

力学 习题与解答

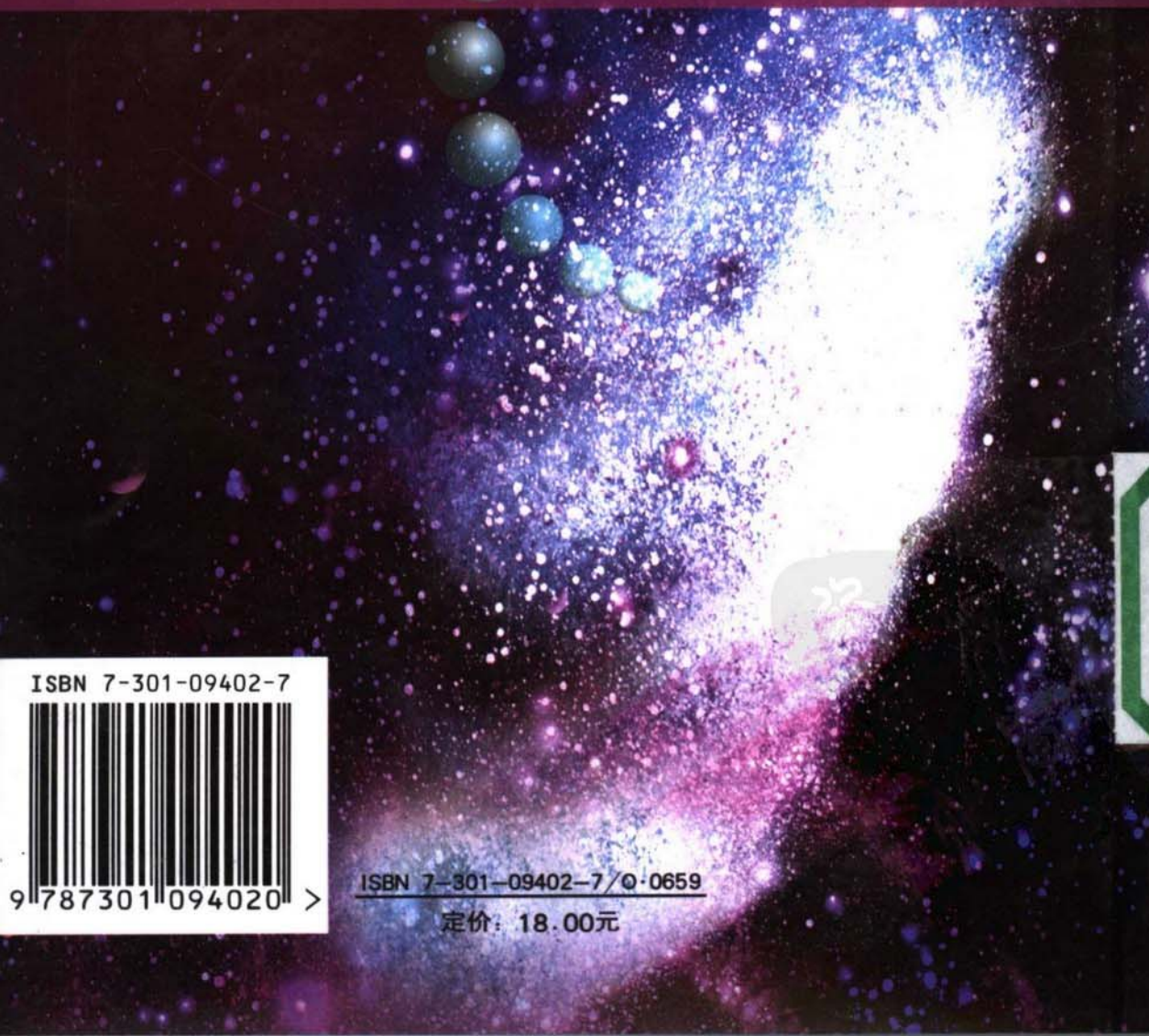
舒幼生 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

责任编辑◎翟 定

封面设计◎视觉互联·屈小平



ISBN 7-301-09402-7



9 787301 094020 >

ISBN 7-301-09402-7/Q·0659

定价：18.00元

力学学习题与解答

舒幼生 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS



图书在版编目(CIP)数据

力学习题与解答/舒幼生编著. —北京:北京大学出版社,2005.9
ISBN 7-301-09402-7

I. 力… II. 舒… III. 力学—高等学校—解题 IV. 03-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 083885 号

书 名: 力学习题与解答

著作责任者: 舒幼生 编著

责任编辑: 瞿 定

标准书号: ISBN 7-301-09402-7/O · 0659

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn>

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62752021

电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

排 版 者: 北京高新特打字服务社 82350640

印 刷 者: 北京飞达印刷有限责任公司

经 销 者: 新华书店

890 毫米×1240 毫米 A5 11.5 印张 330 千字

2005 年 9 月第 1 版 2005 年 9 月第 1 次印刷

印 数: 0001—3000 册

定 价: 18.00 元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,翻版必究

序(原书前言)

本书将原教材《力学(物理类)》中各章习题逐题解答,汇集成册,可与教材配套使用,也可以单独使用,作为配合其他力学教材的辅导书。

为了让使用本书的读者对力学课程更深刻理解,并了解习题编制时作者的意图,特将教材的前言作为本书的序言复录于下。

本书(《力学(物理类)》)系为理科大学物理类专业学生编写的普通物理力学教材,主体内容是经典力学,其后,用适量的篇幅介绍了狭义相对论中的运动学和质点动力学。

力学是为大学一年级学生设置的专业基础课,基本内容在高中物理课上虽已讲授过,但较为粗浅。再则,多数学生受高考影响,偏重解题得分,对经典力学普遍缺乏较为系统的认识。考虑到这一欠缺对后续理论课程的学习将会十分不利,因此,在力学课程中拟强调教学内容的融会贯通,在教材主体结构方面采用传统的方式以展现经典力学内在的系统性。

经典力学主体结构的基础是实验定律,从现象观测直至定律成文,其间的过程始终是未完成的归纳。未完成性为后来的物理学家提供了进一步探索的可能,使得经典力学能经爱因斯坦的工作,修正、发展成为狭义相对论力学。归纳和演绎是必要的。定律之后,运用数理逻辑导出一系列定理、公式,乃至形成相当完整的理论体系,其后效应不仅仅在于社会应用,更在于深化了人类对自然界的认识。

经典力学包含两组定律,其一为牛顿三定律,其二为力的结构性定律。牛顿三定律是核心内容,具有普适性,由此演绎出动量、能量、角动量三组定理。力的结构性定律涉及物体(或物质)间具体的相互作用规律,其中包括牛顿万有引力定律、胡克弹性力定律、摩擦力定律、库仑定律等。两组定律结合展开成的经典力学体系,可以统一地

解释宏观世界和部分宇观世界中出现的种种力学现象。

梳理经典力学系统,逻辑上的简洁性引起的美感,当能激起学生对牛顿和前辈学者的崇敬之心。

当前正在进行的中学物理教学改革,删去了部分经典的定量内容,增添了部分近代的定性半定量的内容,旨在减轻应试负担,提高中学生的综合素质。改革的长远效果将会显现,但就近期而言,却难免会影响大一新生的物理基础。面对现实,力学课程既然不宜降低教学标准,就更需考虑如何化解学生听课的困难。为此,本教材在基础内容陈述方式上,力求兼顾多数学生的可接受性。例如将质心、刚体合并在同一章内,从刚体平动问题遇到的动力学困难引入质心,使学生感觉自然。又如狭义相对论一章中安排了一段内容,从逻辑上定性叙述了如何由光速不变原理导出惯性系之间时钟零点校准的差异,又由这一差异导出运动直尺长度的收缩,继而由长度收缩导出运动时钟计时率的变慢。帮助学生理清光速不变原理与时间度量相对性之间的因果关联,意在化难为易。

从教多年,深感较好的题目不仅可以起到训练学生运用理论知识解决具体问题的能力,而且也能提升学生对物理学科的兴趣。本人在教材编写过程中刻意为学生编制和选录了各章习题,按易、难程度分成 A、B 两组,附于各章后,并将全部题解汇集成册,与教材配套出版,供学生解题后参考。

舒幼生

2005年8月于北京



目 录

1	质点运动学	(1)
	A 组	(1)
	B 组	(19)
2	牛顿定律 动量定理	(34)
	A 组	(34)
	B 组	(48)
3	机械能定理	(66)
	A 组	(66)
	B 组	(89)
4	角动量定理 天体运动	(107)
	A 组	(107)
	B 组	(124)
5	质心 刚体	(144)
	A 组	(144)
	B 组	(168)
6	流体	(205)
	A 组	(205)
	B 组	(217)
7	振动和波	(223)
	A 组	(223)

B 组	(252)
8 狭义相对论	(282)
A 组	(282)
B 组	(302)
附录 数学补充知识	(342)
A 组	(342)
B 组	(350)



1 质点运动学

A 组

1-1 精密测定重力加速度 g 的一种方法是在真空容器中竖直向上抛出一个球,测出小球抛出后两次经过某竖直位置 A 的时间间隔 T_A 和两次经过另一竖直位置 B 的时间间隔 T_B . 若已知 B 在 A 的上方 h 处,试求重力加速度 g .

