-形式**. 所有左不变 1-形式全体记作 $\mathfrak{g}^*$.

注 5.36. 1. $\mathfrak{g}^*$ 中元素与 T_e^*G 中元素一一对应.

2. 设 $\tilde{\xi} \in \mathfrak{g}$, $\tilde{\omega} \in \mathfrak{g}^*$, 则 $\tilde{\omega}(\tilde{\xi}) = \tilde{\omega}|_e(\tilde{\xi}|_e)$ 为常数.

命题 5.37. 设 $\{E_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 为 T_eG 的一组基, 其对偶基为 $\{\omega^i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$, C_{ij}^k 为 $\mathfrak{g}$ 关于 $\{\tilde{E}_i\}$ 的结构常数. 设 $\tilde{\omega}^i$ 是 ω^i 生成的左不变 1-形式, 则

$$\mathrm{d}\tilde{\omega}^k = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} C_{ij}^k \tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^j.$$

证明. 由外微分算子的不变定义式可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tilde{\omega}^k(\tilde{E}_i, \tilde{E}_j) &= \tilde{E}_i(\tilde{\omega}^k(\tilde{E}_j)) - \tilde{E}_j(\tilde{\omega}^k(\tilde{E}_i)) - \tilde{\omega}^k([\tilde{E}_i, \tilde{E}_j]) \\
&= \tilde{E}_i(\omega^k(E_j)) - \tilde{E}_j(\omega^k(E_i)) - \tilde{\omega}^k\left(\sum_{\ell=1}^n C_{ij}^\ell \tilde{E}_\ell\right) \\
&= \tilde{E}_i(\delta_j^k) - \tilde{E}_j(\delta_i^k) - \sum_{\ell=1}^n C_{ij}^\ell \tilde{\omega}^k(\tilde{E}_\ell) \\
&= -\sum_{\ell=1}^n C_{ij}^\ell \delta_\ell^k = -C_{ij}^k.
\end{aligned}$$

由此即证. □

注 5.38. 令 $\tilde{\omega} \triangleq \sum \tilde{\omega}^k \otimes E_k$, 定义

$$\mathrm{d}\tilde{\omega} \triangleq \sum_k \mathrm{d}\tilde{\omega}^k \otimes E_k = -\frac{1}{2}\sum_{i,j,k} C_{ij}^k \tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^j \otimes E_k = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} \tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^j \otimes [E_i, E_j] \triangleq -\frac{1}{2}[\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega}].$$

习题 5.39. 设 $\tilde{\omega}^i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是 G 上左不变且处处线性无关的 1-形式, $\dim G = n$. 设 $\sigma : G \to G$ 为光滑映射, 若 $\forall i$, $\sigma^*\tilde{\omega}^i = \tilde{\omega}^i$, 则 $\sigma = L_{\sigma(e)}$.

证明. 定义 π_1, π_2 为 $G \times G$ 到 G 的两个自然投影. 考虑 $\theta^i \triangleq ((\pi_1)^* - (\pi_2)^*)\tilde{\omega}^i$, 由 $\tilde{\omega}^i$ 线性无关可得 θ^i 也是线性无关的, 从而确定了一个 $G \times G$ 的 n 维光滑分布 L. 计算可得

$$\mathrm{d}\theta^i = (\pi_1 - \pi_2)^*(\mathrm{d}\tilde{\omega}^i) = -\frac{1}{2}(\pi_1 - \pi_2)^* \sum_{j,k} C_{jk}^i \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k = -\frac{1}{2}\sum_{j,k} C_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k \equiv 0 (\operatorname{mod} \theta^i).$$

由 Frobenius 定理可得 L 是对合的, 从而过点 $(e, \sigma(e))$ 有唯一的积分流形. 定义映射 $F : G \to G \times G, g \mapsto (g, \sigma(g))$, 则

$$F^*\theta^i = (\pi_1 \circ F - \pi_2 \circ F)^*\tilde{\omega}^i = \tilde{\omega}^i - \sigma^*\tilde{\omega}^i = 0.$$

故 F 是 L 过点 $(e, \sigma(e))$ 的积分流形. 另一方面, 定义 $H : G \to G \times G$, $g \mapsto (g, L_{\sigma(e)}(g))$, 由 $\tilde{\omega}^i$ 左不变可得 H 也是 L 过点 $(e, \sigma(e))$ 的积分流形. 由唯一性可得 $\sigma = L_{\sigma(e)}$. □

5.2.4 单参数子群

定义 5.40. 若光滑映射 $\varphi : \mathbb{R} \to G$ 满足:

1. $\varphi(0) = e$.

2. $\varphi(s + t) = \varphi(s)\varphi(t)$.

称 φ 是 G 的一个**单参数子群**.

注 5.41. 1. 设 $\varphi:\mathbb{R}\to G$ 为 G 的单参数子群, $\xi\triangleq\varphi_*(\frac{\partial}{\partial t}|_0)$ 生成的左不变向量场为 $\tilde{\xi}$, 则 $\varphi(t)$ 为 $\tilde{\xi}$ 过 e 的积分曲线.

2. 给定 $\xi\in T_eG$, $\tilde{\xi}$ 是 ξ 生成的左不变向量场. $\tilde{\xi}$ 过 e 点的积分曲线确定了 G 的一个单参数子群 $\varphi_\xi:\mathbb{R}\to G$.

定义 5.42. 称 $\exp:T_eG\to G,\xi\mapsto\varphi_\xi(1)$ 为李群 G 的**指数映射**.

定理 5.43. $\exp:T_eG\to G$ 是光滑映射.

证明. 选取 e 附近的局部坐标 $(U,\psi;x^i)$ 使得 $x^i(e)=0$. 设 $\tilde{\xi}_i=\sum a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x^j}$ 为 $\frac{\partial}{\partial x^i}|_e$ 生成的左不变向量场, 则 $\tilde{\xi}=\sum\xi_i\frac{\partial}{\partial x^i}|_e$ 生成的左不变向量场为 $\tilde{\xi}=\sum\xi_i a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x^j}$. 因此单参数子群 $\varphi_\xi(t)$, 即 $\tilde{\xi}$ 过 e 的积分曲线满足 ODE 的初值问题:

$$\frac{\mathrm{d}x^j(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_i\xi_i a_{ij}(x)(1\leqslant j\leqslant n),\quad x^j(0)=0.$$

此时指数映射即为 $\exp:T_eG\to G$, $(\xi_1,\cdots,\xi_n)\mapsto(x^1(1;\xi),\cdots,x^n(1;\xi))$, 由解对初值的光滑依赖性可得 exp 是光滑映射. □

命题 5.44. $\exp(t\xi)=\varphi_\xi(t)$, 进而也有 $(\exp)_*|_0=\mathbb{1}:T_eG\to T_eG$.

证明. 定义 $\psi(s)=\varphi_\xi(st)$. 容易验证 φ 是 G 的一个单参数子群, 计算可得

$$\psi_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}\right)=t\varphi_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}\right)=t\xi.$$

所以 ψ 是 $t\xi\in T_eG$ 生成的单参数子群, 即 $\psi(s)=\varphi_{t\xi}(s)$. 所以 $\exp(t\xi)=\varphi_{t\xi}(1)=\psi(1)=\varphi_\xi(t)$. 由于光滑曲线 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to T_eG$, $t\mapsto t\xi$ 满足 $\gamma(0)=0,\gamma_*\frac{\partial}{\partial t}|_0=\xi$, 故

$$(\exp)_*|_0(\xi)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(\exp(t\xi))=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\varphi_\xi(t)=\xi.$$

即 $(\exp)_*|_0=\mathbb{1}$. □

5.2.5 伴随表示

回忆 $T_eG=\mathfrak{g}$. 给定 $g\in G$, 定义 $\alpha_g:G\to G$, $h\mapsto ghg^{-1}$. $\alpha_g(e)=e$, 且 $(\alpha_g)_*:T_eG\to T_eG$ 为同构.

命题 5.45. $\mathrm{Ad}:G\to\mathrm{GL}(\mathfrak{g},\mathbb{R})$, $g\mapsto(\alpha_g)_*$ 是群同态, 称为 G 的**伴随表示**.

证明. 由定义可得 $\alpha_g=L_g\circ R_{g^{-1}}$. 因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(gh)&=(L_{gh}\circ R_{h^{-1}g^{-1}})_*=(L_g\circ L_h\circ R_{g^{-1}}\circ R_{h^{-1}})_*\\&=(L_g\circ R_{g^{-1}}\circ L_h\circ R_{h^{-1}})_*=(\alpha_g\circ\alpha_h)_*\\&=(\alpha_g)_*\circ(\alpha_h)_*=\mathrm{Ad}(g)\circ\mathrm{Ad}(h).\end{aligned}$$

所以 Ad 是群同态. □

类似地, 记 $\mathrm{ad} = (\mathrm{Ad})_*|_e : T_eG \to \mathrm{gL}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, 我们仍然有

命题 5.46. $\mathrm{ad} : T_eG \to \mathrm{gL}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$, $\xi \mapsto \mathrm{ad}(\xi)$, 则 $\mathrm{ad}(\xi)(\eta) = [\xi, \eta]$.

证明. 由 $\exp(t\xi) = \varphi_\xi(t)$ 可得 $\exp(t\xi)^{-1} = \exp(-t\xi)$. 因此

$$\mathrm{ad}(\xi)(\eta) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp(t\xi))(\eta) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \exp(t\xi)\eta\exp(-t\xi) = \xi\eta - \eta\xi = [\xi, \eta].$$

□

习题 5.47. 设 G 为 Lie 群, $\mathfrak{g} = T_eG$ 为其 Lie 代数, $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 为 G 的伴随表示. 试证明: $\forall \xi, \eta \in \mathfrak{g}$, $g \in G$ 均有

$$[\mathrm{Ad}(g)\xi, \mathrm{Ad}(g)\eta] = \mathrm{Ad}(g)[\xi, \eta].$$

证明. 我们首先证明: 对任意 $\zeta \in \mathfrak{g}$, 有 $\widetilde{\mathrm{Ad}(g)}\zeta = \mathrm{Ad}(g)\tilde{\zeta}$. 分别计算:

$$\widetilde{\mathrm{Ad}(g)}\zeta|_h = \widetilde{(\alpha_g)_*}\zeta|_h = (L_h \circ \alpha_g)_*\zeta.$$

$$(\mathrm{Ad}(g)\tilde{\zeta})|_h = (\alpha_g)_*\tilde{\zeta}|_{\alpha_g^{-1}(h)} = (\alpha_g \circ L_{g^{-1}hg})_*\zeta.$$

任取 $k \in G$, 有

$$(L_h \circ \alpha_g)(k) = hgkg^{-1}, \quad (\alpha_g \circ L_{g^{-1}hg})(k) = g(g^{-1}hgk)g^{-1} = hgkg^{-1}.$$

所以 $L_h \circ \alpha_g = \alpha_g \circ L_{g^{-1}hg}$, 由此即证. 因此我们有

$$[\mathrm{Ad}(g)\xi, \mathrm{Ad}(g)\eta] = [\widetilde{\mathrm{Ad}(g)}\xi, \widetilde{\mathrm{Ad}(g)}\eta]|_e = [(\alpha_g)_*\tilde{\xi}, (\alpha_g)_*\tilde{\eta}]|_e = (\alpha_g)_*[\tilde{\xi}, \tilde{\eta}]|_e = \mathrm{Ad}(g)[\xi, \eta].$$

□

5.3 李氏变换群

5.3.1 单参数变换群

定义 5.48. 设 M 为光滑流形, $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$, $(t, p) \mapsto \varphi(t, p)$ 为光滑映射. 记 $\varphi_t : M \to M$, $p \mapsto \varphi_t(p) \triangleq \varphi(t, p)$. 若 φ_t 满足:

1. $\varphi_0 = \mathbb{1}_M$.

2. $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$.

称 φ 为作用在 M 上的**单参数变换群**.

例 5.49. 设 $\xi \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^n \triangleq \{x = (x^1, \cdots, x^n)^T : x^i \in \mathbb{R}\}$, $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto \mathrm{e}^{t\xi}x$. 则 $\varphi_t : x \mapsto \mathrm{e}^{t\xi}x$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的单参数变换群.

注 5.50. 1. 给定 $p \in M$, $\gamma_p(t) \triangleq \varphi(t, p)$ 是过 p 点的一条曲线, 称为 φ_t 过 p 的**轨线**.

2. 给定 $s \in \mathbb{R}$, 记 $q \triangleq \gamma_p(s) = \varphi_s(p)$, 则 $\gamma_p(t+s) = \varphi_{t+s}(p) = \varphi_t \circ \varphi_s(p) = \varphi_t(q) = \gamma_q(t)$ 是 φ_t 过 q 点的轨线.

命题 5.51. $\forall p \in M$, $X_p \triangleq (\gamma_p)_*(\frac{\partial}{\partial t}|_0) = \frac{\mathrm{d}}{dt}|_{t=0}\gamma_p(t)$, 则 X 是 M 上的光滑向量场, 称之为 φ_t 在 M 上诱导的向量场.

证明. 只需证明 $\forall f \in C^\infty(M)$, $Xf \in C^\infty(M)$. 由定义可得

$$X_p f = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (f(\gamma_p(t))) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(\varphi(t,p)).$$

由 f, φ 光滑可得 Xf 光滑. □

注 5.52. $\forall q \in \gamma_p(s)$, 则 $\gamma_q(t) = \varphi_t(\varphi_s(p)) = \varphi_{t+s}(p) = \gamma_p(t+s)$. 由此可得

$$X_q = (\gamma_q)_* \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \right) = (\gamma_p)_* \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_s \right).$$

即 $\gamma_p(t)$ 是 X 的积分曲线.

定理 5.53. 设 φ_t 是作用在 M 上的单参数变换群, X 是 φ_t 诱导的向量场. $F : M \to M$ 是微分同胚, 则 F_*X 是单参数变换群 $F \circ \varphi_t \circ F^{-1}$ 诱导的向量场.

证明. 设 $\tilde{\gamma}_q(t) = F \circ \varphi_t \circ F^{-1}(q) = F \circ \gamma_p(t)$, 其中 $q = F(p) \in M$, $\tilde{X}$ 为其诱导的向量场, 则

$$\tilde{X}|_q = (\tilde{\gamma}_q)_* \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \right) = (F \circ \gamma_p)_* \left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_0 \right) = F_*X.$$

□

5.3.2 局部单参数变换群

现在我们考虑: 给定 M 上的光滑向量场 X, 是否存在单参数变换群 φ_t 使得它诱导的向量场为 X?

定义 5.54. M 为光滑流形, $U \subset M$ 为开邻域. 若有光滑映射 $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$, $\forall p \in U$, $|t| < \varepsilon$, $\varphi_t(p) \triangleq \varphi(t,p)$ 满足:

1. $\varphi_0(p) = p, \forall p \in U$.

2. 若 $|t| < \varepsilon, |s| < \varepsilon, |t+s| < \varepsilon$, 则 $\varphi_{t+s}(p) = \varphi_s \circ \varphi_t(p)$.

则我们称 φ_t 是作用在 U 上的**单参数变换群**, 或 M 的一个**局部单参数变换群**.

注 5.55. 局部单参数变换群在 U 上诱导光滑的向量场.

定理 5.56. 设 X 是 M 上的光滑向量场, 则 $\forall p \in M$, 存在 p 的邻域 U 和作用在 U 上的单参数变换群 φ_t, 使得 $X|_U$ 为 φ_t 在 U 上诱导的向量场.

证明. 任取 $p \in M$, 取 p 点的一个局部坐标 $(V; x^i)$, 设 $X|_V = \sum_{i=1}^{n} a^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$, 则存在 $\varepsilon > 0$, 以及 p 的邻域 $U \subset V$, 使得 $\forall q \in U$, 有唯一的积分曲线 $\gamma_q(t)$, $|t| < \varepsilon$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}x_q^i(t)}{\mathrm{d}t} = a_i(x_q(t))(1 \leqslant i \leqslant n), \quad x_q(0) = q.$$

且 $x_q(t)$ 光滑地依赖于 (t, q). 定义 $\varphi(t, q) \triangleq \varphi_t(q) = \gamma_q(t)$, 则 $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$ 是光滑映射. 由定义可得 $\varphi_q(0) = q$, 并且任取 $|t| < \varepsilon, |s| < \varepsilon, |t + s| < \varepsilon$, 则 $x_q(t + s), x_{\varphi_s(q)}(t)$ 满足上述方程且经过点 $x_q(s) = \varphi_s(q)$ 点. 由积分曲线的唯一性可得 $x_q(t + s) = x_{\varphi_s(q)}(t)$, 即 $\varphi(t + s, q) = \varphi(t, \varphi_s(q)) = \varphi_t \circ \varphi_s(q)$. □

注 5.57. 我们称 φ_t 是 X 决定的一个局部单参数变换群.

推论 5.58. 设 X 是紧致流形 M 上的光滑向量场, 则 X 在 M 上决定一个单参数变换群.

证明. 任取 $p \in M$, 存在邻域 U_p 使得 X 在 U_p 上决定局部单参数变换群 $\varphi_t^{(p)}(|t| < \varepsilon_p)$. 由于 $\{U_p : p \in M\}$ 是 M 的一个开覆盖, 故存在有限开覆盖 $\{U_{p_1}, \cdots, U_{p_N}\}$. 定义 $\varphi = \min_{1 \leqslant i \leqslant N} \varepsilon_{p_i}$, 作 $\tilde{\varphi} : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to M$, 当 $p \in U_k$ 时, $\tilde{\varphi}(t, p) = \varphi^{(p_k)}(t, p)$. 当 $p \in U_k$ 时, $\forall t \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $|\frac{t}{N}| < \varepsilon$, 令 $\varphi_t(p) \triangleq \tilde{\varphi}_{t/N}^N(p)$(复合 N 次), 则 $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ 是 M 上的单参数变换群. □

习题 5.59. 验证 $\tilde{\varphi}$ 和 φ 是良定的, 并且 φ 确实是 X 确定的单参数变换群.

证明. 根据局部单参数变换群的构造, $\tilde{\varphi}(t, p) = \gamma_p(t)$ 即为向量场 X 过 p 点的积分曲线, 由积分曲线的唯一性可得 $\tilde{\varphi}$ 与 U_k 的选取无关, 从而是良定的. 任取 $t \in \mathbb{R}$, 以及任意 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ 使得 $|\frac{t}{N_i}| < \varepsilon, i = 1, 2$. 由 $\tilde{\varphi}$ 是局部单参数变换群可得

$$\tilde{\varphi}_{\frac{t}{N_1}}^{N_1} = (\tilde{\varphi}_{\frac{t}{N_1 N_2}}^{N_2})^{N_1} = \tilde{\varphi}_{\frac{t}{N_1 N_2}}^{N_1 N_2}, \quad \tilde{\varphi}_{\frac{t}{N_2}}^{N_2} = (\tilde{\varphi}_{\frac{t}{N_1 N_2}}^{N_1})^{N_2} = \tilde{\varphi}_{\frac{t}{N_1 N_2}}^{N_1 N_2}.$$

由此可得 $\tilde{\varphi}_{t/N_1}^{N_1} = \tilde{\varphi}_{t/N_2}^{N_2}$, 故 φ 是良定的.

然后验证 φ 是 X 确定的单参数变换群. 首先 $\varphi_0(p) = \tilde{\varphi}_0(p) = p$. 任取 $t, s \in \mathbb{R}$, 设 $N_1, N_2 \mathbb{R}$ 使得 $|t| < N_1 \varepsilon, |s| < N_2 \varepsilon$, 则 $|t + s| \leqslant |t| + |s| < (N_1 + N_2)\varepsilon$. 由此可得

$$\begin{aligned}
\varphi_{t+s}(p) &= \tilde{\varphi}_{(t+s)/(N_1+N_2)}^{N_1+N_2}(p) = (\tilde{\varphi}_{t/(N_1+N_2)} \circ \tilde{\varphi}_{s/(N_1+N_2)})^{N_1+N_2}(p) \\
&= (\tilde{\varphi}_{t/(N_1+N_2)}^{N_1+N_2} \circ \tilde{\varphi}_{s/(N_1+N_2)}^{N_1+N_2})(p) = \varphi_t \circ \varphi_s(p).
\end{aligned}$$

故 φ 是单参数变换群. 并且 X 也是 φ 生成的向量场. □

注 5.60. 设 M 为光滑流形, 但不一定紧. 若 X 是 M 上具有紧支集的光滑向量场, 则 X 在 M 上确定一个单参数变换群.

命题 5.61. 设 $F : M \to M$ 为微分同胚, X 是 M 上的向量场. φ_t 是 X 在 M 上决定的局部单参数变换群. 则 $F_* X = X \Leftrightarrow F \circ \varphi_t = \varphi_t \circ F$.

