2013–2014学年第一学期期中考试试题

考试科目：线性代数与解析几何　考试时间：2013.11.24　　得分：____________

学生所在系：________________　姓名：________________　学号：______________

【注】1.不准使用手机和计算器等电子产品。

2.本试题所涉及的坐标均为直角坐标；卷面总分:120分；考试时间:120分钟。

一、 填空题【每题4分，共20分】

1. 已知$A(1,2,3), B(2,2,2), C(1,5,9), D(2,1,4,)$, 则四面体$ABCD$的体积为______。

2. 经过点$(1,2,3)$ 且垂直于两平面$2x+y+2z+6=0$ 和$x+2y+3z+5=0$ 的平面方程为________________________________。

3. 当$c=$________时，两直线$x=2y=2z$ 和$x-c=\dfrac{y-3}{2}=z-2$ 相交。

4. 设$n(n\geq 2)$阶方阵A的伴随矩阵为A^*，行列式$det(A)=2$；则$det(A^*)=$______。

5. 已知3阶实方阵A的伴随矩阵为$A^*=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&-1&0\\4&0&0\end{pmatrix}$，则$A=\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$。

二、 判断题【判断下列命题是否正确，并简要说明理由。每题5分，共20分】

1. 若空间三个向量$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ 不共面，则$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\ \vec{a}-\vec{b}+\vec{c},\ \vec{a}+2\vec{b}+4\vec{c}$ 也不共面。

2. 对空间任意三个向量$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$，必有$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})\times\vec{b}$。

3. 若齐次线性方程组$AX=0$有非零解，则非齐次线性方程组$AX=b(b\neq 0)$必有无穷多组解。

4. 若A,B均为n阶方阵；则$det(A\cdot B)=det(A)\cdot det(B)$。

三、【10分】若矩阵A经一次初等变换(1,2或3)后得到矩阵B；那么，相应地，A^T能否由B^T经初等变换得到？如果能，A^T是由B^T经怎样的初等变换得到的？

1. 对换A的第i行与第j行；
2. 用非零数λ乘以A的第i行；
3. 将A的第j行的μ倍加到其第i行。

四、【10分】设$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\det(A)$ 和$A^k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 。

五、【15分】已知三张平面$\Pi_1: \lambda x + y + z + 1 = 0$, $\Pi_2: x + \lambda y + z + 2 = 0$ 和 $\Pi_3: x + y - 2z + 3 = 0$，$\lambda$为参数；试就参数$\lambda$讨论其位置关系，并作示意图。

六、【15分】求直线$L_1: x - 1 = y = z$绕$L_2: x = y = 0$旋转一周所得旋转面的参数方程和一般方程，指出此曲面的类型并作示意图。

七、【15分】试证明：对于任意n阶方阵A均有 $\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(2I_n - A) \geq n$，且等号成立的充分必要条件是 $A^2 = 2A$ 。

八、【15分】试证明：　1. $rank(A^*) = \begin{cases} n\ , & rank(A) = n\ , \\ 1\ , & rank(A) = n-1\ , \\ 0\ , & rank(A) \leq n-2\ ; \end{cases}$

2. $(A^*)^* = (det(A))^{n-2} \cdot A \quad (n > 2)$ 。