解 方法一 以起抛点为坐标原点建立竖直向上的 y 坐标,如图 1-1 所示. 将起抛时刻记为 $t=0$,初速记为 v_0 ,两次经过同一 y 点的时刻分别记为 t_1 和 t_2 ,则有

$$v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = y = v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2,$$

相继可得

$$v_0(t_2 - t_1) = \frac{1}{2} g(t_2^2 - t_1^2), \quad t_2 + t_1 = 2v_0/g.$$

又可得

$$\begin{aligned} 2y &= v_0(t_2 + t_1) - \frac{1}{2} g(t_2^2 + t_1^2) \\ &= \frac{1}{2} g(t_2 + t_1)^2 - \frac{1}{2} g(t_2^2 + t_1^2) = g t_2 t_1. \end{aligned}$$

设 $t_2 - t_1 = T$, 则有

$$T^2 = (t_2 - t_1)^2 = (t_2 + t_1)^2 - 4t_1 t_2 = \frac{4}{g^2} v_0^2 - \frac{8}{g} y,$$

于是对 A, B 分别有

$$T_A^2 = \frac{4}{g^2} v_0^2 - \frac{8}{g} y_A, \quad T_B^2 = \frac{4}{g^2} v_0^2 - \frac{8}{g} y_B.$$

因 $y_B - y_A = h$, 可得

$$T_A^2 - T_B^2 = \frac{8}{g} (y_B - y_A) = \frac{8}{g} h,$$



图 1-1

即
$$g = 8h/(T_A^2 - T_B^2).$$

方法二 小球可达的最高点记作 P , A 在 P 下方 h_A 处, 小球从 P 静止开始下落到 A 经时 $T_A/2$, 有

$$h_A = \frac{1}{2}g(T_A/2)^2 = \frac{1}{8}gT_A^2.$$

B 在 P 下方 h_B 处, 小球从 P 到 B 经时 $T_B/2$, 有

$$h_B = \frac{1}{2}g(T_B/2)^2 = \frac{1}{8}gT_B^2.$$

继而有

$$h = h_A - h_B = \frac{1}{8}g(T_A^2 - T_B^2), \quad \text{即} \quad g = 8h/(T_A^2 - T_B^2).$$

1-2 在地面上方同一位置分别以 v_1, v_2 为初速度, 先后向上抛出两个小球, 第 2 个小球抛出后经过 τ 时间与第 1 个小球相遇. 改变两球抛出的时间间隔, 便可改变 τ 值. 设 v_A, v_B 已选定, 且 $v_1 < v_2$, 试求 τ 的最大值.

解 不难判定, 两球只能在抛出点上方, 且在球 2 上升过程中相遇. v_1, v_2 已确定, 为使 τ 达最大, 要求在球 1 升至最大高度 h_1 处相遇, 有

$$h_1 = v_1^2/2g.$$

球 2 抛出后经 τ 时间达 h_1 高度, 有

$$h_1 = v_2\tau - \frac{1}{2}g\tau^2,$$

可解得

$$\tau = (v_2 \mp \sqrt{v_2^2 - v_1^2})/g.$$

括号中取“+”对应 $\tau > v_2/g$, 意味着球 2 在其下落过程中与球 1 相遇, 这是不可能的, 应舍去. 最后, 得 τ 的最大值为

$$\tau = (v_2 - \sqrt{v_2^2 - v_1^2})/g.$$

1-3 图 1-2 所示一系列光滑斜面的顶端与底端间的水平距离同为 l , 倾角 ϕ 在 $0 \sim 90^\circ$ 间连续取值, 让小球从斜面顶端自静止下滑到底端, 所经时间记为 $T(\phi)$.

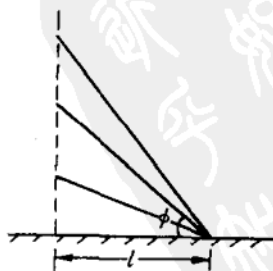


图 1-2

(1) 试求 $T(\phi)$ 的最小值 T_{\min} .

(2) 取 $\phi=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$, 分别画出小球沿斜面运动速度 v 随时间 t 的变化曲线, 并计算各自平均值 \bar{v} .

解 (1) 小球沿倾角 ϕ 斜面运动加速度为

$$a = g \sin \phi,$$

其水平分量为

$$a_{//} = (g \sin \phi) \cos \phi = \frac{1}{2} g \sin 2\phi.$$

经水平路程 l 所需时间即为 $T(\phi)$, 即有

$$T(\phi) = \sqrt{2l/a_{//}} = \sqrt{4l/g \sin 2\phi},$$

$$T_{\min} = T(\phi) |_{\phi=45^\circ} = 2 \sqrt{l/g}.$$

(2) 小球沿 ϕ 斜面运动速度为 $v = (g \sin \phi)t$, 结合 $T(\phi)$ 算式, 得

$$\phi=30^\circ: T(\phi) = 1.07 T_{\min},$$

$$t=0 \text{ 时, } v=0; t=T(\phi) \text{ 时, } v=1.07 \sqrt{gl}.$$

$$\phi=45^\circ: T(\phi) = T_{\min} = 2 \sqrt{l/g},$$

$$t=0 \text{ 时, } v=0; t=T(\phi) \text{ 时, } v=1.41 \sqrt{gl}.$$

$$\phi=60^\circ: T(\phi) = 1.07 T_{\min},$$

$$t=0 \text{ 时, } v=0; t=T(\phi) \text{ 时, } v=1.86 \sqrt{gl}.$$

相应的 $v-t$ 曲线如图 1-3 所示.

初速为零的匀加速直线运动平均速度等于末速度的二分之一, 即有

$$\phi=30^\circ: \bar{v} = 0.54 \sqrt{gl},$$

$$\phi=45^\circ: \bar{v} = 0.71 \sqrt{gl},$$

$$\phi=60^\circ: \bar{v} = 0.93 \sqrt{gl}.$$

1-4 飞机着陆后为尽快停

下, 采用尾部“降落伞”制动. $t=0$

刚着陆时的速度大小记为 v_0 , 坐标取成 $x=0$. 假设滑行过程中加速度为 $a_x = -\beta v_x^2$, 其中 β 是正的常量, 试求速度 v_x 随位置 x 的变化关

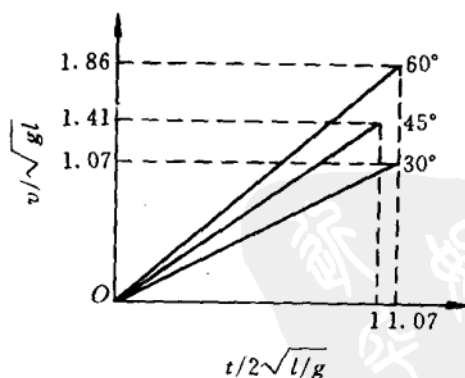


图 1-3

$$x = A \sin(\omega t + \phi_0), \quad v_x = \omega A \cos(\omega t + \phi_0),$$

$$x_0 = A \sin \phi_0 > 0, \quad v_0 = \omega A \sin \phi_0 > 0.$$

对②式,有

$$x = A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \phi_0\right),$$

$$v_x = -\omega A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \phi_0\right),$$

$$x_0 = A \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi_0\right) = A \sin \phi_0 > 0,$$

$$v_0 = -\omega A \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_0\right) = -\omega A \cos \phi_0 < 0.$$

因 $\phi_0 > 0$, 不会出现 $v_0 = 0$ 的情况. 最后, 可得解为

$$x = \begin{cases} A \sin(\omega t + \phi_0), & v_0 > 0, \\ A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \phi_0\right), & v_0 < 0, \end{cases}$$

都是简谐振动.

1-6 小球从同一位置以相同的初速率 v_0 , 在同一竖直平面上朝着不同方向斜抛出去, 如果抛射角 θ 可在 $0 \sim \pi$ 范围内连续变化, 试问各轨道最高点连成的曲线是什么类型曲线?

解 在此竖直平面内以抛射点为原点 O , 建立水平 x 轴和竖直向上的 y 轴. θ 角对应的水平射程和射高分别是

$$s = v_0^2 \sin 2\theta / g, \quad H = v_0^2 \sin^2 \theta / 2g.$$

轨道最高点的 x, y 坐标量分别为

$$x = s/2 = v_0^2 \sin 2\theta / 2g, \quad y = H = v_0^2 \sin^2 \theta / 2g,$$

上两式联立, 消去参量 θ 的过程如下:

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{v_0^4}{g^2} \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) = \frac{v_0^4}{g^2} \frac{2gy}{v_0^2} \left(1 - \frac{2gy}{v_0^2}\right) \\ &= -4y^2 + \frac{2v_0^2}{g} y = -4\left(y - \frac{v_0^2}{4g}\right)^2 + \frac{v_0^4}{4g^2}, \end{aligned}$$

便得各轨道最高点连成的曲线的方程为

$$\frac{x^2}{v_0^4/4g^2} + \frac{(y - v_0^2/4g)^2}{v_0^4/16g^2} = 1.$$

这是椭圆曲线,其半长轴、半短轴和中心分别为

$$a = v_0^2/2g, \quad b = v_0^2/4g, \quad (0, v_0^2/4g).$$

椭圆上端点对应 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 轨道的最高点,下端点对应 $\theta = 0$ 或 π 轨道的最高点,右和左两端点分别对应 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 和 $\theta = \frac{3}{4}\pi$ 轨道的最高点.

1-7 一位足球运动员踢出的球具有初速率 25 m/s,今在球门正前方 50 m 处欲将球踢进球门.为防止守门员将球挡住,他选择进球位置在正前方球门水平横梁下方 50 cm 之内区域.已知横梁高为 2.44 m,试问他应在什么倾角范围将球踢出?