证明. 若 $F \circ \varphi_t = \varphi_t \circ F$, 则 $\varphi_t = F \circ \varphi_t \circ F^{-1}$, 二者分别诱导向量场 X, $F_* X$, 因此 $F_* X = X$. 反之, $F_* X, X$ 生成相同的局部单参数变换群, 因此 $F \circ \varphi_t = \varphi_t \circ F$. □

推论 5.62. 设 G 为李群, X 是 G 上的左不变向量场, 则 X 在 G 上决定了一个单参数可微变换群.

证明. 设 X 在幺元 e 的邻域 U 内确定局部单参数变换群 $\varphi_t(|t|<\varepsilon)$. 任取 $g\in G$, 由 X 左不变可得 $(L_g)_*X=X$, 因此 $L_g\circ\varphi_t=\varphi_t\circ L_g$. 因此在 g 的开邻域 gU 内可定义

$$\varphi:(-\varepsilon,\varepsilon)\times gU\to G,\quad (t,h)\mapsto L_g\circ\varphi_t\circ L_{g^{-1}}(h)=\varphi_t(h),$$

它是 gU 内的局部单参数变换群. 仿照此前紧致流形上的操作即可得到 X 确定的单参数变换群. $\square$

注 5.63. $a:\mathbb{R}\to G$, $t\mapsto a(t)\triangleq\varphi_t(e)$ 是 G 的单参数子群.

5.3.3 李导数

定义 5.64. 设 X,Y 是流形 M 上任意两个向量场, φ_t 为 X 的单参数变换群. 称 $\mathcal{L}_XY\triangleq\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}(\varphi_t^{-1})_*Y$ 为向量场 Y 关于 X 的**李导数**.

注 5.65. 这里的定义即为: $\forall p\in M$,

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}(\varphi_t^{-1})_*Y\right)_p=\lim_{t\to0}\frac{(\varphi_t^{-1})_*Y|_{\varphi_t(p)}-Y_p}{t}.$$

命题 5.66. $\mathcal{L}_XY=[X,Y]$.

证明. 取定一点 $p\in M$, 以及 $\forall f\in C_p^\infty$, 定义 $F_p(t)=f\circ\varphi_t^{-1}(p)$, 则

$$F_p(t)=F_p(0)+\int_0^1\frac{\mathrm{d}F_p(st)}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=f(p)+t\int_0^1F'(u)\bigg|_{u=st}\mathrm{d}s\triangleq f(p)+tg_t(p).$$

其中

$$g_0(p)=F'(0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}f\circ\varphi_t^{-1}(p)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}f\circ\varphi_{-t}(p)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}f\circ\varphi_t(p)=-X_pf.$$

因此 $g_0=-Xf$. 然后可得

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_XY)_pf&=\lim_{t\to0}\frac{((\varphi_t^{-1})_*Y_{\varphi_t(p)})f-Y_pf}{t}=\lim_{t\to0}\frac{Y_{\varphi_t(p)}F_p(t)-Y_pf}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{Y_{\varphi_t(p)}(f+tg_t)-Y_pf}{t}=\lim_{t\to0}\frac{Y_{\varphi_t(p)}f-Y_pf}{t}+\lim_{t\to0}Y_{\varphi_t(p)}g_t(p)\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}(Yf)\circ\gamma_p-Y_p(Xf)=X_p(Yf)-Y_p(Xf).\end{aligned}$$

由此即可得

$$\mathcal{L}_XY=XY-YX=[X,Y].$$

$\square$

定义 5.67. 设 X 是 M 上的光滑向量场, φ_t 是 X 生成的局部单参数变换群. 设 $\omega\in\Omega^r(M)$, 称 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\varphi_t^*\omega$ 为 ω 关于 X 的**李导数**, 记为 $\mathcal{L}_X\omega$.

注 5.68. 这里的定义即为

$$(\mathcal{L}_X\omega)_p = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t^*\omega|_{\varphi_t(p)} - \omega_p}{t}.$$

命题 5.69. 设 M 为光滑流形, $X\in\Gamma(TM)$ 为光滑向量场, $\omega\in\Omega^r(M)$, 则对 $\forall Y_1,\cdots,Y_r\in\Gamma(TM)$, 有

$$(\mathcal{L}_X\omega)(Y_1,\cdots,Y_r) = X(\omega(Y_1,\cdots,Y_r)) - \sum_{k=1}^r \omega(Y_1,\cdots,\mathcal{L}_XY_k,\cdots,Y_r).$$

证明. 任取 $p\in M$, 则

$$\begin{aligned}\varphi_t^*\omega_{\varphi_t(p)}(Y_1,\cdots,Y_r) - \omega_p(Y_1,\cdots,Y_r) = \sum_{k=1}^r &(\varphi_t^*\omega_{\varphi_t(p)}((\varphi_t^{-1})_*Y_1,\cdots,(\varphi_t^{-1})_*Y_{k-1},Y_k,\cdots,Y_r) - \\ &\varphi_t^*\omega_{\varphi_t(p)}((\varphi_t^{-1})_*Y_1,\cdots,(\varphi_t^{-1})_*Y_k,Y_{k+1},\cdots,Y_r)) + \\ &\omega_{\varphi_t(p)}(Y_1,\cdots,Y_r) - \omega_p(Y_1,\cdots,Y_r).\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X\omega)_p(Y_1,\cdots,Y_r) &= \sum_{k=1}^r \lim_{t\to 0}\varphi_t^*\omega_{\varphi_t(p)}((\varphi_t^{-1})_*Y_1,\cdots,\frac{Y_k-(\varphi_t^{-1})_*Y_k}{t},Y_{k+1},\cdots,Y_r) \\ &\quad + \lim_{t\to 0}\frac{\omega_{\varphi_t(p)}(Y_1,\cdots,Y_r) - \omega_p(Y_1,\cdots,Y_r)}{t} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}(\omega_p(Y_1,\cdots,Y_r)\circ\gamma_p) - \sum_{k=1}^r \omega(Y_1,\cdots,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_t^{-1})_*Y_k,\cdots,Y_r) \\ &= X_p(\omega(Y_1,\cdots,Y_r)) - \sum_{k=1}^r \omega_p(Y_1,\cdots,\mathcal{L}_XY_k,\cdots,Y_r).\end{aligned}$$

□

定义 5.70. 设 $X\in\Gamma(TM)$, 定义**内积** $i_X:\Omega^r(M)\to\Omega^{r-1}(M)$, $\omega\mapsto i_X\omega$. 这里 $i_X\omega(Y_1,\cdots,Y_{r-1})\triangleq \omega(X,Y_1,\cdots,Y_{r-1})$, $\forall Y_k\in\Gamma(TM)$.

习题 5.71. 设 $\omega\in\Omega^k(M),\theta\in\Omega^\ell(M)$, 则 $i_X(\omega\wedge\theta) = i_X\omega\wedge\theta + (-1)^k\omega\wedge i_X\theta$.

证明. 注意到待证式两端都是多重线性的, 我们只需证该式对可解的 ω,θ 成立. 我们先证明: 对任意 1-形式 $\omega_1,\cdots,\omega_r$, 有

$$i_X(\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^r) = \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1}\omega^i(X)\omega^1\wedge\cdots\hat{\omega}^i\wedge\cdots\wedge\omega^r.$$

记 $X=Y_1$, 任取 $Y_2,\cdots,Y_r$. 注意到 $\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^r(Y_1,\cdots,Y_r)$ 即为行列式 $\det(\omega^i(Y_j))$, 沿第一列 Laplace 展开即证上式. 设 $\omega=\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^k$, $\theta=\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^\ell$, 则

$$\begin{aligned}i_X(\omega\wedge\theta) &= \sum_{i=1}^k(-1)^{i+1}\omega^i(X)\omega^1\wedge\cdots\hat{\omega}^i\wedge\cdots\wedge\omega^r\wedge\theta + \sum_{j=1}^\ell(-1)(-1)^{k+j+1}\omega\wedge\theta^1\wedge\cdots\hat{\theta}^j\wedge\cdots\wedge\theta^\ell \\ &= i_X\omega\wedge\theta + (-1)^k\omega\wedge i_X\theta.\end{aligned}$$

□

命题 5.72. 李导数算子 $\mathcal{L}_X$ 满足如下性质:

1. $\mathcal{L}_X = \mathrm{d} \circ i_X + i_X \circ \mathrm{d}$.

2. $\mathrm{d} \circ \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_X \circ \mathrm{d}$.

3. $\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_{[X,Y]}$.

4. $\mathcal{L}_X \circ i_Y - i_Y \circ \mathcal{L}_X = i_{[X,Y]}$.

证明. 我们只证明上述性质对 1-形式成立 (第 4 条对 2-形式成立).

1. 此时 $i_X\omega = \omega(X)$ 即为光滑函数. 因此

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X\omega)(Y) &= X(\omega(Y)) - \omega([X,Y]) = Y(\omega(X)) + X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]) \\ &= \mathrm{d}(i_X\omega)(Y) + \mathrm{d}\omega(X,Y) = (\mathrm{d} \circ i_X)\omega(Y) + (i_X \circ \mathrm{d})\omega(Y).\end{aligned}$$

2. 由 1 可得

$$\mathrm{d} \circ \mathcal{L}_X = \mathrm{d} \circ (\mathrm{d} \circ i_X + i_X \circ \mathrm{d}) = \mathrm{d} \circ i_X \circ \mathrm{d} = (\mathrm{d} \circ i_X + i_X \circ \mathrm{d}) \circ \mathrm{d} = \mathcal{L}_X \circ \mathrm{d}.$$

3. 计算可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y(\omega)(Z) &= X(\mathcal{L}_Y\omega(Z)) - \mathcal{L}_Y\omega([X,Z]) \\ &= (XY)\omega(Z) - X(\omega([Y,Z])) - Y(\omega([X,Z])) + \omega([Y,[X,Z]]), \\ \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X(\omega)(Z) &= Y(\mathcal{L}_X\omega(Z)) - \mathcal{L}_X\omega([Y,Z]) \\ &= (YX)\omega(Z) - Y(\omega([X,Z])) - X(\omega([Y,Z])) + \omega([X,[Y,Z]]).\end{aligned}$$

   结合李括号的 Jacobi 等式 $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ 可得

$$(\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X)(\omega)(Z) = [X,Y]\omega(Z) - \omega([Z,[X,Y]]) = \mathcal{L}_{[X,Y]}\omega(Z).$$

4. 对于 2-形式 ω, 计算可得

$$(\mathcal{L}_X \circ i_Y)\omega(Z) = X(i_Y\omega(Z)) - (i_Y\omega)([X,Z]) = X(\omega(Y,Z)) - \omega(Y,[X,Z]).$$

$$(i_Y \circ \mathcal{L}_X)\omega(Z) = \mathcal{L}_X\omega(Y,Z) = X(\omega(Y,Z)) - \omega([X,Y],Z) - \omega(Y,[X,Z]).$$

   由此可得

$$(\mathcal{L}_X \circ i_Y - i_Y \circ \mathcal{L}_X)\omega(Z) = \omega([X,Y],Z) = i_{[X,Y]}(Z).$$

□

推论 5.73. 设 M 为光滑流形, 任取 $\omega \in \Omega^k(M)$, $\theta \in \Omega^\ell(M)$, 以及向量场 $X \in \Gamma(TM)$, 则

$$\mathcal{L}_X(\omega \wedge \theta) = \mathcal{L}_X\omega \wedge \theta + \omega \wedge \mathcal{L}_X\theta.$$

证明. 计算可得

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(\omega\wedge\theta) &= (\mathrm{d}\circ i_X + i_X\circ \mathrm{d})(\omega\wedge\theta)\\
&= \mathrm{d}(i_X\omega\wedge\theta + (-1)^k\omega\wedge i_X\theta) + i_X(\mathrm{d}\omega\wedge\theta + (-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}\theta)\\
&= ((\mathrm{d}\circ i_X)\omega)\wedge\theta + (-1)^{k-1}i_X\omega\wedge\mathrm{d}\theta + (-1)^k\mathrm{d}\omega\wedge i_X\theta + \omega\wedge((\mathrm{d}\circ i_X)\theta)\\
&+ ((i_X\circ\mathrm{d})\omega)\wedge\theta + (-1)^{k+1}\mathrm{d}\omega\wedge i_X\theta + (-1)^k i_X\omega\wedge\mathrm{d}\theta + \omega\wedge((i_X\circ\mathrm{d})\theta)\\
&= \mathcal{L}_X\omega\wedge\theta + \omega\wedge\mathcal{L}_X\theta.
\end{aligned}
$$

□

注 5.74. 类似于向量场和微分形式李导数的定义, 可以定义一般张量场的李导数.

现在我们用李导数重新证明以下此前伴随表示的一个定理.

定理 5.75. 设 $\mathrm{Ad}: G\to \mathrm{GL}(\mathfrak{g},\mathbb{R})$ 是李群 G 的伴随表示, $\mathrm{ad} = \mathrm{Ad}_*|_e : T_eG\to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g},\mathbb{R})$ 是李代数的伴随表示. 那么, $\forall X, Y\in T_eG$, 有

$$\mathrm{ad}(X)(Y) = [X,Y].$$

证明. 设 $\tilde{X}$ 为 X 生成的左不变向量场, φ_t 是 $\tilde{X}$ 生成的单参数变换群. 定义 $\psi_t = \varphi_t(e)$ 为单参数子群. 由于

$$\varphi_t(g) = \varphi_t\circ L_g(e) = L_g\circ\varphi_t(e) = L_g(\psi_t) = R_{\psi_t}(g).$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ad}(X)(Y) = \mathrm{Ad}_*|_e(X)(Y) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(\mathrm{Ad}(\psi_t))(Y) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(R_{\psi_t^{-1}})_*\circ(L_{\psi_t})_*(Y)\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{(R_{\psi_t^{-1}})_*\tilde{Y}|_{\psi_t} - Y}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(\psi_t^{-1})_*\tilde{Y}|_{\psi_t} - Y}{t}\\
&= (\mathcal{L}_X Y)|_e = [X,Y].
\end{aligned}
$$

□

5.3.4 李氏变换群

定义 5.76. 设 M 为光滑流形, G 为 r 维李群. 若有光滑映射 $\theta: G\times M\to M$, $(g,x)\mapsto\theta(g,x)$. 记 $g\cdot x\triangleq\theta(g,x)$, 满足:

1. $\forall x\in M$, $e\cdot x = x$.

2. $\forall g,h\in G$, $g\cdot(h\cdot x) = (gh)\cdot x$.

称 G 是左作用在 M 上的**李氏变换群**.

例 5.77. 1. $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $M = \mathbb{R}^n$ 为 n 维列向量全体. 考虑函数 $\theta: G\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $(g,x)\mapsto gx$, 则 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 是作用在 $\mathbb{R}^n$ 上的李氏变换群.

2. $G = \mathbb{S}^1 = \{\mathrm{e}^{it} : t \in \mathbb{R}\}$, $M = \mathbb{C}^n = \{z = (z^1, \cdots, z^n) : z^i \in \mathbb{C}\}$, 考虑函数 $\theta : G \times M \to M$, $(\mathrm{e}^{it}, z) = e^{it}z \triangleq (e^{it}z_1, \cdots, e^{it}z_n)$, 则 $\mathbb{S}^1$ 是作用在 $\mathbb{C}^n$ 上的李氏变换群.

定义 5.78. 设 G 是作用在 M 上的李氏变换群.

1. $\forall g \in G \setminus \{e\}$, $\exists x \in M$, 使得 $g \cdot x \neq x$, 则称 G 在 M 上的作用是**有效的**.
2. $\forall g \in G \setminus \{e\}$, $\forall x \in M$, 使得 $g \cdot x \neq x$, 则称 G 在 M 上的作用是**自由的**.
3. 任给 $x, y \in M$, $\exists g \in G$ 使得 $g \cdot x = y$, 则称 G 在 M 上的作用是**可迁的**.

定义 5.79. 设 $X \in T_eG$, $\varphi_X(t)$ 是 X 生成的单参数子群. 则 $\forall p \in M$, $\varphi_X(t) \cdot p$ 是 M 上过 p 点的光滑曲线. 定义

$$\bar{X}_p = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \varphi_X(t) \cdot p \in T_pM,$$

则 $\bar{X}$ 是 M 上的光滑向量场 (光滑性由 θ 的光滑性得知), 称为 X 在 M 上决定的**基本向量场**. 记基本向量场全体为 $\bar{\mathfrak{g}}$.

定理 5.80. 设 $\theta : G \times M \to M$ 是李氏变换群, $\mathfrak{g} = T_eG$, $\bar{\mathfrak{g}}$ 是 M 上所有的基本向量场全体.

1. $\sigma : \mathfrak{g} \to \bar{\mathfrak{g}}$, $X \mapsto \bar{X}$ 是李代数同态.
2. 若 θ 是有效的, 则 σ 是李代数同构.
3. 若 θ 是自由的, $\{X_1, \cdots, X_r\}$ 是 T_eG 的一组基, 则 $\{\bar{X}_1, \cdots, \bar{X}_r\}$ 处处线性无关.

证明. 固定一点 $p \in M$, 定义映射 $\sigma_p : G \to M$, $g \mapsto g \cdot p$. 设 φ_X 是 X 确定的单参数子群.

1. 计算可得

   $$(\sigma_p)_*|_e(X) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\varphi_X(t) \cdot p) = \bar{X}|_p = \sigma(X)_p.$$

   由此可得 σ 是线性映射. 设 $\tilde{X}$ 是 X 生成的右不变向量场, 则

   $$(\sigma_p)_*|_g(\tilde{X}|_g) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} ((\varphi_X(t)g) \cdot p) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \varphi_X(t) \cdot (g \cdot p) = \bar{X}|_{g \cdot p}.$$

   由此可得 $(\sigma_p)_*\tilde{X} = \bar{X}$. 因此

   $$[\bar{X}, \bar{Y}] = [(\sigma_p)_*\tilde{X}, (\sigma_p)_*\tilde{Y}] = (\sigma_p)_*[\tilde{X}, \tilde{Y}] = (\sigma_p)_*\widetilde{[X, Y]} = \overline{[X, Y]}.$$

   因此 $(\bar{\mathfrak{g}}, [\cdot, \cdot])$ 是李代数, 并且 σ 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\bar{\mathfrak{g}}$ 的李代数同构.

2. 满射是显然的, 下证 σ 单, 即证 $\bar{X} = 0 \Rightarrow X = 0$. 由定义可得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\varphi_X(t) \cdot p = 0$. 由此可得

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_X(t) \cdot p) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} (\varphi_X(t+s) \cdot p) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} (\varphi_X(s) \cdot (\varphi_X(t) \cdot p)) = 0.$$

   因此 $\varphi_X(t) \cdot p = \varphi_X(0) \cdot p = p$, $\forall p \in M$. 由 θ 有效可得 $\varphi_X(t) = e$, $\forall t \in \mathbb{R}$, 从而 $X = 0$.

3. 我们只需证明: 若 $X \neq 0$, 则 $\bar{X}$ 处处非零. 假设存在 $p \in M$ 使得 $\bar{X}_p = 0$. 对固定的 $g \in G$, 我们定义函数 $\rho_g : M \to M$, $q \mapsto g \cdot q$. 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_X(t) \cdot p) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}(\varphi_X(t+s) \cdot p) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}(\varphi_X(t) \cdot \varphi_X(s) \cdot p) = (\rho_{\varphi_X(t)})_{*,p}(\bar{X}_p) = 0.$$

因此 $\varphi_X(t) \cdot p = \varphi_X(0) \cdot p = p$, $\forall t \in \mathbb{R}$. 由 θ 自由可得 $\varphi_X(t) = e$, $\forall t$. 因此 $X = 0$, 矛盾!

□

6　向量丛与主丛

6.1　向量丛

6.1.1　定义

定义 6.1. 设 E, M 为光滑流形, $\pi : E \to M$ 为光滑映射, k 为非负整数. 若三元组 (π, E, M) 满足:

1. π 是淹没.
2. $\forall p \in M$, $E_p \triangleq \pi^{-1}(p)$ 是向量空间 (称之为 p 点的**纤维**, fiber).
3. $\forall p \in M$, 存在 p 的邻域 U 以及微分同胚 φ_U 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

4. 对任意固定的 p, $\varphi_U : E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^k$ 是线性同构.

则称 (π, E, M) 是秩为 k 的**向量丛**, E 称为**全空间**, M 称为**底空间**, π 称为**丛投影**.

注 6.2. 称 φ_U 为 E 的**局部平凡化** (local trivialigation), 此时也称 E 在 U 上**可平凡化**.

例 6.3.

1. 设 M 为光滑流形, $E \triangleq M \times \mathbb{R}^k$, $\pi : E \to M$, $(p, v) \mapsto p$, 容易验证 (π, E, M) 为向量丛, 称之为**平凡丛**.
2. 若 $\dim M = m$, 则 TM, T^*M 是秩为 m 的向量丛.

证明. 我们来验证 2, 只证明 TM 是秩为 m 的向量丛. 设 M 的一个坐标系为 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$.

