选择题(7')

1、2 小题均为时间复杂度相关的问题，难度不大。

第 3 题为 Set Cover 问题的近似比，课件上有推导，答案为 $\log n$。如果记得思路现推也不难。如果不记得思路且大抄上没有那我祝你好运。

T1(19')

计算 $A[1],\ldots,A[n]$ 中恰为 $B[1],\ldots,B[m]$ 的子序列数量。要求时间复杂度 $O(nm)$。

Sol:

定义 $f(i,j)$ 表示 $A[1],\ldots,A[i]$ 中能与 $B[1],\ldots,B[j]$ 匹配的子序列数量。

转移方程为

$$f(i,j)=\begin{cases} f(i-1,j) \text{ if } A[i]\neq B[j] \\ f(i-1,j)+f(i-1,j-1)\text{if } A[i]=B[j] \end{cases}$$

时间复杂度 $O(nm)$。

本题难度个人认为低于实验和作业中涉及的动态规划问题。

T2(19')

给定序列 $A[1],\ldots,A[n]$，求区间和为 0 的区间数量。要求时间复杂度 $O(n)$。

Sol:

计算前缀和 $s[i]=\sum_{j=1}^{i}A[j]$，那么如果 $s[i]=s[j]$，则说明 $A[i+1],\ldots,A[j]$ 为区间和为 0 的一个区间。

利用哈希表维护即可做到 $O(1)$ 的查询和插入操作，顺着扫一遍即可。

需要注意的是，$s[0]=0$ 同样需要被插入到哈希表中。如果没有注意到这一点会被扣 2 分。

（本题与 Lab2 T2 相似度极高，独立完成实验的同学应该都能做出。而且老师考试时提示了数字可能很大，需要使用哈希表。这应该是本场考试最简单的题目。）

T3(19')

给定 n 个任务，每个时间最多只能完成 1 个任务，每个任务的截止时间为 t_i，价值为 w_i，最多能够完成 k 个任务，请求出能够获得的最大价值。

Sol:

本题没有要求时间复杂度，所以做法比较多。

我考场上写的做法是将任务按照价值排序，然后贪心地从高往低将每个任务安排在能完成的最晚时刻，不难证明这样的策略是正确的。

暴力的执行的时间复杂度是 $O(nt)$，可以通过线段树上二分将 t 优化成 $\log t$，不过既然没有要求时间复杂度也不用这么麻烦。

另一种做法是，维护一个大小不超过 k 的小根堆，然后按照时间顺序扫描每个任务。如果当前时间 t_i 小于堆的大小则直接插入。如果等于（说明此时前 t_i 的时间已经被安排满了）则与堆顶进行比较，取较大值保留。最终堆里的任务就是所要完成的任务。时间复杂度为 $O(n\log n)$。

本题应该很经典了，而且没有要求时间复杂度，且难度（想写低于作业来着，但仔细一想考前的作业里除了排队接水和近似比为 2 的 01 背包之外并没有别的贪心题目，所以感觉并不成立）其实并不算大。

T4(19')

N 为 2 的整数次幂，x 为一个 $N\times N$ 的矩阵，定义二维傅里叶变换：

$$\hat{x}(f_1,f_2)=\sum_{t_1=0}^{N-1}\sum_{t_2=0}^{N-1}x(t_1,t_2)\cdot\exp\{\frac{2\pi i(t_1f_1+t_2f_2)}{N}\}$$

设计算法快速计算二维傅里叶变换。

Sol:

写成矩阵的形式，可以发现二维傅里叶变换本质上就是对 x 左右各乘一个 Vandermonde 矩阵，即

$$\hat{x}=V_NxV_N$$

可以通过定义验证。

于是先对 x 的每一列做一维的 FFT，再对所得矩阵的每一行做一维的 FFT 即可。时间复杂度 $O(n^2\log n)$。

本题需要一些观察和猜想，且了解 FFT 本身而不是单纯记个代码。Hw3 中的 Hadamard 变换（也是去年的期中考试题）与其具有一定的相似性。且助教在习题课上也讲了 Hadamard 变换从矩阵的角度如何看待，对做出本题应该有所帮助。

T5(17')

计算机中浮点数时常出现误差，所以经常采用分数来存储浮点数。给定 n 个形如 $a[i]/b[i]$ 的分数，满足 $1\le a[i],b[i]\le n^3$，设计一个 $O(n)$ 的算法进行排序。

Sol:

观察到任意两个分数的差最大为 $|\frac{n^3-2}{n^3-1}-\frac{n^3-1}{n^3}|>\frac{1}{n^6}$。

也就是任意两个分数，要么相等，要么乘以 n^6 之后会有一个不小于 1 的 gap。那么此时再取整也会保留一个不小于 1 的 gap，也就是说将所有分数都乘 n^6 之后就被离散化到了 $[n^3,n^9]$ 上，且满足原有的大小关系。

而且由于值域的特殊性，我们执行以 n 为基底的基数排序即可做到 $O(6\times(n+n))=O(n)$。

本题在思维上的跳跃性比较大，我自己考场上并没有做出来（其实下了考场也没做出来，是问助教才会的）。