解 足球的轨道方程为

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + (\tan \theta)x.$$

入射点坐标

$$x = 50 \text{ m}, \quad 1.94 \text{ m} < y < 2.44 \text{ m}.$$

再以 $v_0 = 25 \text{ m/s}$ 代入,踢球倾角(即球的抛射角) θ 取值范围应满足不等式:

$$1.94 < 50 \tan \theta - 19.6(1 + \tan^2 \theta) < 2.44,$$

即

$$\begin{cases} \tan^2 \theta - 2.55 \tan \theta + 1.10 < 0, \\ \tan^2 \theta - 2.55 \tan \theta + 1.12 > 0, \end{cases}$$

故 θ 需同时满足 $\begin{cases} 28.8^\circ < \theta < 63.4^\circ, \\ \theta < 29.6^\circ \text{ 或 } \theta > 63.2^\circ, \end{cases}$

故 θ 可取范围是

$$28.8^\circ < \theta < 29.6^\circ \text{ 或 } 63.2^\circ < \theta < 63.4^\circ.$$

1-8 一地面雷达观察者正从屏幕上监视由远处投来的一抛射体.某时刻,他得到的信息显示:抛射体达到了最高点且具有水平速度 v ; v 的方向线与观察者、抛射体位于同一竖直平面;抛射体与观察者之间的距离为 l ;观察者到抛射体连线与水平面的夹角为 θ .

- (1) 预测抛射体落地点与观察者间的水平距离 d ;
- (2) 预测抛射体能否越过观察者的头顶?

解 本题涉及内容可处理为在离地

$$h = l \sin \theta$$

高处,以水平速度 v 出射的平抛运动问题.落地时间

$$t = \sqrt{2h/g},$$

水平抛射点与落地点水平距离为

$$s = vt.$$

(1) 由上述三式,可得

$$s = v \sqrt{2l \sin \theta / g},$$

$$d = |s - l \cos \theta| = |v \sqrt{2l \sin \theta / g} - l \cos \theta|.$$

(2) 仅当

$$v \sqrt{2l \sin \theta / g} > l \cos \theta, \quad \text{即} \quad v > \sqrt{gl/2 \sin \theta \cos \theta}$$

时,抛射体方会越过观察者头顶.

1-9 离地高 h 的大厅吊灯爆炸成碎片,朝各个方向射出,初速度同为 v_0 . 设吊灯离屋顶和墙较远,碎片不会与之相撞;再设地面铺有毛毯,碎片落地后不会反弹. 试将每一碎片运动斜交地分解成沿其初速 v_0 方向的匀速直线运动和静止开始的竖直向下自由落体运动,以此求解地面上碎片分布区域的半径 R .

解 某碎片于 $t=0$ 时刻于 O 点以初速 v_0 抛出,设置沿 v_0 方向的 x 轴和竖直向下的 y 轴, t 时刻碎片落于地面 P 处,如图 1-4 所示. P 到灯柱距离记为 r , 则应有

$$\begin{aligned} r^2 &= (v_0 t)^2 - \left(\frac{1}{2} g t^2 - h \right)^2 \\ &= -\frac{1}{4} g^2 t^4 + (v_0^2 + gh)t^2 - h^2. \end{aligned}$$

不同的碎片有不同的 v_0 , 对应不同的落地时间 t , 落地点 P 有不同的 r 值, 所求 R 即为这些 r 中的极大值. 因 r^2 是 t^2 的二次函数, 当

$$t^2 = \frac{2}{g^2} (v_0^2 + gh)$$

时, r^2 取得极大, 对应 r 取得极大值, 即有

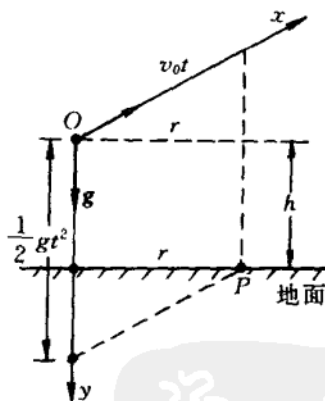


图 1-4

$$R = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

1-10 质点在 xy 平面上运动, $t=0$ 时刻, 位于 $x_0=A, y_0=0$, 速度的两个分量各是 $v_{x0}=0, v_{y0}=B\omega$, 任意 t 时刻加速度的两个分量各是 $a_x=-A\omega^2 \cos \omega t, a_y=-B\omega^2 \sin \omega t$, 其中 A, B, ω 都是常量, 试求质点运动轨道.

解 由

$$\int_{v_{x0}}^{v_x} dv_x = \int_0^t a_x dt = -A\omega^2 \int_0^t \cos \omega t dt,$$

得
$$v_x = -A\omega \sin \omega t.$$

再由
$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_x dt = -A\omega \int_0^t \sin \omega t dt,$$

得
$$x = A \cos \omega t.$$

类似地积分, 可得

$$y = B \sin \omega t.$$

两式联立, 消去参量 t , 即得轨道方程:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

是一个椭圆.

1-11 查找有关数据, 估算下述各量的大小:

- (1) 氢原子中电子绕核圆运动的加速度值(绝对值);
- (2) 学生匀速骑自行车直线行进时, 车轮边缘点的加速度值;
- (3) 以太阳为参考物, 地面上的实验室因地球自转和公转而具有的最大可能的加速度值.

解 (1) 正常情况下, 电子绕核圆运动半径取为玻尔半径, 向心加速度由库仑力提供, 查找有关数据后, 可估算得

$$a \approx 10^{23} \text{ m/s}^2.$$

(2) 正常情况下, 自行车车轮沿地面纯滚, 匀速行进时, 轮心相对地面加速度为零, 车轮边缘点相对地面加速度即为相对轮心的匀速圆运动向心加速度. 估测车轮半径和自行车平均速度后, 可估算得

$$a \approx 10^2 \text{ m/s}^2.$$

(3) 实验室随地球自转有一向心加速度 a_1 , 其值 a_1 与地球自转角速度、地球半径及所在纬度 ϕ 有关. 实验室随地球中心绕太阳公转, 又有对应的圆运动向心加速度 a_2 , 其值 a_2 由公转角速度和日心到地心的间距确定. a_1, a_2 合成得 a . a 的最大可能值即为 $a_{1\max} + a_2$, 其中 $a_{1\max}$ 对应 $\phi=0$ 的 a_1 值. 结合生活知识, 查找有关数据, 可估算得

$$a \approx 10^{-2} \text{ m/s}^2.$$

1-12 半径同为 R 的两个几何球面开始时互相重合, 今使其中一个球面固定, 另一个球面从 $t=0$ 开始匀速平动, 速度大小为 v_0 .

(1) 试求两球面刚好完全分离的时刻 t_e ;

(2) 试求 $0 < t < t_e$ 时刻, 两球面交线长度收缩率 (单位时间内长度缩短量) γ ;

(3) 试求 $0 < t < t_e$ 时刻, 两球面交点在第一球面大圆上作圆运动的向心加速度 $a_{\text{心}}$ 和切向加速度 $a_{\text{切}}$.

解 (1) 第二球面从 $t=0$ 到 $t=t_e$ 时间, 经过 $2R$ 路程与第一球面分离, 即得

$$t_e = 2R/v_0.$$

(2) 两球面交线中任取一点 P , 在 P 与两个球心 O_1, O_2 确定的平面上设置 O_1xy 坐标系如图 1-5 所示. O_1, O_2 各自相对 P 点的 x 方向分离速度大小相同, 它们都应等于 O_2 相对 O_1 运动速度大小的二分之一, 故 P_1 相对 O_1 沿 x 方向速度是

$$v_x = \frac{1}{2}v_0,$$

y 方向速度大小为

$$|v_y| = v_x \cot \theta = v_x \frac{x}{y} = v_x \frac{v_x t}{\sqrt{R^2 - v_x^2 t^2}} = \frac{v_0^2 t}{2\sqrt{4R^2 - v_0^2 t^2}}.$$

两球面相交的圆线半径记为 r , 则有

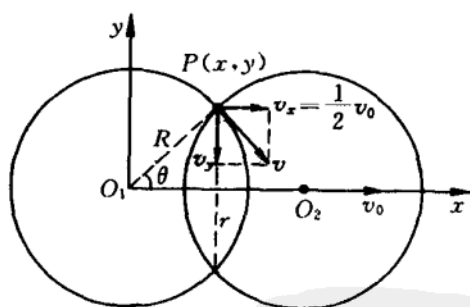


图 1-5

$$dr/dt = |v_y|,$$

交线长度收缩率便是

$$\gamma = d(2\pi r)/dt = 2\pi dr/dt = \pi v_0^2 t / \sqrt{4R^2 - v_0^2 t^2}.$$

(3) t 时刻 P 点速度大小为

$$v = v_x / \sin \theta = Rv_y / y = Rv_x / \sqrt{R^2 - v_x^2 t^2} = Rv_0 / \sqrt{4R^2 - v_0^2 t^2},$$

向心加速度和切向加速度分别是

$$a_{\text{心}}: \begin{cases} \text{指向 } O_1, \\ a_{\text{心}} = v^2/R = Rv_0^2/(4R^2 - v_0^2 t^2). \end{cases}$$

$$a_{\text{切}}: \begin{cases} \text{与 } v \text{ 同向}, \\ a_{\text{切}} = dv/dt = Rv_0^3 t / (4R^2 - v_0^2 t^2)^{3/2}. \end{cases}$$

此处 $a_{\text{切}}$ 并非 $a_{\text{切}}$ 的绝对值, 而是 $a_{\text{切}}$ 沿切向的投影式, 带有正、负号. 本题 $a_{\text{切}}$ 取正, 表明 $a_{\text{切}}$ 与 v 方向一致.

1-13 四质点 A, B, C, D 在同一平面上运动. 每一时刻, A 速度总对准 B , 速度大小为常量 u ; B 速度总对准 C , 速度大小同为 u ; C 速度总对准 D , 速度大小同为 u ; D 速度总对准 A , 速度大小同为 u . 某时刻, A, B, C, D 恰好逆时针方向按序位于各边长为 l 的正方形四个顶点上, 试求此时 A 的加速度 a 和 A 的运动轨道在此位置的曲率半径 ρ .