1. 定义 $\pi : TM \to M$, $(p, v) \mapsto p$. 在切丛上自然诱导的坐标 $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha) : \alpha \in A\}$ 下计算可得

$$\varphi_\beta \circ \pi \circ \psi_\alpha^{-1}(u^1, \cdots, u^{2m}) = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(u^1, \cdots, u^m).$$

   由此即可得 π 是秩为 m 的常秩映射, 从而为淹没.

2. 任取 $p \in M$, $\pi^{-1}(p)$ 即为切空间 T_pM, 是向量空间.
3. $\forall p \in M$, 设 $(U, \varphi; x^i)$ 为 p 所在的坐标, 定义微分同胚 $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^m$ 为

$$v = \sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_q \mapsto (q, v^1, \cdots, v^m).$$

   直接验证可得 $\pi = \pi_1 \circ \varphi_U$.

4. 固定一点 p, $\varphi_U : T_pM \to \{p\} \times \mathbb{R}^m$ 自然是线性同构.

$\square$

注 6.4. 类似可验证 $T^{(r,s)}M$ 是秩为 m^{r+s} 的向量丛.

定义 6.5. 设 $(\pi_E, E, M), (\pi_F, F, M)$ 为向量丛. 若光滑映射 $\psi : E \to F$ 使得图表

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\pi_E"'] & & F \arrow[dl, "\pi_F"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

可交换, 并且 $\forall p \in M$, $\psi_{E_p} : E_p \to F_p$ 为线性映射 (resp. 同构), 则称 ψ 是**丛同态** (resp. **丛同构**). 若 ψ 是丛同构, 则称向量丛 E 与 F **同构**.

6.1.2 向量丛的构造

回顾 设 V, W 是向量空间, $\dim V = m$, $\dim W = n$. 我们有如下定义:

- $V^* = L(V, \mathbb{R})$ 表示 V 上的线性泛函全体, $\dim V^* = m$.
- $\Lambda^k(V)$ 表示 V 上的反称张量全体, 我们证明过

$$\Lambda^k(V) = \operatorname{span}\{v^{i_1} \wedge \cdots \wedge v^{i_k} : 1 \leqslant i_1, \cdots, i_k \leqslant m, v_1, \cdots, v_m \text{为} V \text{的一组基}\}.$$

$$\dim \Lambda^k(V) = \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

- $V \oplus W = \{(v, w) : v \in V, w \in W\}$. 若 $\{v_1, \cdots, v_m\}, \{w_1, \cdots, w_n\}$ 分别为 V, W 的基, 则 $\{(v_i, 0), (0, w_\alpha) : 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant \alpha \leqslant n\}$ 为 $V \oplus W$ 的一组基, 进而 $\dim V \oplus W = m + n$.
- $V \otimes W = L(V^* \times W^*, \mathbb{R})$ 表示 $V^* \times W^*$ 上的线性泛函全体, $\{v_i \otimes w_\alpha : 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant \alpha \leqslant n\}$ 为 $V \otimes W$ 的一组基, $\dim V \otimes W = mn$.
- $\hom(V, W) = L(V, W)$ 表示 V 到 W 的线性映射全体, 容易验证 $\hom(V, W) \cong V^* \otimes W$(考虑映射 $\varphi : \hom(V, W) \to V^* \otimes W$, 定义为 $(\varphi T)(v, f) = f(Tv)$), 从而 $\dim \hom(V, W) = mn$.

例 6.6. 设 E, F 为 M 上的向量丛, 秩分别为 m, n. 可以按如下几种方式构造向量丛:

1. **对偶丛**: $E^* = \bigsqcup_{p \in M} (E_p)^*$. 记 $\{e_1|_p, \cdots, e_m|_p\}$ 为 E_p 的一组基, $\{f_1|_p, \cdots, f_m|_p\}$ 为其对偶基. 定义 $\pi' : E^* \to M$, $\sum a^i f_i|_p \mapsto p$, 容易验证 E^* 的纤维为 $(E^*)_p = (E_p)^*$, $\varphi'_U(\sum a^i f_i|_p) \triangleq \varphi_U(\sum a^i e_i|_p)$ 为一个局部平凡化, 秩为 m. 下列丛的构造与之类似, 故我们只指明它们的纤维与秩.
2. k **次外积丛**: $\wedge^k E = \bigsqcup_{p \in M} \wedge^k E_p$, $(\wedge^k E)_p = \wedge^k E_p$. 秩为 $\binom{m}{k}$.
3. **直和丛**: $E \oplus F = \bigsqcup_{p \in M} E_p \oplus F_p$, $(E \oplus F)_p = E_p \oplus F_p$. 秩为 $m + n$.
4. **张量积丛**: $E \otimes F = \bigsqcup_{p \in M} E_p \otimes F_p$, $(E \otimes F)_p = E_p \otimes F_p$, 秩为 mn.
5. hom **丛**: $\hom(E, F) = \bigsqcup_{p \in M} \hom(E_p, F_p)$, $(\hom(E, F))_p = \hom(E_p, F_p)$, 秩为 mn.

例 6.7. 设 $f : M \to N$ 为光滑映射, E 是 N 上秩为 k 的向量丛. $\forall p \in M$, 定义 $(f^*E)_p = E_{f(p)}$, 则 f^*E 是 M 上秩为 k 的向量丛, 称为 f 的**拉回丛**, 有时也记为 $f^{-1}(E)$.

6.1.3 截面

定义 6.8. 设 (π, E, M) 为向量丛, $U \subset M$ 为开集. 若光滑映射 $s : U \to E$ 满足 $\pi \circ s = \mathbb{1}_U$, 则称 s 为 U 上的一个**截面** (section), 所有截面全体记为 $\Gamma(U; E)$.

注 6.9. 1. 通俗来说, 截面就是在 U 上每点 p 处, 从纤维 E_p 中选定一个向量 $s(p)$, 并且该选取光滑地依赖于 p.

2. 当 $E = TM, T^*M$ 时, 截面即分别为光滑向量场、线性微分式.

命题 6.10. 设 (π, E, M) 是秩为 k 的向量丛, U 是 M 的开集. E 在 U 上可平凡化 $\Leftrightarrow \exists e_1, \cdots, e_k \in \Gamma(U; E)$ 使得 $\forall p \in U$, $e_1(p), \cdots, e_k(p)$ 是 E_p 的一组基.

证明. $\Leftarrow$: 此时定义映射 $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ 为

$$s(p) = \sum_{i=1}^{k} v^i e_i(p) \mapsto (p, v^1, \cdots, v^k).$$

容易验证这是一个局部平凡化.

$\Rightarrow$: 记 $\mathbf{e}_i = (0, \cdots, 1^{i\text{th}}, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^k$, 设 φ_U 是 E 在 U 上的局部平凡化, 定义

$$e_i : U \to \pi^{-1}(U), \quad p \mapsto \varphi_U^{-1}(p, \mathbf{e}_i).$$

光滑性显然, 由 $\pi \circ e_i(p) = \pi \circ \varphi_U^{-1}(p, \mathbf{e}_i) = \pi_1(p, \mathbf{e}_i) = p$ 可得 $e_i \in \Gamma(U; E)$. 由 $\varphi_U|_{E_p}$ 是线性同构容易看出 $\{e_1(p), \cdots, e_n(p)\}$ 是 E_p 的一组基. □

注 6.11. 1. 根据命题, 给定 U 上 k 个处处线性无关的截面 $e \triangleq (e_1, \cdots, e_k)$, 也称 e 为 E 的局部平凡化, 或 e 是 E 的一个 **(局部) 标架**.

2. 设 $s \in \Gamma(U; E)$, 则 $\exists \sigma_i : U \to \mathbb{R}$, 使得 $s(p) = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(p) e_i(p)$. 记 $\sigma \triangleq (\sigma_1, \cdots, \sigma_k)^T : U \to \mathbb{R}^k$, 称 σ 为 s 的**局部表示**.

3. 设 e' 是 E 在 V 上的局部平凡化, $U \cap V \neq \varnothing$. 则存在光滑映射 $g_{UV} : U \cap V \to \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$, $p \mapsto g(p)$, 使得 $e = e'g$. 称 g_{UV} 为**过渡函数**.

4. 设 $\sigma' : V \to \mathbb{R}^k$ 是 s 的另一局部表示, 则 $\sigma' = g\sigma$.

习题 6.12. 设 M 是 m 维光滑流形, $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ 为 M 的开覆盖. $\forall \alpha . \beta \in A$, $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ 满足:

1. $g_{\alpha\alpha} : U_\alpha \to \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$, $p \mapsto g_{\alpha\alpha}(p) = \mathbb{1}$.

2. 当 $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \varnothing$ 时, $g_{\alpha\beta}(p) \cdot g_{\beta\gamma}(p) \cdot g_{\gamma\alpha}(p) = I$.

试在 M 上构造一个秩为 k 的向量丛以 $g_{\alpha\beta}$ 为过渡函数.

证明. 由已知可得 $g_{\alpha\beta}(p)\cdot g_{\beta\alpha}(p)=I$. 定义

$$\tilde{E}=\bigcup_{\alpha\in A}\{\alpha\}\times U_\alpha\times\mathbb{R}^k.$$

定义 $\tilde{E}$ 上的关系 $\sim$ 为 $(\alpha,p,x)\sim(\beta,q,y)\Leftrightarrow p=q\in U_\alpha\cap U_\beta$, $x=g_{\alpha\beta}(p)y$. 由 $g_{\alpha\beta}$ 所满足的几条性质容易验证 $\sim$ 是等价关系. 定义等价类全体为 $E=\tilde{E}/\sim$.

首先构造 E 上的光滑结构. 定义 $\pi:E\to M$, $[\alpha,p,x]\mapsto p$. 这是良定的连续映射. 故 $\{\pi^{-1}(U_\alpha):\alpha\in A\}$ 为 E 的一个开覆盖. 设 U_α 所在的局部坐标为 $(U_\alpha,\varphi_\alpha;y^i_\alpha)$, 定义

$$\psi_\alpha:\pi^{-1}(U_\alpha)\to\mathbb{R}^{m+k},\quad [\alpha,p,x]\mapsto(y^1_\alpha,\cdots,y^m_\alpha,x^1,\cdots,x^k).$$

则 $\psi_\alpha^{-1}(y,x)=[\alpha,\varphi_\alpha^{-1}(y),x]$. 由此可得

$$\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}(y,x)=(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}(y),x),$$

为光滑映射. 因此 $\{\pi^{-1}(U_\alpha,\psi_\alpha):\alpha\in A\}$ 即为 E 的一个光滑结构. 在此光滑结构下, 计算 π 的坐标表示为

$$\varphi_\beta\circ\pi\circ\psi_\alpha^{-1}(y,x)=\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}(y).$$

由此可得 π 是淹没.

任取 $p\in M$, $E_p=\pi^{-1}(p)=\{[\alpha,p,x]:\alpha\in A,x\in\mathbb{R}^k,U_\alpha\ni p\}$. 定义 E_p 上的加法和数乘为

$$[\alpha,p,x]+[\beta,p,y]=[\alpha,p,x+g_{\alpha\beta}(p)y],\quad \lambda[\alpha,p,x]=[\alpha,p,\lambda x].$$

我们来证明在上述运算下 E_p 成为线性空间. 只证明较不平凡的几条性质.

1. 依定义 $[\beta,p,y]+[\alpha,p,x]=[\beta,p,y+g_{\beta\alpha}(p)x]$. 由 $g_{\alpha\beta}\circ g_{\beta\alpha}=\mathbb{1}$ 可得

$$g_{\alpha\beta}(p)(y+g_{\beta\alpha}(p)x)=x+g_{\alpha\beta}(p).$$

   所以 $[\alpha,p,x+g_{\alpha\beta}(p)y]=[\beta,p,y+g_{\beta\alpha}(p)x]$, 加法可交换.

2. 计算可得

$$([\alpha,p,x]+[\beta,p,y])+[\gamma,p,z]=[\alpha,p,x+g_{\alpha\beta}(p)y]+[\gamma,p,z]=[\alpha,p,x+g_{\alpha\beta}(p)y+g_{\alpha\gamma}(p)z],$$

$$[\alpha,p,z]+([\beta,p,y]+[\gamma,p,z])=[\alpha,p,x]+[\beta,p,y+g_{\beta\gamma}(p)z]=[\alpha,p,x+g_{\alpha\beta}(p)y+g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}(p)z].$$

   由 $g_{\alpha\beta}\cdot g_\beta\gamma=g_{\alpha\gamma}$ 即可得加法结合律成立.

其余性质显然. 定义映射

$$\phi_\alpha:\pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times\mathbb{R}^k,\quad [\alpha,p,x]\mapsto(p,x).$$

在局部坐标下计算可得坐标表示为

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_\alpha(y,x)&=(\varphi_\gamma\times\mathbb{1})\circ\phi_\alpha([\beta,\varphi_\beta^{-1}(y),x])\\&=(\varphi_\gamma\times\mathbb{1})\circ\phi_\alpha([\alpha,\varphi_\beta^{-1}(y),g_{\alpha\beta}(\varphi_\beta^{-1}(y))x])\\&=((\varphi_\gamma\circ\varphi_\beta^{-1})(y),g_{\alpha\beta}(\varphi_\beta^{-1}(y))x).\end{aligned}$$

由此可得 ϕ_α 是微分同胚. 设 $\pi_1 : U_\alpha \times \mathbb{R}^k \to U_\alpha$ 为自然投影. 则

$$(\pi_1 \circ \varphi_\alpha)([\alpha, p, x]) = \pi_1(p, x) = p \Rightarrow \pi_1 \circ \varphi_\alpha = \pi.$$

所以 φ_α 是 E 在 U_α 上的局部平凡化. 容易验证 $\varphi_\alpha : E_p \to \mathbb{R}^k$ 是线性同构. 所以 (π, E, M) 是 M 上秩为 k 的向量丛.

最后我们来证明 $g_{\alpha\beta}$ 是 E 的过渡映射. 实际上, 有

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(p, x) = \phi_\alpha([\beta, p, x]) = (p, g_{\alpha\beta}(p)x).$$

按照上一命题中局部标架的选取, 容易看到 $g_{\alpha\beta}$ 即为过渡函数. □

6.2 向量丛的联络

6.2.1 联络的定义

定义 6.13. 设 E 是 M 上的向量丛. 若实线性映射 $\nabla : \Gamma(M; E) \to \Gamma(M; T^*M \otimes E)$ 满足: $\forall f \in C^\infty(M)$, $s \in \Gamma(M; E)$, 有:

$$\nabla(fs) = \mathrm{d}f \otimes s + f\nabla s, \quad \nabla(s_1 + s_2) = \nabla s_1 + \nabla s_2.$$

则称 ∇ 为 E 上的一个**联络** (connection). E 上所有联络全体记为 $\mathcal{A}(E)$.

例 6.14. $M = \mathbb{R}^N$, 对 M 上的任意光滑向量场 $X = (X^1, \cdots, X^N) = \sum_{k=1}^N X^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, 定义

$$\nabla X \triangleq (\mathrm{d}X^1, \cdots, \mathrm{d}X^N) = \sum_{k=1}^N \mathrm{d}X^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

则 ∇ 是 $T\mathbb{R}^N$ 上的联络.

例 6.15. $E = M \times \mathbb{R}^k$, $s : M \to M \times \mathbb{R}^k$, $p \mapsto (p, s_1(p), \cdots, s_k(p))$, 定义 $\nabla s \triangleq (p, \mathrm{d}s_1, \cdots, \mathrm{d}s_k)$. 则 ∇ 是 E 上的联络.

注 6.16. 其实可以这样理解: ∇s_p 即为映射 $T_pM \to E_p$, $X_p \mapsto (\mathrm{d}s_1(X_p), \cdots, \mathrm{d}s_k(X_p))$. 所以 $\nabla \in \Gamma(\hom(TM, E)) = \Gamma(T^*M \otimes E)$.

例 6.17. 设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^N$ 是嵌入子流形, 对 Σ 上的任意向量场 $X = (X^1, \cdots, X^N) = \sum_{k=1}^N X^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, 定义 $\mathrm{d}X = (\mathrm{d}X^1, \cdots, \mathrm{d}X^N) = \sum \mathrm{d}X^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^k}$, 则 $\mathrm{d}X \in \Gamma(\Sigma; T^*\Sigma \otimes T\mathbb{R}^N)$. 令 $\pi : T\mathbb{R}^N \to T\Sigma$ 为正交投影, 则 $\nabla = \pi \circ \mathrm{d}$ 是 $T\Sigma$ 上的联络.

引理 6.18. 设 $\pi : E \to M$ 为向量丛, $\nabla_i : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$ 为联络, 其中 $i = 1, \cdots, m$, $f_i \in C^\infty(M)$ 且 $\sum_{i=1}^m f_i = 1$, 则 $\nabla = \sum_{i=1}^m f_i \nabla_i : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$ 是联络.

证明. 直接验证可得

$$\nabla(s_1 + s_2) = \sum_{i=1}^m f_i \nabla_i (s_1 + s_2) = \nabla(s_1) + \nabla(s_2).$$

$$\nabla(fs) = \sum_{i=1}^m f_i (\mathrm{d}f \otimes s + f\nabla_i s) = \mathrm{d}f \otimes s + f\nabla s.$$

□

下面我们引入记号: 设 $\pi : F \to M$ 为向量丛, 记 $\Omega^p(F) \triangleq \Gamma(\wedge^p T^*M \otimes F)$.

引理 6.19. 设 $A : \Gamma(E) \to \Omega^p(F)$ 是 $C^\infty(M)$-线性的, 则存在 $a \in \Omega^p(\hom(E,F))$, 使得 $A(s) = a \cdot s$.

证明. 设 $\mathrm{rank}(E) = m, \mathrm{rank}(F) = n$. 记 $e_1, \cdots, e_m$ 为 E 的一个局部平凡化, $f_1, \cdots, f_n$ 为 F 的一个局部平凡化. 由此可得 $e_1^*, \cdots, e_m^*$ 是 E^* 的一个局部平凡化. 由 $A(e_i) \in \Omega^p(F)$ 可得存在 $\omega_i^\alpha \in \Omega^p(M)$ 使得

$$A(e_i) = \sum_\alpha \omega_i^\alpha \otimes f_\alpha.$$

定义 $a = \sum_{i,\alpha} \omega_i^\alpha \otimes e_i^* \otimes f_\alpha \in \Omega^p(\hom(E,F))$, 则

$$A(s) = A\left(\sum_{k=1}^m s_i e_i\right) = \sum_{i,\alpha} e_i^\alpha(s) \cdot \omega_i^\alpha \otimes f_\alpha = a \cdot s.$$

□

定理 6.20. 设 $\pi : E \to M$ 为向量丛.

1. $\mathcal{A}(E)$ 非空.
2. 设 $\nabla, \tilde{\nabla} \in \mathcal{A}(E)$, 则 $\nabla - \tilde{\nabla} \in \Omega^1(\mathrm{End}(E))$.
3. 设 $\nabla \in \mathcal{A}(E)$, $a \in \Omega^1(\mathrm{End}(E))$, 则 $\nabla + a \in \mathcal{A}(E)$.

证明. 设 M 的秩为 k.

1. 设 $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ 为 M 的开覆盖, φ_α 为 E 在 U_α 上的局部平凡化. 回忆在平凡向量丛 $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ 上, 可以定义联络 $\mathrm{d}s(p) = (p, \mathrm{d}s^1(p), \cdots, \mathrm{d}s^k(p))$. 故任取 $s \in \Gamma(E)$, $\mathrm{d}(\varphi_\alpha \circ s) \in \Gamma(T^*M \otimes (E \times \mathbb{R}^k))$. 然后通过 φ_α 将其拉回到从 $T^*M \times \pi^{-1}(U_\alpha)$, 即可定义 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上的联络

   $$\nabla^\alpha(s) = \varphi_\alpha^{-1}(\mathrm{d}(\varphi_\alpha \circ s)).$$

   设 $\{\psi_\alpha : \alpha \in A\}$ 为从属于 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解, 则由引理 6.17 可得 $\nabla \triangleq \sum_\alpha f_\alpha \nabla^\alpha \in \mathcal{A}(E)$.

2. 计算可得

   $$(\nabla - \tilde{\nabla})(fs) = (\mathrm{d}f \otimes s + f\nabla s) - (\mathrm{d}f \otimes s - f\tilde{\nabla}s) = f(\nabla - \tilde{\nabla})s.$$

   故 $\nabla - \tilde{\nabla} : \Gamma(M) \to \Omega^1(M)$ 是 $C^\infty(M)$-线性的, 由引理 6.18 可得 $\nabla - \tilde{\nabla} = a \in \Omega^1(\mathrm{End}(E))$.

3. 直接验证可得

   $$(\nabla + a)(fs) = \mathrm{d}f \otimes s + f\nabla s + fa(s) = \mathrm{d}f \otimes s + f(\nabla + a)(s).$$

   因此 $\nabla + a \in \mathcal{A}(E)$.