解 经 dt 时间, A, B, C, D 位置变化如图 1-6 所示. A 的速度变化是

$$du: \begin{cases} \text{方向: 与 } u(t) \text{ 垂直, 即法向}, \\ \text{大小: } du = u d\phi. \end{cases}$$

几何关系方面有

$$u dt = (l - u dt) \tan(d\phi) = l d\phi,$$

A 的加速度为

$$a = \frac{du}{dt}: \begin{cases} \text{方向: 与 } u(t) \text{ 垂直, 即法向}, \\ \text{大小: } a = du/dt = u^2/l. \end{cases}$$

a 无切向分量, 与 A 作匀速曲线运动无切向加速度一致. 由 a 的法向性, 据

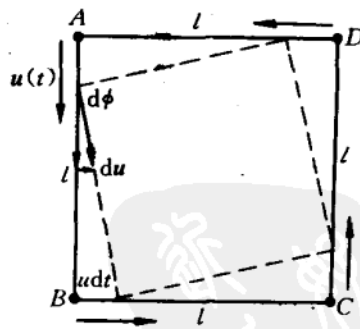


图 1-6

$$\rho = u^2/a_{\text{心}}, \quad a_{\text{心}} = a,$$

即得 A 的运动轨道在此位置的曲率半径为

$$\rho = l.$$

1-14 采用运动学方法,求解曲线 $y=e^x$ 的曲率半径随 x 的分布 $\rho(x)$.

解 设质点沿 $y=e^x$ 轨道运动过程中的 x 方向分运动为匀速直线运动,即

$$x = v_0 t,$$

则 y 方向分运动为

$$y = e^{v_0 t}.$$

继而可得

$$v_x = v_0, \quad v_y = v_0 e^{v_0 t}.$$

$$a_x = 0, \quad a_y = v_0^2 e^{v_0 t}.$$

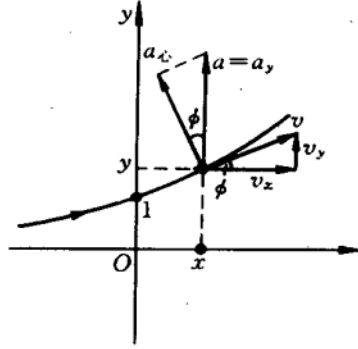


图 1-7

参考图 1-7,有

$$a_{\text{心}} = a \cos \phi = a_y \frac{v_x}{v} = v_0^3 \frac{e^{v_0 t}}{v},$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_{\text{心}}} = \frac{v^3}{v_0^3 e^{v_0 t}}.$$

将
代入,有

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_0 \sqrt{1 + e^{2v_0 t}}$$

$$\rho = (1 + e^{2v_0 t})^{\frac{3}{2}} / e^{v_0 t}.$$

$v_0 t$ 用 x 替换,即得

$$\rho = (1 + e^{2x})^{\frac{3}{2}} / e^x,$$

或 $\rho = (1 + y^2)^{\frac{3}{2}} / y.$

1-15 在极坐标系中,质点沿着图 1-8 所示的直线以恒定的速度 v_0 运动.

(1) 结合图中给出的参量,写出直线轨道方程 $r-\theta$;

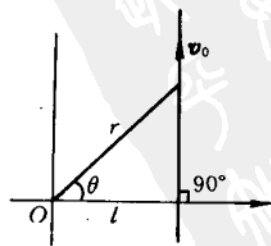


图 1-8

(2) 写出质点速度分量 v_r, v_θ 与质点角位置 θ 的关系, 再依据加速度分量计算公式, 验证 $a_r=0, a_\theta=0$.

解 (1) 轨道方程为 $r=l/\cos\theta$.

(2) v_r, v_θ 与角位置 θ 间的关系为

$$v_r = v_0 \sin\theta, \quad v_\theta = v_0 \cos\theta.$$

由此可得

$$\frac{dr}{dt} = v_r = v_0 \sin\theta,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = v_\theta/r = \frac{v_0}{l} \cos^2\theta,$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \left[\frac{d}{d\theta}(v_0 \sin\theta) \right] \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0^2}{l} \cos^3\theta,$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{v_0}{l} \cos^2\theta \right) \right] \frac{d\theta}{dt} = -2 \frac{v_0^2}{l^2} \cos^3\theta \sin\theta.$$

代入 a_r, a_θ 计算公式, 便有

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{v_0^2}{l} \cos^3\theta - \frac{l}{\cos\theta} \cdot \frac{v_0^2}{l^2} \cos^4\theta = 0,$$

$$a_\theta = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$= 2v_0 \sin\theta \frac{v_0}{l} \cos^2\theta + \frac{l}{\cos\theta} \left(-2 \frac{v_0^2}{l^2} \cos^3\theta \sin\theta \right) = 0.$$

1-16 以椭圆一个焦点 F 为原点, 沿半长轴方向设置极轴, 椭圆的极坐标方程是 $r=r_0/(1+e\cos\theta)$. 设所给椭圆的半长轴为 A , 半短轴为 B , 且 F 如图 1-9 所示, 位于椭圆中心 O 的右侧.

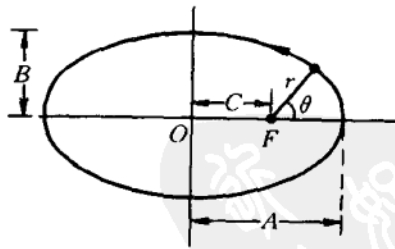


图 1-9

(1) 确定参量 r_0, e 与 A, B 的关系;

(2) 若质点以 $\theta=\omega t$ 方式沿椭圆运动, 试导出 v_θ, a_θ 与质点角位置 θ 的关系.

解 (1) 对 $\theta=0, \theta=\pi$ 角位置, 有

$$A - C = r_0/(1 + e), \quad A + C = r_0/(1 - e).$$

即可解得 $r_0 = B^2/A$, $e = C/A = \sqrt{A^2 - B^2}/A$.

(2) 由

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{r_0 e \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \omega,$$

可得

$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = \frac{r_0 \omega}{1 + e \cos \theta},$$

$$a_\theta = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{2r_0 \omega^2 e \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2}.$$

1-17 平面上有三个动点 A, B, C , $t=0$ 时刻三者连线构成边长为 l 的等边三角形. 取三角形中心 O 为极坐标系原点, 取 $t=0$ 时刻 O 到 A 的连线为极轴, 如图 1-10 所示. 若 A, B, C 均在此平面内作匀速率运动, 速率同为 u , 过程中 A 始终朝着 B 运动, B 始终朝着 C 运动, C 始终朝着 A 运动, 试求 A 点运动轨道.

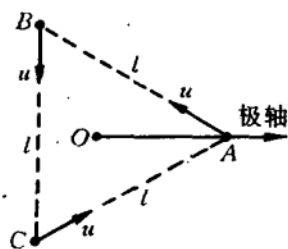


图 1-10

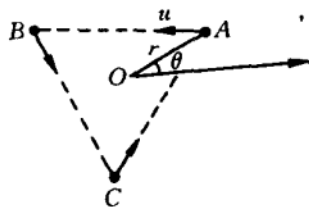


图 1-11

解 参照图 1-11, A 处于 (r, θ) 位置时, 有

$$v_r = -u \cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}u,$$

$$v_\theta = u \sin 30^\circ = \frac{1}{2}u,$$

将其代入

$$\frac{dr}{d\theta} = rv_r/v_\theta,$$

可得
$$\int_{l/\sqrt{3}}^r \frac{dr}{r} = -\sqrt{3} \int_0^\theta d\theta.$$

积分后便得 A 点运动轨道方程:

$$r = \frac{l}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}\theta},$$

这是一条对数螺线.

1-18 极坐标系中方程

$$r = A(1 - \cos \theta),$$

对应一条心脏线,如图 1-12 所示,试求心底 P 处曲率半径 ρ .

解 设质点以 $\theta = \omega t$ 方式沿心脏线运动,其中 ω 是常量.质点在 P 处速度切向,仅有 v_θ 分量,即

$$v = v_\theta|_{\theta=\pi} = r \left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{\theta=\pi} = 2A\omega.$$

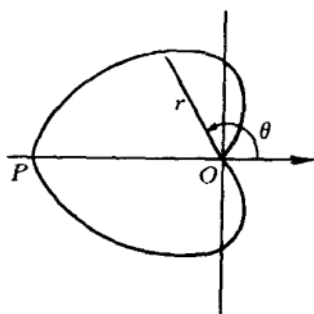


图 1-12

质点在 P 点两侧运动对称,必有 $a_\theta = 0$,且径向加速度必指向 O 点,承担向心加速度作用,有

$$a_\psi = |a_r|_{\theta=\pi} = \left| \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right|_{\theta=\pi}.$$

将

$$\begin{aligned} r &= A(1 - \cos \theta), \\ dr/dt &= (A \sin \theta)\omega, \\ d^2r/dt^2 &= (A \cos \theta)\omega^2, \\ r(d\theta/dt)^2 &= A(1 - \cos \theta)\omega^2, \end{aligned}$$

代入后,算得

$$a_\psi = 3A\omega^2,$$

最后可得

$$\rho = \frac{v^2}{a_\psi} = \frac{4}{3}A.$$

1-19 半径 R 的细圆环在半径几乎同为 R 的固定光滑圆柱面外侧面上随意运动,试求环的自由度.

解 环的运动可分解为随环心沿圆柱面中央轴的平动和绕该固定轴(此轴过环心)的转动,平动自由度为 1,定轴转动自由度也为 1,

运动环的自由度为 $1+1=2$.

1-20 在 Oxy 坐标平面上有一个正三角形和一个正方形, 正三角形和正方形的每条边长相同, 它们的方位如图 1-13 所示. 现在建立一个活动的 $O'x'y'$ 坐标平面, 它的坐标原点开始时位于正三角形的上顶点, 而后 O' 点沿着正三角形的三条边绕行一周. 绕行时, x' 轴始终与 x 轴平行, y' 轴始终与 y 轴平行. 试在图中清楚、准确地画出正四边形相对 $O'x'y'$ 坐标平面运动而形成的区域的边界线.