□

注 6.21. 1. 设 $e=(e_1,\cdots,e_k)$ 是 E 的一个局部平凡化, 则存在 1-形式 $\omega_i^j\in\Omega^1(U)$, 使得

$$\nabla e_i=\sum_{j=1}^k e_j\omega_i^j.$$

因此存在 k 阶 1-形式方阵 $A\triangleq A(\nabla,e)\in\Omega^1(U;\mathrm{gl}_k(\mathbb{R}))$ 使得 $\nabla e=e\cdot A$.

2. $\forall s\in\Gamma(E)$, 在局部有 $s=e\cdot\sigma$. 因此

$$\nabla s=\nabla e\cdot\sigma+e\otimes\mathrm{d}\sigma=e\cdot(A\sigma+\mathrm{d}\sigma).$$

因此, 有时候也记 $\nabla=\mathrm{d}+A$.

3. 设 $\tilde{e}=eg$ 为另一局部平凡化, 则

$$\nabla\tilde{e}=\nabla e\cdot g+e\otimes\mathrm{d}g=e\cdot(Ag+\mathrm{d}g)=\tilde{e}\cdot g^{-1}(Ag+\mathrm{d}g).$$

所以 $\tilde{A}=g^{-1}Ag+g^{-1}\mathrm{d}g$.

4. $\forall X\in\Gamma(TM)$, $\nabla s\in\Gamma(T^*M\otimes E)$, 则 $\nabla_X s\triangleq i_X\nabla s\in\Gamma(E)$, 称之为 ∇_X 为 s 沿方向 X 的**共变导数**.

6.2.2 曲率形式

定义 6.22. 设 ∇ 是向量丛 $\pi:E\to M$ 上的联络, 定义 $\mathrm{d}_\nabla:\Omega^p(E)\to\Omega^{p+1}(E)$, $\omega\otimes s\mapsto\mathrm{d}_\nabla(\omega\otimes s)\triangleq\mathrm{d}\omega\otimes s+(-1)^p\omega\wedge\nabla s$, 其中 $\omega\in\Omega^p(M)$, $s\in\Gamma(E)$.

命题 6.23. 设 $\alpha\in\Omega^q(M)$, $\omega\in\Omega^p(E)$, $\mathrm{d}_\nabla(\alpha\wedge\omega)=\mathrm{d}\alpha\wedge\omega+(-1)^q\alpha\wedge\mathrm{d}_\nabla\omega$.

证明. 设 $\omega=\theta\otimes s$, 其中 $\theta\in\Omega^p(M)$, $s\in\Gamma(E)$. 计算可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_\nabla(\alpha\wedge\omega)&=\mathrm{d}_\nabla((\alpha\wedge\theta)\otimes s)=\mathrm{d}(\alpha\wedge\theta)\otimes s+(-1)^{p+q}(\alpha\wedge\theta)\wedge\nabla s\\&=(\mathrm{d}\alpha\wedge\theta+(-1)^q\alpha\wedge\mathrm{d}\theta)\otimes s+(-1)^{p+q}\alpha\wedge(\theta\wedge\nabla s)\\&=\mathrm{d}\alpha\wedge(\theta\otimes s)+(-1)^q\alpha\wedge(\mathrm{d}\theta\otimes s+(-1)^p\theta\wedge\nabla s)\\&=\mathrm{d}\alpha\wedge\omega+(-1)^q\alpha\wedge\mathrm{d}_\nabla\omega.\end{aligned}$$

□

命题 6.24. 存在 $F_\nabla\in\Omega^2(\mathrm{End}(E))$, 使得 $\mathrm{d}_\nabla^2=F_\nabla$. 即 $\forall\omega\in\Omega^p(E)$, 有 $\mathrm{d}_\nabla(\mathrm{d}_\nabla\omega)=F_\nabla\wedge\omega$.

证明. 首先证明 $p=0$ 的情况, 此时 $\mathrm{d}_\nabla^2:\Gamma(E)\to\Omega^2(E)$. 计算可得

$$\mathrm{d}_\nabla^2(fs)=\mathrm{d}_\nabla(\mathrm{d}f\otimes s+f\nabla s)=\mathrm{d}^2f\otimes\omega-\mathrm{d}f\wedge\nabla s+\mathrm{d}f\wedge\nabla s+f\mathrm{d}_\nabla(\nabla s)=f\mathrm{d}_\nabla^2 s.$$

所以 d_∇^2 是 $C^\infty(M)$-线性的. 由引理 6.18 可得存在 $F_\nabla\in\Omega^2(\mathrm{End}(E))$ 使得 $\mathrm{d}_\nabla^2=F_\nabla$.

对于一般的 p, 设 $\omega=\theta\otimes s$, 其中 $\theta\in\Omega^p(M)$, $s\in\Gamma(E)$, 则

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_\nabla^2\omega &= \mathrm{d}_\nabla(\mathrm{d}\theta\otimes\omega+(-1)^p\theta\wedge\nabla s)\\
&= \mathrm{d}^2\theta\otimes\omega+(-1)^{p+1}\mathrm{d}\theta\wedge\nabla s+(-1)^p\mathrm{d}\theta\wedge\nabla s+\theta\wedge\mathrm{d}_\nabla^2 s\\
&= \theta\wedge F_\nabla s = F_\nabla\wedge(\theta\otimes s)=F_\nabla\wedge\omega.
\end{aligned}$$

□

定义 6.25. 称 $F_\nabla=\mathrm{d}_\nabla^2\in\Omega^2(\mathrm{End}(E))$ 为联络 ∇ 的**曲率形式**.

曲率的意义 设 (U,x^i) 为 M 的局部坐标, 记切向量 $\partial_i\triangleq\frac{\partial}{\partial x^i}$, 以及共变导数 $\nabla_i\triangleq\nabla_{\partial_i}$, 则

$$\nabla=\sum_{i=1}^m \mathrm{d}x^i\otimes\nabla_i.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
F_\nabla\wedge s=\mathrm{d}_\nabla(\nabla s)&=\sum_{i=1}^m\mathrm{d}_\nabla(\mathrm{d}x^i\otimes\nabla_i s)=-\sum_{i=1}^m\mathrm{d}x^i\wedge\nabla(\nabla_i s)\\
&=-\sum_{i=1}^m\mathrm{d}x^i\wedge\sum_{j=1}^m\mathrm{d}x^j\otimes\nabla_j(\nabla_i s)=\sum_{i,j=1}^m\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j\otimes\nabla_i(\nabla_j s).
\end{aligned}$$

所以

$$F_\nabla(\partial_i,\partial_j)(s)=\nabla_i(\nabla_j s)-\nabla_j(\nabla_i s).$$

所以曲率反映了二次方向共变导数的交换程度.

曲率形式的局部计算 设 e 是向量丛 E 的局部标架, σ 是 $s\in\Gamma(E)$ 的局部表示, 即 $s=e\cdot\sigma$, 则

$$\begin{aligned}
F_\nabla\wedge s&=\mathrm{d}_\nabla(\nabla s)=\mathrm{d}_\nabla(\nabla e\cdot\sigma+e\otimes\mathrm{d}\sigma)=\mathrm{d}_\nabla(e\cdot(A\sigma+\mathrm{d}\sigma))\\
&=\nabla e\wedge(A\sigma+\mathrm{d}\sigma)+e\cdot\mathrm{d}(A\sigma+\mathrm{d}\sigma)=(eA)\wedge(A\sigma+\mathrm{d}\sigma)+e(\mathrm{d}A)\sigma\\
&=e(A\wedge A+\mathrm{d}A)\sigma.
\end{aligned}$$

所以局部上记 $F_\nabla=A\wedge A+\mathrm{d}A$.

注 6.26. 1. 如果把 A 视为 $\mathrm{gl}_k(\mathbb{R})$ 值 1-形式, 则 F_∇ 可以写为 $F_\nabla=\mathrm{d}A+\frac{1}{2}[A\wedge A]$. 事实上, 设

$$A=(\omega_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}=\sum_{i,j=1}^n\omega_{ij}\otimes E_{ij}.$$

则有

$$A\wedge A=\left(\sum_{k=1}^n\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}=\sum_{i,j,k=1}^n\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}\otimes E_{ij}.$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[A\wedge A] &= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,\ell}\omega_{i\ell}\wedge\omega_{kj}\otimes[E_{i\ell},E_{kj}]\\ &= \frac{1}{2}\sum\omega_{i\ell}\wedge\omega_{kj}\otimes E_{i\ell}E_{kj}-\frac{1}{2}\sum\omega_{i\ell}\wedge\omega_{kj}\otimes E_{kj}E_{i\ell}\\ &= \frac{1}{2}\sum\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}\otimes E_{ij}-\frac{1}{2}\sum\omega_{i\ell}\wedge\omega_{ki}\otimes E_{k\ell}\\ &= \sum\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}\otimes E_{ij}.\end{aligned}$$

由此即可得 $A\wedge A=\frac{1}{2}[A\wedge A]$.

2. 设 $e'=eg$ 为另一标架, $\nabla e'=e'A'$. 由 $gg^{-1}=I$ 可得

$$0=\mathrm{d}(gg^{-1})=(\mathrm{d}g)g^{-1}+g\mathrm{d}(g^{-1})\Rightarrow\mathrm{d}(g^{-1})=-g^{-1}(\mathrm{d}g)g^{-1}.$$

则由 $A'=g^{-1}\mathrm{d}g+g^{-1}Ag$ 可得

$$\begin{aligned}F'_\nabla &= A'\wedge A'+\mathrm{d}A'=(g^{-1}\mathrm{d}g+g^{-1}Ag)\wedge(g^{-1}\mathrm{d}g+g^{-1}Ag)+\mathrm{d}(g^{-1}\mathrm{d}g+g^{-1}Ag)\\ &= (g^{-1}\mathrm{d}g+g^{-1}Ag)\wedge(g^{-1}\mathrm{d}g+g^{-1}Ag)-(g^{-1}\mathrm{d}g)\wedge(g^{-1}\mathrm{d}g)\\ &\quad-(g^{-1}\mathrm{d}g)\wedge(g^{-1}Ag)+g^{-1}(\mathrm{d}A)g-g^{-1}A(\mathrm{d}g)\\ &= g^{-1}(A\wedge A+\mathrm{d}A)g=g^{-1}F_\nabla g.\end{aligned}$$

命题 6.27. 设 $a\in\Omega^1(\mathrm{End}(E))$, $\nabla\in\mathcal{A}(E)$, 则 $F_{\nabla+a}=F_\nabla+\mathrm{d}_\nabla a+a\wedge a$.

注 6.28. 解释一下这里 $\mathrm{d}_\nabla a$ 的意义. $\mathrm{End}(E)$ 上的联络 ∇ 可以定义为

$$(\nabla A)s\triangleq\nabla(A(s))-A(\nabla s)$$

(实际上形如 Leibnitz 法则). 由此就可以得到 $\Omega^1(\mathrm{End}(E))$ 上的算子 d_∇.

证明. 首先证明: $\mathrm{d}_{\nabla+a}\omega=\mathrm{d}_\nabla\omega+a\cdot\omega$. 设 $\omega=\theta\otimes s$, 其中 $\theta\in\Omega^p(M)$, $s\in\Gamma(E)$. 并设 $a=\omega^\alpha\otimes A_\alpha$, 其中 $\omega^\alpha\in\Omega^1(M)$, $A_\alpha\in\Gamma(\mathrm{End}(E))$. 则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_{\nabla+a}\omega &= \mathrm{d}\theta\wedge s+(-1)^p\theta\wedge(\nabla+a)s=\mathrm{d}_\nabla\omega+(-1)^p\theta\wedge(\omega^\alpha\otimes A_\alpha(s))\\ &= \mathrm{d}_\nabla\omega+(\omega^\alpha\wedge\theta)\otimes(A_\alpha(s))=\mathrm{d}_\nabla\omega+a\cdot\omega.\end{aligned}$$

下面先给出完整的推导过程, 再补充其中的细节. 计算可得

$$\begin{aligned}F_{\nabla+a}\wedge s &= \mathrm{d}_{\nabla+a}(\nabla s+a\cdot s)=\mathrm{d}_{\nabla+a}(\nabla s)+\mathrm{d}_{\nabla+a}(a\cdot s)\\ &= \mathrm{d}_\nabla(\nabla s)+a\cdot\nabla s+\mathrm{d}_\nabla(a\cdot s)+(a\wedge a)\cdot s\\ &= F_\nabla\wedge s+(\mathrm{d}_\nabla a)\cdot s+(a\wedge a)\cdot s.\end{aligned}$$

我们只需证明: $(\mathrm{d}_\nabla a)\cdot s = a\cdot\nabla s + \mathrm{d}_\nabla(a\cdot s)$. 设 $A_1,\cdots,A_k$ 是 $\mathrm{End}(E)$ 的局部平凡化, 设 $a=\omega^\alpha\otimes A_\alpha$, 其中系数 $\omega^\alpha\in\Omega^1(M)$. 则

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}_\nabla a)\cdot s &= (\mathrm{d}_\nabla(\omega^\alpha\otimes A_\alpha))\cdot s = (\mathrm{d}\omega^\alpha\otimes A_\alpha - \omega^\alpha\wedge\nabla A_\alpha)\cdot s\\ &= \mathrm{d}\omega^\alpha\otimes A_\alpha s - \omega^\alpha\wedge(\nabla(A_\alpha s) - A_\alpha(\nabla s))\\ &= \mathrm{d}\omega^\alpha\otimes A_\alpha s - \omega^\alpha\wedge\nabla(A_\alpha s) + (\omega^\alpha\otimes A_\alpha)\cdot(\nabla s)\\ &= \mathrm{d}_\nabla(\omega^\alpha\otimes(A_\alpha s)) + a\cdot\nabla s\\ &= \mathrm{d}_\nabla(a\cdot s) + a\cdot(\nabla s).\end{aligned}$$

□

6.2.3 规范群

对于向量丛 (π,E,M), 我们引入记号 $\mathrm{Aut}(E)$, 其中 $\mathrm{Aut}(E)_p \triangleq \mathrm{GL}(E_p)$, 即纤维 E_p 上的可逆线性变换全体.

注 6.29. 值得注意的是, $\mathrm{Aut}(E)_p$ 并不是向量丛的纤维, 而是下一节要讲的主丛的纤维.

定义 6.30. 设 E 是 M 上的向量丛. 称 $\mathcal{G}(E)\triangleq\Gamma(\mathrm{Aut}(E))$ 为 E 的**规范群** (gauge group). $\mathcal{G}(E)$ 中的元素称为 E 的**规范变换** (gauge transformation).

命题 6.31. 设 $\nabla\in\mathcal{A}(E)$, $g\in\mathcal{G}(E)$. 定义 $\nabla^g s\triangleq g^{-1}\nabla(gs)$, $\forall s\in\Gamma(E)$, 则 $\nabla^g\in\mathcal{A}(E)$.

证明. $\nabla(s_1+s_2)=\nabla s_1+\nabla s_2$ 是显然的. 任取 $f\in C^\infty(M)$, 则

$$\nabla^g(fs) = g^{-1}\nabla(f(gs)) = g^{-1}(\mathrm{d}f\otimes(gs)+f\nabla(gs)) = \mathrm{d}f\otimes s + f(g^{-1}\nabla(gs)) = \mathrm{d}f\otimes s + f\nabla^g s.$$

□

命题 6.32. 设 $g\in\mathcal{G}(E)$, $\nabla\in\mathcal{A}(E)$. 设 e 是 E 的局部标架, $A=A(\nabla,e)$, $\nabla e = eA$. 则 $A(\nabla^g,e) = A(\nabla,eg)$.

证明. 计算可得

$$\nabla^g e = g^{-1}\nabla(ge) = g^{-1}(e(Ag+\mathrm{d}g)) = e\cdot(g^{-1}Ag+g^{-1}\mathrm{d}g).$$

$$\nabla(eg) = e(Ag+\mathrm{d}g) = (eg)\cdot(g^{-1}Ag+g^{-1}\mathrm{d}g).$$

因此 $A(\nabla^g,e) = g^{-1}Ag+g^{-1}\mathrm{d}g = A(\nabla,eg)$. □

推论 6.33. $F_{\nabla^g} = g^{-1}F_\nabla g$.

证明. 记 $A^g = A(\nabla^g,e)$, 直接计算可得

$$\begin{aligned}F_{\nabla^g} &= \mathrm{d}A^g + A^g\wedge A^g = \mathrm{d}(g^{-1}Ag+g^{-1}\mathrm{d}g) + (g^{-1}Ag+g^{-1}\mathrm{d}g)\wedge(g^{-1}Ag+g^{-1}\mathrm{d}g)\\ &= -g\mathrm{d}g\wedge g^{-1}Ag + g^{-1}(\mathrm{d}A)g - g^{-1}A\mathrm{d}g - g^{-1}\mathrm{d}g\wedge g^{-1}\mathrm{d}g\\ &\quad + (g^{-1}Ag+g^{-1}\mathrm{d}g)\wedge(g^{-1}Ag+g^{-1}\mathrm{d}g)\\ &= g^{-1}(\mathrm{d}A+A\wedge A)g = g^{-1}F_\nabla g.\end{aligned}$$

□

6.3 主丛

6.3.1 定义

定义 6.34. 设 P, M 为光滑流形, $\pi : P \to M$ 为光滑映射, G 为李群. 若它们满足:

1. π 是满射并且是淹没.
2. G 右作用在 P 上, 满足 $\pi(p\cdot g)=\pi(p), \forall p\in P, g\in G$.
3. $\forall x\in M$, G 作用在 $\pi^{-1}(x)$ 上是自由的、可迁的.
4. $\forall x\in M$, 存在 x 的邻域 U 以及微分同胚 φ_U 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U\times G \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

5. $\varphi_U(p\cdot g)=\varphi_U(p)\cdot g$, 这里 RHS 的李群作用为 $(U\times G)\times G\to U\times G$, $((x,g),h)\mapsto(x,gh)$.

则称 (P, M, π) 是以 G 为**结构群**的**主丛** (principle bundle).

注 6.35. 1. $\forall x\in U$, $\varphi_{U,x}\triangleq\varphi_U|_{\pi^{-1}(x)}:\pi^{-1}(x)\to\{x\}\times G$ 是同胚.

2. 当 $U\cap V\neq\varnothing$ 时, $\forall x\in U\cap V$, $\varphi_{U,x}\circ\varphi_{V,x}^{-1}:\{x\}\times G\to\{x\}\times G$ 可以看作 $G\to G$ 的同胚.

3. 在主丛上可以完全类似地定义截面.

例 6.36 (标架丛, frame bundle)**.** 设 E 为 M 的向量丛, $\mathrm{rank}(E)=k$. $\forall x\in M$, 定义

$$\mathrm{Fr}(E_x)\triangleq\{e=(e_1,\cdots,e_k): e\,\text{是}\,E_x\,\text{的一组基}\}.$$

记 $\mathrm{Fr}(E)\triangleq\bigsqcup_{x\in M}\mathrm{Fr}(E_x)$. 定义 $\pi:\mathrm{Fr}(E)\to M$, $E_x\ni e\mapsto x$. 则 $(\mathrm{Fr}(E), M, \pi)$ 是以 $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ 为结构群的主丛.

证明. 首先定义 $\mathrm{Fr}(E)$ 上的光滑结构. 设 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 是 M 的局部坐标系, 则 $\{\pi^{-1}(U_\alpha)\}$ 是 $\mathrm{Fr}(E)$ 的开覆盖. 取定 E 的局部标架 e, 任取 $\tilde e\in\pi^{-1}(U_\alpha)$, 设 $\tilde e$ 是 E_x 的基, 则存在 $g=g(\tilde e)\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $\tilde e=e(x)g$. 由此可定义

$$\psi_\alpha:\pi^{-1}(U_\alpha)\to\mathbb{R}^{m+k^2},\quad E_x\ni\tilde e\mapsto(\varphi_\alpha(x), g(\tilde e)).$$

计算可得

$$\psi_\alpha^{-1}:(y,g)\mapsto(e\circ\varphi_\alpha^{-1})(y)\cdot g.$$

因此

$$\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}:(y,g)\mapsto((\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})(y), g)$$

为光滑映射. 故 $\{(\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha)\}$ 确定了 $\mathrm{Fr}(E)$ 的光滑结构, 因此 $\mathrm{Fr}(E)$ 是 $m+k^2$ 维光滑流形. 此时计算 π 的坐标表示可得

$$\varphi_\beta\circ\pi\circ\psi_\alpha^{-1}:(y,g)\mapsto(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})(y).$$

因此 π 是淹没, 满射显然.

设 $G=\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ 为李群, 存在自然的右作用:

$$\mathrm{Fr}(E)\times G\to\mathrm{Fr}(E),\quad (e,g)\mapsto e\cdot g.$$

该作用显然是自由的、可迁的, 并且 $\pi(e\cdot g)=\pi(e)$.