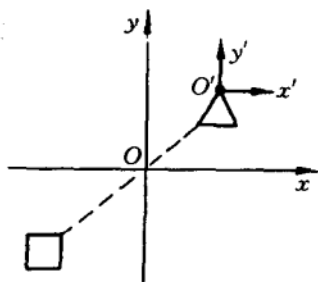


图 1-13

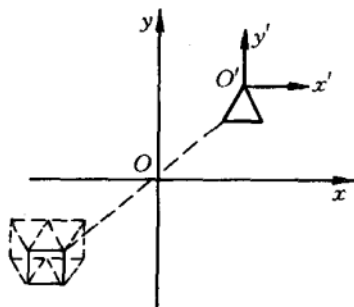


图 1-14

解 $O'x'y'$ 坐标平面随 O' 沿正三角形三条边平动过程中, 正方形相对 $O'x'y'$ 坐标平面沿着相反方向平动, 形成的区域其边界线如图 1-14 中虚线所示.

1-21 树上一个苹果离地面高 2.5 m, 小孩在距树 1.5 m 处, 从 1.5 m 高度对准苹果抛出一颗小石子的同时, 苹果自由落下. 不计空气阻碍作用, 试问小石子抛出的速度 v 为何值时能击中苹果?

解 取相对地面系以初速度为零, 竖直向下加速度等于重力加速度的平动参考系 S' , S' 也称为自由落体参考系. 在 S' 系中苹果静止, 小石子朝苹果以速度 v 作匀速直线运动. 若无地面的存在, 无论 v 取何值, 小石子都能击中苹果. 考虑到地面的“阻碍”, 小石子必须在

$$t < \sqrt{2h/g} \quad (h = 2.5 \text{ m})$$

时间范围内, 方能击中苹果. S' 系中, 此时间内小石子经过路程

$$l = vt, \quad l = \sqrt{1.5^2 + 1^2} \text{ m} = 1.8 \text{ m},$$

故要求
$$v = \frac{l}{t} > \sqrt{\frac{g}{2h}} l = 2.5 \text{ m/s}.$$

1-22 风自西向东吹,风速 u 不变,一架军用飞机相对于静止大气的飞行速率为恒定的 v_0 . 设飞机在城市上空沿水平圆轨道巡航飞行,建立自西向东的 x 轴,将飞机相对于圆心的径矢与 x 轴夹角记为 ϕ ,试求连续的圆轨道飞行条件及轨道速率 v 与方位角 ϕ 的关系.

解 速度矢量合成及引入的辅助角

γ ,如图 1-15 所示,由

$$v_0^2 = v^2 + u^2 - 2uv \cos \gamma,$$

$$\gamma = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right),$$

可得

$$v^2 + 2vu \sin \phi - (v_0^2 - u^2) = 0.$$

非负解为
$$v = \sqrt{v_0^2 - u^2 \cos^2 \phi} - u \sin \phi,$$

且要求
$$v_0^2 - u^2 \cos^2 \phi > u^2 \sin^2 \phi,$$

即得所求条件为

$$v_0 > u.$$

v - ϕ 关系已在前面给出.

1-23 刚性的圆环静止在地面上, $t=0$ 时刻开始以恒定的角加速度 β 沿直线作纯滚动. 试求任意 $t > 0$ 时刻,环上最高点的加速度大小 a_{\uparrow} 与最低点的加速度大小 a_{\downarrow} 之比.

解 dt 时间内环心水平位移量 dl 等于圆环在地面上滚过的圆弧长 $Rd\phi$,其中 R 为圆半径, $d\phi$ 为转过的圆心角. 环心 O 相对地面的直线运动速度、加速度为

$$v_0 = \frac{dl}{dt} = R \frac{d\phi}{dt} = R\omega, \quad a_0 = \frac{dv}{dt} = R\beta.$$

建立相对地面作匀加速直线平动的环心参考系 S' ,圆环在 S' 系中绕环心以 β 作匀加速转动,角速度为

$$\omega = \beta t.$$

t 时刻环上最高点在 S' 系加速度 a'_{\uparrow} 的切向分量同 a_0 , 竖直向下的向心分量大小为 $\omega^2 R$. 最高点相对地面加速度

$$a_{\uparrow} = a'_{\uparrow} + a_0$$

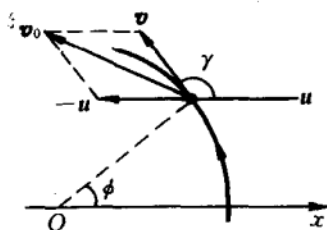


图 1-15

的水平分量大小为 $2a_0 = 2R\beta$, 竖直向下分量大小为 $\omega^2 R$, 便有

$$a_{\perp} = \sqrt{(2R\beta)^2 + (\omega^2 R)^2} = \sqrt{4 + \beta^2 t^4} R\beta.$$

t 时刻环上最低点在 S' 系加速度 $a'_{\text{下}}$ 的切向分量恰为 $-a_0$, 向心分量竖直向上, 大小为 $\omega^2 R$. 最低点相对地面加速度

$$a_{\text{下}} = a'_{\text{下}} + a_0$$

的方向竖直向上, 大小为

$$a_{\text{下}} = \omega^2 R = \beta^2 t^2 R,$$

即得

$$a_{\perp} : a_{\text{下}} = \sqrt{4 + \beta^2 t^4} / \beta t^2.$$

1-24 细杆 ABC 在一竖直平面上靠着一个台阶放着, A 端可沿着水平地面朝台阶运动, 细杆不离开台阶边沿. 当 ABC 杆与水平地面夹角为图 1-16 所示的 ϕ 时, 杆的 B 点恰好位于台阶边沿上, 而且 C 端运动速度值恰为 A 端运动速度值的 2 倍, 试求 BC 长与 AB 长的比值 α .

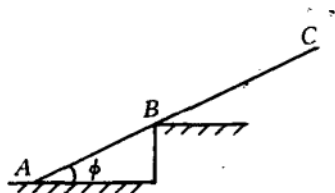


图 1-16

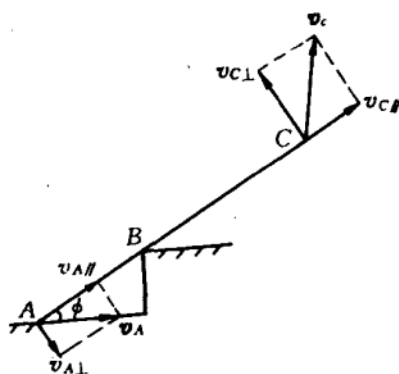


图 1-17

解 参阅图 1-17, A 端和 C 端沿杆长方向速度相同, 即有

$$v_A \cos \phi = v_{A//} = v_{C//}.$$

A 端以相同的角速度 (设为 ω) 绕着 B 点转动, 又有

$$v_A \sin \phi = v_{A\perp} = \omega \overline{AB}, \quad v_{C\perp} = \omega \overline{BC}.$$

于是有

$$\begin{aligned} v_C^2 &= v_{C//}^2 + v_{C\perp}^2 = v_A^2 \cos^2 \phi + \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} v_A \sin \phi \right)^2 \\ &= v_A^2 \cos^2 \phi + \alpha^2 v_A^2 \sin^2 \phi, \end{aligned}$$

与 $v_C = 2v_A$ 联立, 可解得

$$\alpha = \sqrt{4 - \cos^2 \phi} / \sin \phi.$$

1-25 4根长度同为 l 的细杆, 用铰链首尾相接, 组成一个菱形 $ABCD$, 放在某水平面上, 如图 1-18 所示. 设 A 端固定, C 端沿着 A, C 连线方向运动, 当 $\angle A$ 恰为 90° 时, C 端速度为 v , 加速度为 a , 试求此时 B 端的加速度大小 a_B .

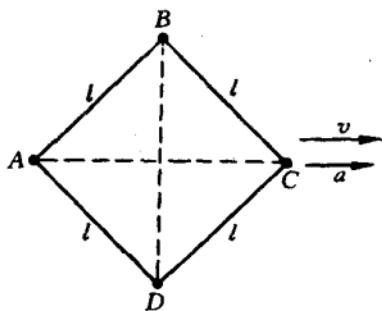


图 1-18

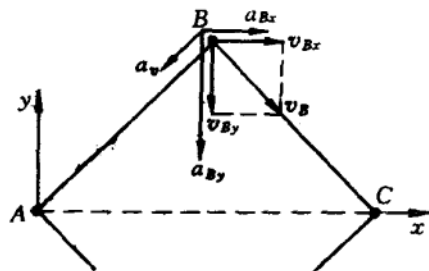


图 1-19

解 以 A 为原点; 建立图 1-19 所示的 x, y 坐标, 有

$$x_B = \frac{1}{2}x_C, \quad v_{Bx} = \frac{1}{2}v, \quad a_{Bx} = \frac{1}{2}a,$$

若求得 a_{By} , 则可得 a_B .

B 绕 A 作圆弧运动, 此时速度 v_B 恰沿 BC 杆方向, 可得

$$v_B = \sqrt{2} v_{Bx} = \frac{\sqrt{2}}{2} v.$$

圆弧运动向心加速度大小为

$$a_{\text{心}} = v_B^2 / l = v^2 / 2l,$$

$a_{\text{心}}$ 与 a_{Bx}, a_{By} 间有下述关系:

$$a_{\text{心}} = a_{By} \cos 45^\circ - a_{Bx} \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} (a_{By} - a_{Bx}),$$

得
$$a_{By} = \sqrt{2} a_{\text{心}} + a_{Bx} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{v^2}{l} + \frac{1}{2} a,$$

所以
$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{l^2 a^2 + v^4 + \sqrt{2} l v^2 a} / \sqrt{2} l.$$

B 组

1-26 在某竖直平面上有一固定的光滑直角三角形细管道 ABC , 小球从顶点 A 沿斜边轨道静止出发自由滑到端点 C 所需时间, 恰好等于小球从 A 静止出发自由地经两条直角边轨道滑到 C 所需时间. 此处假设竖直轨道 AB 与水平轨道 BC 的交接处为极小的圆弧, 可确保小球无碰撞地拐弯, 且拐弯时间可略. 将 AB, BC, AC 的长分别记作 L_1, L_2, L_3 , 试求三者比例关系.

在此直角三角形范围内可构建一系列如图 1-20 所示的光滑折线轨道, 每一轨道由若干竖直与水平部分交接而成, 交接处有极小圆弧(作用同前), 轨道均从 A 到 C , 且不超出该直角三角形边界, 试求小球在各条轨道中, 自静止出发从 A 滑行到 C 所经时间的上限 T_{\max} 与下限 T_{\min} 之比.

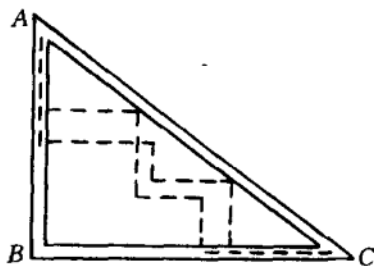


图 1-20

解 将 C 端顶角记为 α , 小球自 A 到 B 经时记为 T_1 , 再从 B 到 C 经时记为 T_2 , 而从 A 通过斜边到 C 经时记为 T_3 , 则可建立下述方程:

$$L_3 \sin \alpha = L_1 = \frac{1}{2} g T_1^2, \quad (1)$$

$$L_3 \cos \alpha = L_2 = (g T_1) T_2, \quad (2)$$

$$L_3 = \frac{1}{2} (g \sin \alpha) T_3^2, \quad (3)$$

$$T_1 + T_2 = T_3. \quad (4)$$

由①②式得

$$L_3 (2 \sin \alpha + \cos \alpha) = g T_1 (T_1 + T_2),$$

将④式代入后, 两边平方, 可得

$$L_3^2 (2 \sin \alpha + \cos \alpha)^2 = g^2 T_1^2 T_3^2,$$

再将①式乘③式所得结果代入, 便有

$$L_3^2 (2 \sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 4 L_3^2.$$

由此解得

$$\sin \alpha = 3/5,$$

即有

$$L_1 : L_2 : L_3 = 3 : 4 : 5.$$

小球在题图的每一虚线所示轨道中,经各垂直线段所需时间之和同为 $t_1 = T_1$. 经各水平段所需时间之和记为 t_2 , 则从 A 到 C 所经时间总和为

$$T = t_1 + t_2 = T_1 + t_2,$$

最短的 t_2 对应 T 的下限 T_{\min} , 最长的 t_2 对应 T 的上限 T_{\max} .

各水平段内的运动分别为匀速运动, 同一水平段路程放在低处速度大, 所需时间短. 所有水平段处在最低位置(即与 BC 重合)时 t_2 最短, 其值为 T_2 , 故

$$T_{\min} = T_1 + T_2 = T_3.$$

t_2 的上限显然对应各水平段处于各自可达到的最高位置, 实现它的方案是竖直段每下降无穷小量 dL_1 , 便水平接一段无穷小量 dL_2 , 到达斜边后再下降一小量并接一相应的水平小量. 如此继续下去, 构成图 1-21 所示的微齿形轨道. 这一轨道中的每一无穷小三角形都是直角三角

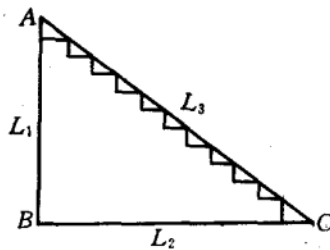


图 1-21

形, 两直角边分别记为 dL_1, dL_2 , 斜边记为 dL_3 , 因与大三角形相似, 有

$$dL_1 : dL_2 : dL_3 = L_1 : L_2 : L_3 = 3 : 4 : 5.$$

小球经 dL_1, dL_3 的运动虽是匀加速度运动, 但因所经时间是无穷小量, 匀加速可处理成匀速. 考虑到在 dL_1, dL_2, dL_3 各段中速度相同, 经 $dL_1 + dL_2$ 所需时间 dT_{\max} 与经 dL_3 所需时间 dL_3 之比为

$$dT_{\max} : dT_3 = (dL_1 + dL_2) : dL_3 = (3 + 4) : 5.$$

求和便得 $T_{\max} : T_3 = 7 : 5$.

因 $T_{\min} = T_3$, 即有

$$T_{\max} : T_{\min} = 7 : 5.$$

1-27 如图 1-22 所示, A 和 B 是两个相同的刚性小球, 开始时 A 和 B 在同一竖直线上, 各自距水平地面的高度分别是 h_A 和 h_B , 且 $h_A > h_B$. 令两球同时从静止自由落下, 而后若两球相

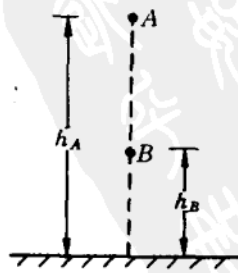


图 1-22

碰则彼此交换速度,若其中一球与地面相碰,则以原速率反向弹回.要求 A, B 不会与地面一起发生三体碰撞,试讨论系统形成周期运动的条件.

解 系统运动具有周期性,意指经过某段时间 T , A, B 两球又回到各自的初始位置.

因碰撞, A, B 运动反复变化,难以通过对每个小球运动的追踪来获得系统作周期运动的条件.据题文, A, B 间碰撞结果是交换速度.首次碰撞后, A 承接了 B 的运动状态, B 承接了 A 的运动状态;再次碰撞后, A, B 又各自恢复了自己的运动状态……如此反复下去.引入 A 类运动状态和 B 类运动状态,各自周期分别为

$$T_A = 2\sqrt{2h_A/g}, \quad T_B = 2\sqrt{2h_B/g}.$$

若其间有最小公倍数 T ,则这两类运动状态构成的系统具有周期性.经过 T 时间, A, B 运动状态都复原,此时 A 类运动状态承担者必是 A 球, B 类运动状态承担者必是 B 球,否则 A 将在 B 的下方,然而 A, B 间碰撞是不会改变 A 在上方、 B 在下方这一相对关系的.可见, T 即成 A, B 两球系统的运动周期. T_A, T_B 有最小公倍数的条件是

$$T_A/T_B = N_A/N_B,$$

其中 N_A 与 N_B 是互质的正整数.这一条件即为

$$h_A/h_B = N_A^2/N_B^2,$$

N_A 与 N_B 既然互质,自然不会同是偶数.但若同为奇数,那么每经二分之一系统运动周期, A, B 便会同时碰地,为避免这种三体碰撞, N_A, N_B 须为一奇与一偶的互质正整数.

1-28 长 L 的均匀弹性绳 AB 自由伸直地放在光滑水平桌面上,绳的 A 端固定. $t=0$ 时,一小虫开始从 A 端出发以相对绳的匀速度 u 在绳上朝 B 端爬去,同时绳的 B 端以匀速度 v 沿绳伸长方向运动,试求小虫爬到 B 端的时间 T .

解 在原长的绳上建立从 A 到 B 的坐标, A 端 $x_A=0$, B 端 $x_B=L$. 设 t 时刻虫处于 x 坐标轴上 x 位置,此时绳的真实长度已成为 $L+vt$,即 $x_B=L$ 对应 $L+vt$,绳中 x 坐标对应真实长度为

$$x' = \frac{L+vt}{L}x.$$

dt 时间内,虫相对绳真实长度的位移量为

$$dx' = udt.$$

因

$$dx' = \frac{L+vt}{L} dx,$$

故 dt 时间内虫相对绳中 x 坐标轴的位移量为

$$dx = \frac{L}{L+vt} dx' = \frac{L}{L+vt} udt.$$

(或者说虫相对绳中 x 坐标轴的速度为 $u' = \frac{dx}{dt} = \frac{L}{L+vt} u$.)

积分

$$\int_0^T \frac{dt}{1+vt/L} = \int_0^L \frac{dx}{u},$$

即得

$$T = \frac{L}{v} (e^{v/u} - 1).$$

1-29 某人用两手做 3 个球的抛球、接球、传球游戏. 过程中左手接住空中落下的一个球,再传递给右手;右手接过小球,并将小球斜向上抛出. 假设每只手中至多只留有一个小球,左手接球点高度与右手抛球点高度相同,每个小球离开右手后的升高量均达 H ,小球互相不碰撞,试求系统运动周期 T .