然后来定义 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上的微分同胚 φ_α, 我们沿用此前的记号 $g(\tilde{e})\in\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$. 定义

$$\varphi_\alpha:\pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times G,\quad \tilde{e}\mapsto(\pi(\tilde{e}),g(\tilde{e})).$$

容易验证这是微分同胚, 它的逆为 $\varphi_\alpha^{-1}:(x,g)\mapsto e(x)\cdot g$. 并且容易看到 $\pi=\pi_1\circ\varphi_\alpha$.

容易验证 $g(\tilde{e}\cdot h)=g(\tilde{e})\cdot h$. 因此

$$\varphi_\alpha(\tilde{e}\cdot h)=(\pi(\tilde{e}\cdot h),g(\tilde{e}\cdot h))=(\pi(\tilde{e}),g(\tilde{e})\cdot h)=\varphi_\alpha(\tilde{e})\cdot h.$$

综上可得 $(\mathrm{Fr}(E),M,\pi)$ 是以 $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ 为结构群的主丛. □

由上例可得, 任一秩 k 向量丛诱导出一个 $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$-主丛, 即标架丛. 反之, 是否能从 G-主丛诱导出向量丛呢?

6.3.2 相配向量丛 (配丛)

定义 6.37. 设 G 为李群, V 为向量空间, $\mathrm{GL}(V)$ 为 V 的自同构群. 若映射 $\rho:G\to\mathrm{GL}(V)$ 为李群同态, 则称 (ρ,V) 为 G 的一个**表示**, V 称为**表示空间**.

设 (P,M,π) 是 G-丛, (ρ,V) 为 G 的一个表示. 定义 G 在 $P\times V$ 上的右作用为:

$$(P\times V)\times G\to P\times V,\quad ((p,v),g)\mapsto(pg,\rho(g^{-1})v).$$

该作用确定了 $P\times V$ 上的一个等价关系: $(p,v)\sim(q,u)\Leftrightarrow\exists g\in G$, 使得 $(q,u)=(p,v)\cdot g$. 由此可得商空间 $P\times_\rho V\triangleq(P\times V)/\sim$(即李群作用的一个轨道). 定义投影 $\tilde{\pi}:P\times_\rho V\to M$, $[p,v]\mapsto\pi(p)$, 由主丛定义的性质 2 可得 $\tilde{\pi}$ 是良定的. 类似此前的操作可以定义商空间 $P\times_\rho V$ 上的光滑结构, 并证明 $\tilde{\pi}$ 是淹没. 并且由于 G 在 $\pi^{-1}(x)$ 上的作用是可迁的, 对任意 $x=\pi(p)$, $\tilde{\pi}^{-1}(x)$ 里的元素均形如 $[p,v]$. 于是可以定义 $\tilde{\pi}^{-1}(x)$ 上的线性结构:

$$[p,v_1]+[p,v_2]=[p,v_1+v_2],\quad \lambda[p,v]=[p,\lambda v].$$

取 P 的一个局部截面 $s\in\Gamma(U;P)$, 可定义

$$\psi:\tilde{\pi}^{-1}(U)\to U\times V,\quad [p,v]\mapsto(\pi(p),v)=(x,v).$$

其中 $p=s(x)$.

定义 6.38. 称向量丛 $(P \times_\rho V, M, \tilde{\pi})$ 为 (P, ρ) 的**相配向量丛** (associated vector bundle).

注 6.39. 记 $\Pi : P \times V \to P \times_\rho V$ 为自然投影.

习题 6.40. $P = \mathrm{Fr}(E)$, $G = \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$, $\rho = \mathrm{id} : \mathrm{GL}_k(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$. 证明: $\mathrm{Fr}(E) \times_\rho \mathbb{R}^k \cong E$.

证明. 定义映射 $\varphi : \mathrm{Fr}(E) \times_\rho \mathbb{R}^k \to E$, $[e, v] \mapsto e \cdot v$. 光滑性是容易检验的, 我们只证明它是双射.

1. 良定性: 由配丛的构造可得, 若 $[e, v] = [\tilde{e}, u]$, 则存在 $g \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ 使得 $\tilde{e} = eg, u = g^{-1}v$, 从而 $\tilde{e} \cdot u = e \cdot v$.

2. 单射: 若 $e \cdot v = \tilde{e} \cdot u$, 则 $e, \tilde{e}$ 从属于同一纤维. 设 $g \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ 使得 $\tilde{e} = eg$, 则 $e \cdot v = e \cdot (g\tilde{v}) \Rightarrow \tilde{v} = g^{-1}v$, 因此 $(e, v) \sim (\tilde{e}, u)$, 即 φ 是单射.

3. 满射: 任取 $x \in E$, 设 x 属于纤维 E_p, $e \in \mathrm{Fr}(E)$ 是 E_p 的一组基, 则存在 $v \in \mathbb{R}^k$ 使得 $x = e \cdot v$, 即 $x = \varphi([e, v])$.

□

定义 6.41. 设 P 为 G-主丛, (ρ, V) 为 G 的一个表示. 若映射 $\tilde{s} : P \to V$ 满足 $\tilde{s}(pg) = \rho(g^{-1})\tilde{s}(p)$, $\forall p \in P$, $g \in G$, 则称 $\tilde{s}$ 为 **G-等变的**.

注 6.42. 1. 我们记 $C^\infty(P, V)^G$ 为所有 P 到 V 的 C^∞ G-等变映射全体.

2. 给定 $\tilde{s} \in C^\infty(P, V)^G$, 可以定义 $\mathbb{1} \times \tilde{s} : P \to P \times V$, $p \mapsto (p, v)$, $v = \tilde{s}(p)$.

命题 6.43. 集合 $C^\infty(P, V)^G$ 与 $\Gamma(P \times_\rho V)$ 之间是一一对应.

证明. 给定 $\tilde{s} \in C^\infty(P, V)^G$, 任取 $x \in M$, 设 $p \in P$ 使得 $x = \pi(p)$, 可以定义

$$s(x) = (\Pi \circ (\mathbb{1} \times \tilde{s}))(p).$$

首先验证良定性. 设 $q \in \pi^{-1}(x)$, 由主丛定义可得存在 $g \in G$ 使得 $q = p \cdot g$. 因此 $\tilde{s}(q) = \rho(g^{-1})p$, 由此可得 $(p, \tilde{s}(p)) \sim (p \cdot g, \rho(g^{-1})p) = (q, \tilde{s}(q))$, 因此 $\Pi(p, \tilde{s}(p)) = \Pi(q, \tilde{s}(q))$. 另一方面, 有

$$(\tilde{\pi} \circ s)(x) = \tilde{\pi}([p, \tilde{s}(p)]) = \pi(p) = x.$$

所以 $\tilde{\pi} \circ s = \mathbb{1}$, 即 $s \in \Gamma(P \times_\rho V)$. 容易看到 $\tilde{s} \mapsto s$ 是一一的.

反之, 任取 $s \in \Gamma(P \times_\rho V)$, 由 $s(\pi(p)) = [p, \tilde{s}(p)]$ 可唯一确定 $\tilde{s}(p)$. 只需证明 $\tilde{s}$ 是等变的. 事实上, 我们有

$$[p \cdot g, \tilde{s}(p \cdot g)] = s(\pi(p \cdot g)) = s(\pi(p)) = [p, \tilde{s}(p)].$$

即 $(p, \tilde{s}(p)) \sim (p \cdot g, \tilde{s}(p \cdot g))$, 即 $\tilde{s}(p \cdot g) = \rho(g^{-1})\tilde{s}(p)$. □

定义 6.44. 设 (P, M, π) 为 G-主丛, $\forall p \in P$, $\pi_* : T_pP \to T_xM$. 称 $V_p \triangleq \ker \pi_*$ 为**垂直空间**.

命题 6.45. 设 $\mathfrak{g}$ 为 G 的李代数, 任取 $\xi \in \mathfrak{g}$, 设 X_ξ 为 ξ 生成的 P 上的基本向量场, 则

$$V_p \triangleq \{X_\xi(p) : \xi \in \mathfrak{g}\} \cong \mathfrak{g}.$$

证明. 考虑映射 $\sigma_p: G\to P$, $g\mapsto p\cdot g$, 回忆我们证明过

$$X_\xi(p)\triangleq \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(p\cdot\exp(t\xi))=(\sigma_p)_*|_e(\xi).$$

由主丛定义可得 $\pi\circ\sigma_p=\pi(p)$ 为常值映射, 由此可得

$$\pi_*(X_\xi(p))=(\pi\circ\sigma_p)_*|_e(\xi)=0.$$

因此 $X_\xi(p)\in V_p$. 反之, 由于 $\dim V_p=\dim P-\dim M=\dim G$, 比较维数即证. $\square$

定义 6.46. 设 (P,M,π) 为 G-主丛, (ρ,V) 为 G 的表示.

1. 若 $\omega\in\Omega^q(P;V)\triangleq\Omega^q(P)\otimes V$ 满足 $R_g^*\omega=\rho(g^{-1})\omega$, 则称 ω 为 **G-等变的**. 这里 $R_g: P\to P$ 定义为 $R_g(p)=p\cdot g$.

2. 若 $\omega\in\Omega^p(P;V)$, 当 $v_1,\cdots,v_q$ 中有一个垂直向量时 $\omega(v_1,\cdots,v_q)=0$, 则称 ω 为**基本的**.

注 6.47. 1. 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基, 则存在 $\omega^\alpha\in\Omega^q(P)$ 使得 $\omega=\omega^\alpha\otimes\varepsilon_\alpha$. 因此 ω 是 G-等变的当且仅当对任意 $p\in P$, $v_1,\cdots,v_q\in T_pP$, 成立

$$\omega^\alpha((R_g)_*v_1,\cdots,(R_g)_*v_q)\cdot\varepsilon_\alpha=\omega^\alpha(v_1,\cdots,v_q)\cdot\rho(g^{-1})(\varepsilon_\alpha).$$

2. 定义 $\Omega^q_{\text{bas}}(P,V)^G\triangleq\{\omega:\omega\in\Omega^q(P;V)\text{ 是 }G\text{-等变的, 基本的}\}$.

3. $\Omega^q(P;V)^G\triangleq\{\omega:\omega\in\Omega^q(P,V)\text{ 是 }G\text{-等变的}\}$.

命题 6.48. $\Omega^q(P\times_\rho V)\triangleq\Gamma(\wedge^qT^*M\otimes(P\times_\rho V))$ 与 $\Omega^q_{\text{bas}}(P;V)^G$ 之间是一一对应的.

证明. 任取 $a\in\Omega^q(P\times_\rho V)$, 以及 $\forall p\in P$, $\tilde v_1,\cdots,\tilde v_q\in T_pP$, 有

$$\pi^*a(\tilde v_1,\cdots,\tilde v_q)=[p,\tilde s_p(\tilde v_1,\cdots,\tilde v_q)].$$

由此可唯一确定 $\tilde s\in\Omega^q(P;V)$. 下面我们来证明它是 G-等变且基本的. 由定义立得 $\tilde s$ 基本. 注意到 $\pi=\pi\circ R_g$, 故

$$\begin{aligned}[p,\tilde s_p(\tilde v_1,\cdots,\tilde v_q)]&=\pi^*a(\tilde v_1,\cdots,\tilde v_q)=\pi^*a((R_g)_*\tilde v_1,\cdots,(R_g)_*\tilde v_q)\\&=[p\cdot g,\tilde s_p((R_g)_*\tilde v_1,\cdots,(R_g)_*\tilde v_q)].\end{aligned}$$

由此即可得

$$R_g^*\tilde s_p(\tilde v_1,\cdots,\tilde v_q)=\rho(g^{-1})\tilde s_p(\tilde v_1,\cdots,\tilde v_q).$$

所以 $\tilde s$ 是 G-等变的.

反之, 任取 $\tilde s\in\Omega^q_{\text{bas}}(P;V)^G$. 对任意 $x\in M$, 以及 $p\in\pi^{-1}(x)$, $v_1,\cdots,v_q\in T_xM$, 设 $\tilde v_i\in T_pP$ 使得 $\pi_*(\tilde v_i)=v_i$, 我们定义

$$s_x(v_1,\cdots,v_q)\triangleq[p,\tilde s_p(\tilde v_1,\cdots,\tilde v_q)].$$

只需证明 s 与 $p,\tilde v_i$ 的选取无关.

任取 $\tilde{v}_i, \tilde{v}_i'$ 满足定义, 则 $\tilde{v}_i - \tilde{v}_i' \in V_p$, 由 $\tilde{s}$ 是基本的可得

$$\tilde{s}_p(\tilde{v}_1, \cdots, \tilde{v}_q) = \tilde{s}_p(\tilde{v}_1', \cdots, \tilde{v}_q').$$

所以 s 与 $\tilde{v}_i$ 的选取无关. 任取 $g \in G$, 设 $\hat{v}_i \in T_{p\cdot g}P$ 使得 $\pi_*(\hat{v}_i) = v_i$, 则存在 $\tilde{v}_i \in T_pP$ 使得 $\hat{v}_i = (R_g)_*\tilde{v}_i$. 因此

$$\begin{aligned}
[p, \tilde{s}_p(\tilde{v}_1, \cdots, \tilde{v}_q)] &= [p\cdot g, \rho(g^{-1})\tilde{s}_p(\tilde{v}_1, \cdots, \tilde{v}_p)] = [p\cdot g, R_g^*\tilde{s}_p(\tilde{v}_1, \cdots, \tilde{v}_q)] \\
&= [p\cdot g, \tilde{s}_{p\cdot g}((R_g)_*\tilde{v}_1, \cdots, (R_g)_*\tilde{v}_q)] = [p\cdot g, \tilde{s}_{p\cdot g}(\hat{v}_1, \cdots, \hat{v}_q)].
\end{aligned}$$

因此 s 与 p 的选取无关. □

6.4 主丛联络

6.4.1 定义

设 G 是李群, $\mathfrak{g}$ 为 G 的李代数, $\mathrm{Ad}: G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 为伴随表示. 设 (P, M, π) 为 G-主丛, 得到 (P, Ad) 的相配向量丛 $\mathrm{Ad}P \triangleq P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$.

定义 6.49. 设 (P, M, π) 为 G-主丛, 若 $a \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})^G$ 满足 $a(X_\xi) = \xi, \forall \xi \in \mathfrak{g}$, 其中 X_ξ 为 ξ 确定的基本向量场, 则称 a 是 P 上的一个**联络**. P 上的联络全体记为 $\mathcal{A}(P)$.

命题 6.50. 若 $a, a' \in \mathcal{A}(P)$, 则 $a - a' \in \Omega^1_{\mathrm{bas}}(P; V)^G \cong \Omega^1(\mathrm{Ad}P)$.

证明. 回忆我们证明过 $V_p = \{X_\xi(p) : \xi \in \mathfrak{g}\}$, 因此任取 $v \in X_\xi(p) \in V_p$, 有

$$(a - a')v = \xi - \xi = 0 \Rightarrow a - a' \in \Omega^1_{\mathrm{bas}}(P, V)^G.$$

□

例 6.51 (标架丛上的联络)**.** 设 (E, M, π) 为向量丛, $\nabla \in \mathcal{A}(E)$, $(\mathrm{Fr}(E), M, \tilde{\pi})$ 为标架丛. 设 e 为 E 在 U 上的局部标架, 则 $\mathrm{Fr}(E)|_U \to U \times \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$, $E_x \ni \tilde{e} \mapsto (x, g)$ 给出了 $\mathrm{Fr}(E)$ 在 U 上的局部平凡化, 其中 $\tilde{e} = eg$. 则 $a = g^{-1}\mathrm{d}g + g^{-1}Ag$ 给出了 $\mathrm{Fr}(E)$ 上的联络. 事实上, 我们需要验证:

1. a 是整体定义的.
2. $a \in \Omega^1(\mathrm{Fr}(E); \mathfrak{g})^G$.
3. $a(X_\xi) = \xi, \forall \xi \in \mathfrak{g}$.

证明. 1. 任取 U, V 满足 $U \cap V$, 设 $\tilde{e}$ 为 V 上的一个标架, 在 $U \cap V$ 上设 $\tilde{e} = eg_0$, 则 $\tilde{A} = g_0^{-1}\mathrm{d}g_0 + g_0^{-1}Ag_0$. 任取 $e' \in \tilde{\pi}^{-1}(U)$, 设 $e' = eg = \tilde{e}\tilde{g}$, 则 $\tilde{g} = g_0^{-1}g$. 则

$$\begin{aligned}
\tilde{g}^{-1}\mathrm{d}\tilde{g} + \tilde{g}^{-1}\tilde{A}\tilde{g} &= g^{-1}g_0(-g_0^{-1}\mathrm{d}g_0g_0^{-1}g + g_0^{-1}\mathrm{d}g) + g^{-1}g_0(g_0^{-1}\mathrm{d}g_0 + g_0^{-1}Ag_0)g_0^{-1}g \\
&= -g^{-1}\mathrm{d}g_0g_0^{-1}g + g^{-1}\mathrm{d}g + g^{-1}\mathrm{d}g_0g_0^{-1}g + g^{-1}Ag \\
&= g^{-1}\mathrm{d}g + g^{-1}Ag.
\end{aligned}$$

2. 任取 $g_0 \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$, 则

$$\begin{aligned}R_{g_0}^{-1} a &= (gg_0)^{-1}\mathrm{d}(gg_0) + (gg_0)^{-1}Agg_0 = g_0^{-1}g^{-1}\mathrm{d}gg_0 + g_0^{-1}g^{-1}Agg_0 \\ &= g_0^{-1}(g^{-1}\mathrm{d}g + g^{-1}Ag)g_0 = \mathrm{Ad}(g_0^{-1})a.\end{aligned}$$

即 $a \in \Omega^1(\mathrm{Fr}(E);\mathfrak{g})^G$.

3. 设 e 在局部平凡化下为 (x, g), 则 ξ 生成的基本向量场即为

$$X_\xi = g\xi = \sum_{i,j}(g\xi)_{ij}\frac{\partial}{\partial g_{ij}}.$$

由于 A 是 $U \subset M$ 上的 1-形式, 故 $A(g\xi) = 0$. 因此

$$a(X_\xi) = (g^{-1}\mathrm{d}g + g^{-1}Ag)(g\xi) = g^{-1}\mathrm{d}g\left(\sum_{i,j}(g\xi)_{ij}\frac{\partial}{\partial g_{ij}}\right) = g^{-1}\cdot g\xi = \xi.$$

□

例 6.52 (相配向量丛的联络)**.** 设 (P, M, π) 为 G-主丛, $a \in \Omega^1(P;\mathfrak{g})^G$ 为 P 的一个联络, (ρ, V) 为 G 的一个表示. 则 $P \times_\rho V$ 上存在唯一的联络 ∇ 使得

$$\nabla s = \mathrm{d}\tilde{s} + a \cdot \tilde{s}.$$

其中 $s \in \Gamma(\rho \times_\rho V)$, 对应于 $\tilde{s} \in C^\infty(P;V)^G$, ∇s 视作 $\Omega^1_{\mathrm{bas}}(P;V)^G$ 的元素.

定义 6.53. 设 (P, M, π) 为 G-主丛, $a \in \mathcal{A}(P)$. $\forall p \in P$, 记 $H_p \triangleq \{X : X \in T_pP, a(X) = 0\}$, 称 H_p 为 P 在点 p 的**水平空间** (horizontal 空间).

命题 6.54. $\forall g \in G$, $p \in P$, $(R_g)_*H_p = H_{p\cdot g}$.

证明. 任取 $X \in H_p$, 则

$$a|_{p\cdot g}((R_g)_*X|_p) = (R_g^*a|_{p\cdot g})(X|_p) = \mathrm{Ad}(g^{-1})a|_pX|_p = 0.$$

因此 $(R_g)_*H_p \subset H_{p\cdot g}$, 结合 R_g 是微分同胚, 比较维数即可得 $(R_g)_*H_p = H_{p\cdot g}$. □

命题 6.55. 任取 $p \in P$, 则 $T_pP = H_p \oplus V_p$, 称为 T_pP 的水平与垂直空间分解.

证明. 任取 $X_\xi|_p \in H_p \cap V_p$, 则 $\xi = a(X_\xi|_p) = 0$, 从而 $X_\xi|_p = 0$, 故 $H_p + V_p$ 为直和. 任取 $v \in T_pP$, 设 $\xi = a(v) \in \mathfrak{g}$, 则 $a(v - X_\xi|_p) = a(v) - \xi = 0$, 即 $v - X_\xi|_p \in H_p$. 因此 $v = (v - X_\xi|_p) + X_\xi|_p \in H_p \oplus V_p$. □

6.4.2 曲率

定义 6.56. 设 (P, M, π) 为 G-丛, $a \in \mathcal{A}(P)$. 称 $F_a \triangleq \mathrm{d}a + \frac{1}{2}[a \wedge a]$ 为联络 a 的**曲率**.

命题 6.57. $F_a \in \Omega^2_{\mathrm{bas}}(P;\mathfrak{g})^G$.

证明. 分别证明 F_a 是等变的、基本的. 任取 $g \in G$, 首先有

$$R_g^*(\mathrm{d}a) = \mathrm{d}(R_g^* a) = \mathrm{d}(\mathrm{Ad}(g^{-1})a) = \mathrm{Ad}(g^{-1})(\mathrm{d}a).$$

设 ξ_α 为 $\mathfrak{g}$ 的一组基, 则存在 $\omega^\alpha \in \Omega^1(P)$, 使得 $a = \omega^\alpha \otimes \xi_\alpha$, 从而 $[a \wedge a] = \omega^\alpha \wedge \omega^\beta \otimes [\xi_\alpha, \xi_\beta]$, 因此

$$\begin{aligned} R_g^* \frac{1}{2}[a \wedge a] &= \frac{1}{2}(R_g^*(\omega^\alpha \wedge \omega^\beta) \otimes [\xi_\alpha, \xi_\beta]) = \frac{1}{2}(R_g^*\omega^\alpha \wedge R_g^*\omega^\beta \otimes [\xi_\alpha, \xi_\beta]) \\ &= \frac{1}{2}(\mathrm{Ad}(g^{-1})\omega^\alpha \wedge \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega^\beta \otimes [\xi_\alpha, \xi_\beta]) = \mathrm{Ad}(g^{-1})\frac{1}{2}[a \wedge a]. \end{aligned}$$

因此 $F_a = \mathrm{d}a + \frac{1}{2}a \wedge a$ 是等变的.

任取 $\xi \in \mathfrak{g}$, 若能证明 $i_{X_\xi} F_a = 0$, 则 F_a 是基本的. 利用李导数和伴随表示的性质计算可得

$$\begin{aligned} i_{X_\xi} F_a &= \mathcal{L}_{X_\xi} a - \mathrm{d}(i_{X_\xi} a) + \frac{1}{2} i_{X_\xi}[a \wedge a] \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} (R_{\exp(t\xi)}^* a) - \mathrm{d}a(X_\xi) + \frac{1}{2}[a(X_\xi), a] - \frac{1}{2}[a, a_{X_\xi}] \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} (\mathrm{Ad}(\exp(-t\xi))a) + \frac{1}{2}[\xi, a] - \frac{1}{2}[a, \xi] \\ &= -\mathrm{ad}(\xi)(a) + [\xi, a] = 0. \end{aligned}$$

□

命题 6.58 (Bianchi)**.** 设 $a \in \mathcal{A}(P)$, F_a 为 a 的曲率形式, 则 $\mathrm{d}F_a = [F_a \wedge a]$.

证明. 我们先来证明: $[[a \wedge a] \wedge a] = 0$. 设 ξ_α 为 $\mathfrak{g}$ 的一组基, $a = \omega^\alpha \otimes \xi_\alpha$, 其中 $\omega^\alpha \in \Omega^1(P)$. 由此计算可得

$$[[a \wedge a] \wedge a] = [(\omega^\alpha \wedge \omega^\beta \otimes [\xi_\alpha, \xi_\beta]) \wedge (\omega^\gamma \otimes \xi_\gamma)] = \omega^\alpha \wedge \omega^\beta \wedge \omega^\gamma \otimes [[\xi_\alpha, \xi_\beta], \xi_\gamma] = 0.$$

最后一步由 Jacobi 恒等式以及 1-形式外积的反对称性可得. 由此可得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F_a &= \frac{1}{2}\mathrm{d}[a \wedge a] = \frac{1}{2}\mathrm{d}[\mathrm{d}a \wedge a] - \frac{1}{2}[a \wedge \mathrm{d}a] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(F_a - \frac{1}{2}[a \wedge a]\right) \wedge a\right] - \frac{1}{2}\left[a \wedge \left(F_a - \frac{1}{2}[a \wedge a]\right)\right] \\ &= [F_a \wedge a] - \frac{1}{2}[[a \wedge a] \wedge a] \\ &= [F_a \wedge a]. \end{aligned}$$

□

注 6.59. 有时记 $\mathrm{D}F_a = \mathrm{d}F_a - [F_a \wedge a] = \mathrm{d}F_a + [a \wedge F_a] = 0$, 均称为 Bianchi 恒等式.

习题 6.60. 1. 研究向量场上联络的曲率与其在标架丛诱导出联络的曲率之间的关系.

2. 研究主丛上联络的曲率与其相配向量丛诱导的联络的曲率之间的关系.

6.4.3 规范群

定义 6.61. (P, M, π) 为 G-主丛, 若微分同胚 $\Phi: P \to P$ 满足:

1. $\Phi(p \cdot g) = \Phi(p) \cdot g$, $\forall p \in P$, $g \in G$.

2. $\pi \circ \Phi = \pi$.

则称 Φ 是 P 上的一个**规范变换**. 所有规范变换全体记为 $\mathcal{G}(P)$, 构成一个群, 称为 P 的**规范群** (gauge group).

命题 6.62. 1. 设 $\Phi \in \mathcal{G}(P)$, 则存在 $\phi: P \to G$, 使得 $\Phi(p) = p \cdot \phi(p)$, $\forall p \in P$, 并且 $\phi(p \cdot g) = g^{-1}\phi(p)g$, $\forall g \in G$.

2. 设 $\phi: P \to G$ 使得 $\phi(p \cdot g) = g^{-1}\phi(p)g$, $\forall p, g$. 则 $\Phi(p) \triangleq p \cdot \phi(p) \in \mathcal{G}(P)$.

证明. 1. 由 $\pi \circ \Phi = \pi$ 可得 $\Phi(p), p$ 从属同一纤维, 因此存在唯一的 g 使得 $\Phi(p) = p \cdot g$, 记 $\phi(p) = g$. 则

$$p \cdot (g\phi(p \cdot g)) = \Phi(p \cdot g) = \Phi(p) \cdot g = p \cdot (\phi(p)g).$$

因此 $g\phi(p \cdot g) = \phi(p)g \Rightarrow \phi(p \cdot g) = g^{-1}\phi(p)g$.

2. 验证可得

$$\Phi(p \cdot g) = p \cdot g\phi(p \cdot g) = p \cdot \phi(p)g = \Phi(p) \cdot g.$$

$$\pi(\Phi(p)) = \pi(p \cdot \phi(p)) = \pi(p).$$

所以 $\Phi \in \mathcal{G}(P)$.

□

命题 6.63. 设 $\Phi \in \mathcal{G}(P)$, $a \in \mathcal{A}(P)$, 则有

1. $\Phi^* a \in \mathcal{A}(P)$.

2. $F_{\Phi^* a} = \mathrm{Ad}(\phi^{-1}) \cdot F_a$.

证明. 1. 由 $\Phi \circ R_g = R_g \circ \Phi$ 可得

$$R_g^*(\Phi^* a) = \Phi^*(R_g^* a) = \Phi^*(\mathrm{Ad}(g^{-1})a) = \mathrm{Ad}(g^{-1})(\Phi^* a).$$

任取 $\xi \in \mathfrak{g}$, X_ξ 是 ξ 生成的基本向量场. 记映射 $\sigma_p: G \to G$, $g \mapsto p \cdot g$, 则 $\Phi \circ \sigma_p = \sigma_{\Phi(p)}$. 因此

$$\Phi^* a|_p(X_\xi|_p) = a(\Phi_* X_\xi|_p) = a((\sigma_{\Phi(p)})_* \xi) = a(X_\xi|_{\Phi(p)}) = \xi.$$

2. 由 $\Phi(p) = p \cdot \phi(p)$ 可得 $\Phi = R_\phi$, 因此

$$F_{\Phi^* a} = \mathrm{d}(\Phi^* a) + \frac{1}{2}[\Phi^* a \wedge \Phi^* a] = \Phi^* \left(\mathrm{d}a + \frac{1}{2}[a \wedge a]\right) = R_\phi^* F_a = \mathrm{Ad}(\phi^{-1}) F_a.$$

□

Part II

习题课笔记

7 9.18: 拓扑流形, 光滑流形与切映射

7.1 拓扑流形的拓扑性质

拓扑流形的基本拓扑性质 回忆拓扑流形定义里的三条拓扑性质: C_2, Hausdorff, 局部欧氏.

1. 局部欧氏 $\xrightarrow{\text{Hausdorff}}$ 局部紧 $\xrightarrow{\text{Hausdorff}}$ T_4 空间 $\xrightarrow{C_2}$ 可度量化. 这就说明每个拓扑流形都是可度量化的.

2. 局部欧氏 $\to$ 局部道路连通 $\xrightarrow{C_2}$ 有可数个连通分支. 回忆局部道路连通空间的性质: (1) 连通分支既开又闭; (2) 连通分支就是道路连通分支. 所以对于拓扑流形, 连通性等价于道路连通性.

然后我们来说明拓扑流形定义中三条拓扑性质的独立性. C_2 与 Hausdorff 自然是独立的, 而下例则说明: 局部欧氏 $+$ $C_2 \not\to$ Hausdorff.

例 7.1 (有两个原点的直线)**.** 考虑商空间 $M = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y = \pm 1\}/\sim$, 其中等价关系定义为: $(x, -1) \sim (x, 1), \forall x \neq 0$. 证明 M 为 C_2, 局部欧氏的, 但不是 Hausdorff 的.

7.2 光滑流形的例子

例 7.2. 任意有限维赋范线性空间 $(V, \|\cdot\|)$ 为光滑流形.

1. 有限维空间上的范数均等价, 所以 $V \cong \mathbb{R}^n$, 进而是 Hausdorff 且 C_2 的.

2. 局部坐标: 设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 为 V 的一组基, 则任取 $x \in V$, 存在 $\mathbf{x} = (x^1, \cdots, x^n)$, 使得 $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i e_i$. 由此可以定义映射 $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \mathbf{x}$.

3. 转移映射: 设 $\{\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_n\}$ 为另一组基, 对应映射为 $\psi : V \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \mathbf{x}'$. 设 $(\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_n) = (e_1, \cdots, e_n)A$, 其中 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为可逆阵. 设 $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{x}^i \tilde{e}_i$, 则有

$$\psi \circ \varphi^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

为光滑映射.

例 7.3. 设 M 为平面上所有直线构成的集合, 试定义 M 上的拓扑使之成为光滑流形.

证明. 定义 U 为非竖直的直线全体, V 为非水平的直线全体, 即

$$U = \{\{(x, y) : y = kx + b\} : k, b \in \mathbb{R}\}, \quad V = \{\{(x, y) : x = my + n\} : m, n \in \mathbb{R}\}.$$

我们现在来定义一个 M 上一个合适的拓扑. 设

$$\varphi:\mathbb{R}^2\to U,\ (k,b)\mapsto\{(x,y):y=kx+b\};\quad \psi:\mathbb{R}^2\to V,\ (m,n)\mapsto\{(x,y):x=my+n\}.$$

定义

$$\mathcal{T}=\{E\subset M:\varphi^{-1}(E\cap U),\psi^{-1}(E\cap V)\text{ 均为 }\mathbb{R}^2\text{ 中开集}\}.$$

容易验证 $\mathcal{T}$ 是 M 上的拓扑, 且 $U,V\in\mathcal{T}$. □

7.3 切映射的例子

根据切映射的复合运算, 很容易得到下面的命题:

命题 7.4. 设 $F:M\to N$ 为光滑映射, $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 为一条光滑曲线. 设 $p=\gamma(0)$, $\gamma'(0)=\gamma_{*,0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 为 γ 在 $\gamma(0)$ 处的切向量. 则

$$F_{*,p}(\gamma'(0))=(F\circ\gamma)'(0).$$

事实上, 这个命题反过来也是成立的:

命题 7.5. 设 M 为光滑流形, $p\in M$. 对任意 $X_p\in T_pM$, 存在光滑曲线 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$, 使得 $\gamma(0)=p$ 且 $\gamma'(0)=X_p$.

证明. 设 p 处的局部坐标为 $(U,\varphi;x^i)$, 设 $\varphi(p)=x_0$, $\varphi_*(X_p)=\sum\limits_{i=1}^n a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$. 则我们可以构造 x_0 附近的一条光滑曲线:

$$\tilde\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^n,\quad t\mapsto(x_0^1+a^1t,\cdots,x_0^n+a^nt).$$

不难看到 $\tilde\gamma(0)=x_0$ 且 $\tilde\gamma'(0)=\sum\limits_{i=1}^n a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$. 因此 $\gamma=\varphi^{-1}\circ\tilde\gamma$ 即为所求. □

注 7.6. 上述命题开辟了一条求切映射的蹊径: 任取 $v\in T_pM$, 可以作一条光滑曲线 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 使得 $\gamma(0)=p,\gamma'(0)=v$, 则有 $F_{*,p}(v)=(F\circ\gamma)'(0)$. 从而把切映射的求解化为了求曲线 $F\circ\gamma$ 在 $t=0$ 处的切向量. 下面我们举一些例子来体现这个方法的应用.

习题 7.7. 任取 $G\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, 定义 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 上的左乘运算 $L_G:\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $A\mapsto GA$. 求 L_G 在单位阵 I 处的切映射.

解答. 由于 $T_I\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^{n\times n}$, 故我们可以将切向量也视作 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的矩阵. 任取 $A\in T_I\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, 考虑曲线 $\gamma:\mathbb{R}\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $t\mapsto e^{At}$. 则 $\gamma(0)=I$ 且 $\gamma'(0)=A$, 因此

$$(L_{G,*})_IA=(L_G\circ\gamma)'(0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}(Ge^{At})=GA.$$

所以 $L_{G,*}=L_G$ 为左乘映射. □

注 7.8. 回忆矩阵指数映射 $e^X=I+X+\frac{X^2}{2!}+\cdots$ 的性质:

1. $e^A\cdot e^B=e^{A+B}$, $e^{-A}=(e^A)^{-1}$.

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{tX}) = Xe^{tX} = e^{tX}X$.

3. $\det(e^X) = e^{\mathrm{tr}(X)}$.

习题 7.9. 求行列式映射 $\det : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 在 $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 处的切映射.

解答. 任取矩阵 $X \in T_A\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, 考虑光滑曲线 $\gamma(t) = Ae^{tA^{-1}X}$, 则 $\gamma(0) = A$ 且 $\gamma'(0) = X$. 因此

$$\det{}_{*,A}(X) = (\det \circ \gamma)'(0) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(\det(A)e^{t\cdot\mathrm{tr}(A^{-1}X)}) = \det(A)\mathrm{tr}(A^{-1}X).$$

□

习题 7.10. 求特殊线性群 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ 在单位阵 I 处的切空间.

解答. 在特殊线性群上, 行列式映射 det 为常值映射. 任取 $X \in T_I\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, 由前题结论可得 $0 = \det_{*,I}(X) = \mathrm{tr}(X)$, 因此

$$T_I\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \subset \{X : \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

另一方面, 由于 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$ 为 det 的水平集, 故其维数为 n^2-1, 因此 $T_I\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ 的维数也为 n^2-1. 比较维数可得

$$T_I\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \{X : \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

□

习题 7.11. 求映射 $F : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}(n), A \mapsto A^TA$ 的切映射 $F_{*,A}$, 其中 $\mathrm{Sym}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^T = A\}$.

解答. 任取 $X \in T_A\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, 考虑光滑曲线 $\gamma(t) = Ae^{tA^{-1}X}$, 则

$$F_{*,A}(X) = (F\circ\gamma)'(0) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(e^{tX^TA^{-T}}A^TAe^{tA^{-1}X}) = X^TA + A^TX.$$

□

习题 7.12 (球面空间上的切向量)**.** 任取 $p = (p^1,\cdots,p^{n+1}) \in \mathbb{S}^n$, 则 $X_p = \sum\limits_{i=1}^{n+1} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ 为 $\mathbb{S}^n$ 在 p 点处的切向量 $\Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n+1} a^ip^i = 0$.

证明. $\Rightarrow$: 若 $X_p \in T_p\mathbb{S}^n$, 则存在光滑曲线 $\gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{S}^n$, $t \mapsto (x^1(t),\cdots,x^{n+1}(t))$, 使得 $\gamma(0) = (p^1,\cdots,p^{n+1})$, $\gamma'(0) = (a^1,\cdots,a^{n+1})$. 由 $\gamma(t) \in \mathbb{S}^n$ 即可得

$$\sum_{i=1}^{n+1} x^i(t)^2 = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x^i(t)\dot{x}^i(t) = 0.$$

取 $t = 0$ 即可得 $\sum\limits_{i=1}^{n+1} a^ip^i = 0$. 反之, 考虑曲线

$$\gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{S}^n, \quad t \mapsto \frac{(p^1+ta^1,\cdots,p^{n+1}+ta^{n+1})}{\sqrt{(p^1+ta^1)^2+\cdots+(p^{n+1}+ta^{n+1})^2}} = \frac{(p^1+ta^1,\cdots,p^{n+1}+ta^{n+1})}{\sqrt{1+t^2((a^1)^2+\cdots+(a^{n+1})^2)}}.$$

则计算可得 $\gamma(0) = (p^1,\cdots,p^{n+1})$ 且 $\gamma'(0) = (a^1,\cdots,a^{n+1})$. 因此 $\sum\limits_{i=1}^{n+1} a^i\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p \in T_p\mathbb{S}^n$. □

习题 7.13 (求包含映射的切映射)**.** 设 $\mathbb{S}^2_+=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : c=\sqrt{1-a^2-b^2}, -1<a,b<1\}$ 为上半球面, 给定坐标系

$$\varphi:\mathbb{S}^2_+\to\mathbb{R}^2,\quad (a,b,c)\mapsto(u,v)=(a,b).$$

则 $\frac{\partial}{\partial u}\big|_p, \frac{\partial}{\partial v}\big|_p$ 为 $\mathbb{S}^2$ 在 p 处的切向量. 考虑包含映射 $\iota:\mathbb{S}^2\hookrightarrow\mathbb{R}^3$, (x,y,z) 为标准坐标系, 设

$$\iota_{*,p}\frac{\partial}{\partial u}=\alpha^1\frac{\partial}{\partial x}\bigg|_p+\beta^1\frac{\partial}{\partial y}\bigg|_p+\gamma^1\frac{\partial}{\partial z}\bigg|_p.$$

$$\iota_{*,p}\frac{\partial}{\partial v}=\alpha^2\frac{\partial}{\partial x}\bigg|_p+\beta^2\frac{\partial}{\partial y}\bigg|_p+\gamma^2\frac{\partial}{\partial z}\bigg|_p.$$

试确定 $\alpha^i,\beta^i,\gamma^i$.

解答. 计算 ι 的坐标表示可得

$$\iota\circ\varphi^{-1}(u,v)=(u,v,\sqrt{1-u^2-v^2}).$$

因此

$$\begin{aligned}\iota_{*,p}\frac{\partial}{\partial u}&=\frac{\partial}{\partial x}\bigg|_p-\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\bigg|_p\frac{\partial}{\partial z}\bigg|_p=\frac{\partial}{\partial x}\bigg|_p-\frac{a}{c}\frac{\partial}{\partial z}\bigg|_p.\\ \iota_{*,p}\frac{\partial}{\partial v}&=\frac{\partial}{\partial y}\bigg|_p-\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\bigg|_p\frac{\partial}{\partial z}\bigg|_p=\frac{\partial}{\partial y}\bigg|_p-\frac{b}{c}\frac{\partial}{\partial z}\bigg|_p.\end{aligned}$$

□

习题 7.14. 设 $F:M\to N$ 为光滑流形之间的光滑映射, M 是连通的. 若对任意 $p\in M$, 有 $F_{*,p}=0$, 则 F 必为常值映射.

证明. 取定 $p_0\in M$, 考虑集合 $A=\{p\in M : F(p)=F(p_0)\}$. A 自然是闭集, 若能证明 A 还是开集, 由 M 的连通性可得 $A=M$, 进而 F 是常值映射. 任取 $p\in A$, 设 p 处的局部坐标为 (U,φ), $F(p)$ 处的局部坐标为 (V,ψ), 不妨设 $F(U)\subset V$. 由于 $\psi\circ F\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)(\subset\mathbb{R}^m)\to\mathbb{R}^n$ 的切映射恒为零, 因此 $\psi\circ F\circ\varphi^{-1}$ 在 $\varphi(U)$ 内恒为常数, 由 φ,ψ 均为微分同胚可得 F 在 U 内恒为常数, 即证. □

8 10.16: 子流形, 积分流形

8.1 映射在子流形上的限制

问题: 设 M, N 为光滑流形, $F: M \to N$ 为光滑映射, S_M, S_N 分别为 M, N 的浸入 (嵌入) 子流形, 则: (1) $F: S_M \to N$ 是否光滑? (2) $F: M \to S_N$ 是否光滑? 不难看到问题 (1) 是成立的:

命题 8.1. 若 M, N 为光滑流形, $F: M \to N$ 为光滑映射, $S \subset M$ 为浸入或嵌入子流形. 则 $F|_S: S \to N$ 光滑.

证明. 由于此时包含映射 $\iota: S \hookrightarrow M$ 是光滑的, 因此 $F|_S = F \circ \iota$ 为光滑映射. $\square$

但是 (2) 不总是成立的. 我们还是来看 "8" 字曲线这一典型的反例.