解 某个小球第 1 次从右手抛出到第 2 次从右手抛出的时间即为系统运动周期 T . T 可分成两段,第一段时间 t_1 是小球在空中运动时间,即有

$$t_1 = 2\sqrt{2H/g}.$$

第二段时间 t_2 包括小球在左手停留时间、从左手到右手传递时间和右手停留时间. t_2 可短可长,最短趋向零,即有

$$t_{2\min} \rightarrow 0,$$

最长需受“每只手至多只留有一个小球”的限制,故 t_2 的上限对应空中几乎始终只有一个球在运动,即所讨论的小球几乎在另外两个小球依次都在空中运动过后,才从右手抛出,可得

$$t_{2\max} \rightarrow 2t_1.$$

综上所述,系统运动周期的可取值为

$$3t_1 > T > t_1, \quad t_1 = 2\sqrt{2H/g}.$$

1-30 (1) 加速度恒定的运动称为匀加速运动,试证质点的匀

有

$$\overline{AD}/\overline{DC} = x_B/(x_C - x_B).$$

质点沿 x 轴匀速运动, 有

$$\begin{aligned} x_B/(x_C - x_B) &= \Delta t_{AB}/\Delta t_{BC} \\ &= (t_2 - t_1)/(t_3 - t_2), \end{aligned}$$

即得

$$\overline{AD}/\overline{DC} = (t_2 - t_1)/(t_3 - t_2).$$

\overline{AC} 已给定, 按此比例对应的分割点 D 唯一. 反之, 按此比例唯一确定 D 点后, B 与 D 的连线平行于 y 轴, 或者说可据 B, D 连线设置 y 轴. 接着, 便可确定图中的 θ 和 ϕ 角及 y_B 和 y_C . 再设 A 处速度沿 y 轴的分量为 v_{\perp} , 则有

$$y_B = v_{\perp} (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a (t_2 - t_1)^2,$$

$$y_C = v_{\perp} (t_3 - t_1) + \frac{1}{2} a (t_3 - t_1)^2,$$

于是 a 可解. 若 $a > 0$, a 沿 y 轴正方向; 若 $a < 0$, a 沿 y 轴负方向.

由题给数据可知, 图中 $\triangle ABC$ 是直角三角形, 且有

$$\overline{AB} = 8 \text{ m}, \quad \overline{BC} = 6 \text{ m}, \quad \overline{AC} = 10 \text{ m},$$

$$\overline{AD}/\overline{DC} = (t_2 - t_1)/(t_3 - t_2) = 1.$$

即 D 是斜边 AC 中点, 故有

$$\theta = \angle BAC, \quad \cos \theta = \cos \angle BAC = \overline{AB}/\overline{AC} = 0.8,$$

$$y_B = \overline{AB} \cos \theta = 6.4 \text{ m},$$

进而有

$$\phi = \frac{\pi}{2} - (\theta + \angle BAC) = \frac{\pi}{2} - 2\theta,$$

$$\sin \phi = \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 0.28,$$

$$y_C = \overline{AC} \cos \phi = 2.8 \text{ m}.$$

将 y_B, y_C 数据代入前面 $y_B - a$ 和 $y_C - a$ 关系式, 可解得

$$a = -10.0 \text{ m/s}^2,$$

故 a : $\left\{ \begin{array}{l} \text{方向: 沿 } B \text{ 到 } D \text{ 的方向, 方位角 } \theta = \arccos 0.8 = 37^\circ, \\ \text{大小: } 10.0 \text{ m/s}^2. \end{array} \right.$

1-31 小物体以初速 v_0 、倾角 θ 斜抛出去, 在空气中运动因受阻而获得与速度 v 反向的附加加速度 $-\gamma v$, 其中 γ 是一个正的常量, 试解析给出小物体的运动轨道曲线.

解 以抛射位置为原点, 在抛射运动的竖直平面上建立水平 x 轴和竖直向上的 y 轴. 小物体的加速度两个分量是

$$a_x = -\gamma v_x, \quad a_y = -\gamma v_y - g.$$

初条件为 $t=0$ 时,

$$v_{x0} = v_0 \cos \theta, \quad v_{y0} = v_0 \sin \theta, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0.$$

由 $dv_x/dt = -\gamma v_x$, $dv_x/v_x = -\gamma dt$,

积分 $\int_{v_{x0}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -\int_0^t \gamma dt$, 得

$$v_x = (v_0 \cos \theta) e^{-\gamma t}.$$

由 $dv_y/dt = -\gamma v_y - g$, $\frac{dv_y}{v_y + g/\gamma} = -\gamma dt$,

积分 $\int_{v_{y0}}^{v_y} \frac{dv_y}{v_y + g/\gamma} = -\int_0^t \gamma dt$,

得 $v_y = \left(v_0 \sin \theta + \frac{g}{\gamma} \right) e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma}$.

再由 $dx/dt = v_x = (v_0 \cos \theta) e^{-\gamma t}$,

积分 $\int_{x_0}^x dx = v_0 \cos \theta \int_0^t e^{-\gamma t} dt$,

得 $x = \frac{v_0}{\gamma} \cos \theta (1 - e^{-\gamma t})$.

继而由

$$dy/dt = v_y = \left(v_0 \sin \theta + \frac{g}{\gamma} \right) e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma},$$

积分 $\int_{y_0}^y dy = \int_0^t \left[\left(v_0 \sin \theta + \frac{g}{\gamma} \right) e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} \right] dt$,

得 $y = \frac{1}{\gamma} \left(v_0 \sin \theta + \frac{g}{\gamma} \right) (1 - e^{-\gamma t}) - \frac{g}{\gamma} t$.

与 $x-t$ 关系式联立, 消去 t , 得轨道曲线的代数表述式:

$$y = \left(\tan \theta + \frac{g}{\gamma v_0 \cos \theta} \right) x + \frac{g}{\gamma^2} \ln \left(1 - \frac{\gamma x}{v_0 \cos \theta} \right).$$

附注:

若 γ 是小量, 可利用展开式

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x^3 - \dots \approx x - \frac{x^2}{2},$$

得
$$\ln\left(1 - \frac{\gamma x}{v_0 \cos \theta}\right) \approx -\frac{\gamma x}{v_0 \cos \theta} - \frac{\gamma^2 x^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta},$$

代入 $y-x$ 表述式, 得

$$y = (\tan \theta)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta}x^2,$$

此即为无空气阻力时的抛物体轨道方程.

总之, 前面给出的轨道阻力方程在 $\gamma=0$ 时无定义, 但在 $\gamma \rightarrow 0$ 时的极限却恰好为 $\gamma=0$ 时用本题求解过程之外的方式获得的抛体轨道方程.

1-32 设由 $y=y(x)$ 表述的平面曲线, 在讨论区域内处处连续, 而且 $y'=dy/dx$, $y''=d^2y/dx^2$ 也处处存在并连续, 试用运动学方法求解曲率半径分布 $\rho(x)$.

解 设质点沿此曲线轨道运动过程中的 x 方向分运动匀速, 即有

$$x = v_0 t,$$

则 y 方向运动为 $y = y(x)$.

速度、加速度分布为

$$v_x = v_0,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) = y'v_0,$$

$$a_x = 0,$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \dots = y''v_0^2.$$

参考图 1-24, 有

$$a_{\text{心}} = |a_y| \cos \phi = |y''v_0^2| \frac{v_x}{v} = |y''| \frac{v_0^3}{v},$$

对应曲率半径

$$\rho = v^2/a_{\text{心}} = v^3/|y''|v_0^3.$$

将 $v = \sqrt{1+y'^2}v_0$ 代入, 即得

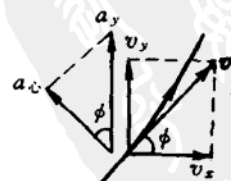


图 1-24

$$\rho = (1 + y'^2)^{3/2} / |y''|.$$

1-33 如图 1-25 所示,岸高 h ,人用绳经滑轮拉船靠岸.若绳与水面夹角为 θ 时,人左行速度为 v_0 ,加速度为 a_0 (均未必是常量),试求此时船的左行速度 v 和加速度 a .

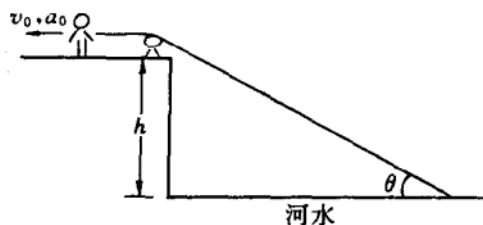


图 1-25

解 从 θ 角位置经 dt 时间,船左行 dx ,绳缩短 dl ,参考图 1-26,可得其间关系为

$$dl = dx \cos \theta.$$

因 $v_0 = dl/dt, v = dx/dt$,即得

$$v = v_0 / \cos \theta.$$

加速度 a 水平朝左,据图 1-27 所示, a 沿绳指向河岸的分量为 $a_r, a_r = a \cos \theta$.

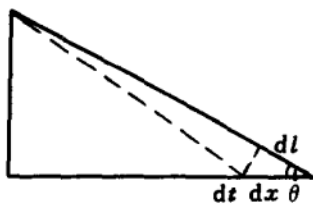


图 1-26

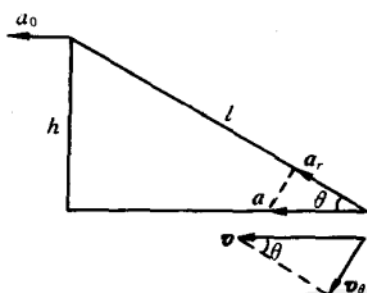


图 1-27

如此引入的 a_r 与极坐标系中的径向加速度 a_r^* 大小相同并方向相反。 a_r^* 计算式中包括两项,第一项 d^2r/dt^2 由矢径 r 增长性变化引起,与此对应, a_r 中的第一项由绳长缩短性变化引起,大小等于人在岸上左行加速度 a_0 。 a_r^* 中的第二项 $r(d\theta/dt)^2$,实为旋转的向心项, a_r 中对应船以绳长 l 为半径、以图 1-27 中 v_θ 为旋转速度瞬时绕河岸旋转的向心项 v_θ^2/l 。于是,可得下述关系式:

$$a_r = a_0 + \frac{v_\theta^2}{l},$$

$$v_\theta = v \sin \theta, \quad l = h / \sin \theta,$$

与前面算式联立, 可得

$$a_r = a_0 + \frac{v_0^2 \sin^3 \theta}{h \cos^2 \theta}, \quad a = \frac{a_0}{\cos \theta} + \frac{v_0^2}{h} \tan^3 \theta.$$

1-34 极坐标系中的对数螺线可表述为 $r = r_0 e^{a\theta}$, 试用运动学方法导出曲率半径分布 $\rho(r)$.