例 8.2. 考虑浸入映射 $F: I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, -\sin 2t)$. 令 $S = F(I)$, 则 "8" 字形曲线 S 是 $\mathbb{R}^2$ 的浸入子流形而非嵌入子流形.

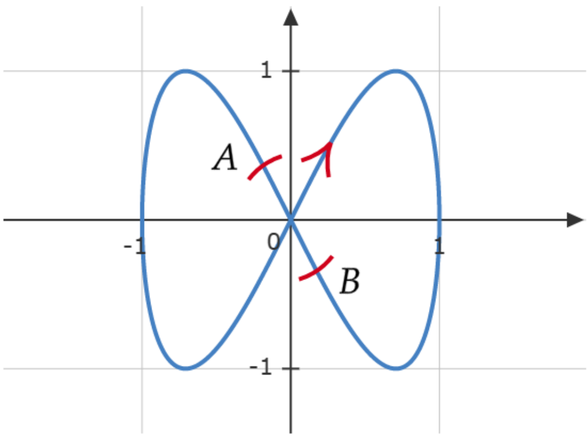


图 2: "8" 字曲线

定义 $G: I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin 2t)$, 则 $G(I) \subset S$. 此时我们考虑映射 $\tilde{G}: I \to S$, 注意到弧 AB 是原点在 $(0,0)$ 点的开邻域, 但弧 AB 在 $\tilde{G}$ 下的原像不是 $t = \frac{\pi}{2}$ 在 I 中的开邻域, 故 $\tilde{G}$ 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处不连续, 从而不光滑.

注 8.3. 由此例可得当 S_N 为浸入子流形时, (2) 未必成立, 原因是 $F: M \to S_N$ 可能不连续. 以下我们说明若 $F: M \to S_N$ 连续, 则 $F: M \to S_N$ 光滑.

定理 8.4. 设 M, N 为光滑流形, $S \subset N$ 为浸入子流形. 若 $F: M \to N$ 光滑, $F(M) \subset S$, 且 $F: M \to S$ 连续, 则 $F: M \to S$ 光滑.

8.2 子流形的切空间

8.3 求平坦坐标与积分流形

习题 8.5. 考虑 $\mathbb{R}^2$ 上的向量场

$$X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

求 X, Y 在 $(1,0)$ 附近的平坦坐标 (t,s).

解答. 计算可得 $[X,Y]=0$. 且计算可得 X 的流为

$$\theta_t(x,y) = (x\cos t - y\sin t, x\sin t + y\cos t).$$

Y 的流为

$$\eta_s(x,y) = (xe^s, ye^s).$$

在 $p=(1,0)$ 附近, X, Y 是线性无关的. 此时定义

$$\Phi(t,s) = \theta_t \circ \eta_s(1,0) = (e^s\cos t, e^s\sin t).$$

由此可得 X, Y 在 $(1,0)$ 处的一个平坦坐标为

$$(t,s) = \Phi^{-1}(x,y) = \left(\arctan\frac{y}{x}, \ln\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

□

习题 8.6. 若 $L \subset T\mathbb{R}^3$ 是由

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + x(y+1)\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}$$

生成的光滑分布, 即 $L = \operatorname{span}(X,Y)$, 验证 L 完全可积, 并求 L 的积分曲面.

解答. 计算可得

$$[X,Y] = -\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial z} = -Y \in L.$$

因此 L 是对合的, 即完全可积的. 作变换

$$\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ X - xY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

此时有 $[V,W]=0$ 且 $L=\operatorname{span}(V,W)$. 现在来求 $\{V,W\}$ 在任一点 (x,y,z) 处的平坦坐标. 求解

$$x'(t)=1,\ y'(t)=0,\ z'(t)=y(t); \quad x(0)=x,\ y(0)=y,\ z(0)=z$$

可得 V 的流为 $\theta_t(x,y,z)=(x+t,y,z+yt)$. 求解

$$x'(s)=0,\ y'(s)=1,\ z'(s)=x(s); \quad x(0)=x,\ y(0)=y,\ z(0)=z$$

可得 W 的流为 $\psi_s(x,y,z)=(x,y+s,z+xs)$. 考虑映射

$$\Phi(t,s,u)=\theta_t\circ\psi_s(0,0,u)=(t,s,u+st).$$

因此 $\Phi^{-1}(x,y,z)=(x,y,z-xy)$, 故积分曲面为

$$\Sigma=\{(x,y,z):z-xy=C\},\quad C=\text{const}.$$

$\square$

9 10.30: 张量代数, 外微分形式

9.1 张量代数习题

9.2 外微分形式的相关计算

10 11.13: Poincare 引理, Stokes 定理

10.1 Poincare 引理

10.2 Stokes 定理的相关计算

习题 10.1 (Brouwer 不动点定理)**.** 若 $B=\{p\in\mathbb{R}^n:|p|\leqslant 1\}\subset\mathbb{R}^n$ 为球体, 则任何光滑映射 $g:B\to B$ 都存在不动点, 即存在 $q\in B$ 使得 $g(q)=q$.

证明. 我们首先证明: 若 M 为 n 维紧致可定向带边光滑流形, 则对任意光滑映射 $f:M\to\partial M$, $f|_{\partial M}$ 不是恒等映射.

如若不然, 设 $\iota:\partial M\hookrightarrow M$ 为嵌入映射. 由于 ∂M 可定向, 选取 $\omega\in\Omega^{n-1}(\partial M)$ 且处处非零, 则 $\mathrm{d}\omega=0$, 进而 $\mathrm{d}(f^*\omega)=f^*(\mathrm{d}\omega)=0$. 因此

$$0=\int_M\mathrm{d}(f^*\omega)\xlongequal{\text{Stokes}}\int_{\partial M}\iota^*(f^*\omega)=\int_{\partial M}(f|_{\partial M})^*\omega=\int_{\partial M}\omega\neq 0,$$

矛盾! 即证.

回到原命题. 假设存在光滑映射 $g:B\to B$ 不存在不动点, 则对任意 $p\in B$, 以 $g(p)$ 为起点, 指向 p 的射线与 ∂B 相交于唯一一点, 记为 $f(p)$. 由此确定了光滑映射 $f:B\to\partial B$. 但由定义可得 $f|_{\partial B}$ 为恒等映射, 矛盾! □

习题 10.2. 若 M 为紧支可定向无边的 n 维光滑流形, 证明 M 不可缩.

习题 10.3. 定义映射 $f:D\to\mathbb{R}^3$ 为 $f(u,v)=(u,v,u^2+v^2+1)$, 其中 $D=[0,1]^2$. 设 $\omega=y\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+xz\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z\in\Omega^2(\mathbb{R}^3)$, 求积分 $\int_D f^*\omega$.

证明. 首先计算可得

$$f^*\omega=v\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}(u^2+v^2+1)+u(u^2+v^2+1)\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}(u^2+v^2+1)=2uv(u^2+v^2)\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v.$$

所以

$$\int_D f^*\omega=\int_0^1\int_0^1 2uv(u^2+v^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^1\left(\frac{v}{2}+v^3\right)\mathrm{d}v=\frac{1}{2}.$$

□

习题 10.4. 在 $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ 中定义

$$\omega=\frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 记 $S^2(r_0)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中以原点为中心, r_0 为半径的球面. 计算 $\int_{S^2(r_0)}\iota^*\omega$.

证明. 设 $\eta=r^3\omega=x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, 则 $\mathrm{d}\eta=3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$. 因此

$$\int_{S^2(r_0)}\iota^**\omega=\frac{1}{r_0^3}\int_{S^2(r_0)}\iota^*\eta=\frac{1}{r_0^3}\int_{B^2(r_0)}\mathrm{d}\eta=\frac{1}{r_0^3}\times 3|B^2(r_0)|=4\pi.$$

□

11　11.27, 12.11: 李群相关习题

习题 11.1. 求一般线性群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}:\det A\neq 0\}$ 的左不变向量场, 结构常数, 左不变 1-形式, 结构方程以及左不变向量场生成的单参数子群.

证明. 任取 $A=(a_{ij})\in G$, 则 $L_A:X\mapsto AX$, $(x_{ij})\mapsto(y_{ij})$, $y_{ij}=\sum_k a_{ik}x_{kj}$. 则

$$(L_A)_*|_I\frac{\partial}{\partial x^{ij}}=\sum_{p,q}\frac{\partial}{\partial x^{ij}}\left(\sum_k a_{pk}x_{kq}\right)\frac{\partial}{\partial y^{pq}}=\sum_{p,q,k}a_{pk}\delta_{ik}\delta_{jq}\frac{\partial}{\partial y^{pq}}=\sum_p a_{pi}\frac{\partial}{\partial y^{pj}}.$$

由此可得左不变向量场的一组基为

$$\left\{\tilde{E}_{ij}=\sum_p x_{pi}\frac{\partial}{\partial x^{pj}}:i,j=1,\cdots,n\right\}.$$

计算可得

$$\begin{aligned}[\tilde{E}_{ij},\tilde{E}_{k\ell}]&=\sum_{p,q}\left[x_{pi}\frac{\partial}{\partial x^{pj}},x_{qk}\frac{\partial}{\partial x_{q\ell}}\right]=\sum_{p,q}\delta_{pq}\left(x_{pi}\delta_{jk}\frac{\partial}{\partial x_{q\ell}}-x_{qk}\delta_{i\ell}\frac{\partial}{\partial x_{pj}}\right)\\&=\delta_{jk}\tilde{E}_{i\ell}-\delta_{i\ell}\tilde{E}_{kj}=\sum_{p,q}(\delta_{ip}\delta_{\ell q}\delta_{jk}-\delta_{kp}\delta_{jq}\delta_{i\ell})\tilde{E}_{pq}.\end{aligned}$$

由此可得结构常数为 $C_{ij,k\ell}^{pq}=\delta_{ip}\delta_{\ell q}\delta_{jk}-\delta_{kp}\delta_{jq}\delta_{i\ell}$. 计算可得

$$(L_{A^{-1}})^*|_I\mathrm{d}y^{ij}=\sum_{p,q}\frac{\partial}{\partial x^{pq}}\left(\sum_k a^{ik}x_{kj}\right)\mathrm{d}x^{pq}=\sum_{p,q,k}a^{ik}\delta_{kp}\delta_{jq}\mathrm{d}x^{pq}=\sum_k a^{ik}\mathrm{d}x^{kj}.$$

由此可得左不变 1-形式的一组基为

$$\left\{\tilde{\omega}_{ij}=\sum_k x^{ik}\mathrm{d}x^{kj}:1\leqslant i,j\leqslant n\right\}.$$

换言之, 一组基由 $\omega=X^{-1}\mathrm{d}X$ 确定. 由结构常数可得结构方程为

$$\mathrm{d}\tilde{\omega}_{pq}=-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k,\ell}(\delta_{ip}\delta_{\ell q}\delta_{jk}-\delta_{kp}\delta_{jq}\delta_{i\ell})\tilde{\omega}_{ij}\wedge\tilde{\omega}_{k\ell}.$$

□

习题 11.2. 求特殊线性群

$$G=\mathrm{SL}(2)=\left\{A=\begin{pmatrix}u^1&u^2\\u^3&u^4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}:\det A=u^1u^4-u^2u^3=1\right\}$$

的左不变向量场, 结构常数, 左不变 1-形式, 结构方程及左不变向量场生成的单参数子群.

证明. 首先构造 G 的光滑结构. 定义

$$U_1=\{A\in G:u^1\neq 0\},\quad U_2=\{A\in G:v^2\neq 0\}.$$

分别定义坐标映射

$$\varphi_1(A) = (u^1, u^2, u^3), \quad \varphi_3(A) = (v^1, v^2, v^4).$$

上述使得 G 成为三维光滑流形, 并且单位阵 $I \in U_1$.

然后求解左移动 $L_A : X \mapsto AX$ 的坐标表示, 我们仅考虑 I 附近的局部坐标 U_1. 此时

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \circ L_A \circ \varphi_1^{-1}(u^1, u^2, u^3) &= \varphi_1 \begin{pmatrix} a^1 & a^2 \\ a^3 & \frac{1+a^2a^3}{a^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 & u^2 \\ u^3 & \frac{1+u^2u^3}{u^1} \end{pmatrix} \\
&= \left(a^1u^1 + a^2u^3, a^1u^2 + a^2\frac{1+u^2u^3}{u^1}, a^3u^1 + \frac{1+a^2a^3}{a^1}u^3 \right) \\
&\triangleq (v^1, v^2, v^3).
\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
(L_A)_* \frac{\partial}{\partial u^1}\bigg|_I &= \frac{\partial v^1}{\partial u^1}\bigg|_I \frac{\partial}{\partial v^1}\bigg|_A + \frac{\partial v^2}{\partial u^1}\bigg|_I \frac{\partial}{\partial v^2}\bigg|_A + \frac{\partial v^3}{\partial u^1}\bigg|_I \frac{\partial}{\partial v^3}\bigg|_A \\
&= a^1 \frac{\partial}{\partial v^1}\bigg|_A - a^2 \frac{\partial}{\partial v^2}\bigg|_A + a^3 \frac{\partial}{\partial v^3}\bigg|_A. \\
(L_A)_* \frac{\partial}{\partial u^2}\bigg|_I &= \frac{\partial v^1}{\partial u^2}\bigg|_I \frac{\partial}{\partial v^1}\bigg|_A + \frac{\partial v^2}{\partial u^2}\bigg|_I \frac{\partial}{\partial v^2}\bigg|_A + \frac{\partial v^3}{\partial u^2}\bigg|_I \frac{\partial}{\partial v^3}\bigg|_A \\
&= a^1 \frac{\partial}{\partial v^2}\bigg|_A \\
(L_A)_* \frac{\partial}{\partial u^3}\bigg|_I &= \frac{\partial v^1}{\partial u^3} \frac{\partial}{\partial v^1}\bigg|_A + \frac{\partial v^2}{\partial u^3} \frac{\partial}{\partial v^2}\bigg|_A + \frac{\partial v^3}{\partial u^3} \frac{\partial}{\partial v^3}\bigg|_A \\
&= a^2 \frac{\partial}{\partial v^1}\bigg|_A + \frac{1+a^2a^3}{a^1} \frac{\partial}{\partial v^3}\bigg|_A.
\end{aligned}$$

综上可得 G 的所有左不变向量场由基

$$X_1 = u^1 \frac{\partial}{\partial u^1} - u^2 \frac{\partial}{\partial u^2} + u^3 \frac{\partial}{\partial u^3}, \quad X_2 = u^1 \frac{\partial}{\partial u^2}, \quad X_3 = u^2 \frac{\partial}{\partial u^1} + \frac{1+u^2u^3}{u^1} \frac{\partial}{\partial u^3}$$

确定.

然后计算结构常数:

$$[X_1, X_2] = 2u^1 \frac{\partial}{\partial u^2} = 2X_2, \quad [X_1, X_3] = -2u^2 \frac{\partial}{\partial u^1} - 2\frac{1+u^2u^3}{u^1} \frac{\partial}{\partial u^3} = -2X_3.$$

$$[X_2, X_3] = u^1 \frac{\partial}{\partial u^1} - u^2 \frac{\partial}{\partial u^2} + u^3 \frac{\partial}{\partial u^3} = X_1.$$

由此可得

$$C_{12}^1 = C_{12}^3 = 0,\ C_{12}^2 = 2; \quad C_{13}^1 = C_{13}^2 = 0,\ C_{13}^3 = -2; \quad C_{23}^1 = 1,\ C_{23}^2 = C_{23}^3 = 0.$$

然后计算左不变 1-形式. 首先计算 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ 的左不变 1-形式为

$$\begin{aligned}\omega = X^{-1}\mathrm{d}X &= \frac{1}{x^1x^4-x^2x^3}\begin{pmatrix} x^4 & -x^2 \\ -x^3 & x^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}x^1 & \mathrm{d}x^2 \\ \mathrm{d}x^3 & \mathrm{d}x^4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x^1x^4-x^2x^3}\begin{pmatrix} x^4\mathrm{d}x^1 - x^2\mathrm{d}x^3 & x^4\mathrm{d}x^2 - x^2\mathrm{d}x^4 \\ -x^3\mathrm{d}x^1 + x^1\mathrm{d}x^3 & -x^3\mathrm{d}x^2 + x^1\mathrm{d}x^4 \end{pmatrix} \\ &\triangleq \begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^2 \\ \omega^3 & \omega^4 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

即 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ 的全体左不变 1-形式由 ω^i 确定. 设 $\iota : G \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 为嵌入映射, 则

$$\eta_1 \triangleq \iota^*\omega_1 = \frac{1+u^2u^3}{u^1}\mathrm{d}u^1,$$

$$\eta_2 \triangleq \iota^*\omega_2 = \frac{u^2(1+u^2u^3)}{(u^1)^2}\mathrm{d}u^1 + \frac{1}{u^1}\mathrm{d}u^2 - \frac{(u^2)^2}{u^1}\mathrm{d}u^3.$$

$$\eta_3 \triangleq \iota^*\omega_3 = -u^3\mathrm{d}u^1 + u^1\mathrm{d}u^3$$

确定了 G 的左不变 1-形式.

注意到

$$X_1|_I = \frac{\partial}{\partial u^1},\ X_2|_I = \frac{\partial}{\partial u^2},\ X_3|_I = \frac{\partial}{\partial u^3};\quad \eta_1|_I = \mathrm{d}u^1,\ \eta_2|_I = \mathrm{d}u^2,\ \eta_3 = \mathrm{d}u^3.$$

故它们在 I 处互为对偶基. 故由结构常数可得结构方程

$$\mathrm{d}\eta_1 = -\frac{1}{2}\eta_2\wedge\eta_3,\quad \mathrm{d}\eta_2 = -\eta_1\wedge\eta_2,\quad \mathrm{d}\eta_3 = \eta_1\wedge\eta_3.$$

分别计算 X_1, X_2, X_3 的积分曲线可得:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}t} = u^1, \quad \dfrac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t} = -u^2, \quad \dfrac{\mathrm{d}u^3}{\mathrm{d}t} = u^3 \\ u^1(0)=1, \quad u^2(0)=0, \quad u^3(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^1(t) = \mathrm{e}^t \\ u^2(t) = 0 \\ u^3(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi_1(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \dfrac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t} = u^1, \quad \dfrac{\mathrm{d}u^3}{\mathrm{d}t} = 0 \\ u^1(0)=1, \quad u^2(0)=0, \quad u^3(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^1(t) = 1 \\ u^2(t) = t \\ u^3(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}t} = u^2, \quad \dfrac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \dfrac{\mathrm{d}u^3}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1+u^2u^3}{u^1} \\ u^1(0)=1, \quad u^2(0)=0, \quad u^3(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^1(t) = 1 \\ u^2(t) = 0 \\ u^3(t) = t \end{cases} \Rightarrow \varphi_3(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

□

习题 11.3. 设 $\mathbb{H}=\mathbb{R}^4$, 取 $\mathbb{H}$ 的基底为 $\{1,i,j,k\}$, 乘法表为

$$1\cdot 1=1,\quad i\cdot i=j\cdot j=k\cdot k=-1,\quad 1\cdot i=i\cdot 1=i,\quad 1\cdot j=j\cdot 1=j,\quad 1\cdot k=k\cdot 1=k.$$

$$i\cdot j=-j\cdot i=k,\quad j\cdot k=-k\cdot j=i,\quad k\cdot i=-i\cdot k=j.$$

则 $\mathbb{H}$ 中元素 x 称为四元数, 可表为 $x=x^0 1+x^1 i+x^2 j+x^3 k$, $x^0,x^1,x^2,x^3\in\mathbb{R}^4$. 由上述基底元素的乘法表定义了 $\mathbb{H}$ 中任意两个四元数的乘法.

1. 定义 $\mathbb{H}^*=\mathbb{H}\setminus\{0\}$, 证明: $\mathbb{H}^*$ 关于四元数乘法构成一个四维李群.
2. 求 $\mathbb{H}^*$ 的左不变向量场.
3. 求 $\mathbb{H}^*$ 的结构常数.
4. 求 $\mathbb{H}^*$ 的左不变 1-形式和结构方程.

证明. 1. $\mathbb{H}^*$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的开子流形, 有自然的坐标映射 $\varphi: x^0+x^1i+x^2j+x^3k\mapsto(x^0,x^1,x^2,x^3)$, $(\mathbb{H}^*,\varphi)$ 即为光滑坐标系. 四元数乘法的坐标表示为

$$\begin{aligned}(x^0,x^1,x^2,x^3,y^0,y^1,y^2,y^3)\mapsto(&x^0y^0-x^1y^1-x^2y^2-x^3y^3,x^0y^1+x^1y^0+x^2y^3-x^3y^2,\\ &x^0y^2-x^1y^3+x^2y^0+x^3y^1,x^0y^3+x^1y^2-x^2y^1+x^3y^0).\end{aligned}$$

这是 $\mathbb{H}^*$ 上的封闭运算, 并且是光滑的. 逆运算的坐标表示为

$$(x^0,x^1,x^2,x^3)\mapsto\frac{1}{(x^0)^2+(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}(x^0,-x^1,-x^2,-x^3).$$

这是光滑的. 所以 $\mathbb{H}^*$ 在四元数乘法下构成四维李群.

2. 任取 $x\in\mathbb{H}^*$, 以及 $y\in\mathbb{H}^*$, 设 $z=xy$ 的坐标为 (z^1,z^2,z^3,z^4)(表达式 1 中已给出), 则

$$\begin{aligned}
(L_x)_*\frac{\partial}{\partial y^0}\bigg|_1&=\frac{\partial z^0}{\partial y^0}\frac{\partial}{\partial z^0}\bigg|_x+\frac{\partial z^1}{\partial y^0}\frac{\partial}{\partial z^1}\bigg|_x+\frac{\partial z^2}{\partial y^0}\frac{\partial}{\partial z^2}\bigg|_x+\frac{\partial z^3}{\partial y^0}\frac{\partial}{\partial z^3}\bigg|_x\\
&=x^0\frac{\partial}{\partial z^0}\bigg|_x+x^1\frac{\partial}{\partial z^1}\bigg|_x+x^2\frac{\partial}{\partial z^2}\bigg|_x+x^3\frac{\partial}{\partial z^3}\bigg|_x.\\
(L_x)_*\frac{\partial}{\partial y^1}\bigg|_1&=\frac{\partial z^0}{\partial y^1}\frac{\partial}{\partial z^0}\bigg|_x+\frac{\partial z^1}{\partial y^1}\frac{\partial}{\partial z^1}\bigg|_x+\frac{\partial z^2}{\partial y^1}\frac{\partial}{\partial z^2}\bigg|_x+\frac{\partial z^3}{\partial y^1}\frac{\partial}{\partial z^3}\bigg|_x\\
&=-x^1\frac{\partial}{\partial z^0}\bigg|_x+x^0\frac{\partial}{\partial z^1}\bigg|_x+x^3\frac{\partial}{\partial z^2}\bigg|_x-x^2\frac{\partial}{\partial z^3}\bigg|_x.\\
(L_x)_*\frac{\partial}{\partial y^2}\bigg|_1&=\frac{\partial z^0}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial z^0}\bigg|_x+\frac{\partial z^1}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial z^1}\bigg|_x+\frac{\partial z^2}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial z^2}\bigg|_x+\frac{\partial z^3}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial z^3}\bigg|_x\\
&=-x^2\frac{\partial}{\partial z^0}\bigg|_x-x^3\frac{\partial}{\partial z^1}\bigg|_x+x^0\frac{\partial}{\partial z^2}\bigg|_x+x^1\frac{\partial}{\partial z^3}\bigg|_x.\\
(L_x)_*\frac{\partial}{\partial y^3}\bigg|_1&=\frac{\partial z^0}{\partial y^3}\frac{\partial}{\partial z^0}\bigg|_x+\frac{\partial z^1}{\partial y^3}\frac{\partial}{\partial z^1}\bigg|_x+\frac{\partial z^2}{\partial y^3}\frac{\partial}{\partial z^2}\bigg|_x+\frac{\partial z^3}{\partial y^3}\frac{\partial}{\partial z^3}\bigg|_x\\
&=-x^3\frac{\partial}{\partial z^0}\bigg|_x+x^2\frac{\partial}{\partial z^1}\bigg|_x-x^1\frac{\partial}{\partial z^2}\bigg|_x+x^0\frac{\partial}{\partial z^3}\bigg|_x.
\end{aligned}$$

由此可得

$$X_0 = x^0\frac{\partial}{\partial x^0} + x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial}{\partial x^3}, \quad X_1 = -x^1\frac{\partial}{\partial x^0} + x^0\frac{\partial}{\partial x^1} + x^3\frac{\partial}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial}{\partial x^3}.$$

$$X_2 = -x^2\frac{\partial}{\partial x^0} - x^3\frac{\partial}{\partial x^1} + x^0\frac{\partial}{\partial x^2} + x^1\frac{\partial}{\partial x^3}, \quad X_3 = -x^3\frac{\partial}{\partial x^0} + x^2\frac{\partial}{\partial x^1} - x^1\frac{\partial}{\partial x^2} + x^0\frac{\partial}{\partial x^3}$$

构成了 $\mathbb{H}^*$ 的左不变向量场的一组基.

3. 计算可得

$$[X_0, X_1] = 0, \quad [X_1, X_2] = -2x^3\frac{\partial}{\partial x^0} + 2x^2\frac{\partial}{\partial x^1} - 2x^1\frac{\partial}{\partial x^2} + 2x^0\frac{\partial}{\partial x^3} = 2X_3.$$

$$[X_2, X_3] = -2x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + 2x^0\frac{\partial}{\partial x^1} + 2x^3\frac{\partial}{\partial x^2} - 2x^2\frac{\partial}{\partial x^3} = 2X_1,$$

$$[X_0, X_2] = 0, \quad [X_1, X_3] = 2x^2\frac{\partial}{\partial x^1} + 2x^3\frac{\partial}{\partial x^1} - 2x^0\frac{\partial}{\partial x^2} - 2x^1\frac{\partial}{\partial x^3} = -2X_2, \quad [X_0, X_3] = 0.$$

由此可得结构常数

$$C^0_{0,1} = C^1_{0,1} = C^2_{0,1} = C^3_{0,1} = 0,$$

$$C^0_{0,2} = C^1_{0,2} = C^2_{0,2} = C^3_{0,2} = 0,$$

$$C^0_{0,3} = C^1_{0,3} = C^2_{0,3} = C^3_{0,3} = 0,$$

$$C^0_{1,2} = C^1_{1,2} = C^2_{1,2} = 0, \quad C^3_{1,2} = 2.$$

$$C^0_{2,3} = C^2_{2,3} = C^3_{2,3} = 0, \quad C^1_{2,3} = 2.$$

$$C^0_{1,3} = C^1_{1,3} = C^3_{1,3} = 0, \quad C^2_{1,3} = -2.$$

4. 注意到 $(X_i)|_e = \frac{\partial}{\partial x^i}|_e$, $i = 0, 1, 2, 3$, 设 ω^i 是对应对偶基 $\mathrm{d}x^i|_e$ 确定的左不变 1-形式. 首先注意到

$$\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} & \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 & -x^1 & -x^2 & -x^3 \\ x^1 & x^0 & -x^3 & x^2 \\ x^2 & x^3 & x^0 & -x^1 \\ x^3 & -x^2 & x^1 & x^0 \end{pmatrix}.$$

记右侧矩阵为 A. 则 $\begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x^0 & \mathrm{d}x^1 & \mathrm{d}x^2 & \mathrm{d}x^3 \end{pmatrix} (A^T)^{-1}$. 我们有

$$AA^T = ((x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)I \Rightarrow (A^T)^{-1} = \frac{1}{(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}A.$$

因此

$$\omega_0 = \frac{1}{(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}(x^0\mathrm{d}x^0 + x^1\mathrm{d}x^1 + x^2\mathrm{d}x^2 + x^3\mathrm{d}x^3).$$

$$\omega_1 = \frac{1}{(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}(-x^1\mathrm{d}x^0 + x^0\mathrm{d}x^1 + x^3\mathrm{d}x^2 - x^2\mathrm{d}x^3).$$

$$\omega_2 = \frac{1}{(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}(-x^2\mathrm{d}x^0 - x^3\mathrm{d}x^1 + x^0\mathrm{d}x^2 + x^1\mathrm{d}x^3).$$

$$\omega_3 = \frac{1}{(x^0)^2+(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}(-x^3\mathrm{d}x^0 + x^2\mathrm{d}x^1 - x^1\mathrm{d}x^2 + x^0\mathrm{d}x^3).$$

由结构常数可得结构方程

$$\mathrm{d}\omega_0 = 0, \quad \mathrm{d}\omega_1 = -\omega_2\wedge\omega_3, \quad \mathrm{d}\omega_2 = \omega_1\wedge\omega_3, \quad \mathrm{d}\omega_3 = -\omega_1\wedge\omega_2.$$

□

习题 11.4. 考虑单位球面 $\mathbb{S}^3 = \{x\in\mathbb{H} : x\bar{x}=1\}$, 其中 $x = x^0 1 + x^1 i + x^2 j + x^3 k$, $\bar{x} = x^0 1 - x^1 i - x^2 j - x^3 k$. 则 $\mathbb{S}^3$ 关于四元数乘法封闭, 是一个三维李群.

1. 求 $\mathbb{S}^3$ 上的左不变向量场.
2. 求李群 $\mathbb{S}^3$ 的结构常数.

证明. 设 $i : \mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{H}^*$ 为嵌入映射.

1. $\mathbb{S}^3$ 的左不变 1-形式的一组基为

$$\eta_1 = i^*\omega_1 = -x^1\mathrm{d}x^0 + x^0\mathrm{d}x^1 + x^3\mathrm{d}x^2 - x^2\mathrm{d}x^3.$$

$$\eta_2 = i^*\omega_2 = -x^2\mathrm{d}x^0 - x^3\mathrm{d}x^1 + x^0\mathrm{d}x^2 - x^1\mathrm{d}x^3.$$

$$\eta_3 = i^*\omega_3 = -x^3\mathrm{d}x^0 + x^2\mathrm{d}x^1 - x^1\mathrm{d}x^2 + x^0\mathrm{d}x^3.$$

其中

$$\eta_0 = i^*\omega_0 = x^0\mathrm{d}x^0 + x^1\mathrm{d}x^1 + x^2\mathrm{d}x^2 + x^3\mathrm{d}x^3 = \frac{1}{2}\mathrm{d}(|x|^2) = 0.$$

因此左不变向量场的一组基即为其对应的对偶基

$$X_1 = -x^1\frac{\partial}{\partial x^0} + x^0\frac{\partial}{\partial x^1} + x^3\frac{\partial}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial}{\partial x^3} = x\cdot i.$$

$$X_2 = -x^2\frac{\partial}{\partial x^0} - x^3\frac{\partial}{\partial x^1} + x^0\frac{\partial}{\partial x^2} - x^1\frac{\partial}{\partial x^3} = x\cdot j.$$

$$X_3 = -x^3\frac{\partial}{\partial x^0} + x^2\frac{\partial}{\partial x^1} - x^1\frac{\partial}{\partial x^2} + x^0\frac{\partial}{\partial x^3} = x\cdot k.$$

2. 由于余切映射保外积, 故 $\mathbb{S}^3$ 上的结构方程与 $\mathbb{H}^*$ 的形式相同, 结构常数也对应相同.

□

习题 11.5. 设 $\mathrm{SO}(3) = \{A\in\mathbb{R}^{3\times3} : A^TA = I_3\}$ 为旋转群, 求:

1. $\mathrm{SO}(3)$ 的左不变向量场, 左不变 1-形式, 左不变向量场生成的单参数子群.
2. 考虑 $\mathrm{SO}(3)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上的右作用 $\theta : \mathbb{R}^3\times\mathrm{SO}(3)\to\mathbb{R}^3$, $(x,A)\mapsto xA \triangleq y$, 其中 $x = (x^1,x^2,x^3)\in\mathbb{R}^3$, $y = (y^1,y^2,y^3)\in\mathbb{R}^3$. 求右作用 θ 生成的 $\mathbb{R}^3$ 的基本向量场.

证明. 首先求 $G = \mathrm{SO}(3)$ 的切空间 T_IG. 考虑映射 $f : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $A \mapsto A^TA$. 任取 $X \in T_I\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, 考虑指数映射 $\gamma(t) = \mathrm{e}^{tX}$, 则

$$(f_*)_I(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}(f \circ \gamma(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}(\mathrm{e}^{t(X^T+X)}) = X^T + X.$$

由 G 的定义可得 $T_IG \subset \{X \in \mathbb{R}^3 : X^T + X = O\}$. 比较维数可得二者相等. 由此可得 T_IG 的一组基为

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

结合 $(L_X)_* : Y \mapsto XY$ 可得

$$\tilde{E}_1|_X = XE_1 = \begin{pmatrix} -x_{12} & x_{11} & 0 \\ -x_{22} & x_{21} & 0 \\ -x_{32} & x_{31} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{E}_2|_X = XE_2 = \begin{pmatrix} -x_{13} & 0 & x_{11} \\ -x_{23} & 0 & x_{21} \\ -x_{33} & 0 & x_{31} \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{E}_3|_X = XE_3 = \begin{pmatrix} 0 & -x_{13} & x_{12} \\ 0 & -x_{23} & x_{22} \\ 0 & -x_{33} & x_{32} \end{pmatrix}.$$

所以 G 的左不变向量场的一组基为

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_1 &= -x_{12}\frac{\partial}{\partial x_{11}} + x_{11}\frac{\partial}{\partial x_{12}} - x_{22}\frac{\partial}{\partial x_{21}} + x_{21}\frac{\partial}{\partial x_{22}} - x_{32}\frac{\partial}{\partial x_{31}} + x_{31}\frac{\partial}{\partial x_{32}}, \\
\tilde{E}_2 &= -x_{13}\frac{\partial}{\partial x_{11}} + x_{11}\frac{\partial}{\partial x_{13}} - x_{23}\frac{\partial}{\partial x_{21}} + x_{21}\frac{\partial}{\partial x_{23}} - x_{33}\frac{\partial}{\partial x_{31}} + x_{31}\frac{\partial}{\partial x_{33}}, \\
\tilde{E}_3 &= -x_{13}\frac{\partial}{\partial x_{12}} + x_{12}\frac{\partial}{\partial x_{13}} - x_{23}\frac{\partial}{\partial x_{22}} + x_{22}\frac{\partial}{\partial x_{23}} - x_{33}\frac{\partial}{\partial x_{32}} + x_{32}\frac{\partial}{\partial x_{33}}.
\end{aligned}$$

回忆 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 的左不变 1-形式的一组基由 $\omega = X^{-1}\mathrm{d}X$, $X = (x_{ij})$ 确定. 由 $X^TX = I$ 可得 $\mathrm{d}X^T \cdot X + X^T\mathrm{d}X = O \Rightarrow \mathrm{d}X = -X\mathrm{d}X^TX$. 因此

$$\iota^*\omega = -X^{-1} \cdot X\mathrm{d}X^TX = -\begin{pmatrix} \mathrm{d}x_{11} & \mathrm{d}x_{21} & \mathrm{d}x_{31} \\ \mathrm{d}x_{12} & \mathrm{d}x_{22} & \mathrm{d}x_{32} \\ \mathrm{d}x_{13} & \mathrm{d}x_{23} & \mathrm{d}x_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

由此可得 G 的左不变 1-形式的一组基为

$$\omega_1 = -x_{12}\mathrm{d}x_{11} - x_{22}\mathrm{d}x_{21} - x_{32}\mathrm{d}x_{31}.$$

$$\omega_2 = -x_{13}\mathrm{d}x_{11} - x_{23}\mathrm{d}x_{21} - x_{33}\mathrm{d}x_{31}.$$

$$\omega_3 = -x_{13}\mathrm{d}x_{12} - x_{23}\mathrm{d}x_{22} - x_{33}\mathrm{d}x_{32}.$$

计算 $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3$ 生成的单参数子群 (即过 I 的积分曲线) 可得

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}, \quad \varphi_3(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

设 $x = (x^1, x^2, x^3)$, 直接计算可得基本向量场的一组基为

$$\bar{E}_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} x \cdot \varphi_1(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} (x^1 \cos t - x^2 \sin t, x^1 \sin t + x^2 \cos t, x^3) = -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}.$$

$$\bar{E}_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} x \cdot \varphi_2(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} (x^1 \cos t - x^3 \sin t, x^2, x^1 \sin t + x^3 \cos t) = -x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

$$\bar{E}_3 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} x \cdot \varphi_3(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} (x^1, x^2 \cos t - x^3 \sin t, x^2 \sin t + x^3 \cos t) = -x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

□

习题 11.6. 设 $M = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. 定义 G 上的乘法 $\varphi : G \times G \to G$, $((a, \tilde{a}), (b, \tilde{b})) \mapsto (a + \tilde{a}b, \tilde{a}\tilde{b})$, 则 G 是李群. 定义 G 在 M 上的左作用 $\psi : G \times M \to M$, $((a, \tilde{a}), x) \mapsto a + \tilde{a}x$.

1. 证明: G 是左作用在 M 上的李氏变换群.

2. 求李氏变换群 G 在 M 上产生的基本向量场.

证明. 容易验证 G 是李群, 幺元为 $e = (0, 1)$.

1. 任取 $(a, \tilde{a}), (b, \tilde{b}) \in G$, $x \in M$, 则

$$e \cdot x = (0, 1) \cdot x = x.$$

$$(a, \tilde{a}) \cdot ((b, \tilde{b}) \cdot x) = (a, \tilde{a}) \cdot (b + \tilde{b}x) = a + \tilde{a}b + \tilde{a}\tilde{b}x.$$

$$((a, \tilde{a}) \cdot (b, \tilde{b})) \cdot x = (a + \tilde{a}b + \tilde{a}\tilde{b}) \cdot x = a + \tilde{a}b + \tilde{a}\tilde{b}x.$$

由此可得 G 是左作用在 M 上的李氏变换群.

2. 任取 $\alpha = (a, \tilde{a}) \in G$, 记 $L_\alpha : (b, \tilde{b}) \mapsto (a + \tilde{a}b, \tilde{a}\tilde{b}) \triangleq (c, \tilde{c})$. 则

$$(L_\alpha)_*|_e \frac{\partial}{\partial b}\bigg|_e = \frac{\partial c}{\partial b}\bigg|_e \frac{\partial}{\partial c}\bigg|_\alpha + \frac{\partial \tilde{c}}{\partial b}\bigg|_e \frac{\partial}{\partial \tilde{c}}\bigg|_\alpha = \tilde{a} \frac{\partial}{\partial c}\bigg|_\alpha.$$

$$(L_\alpha)_*|_e \frac{\partial}{\partial \tilde{b}}\bigg|_e = \frac{\partial c}{\partial \tilde{b}}\bigg|_e \frac{\partial}{\partial c}\bigg|_\alpha + \frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{b}}\bigg|_e \frac{\partial}{\partial \tilde{c}}\bigg|_\alpha = \tilde{a} \frac{\partial}{\partial \tilde{c}}\bigg|_\alpha.$$

因此 G 的左不变向量场为

$$\tilde{E}_1 = \tilde{a} \frac{\partial}{\partial a}, \quad \tilde{E}_2 = \tilde{a} \frac{\partial}{\partial \tilde{a}}.$$

计算可得对应的两个单参数子群为

$$\varphi_1(t) = (t, 1), \quad \varphi_2(t) = (0, \mathrm{e}^t).$$

因此对应的基本向量场为

$$\bar{E}_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \varphi_1(t) \cdot x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} (t+x) = \frac{\partial}{\partial x}.$$

$$\bar{E}_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \varphi_2(t) \cdot x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} (\mathrm{e}^t x) = x\frac{\partial}{\partial x}.$$

□

习题 11.7. 设 $M = \mathbb{R}^2$, 考虑 $V = x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} \in \Gamma(TM)$, $\omega = \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$. 求 $\mathcal{L}_V \omega$.

证明. 直接计算可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V \omega &= \mathcal{L}_V \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^1 \wedge \mathcal{L}_V \mathrm{d}x^2 = \mathrm{d}(\mathcal{L}_V x^1) \wedge \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}(\mathcal{L}_V x^2) \\ &= \mathrm{d}(V(x^1)) \wedge \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}(V(x^2)) = (-\mathrm{d}x^2) \wedge \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^1 = 0.\end{aligned}$$

□

习题 11.8. 设 X 是光滑流形 M 上的完备向量场, ϕ_t 为 X 生成的单参数变换群. 则存在线性算子 $Q : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$, 使得 $\forall \omega \in \Omega^k(M)$, 有

$$\phi_1^* \omega - \omega = \mathrm{d}Q(\omega) + Q(\mathrm{d}\omega).$$

证明. 计算可得

$$\begin{aligned}\phi_1^* \omega - \omega &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi_t^* \omega)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0} (\phi_{t+s}^* \omega)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0} (\phi_s^*(\phi_t^* \omega))\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \mathcal{L}_X(\phi_t^* \omega)\mathrm{d}t = \int_0^1 (\mathrm{d} \circ i_X + i_X \circ \mathrm{d})(\phi_t^* \omega)\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{d}\left(\int_0^1 (i_X \circ \phi_t^*)\omega \mathrm{d}t\right) + \int_0^1 (i_X \circ \phi_t^*)(\mathrm{d}\omega)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由此可得待求的线性算子 Q 为

$$Q : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M), \quad \omega \mapsto \int_0^1 (i_X \circ \phi_t^*)\omega \mathrm{d}t.$$

□

12 12.4: 齐性流形