解 设质点以 $\theta = \omega t$ 方式沿对数螺线运动, 则有

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = ar_0 e^{a\theta} \omega = \alpha \omega r, \quad v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = \omega r,$$

所以
$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\alpha^2 + 1} \omega r.$$

参考图 1-28, 有

$$\cos \phi = v_r / v = \alpha / \sqrt{\alpha^2 + 1}, \quad \sin \phi = v_\theta / v = 1 / \sqrt{\alpha^2 + 1}.$$

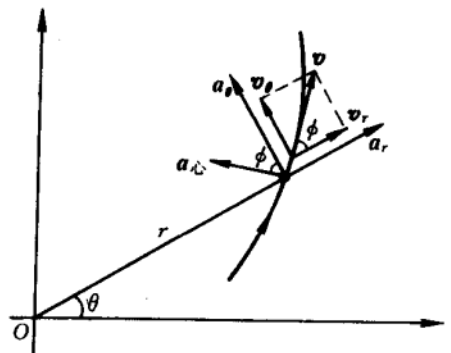


图 1-28

又因

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \alpha^2 \omega^2 r - r \omega^2 = (\alpha^2 - 1) \omega^2 r,$$

$$a_\theta = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 2\alpha \omega^2 r,$$

即有
$$a_\psi = -a_r \sin \phi + a_\theta \cos \phi = \sqrt{\alpha^2 + 1} \omega^2 r,$$

曲率半径便为

$$\rho = v^2 / a_\psi = \sqrt{\alpha^2 + 1} r.$$

1-35 空间光滑连续曲线上取三个点,可确定一个平面,这三个点无限靠近时确定的极限平面记为 σ ,曲线上由这三个点的两个端点界定的无穷小曲线段必定都在 σ 平面内,并可逼近处理成无穷小圆弧段,圆半径便是这一空间曲线在此位置处的曲率半径.

等距螺旋线的曲率半径必定处处相同,试用运动学方法,求解旋转圆半径和螺距分别为 R 和 H 的等距螺旋线的曲率半径 ρ .

解 图 1-29 为 R 圆柱面上等距螺旋线的正视图. 该曲线相对其中任意一点 P , 具有左上、左下对称性, 因此 P 点附近无穷小曲线段确定的极限平面 σ , 必定是过 P 点的圆柱斜截面. 这一无穷小曲线段逼近为无穷小圆弧段, 圆半径便是所求曲率半径 ρ .

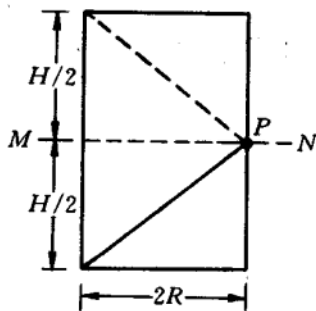


图 1-29

设质点沿此曲线运动, 为方便, 将运动分解为 R 圆周上的匀速圆周运动(分速度记作 v_R) 和平行于圆柱面中央轴线的匀速直线运动(分速度记作 v_H). 质点在 P 处的速度为

$$v = v_R + v_H.$$

由于对称性, ρ 圆的圆心必定在 P 点和 R 圆圆心的连线 MN 上, v_R 对应的向心加速度 $a_{R\text{心}}$ 即为 ρ 圆运动的向心加速度 $a_{\rho\text{心}}$. 即有

$$v^2/\rho = a_{\rho\text{心}} = a_{R\text{心}} = v_R^2/R,$$

式中 $v^2 = v_R^2 + v_H^2$.

将质点沿等距螺旋线轨道在 R 圆柱面上绕行一周时间记为 T , 则有

$$v_R T = 2\pi R, \quad v_H T = H,$$

得 $v_H = \frac{H}{2\pi R} v_R$, $v^2 = \left(1 + \frac{H^2}{4\pi^2 R^2}\right) v_R^2$.

即有 $\rho = \frac{v^2}{v_R^2} R = \left(1 + \frac{H^2}{4\pi^2 R^2}\right) R$.

1-36 如图 1-30 所示, 轰炸机 A 以速度 v_1 作水平匀速飞行, 飞行高度为 H .

(1) 为使自由释放的炸弹击中地面目标 B , 应在距 B 多远的水

平距离 L 处投弹? (2) 在地面上与 B 相距 D 处有一高射炮 C , 在 A 释放炸弹同时发射炮弹, 为使炮弹能击中飞行中的炸弹, 试问炮弹初速 v_2 至少为多大? 若 v_2 取最小值, 炮弹发射角 γ 为多大?

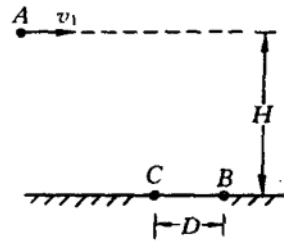


图 1-30

解 (1) 炸弹落地时间

$$t_1 = \sqrt{2H/g}$$

内, 水平经过的路程

$$L = v_1 t_1 = v_1 \sqrt{2H/g}$$

即为所求.

(2) 从轰炸机投弹时刻起建立初速为零的自由落体参考系 $O'x'y'$, 该系中炸弹初始位置 A 和炮弹初始位置 C 已在图 1-31 中示出. 经 t_2 时间两者相遇 E 点, 为使炸弹落地前被命中, 要求 E 必须在 B 左侧, 或者说 E 必须在图中 B' 左侧. 因此, 图中 β 角取值应限于

$$\beta < \angle ACB' = \pi - (\alpha + \angle B'CB).$$

分两种情况进行讨论.

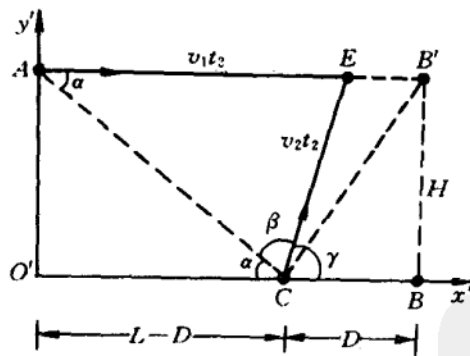


图 1-31

情况 1: $\alpha + \angle B'CB < \frac{\pi}{2}$, 即

$$\arcsin \frac{H}{\sqrt{H^2 + (L-D)^2}} + \arcsin \frac{H}{\sqrt{H^2 + D^2}} < \frac{\pi}{2},$$

则

β 最大可取到超过 $\frac{\pi}{2}$.

据正弦定理有

$$v_2 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} v_1,$$

其中 α, v_1 为定值, 得

$$v_{2,\min} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} v_1 \Big|_{\beta=\frac{\pi}{2}} = \frac{Hv_1}{\sqrt{H^2 + (L-D)^2}}.$$

对应的发射角为 $\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha$, 于是由 $\sin \gamma = \cos \alpha$, 得

$$\gamma = \arcsin \frac{L-D}{\sqrt{H^2 + (L-D)^2}}.$$

情况 2: $\alpha + \angle B'CB \geq \frac{\pi}{2}$, 即

$$\arcsin \frac{H}{\sqrt{H^2 + (L-D)^2}} + \arcsin \frac{H}{\sqrt{H^2 + D^2}} \geq \frac{\pi}{2},$$

则 β 取值不可达到 $\angle ACB' \leq \frac{\pi}{2}$.

据正弦定理仍可得

$$v_2 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} v_1,$$

$$v_{2,\min} \rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} v_1 \Big|_{\beta=\angle ACB'}.$$

计算可得

$$\begin{aligned} \sin \angle ACB' &= \sin[\pi - (\alpha + \angle B'CB)] \\ &= \sin \alpha (\cos \angle B'CB + \cot \alpha \sin \angle B'CB) \\ &= \sin \alpha \left(\frac{D}{\sqrt{H^2 + D^2}} + \frac{L-D}{H} \frac{H}{\sqrt{H^2 + D^2}} \right), \end{aligned}$$

即有

$$v_{2,\min} \rightarrow \frac{\sqrt{H^2 + D^2}}{L} v_1.$$

将两弹模型化质点, $v_{2,\min}$ 可无限逼近上述极限, 但不可达到此值, 否则两弹同时击中目标 B . 对应的发射角取

$$\gamma \rightarrow \angle B'CB = \arcsin \frac{H}{\sqrt{H^2 + D^2}}.$$

1-37 惠更斯等时摆.

半径 R 的轮子在水平直线 MN 上方纯滚动, 轮子边缘上任意点 P 的运动轨迹不妨称为上滚轮线. 如图 1-32 所示, 将上滚轮线绕 MN 向下翻转 180° , 成为下滚轮线. 下滚轮线也可看成 R 轮子在下方沿直线 MN 纯滚动时轮子边缘点 P 的运动轨迹.

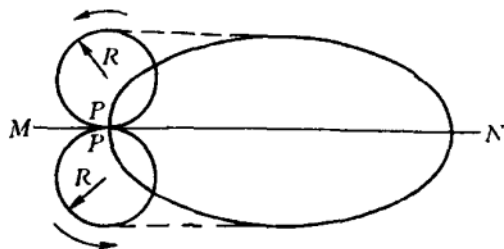


图 1-32

沿下滚轮线设置光滑轨道, 小球在轨道内侧除最低点外任意一处从静止自由滑下, 可形成周期性的往返运动(摆动), 惠更斯已证得摆动周期 T 与小球初始位置无关, 后人将此种摆称为惠更斯等时摆. 试在认知等时性前提下, 求出以 R 为参量的 T 算式.

解 在认可等时性前提下, 自然会考虑到能否取特殊的初始位置来计算 T . 第 1 个特殊位置显然是图 1-32 中下滚轮线轨道的左上端位置, 第 2 个特殊位置是轨道中无限靠近最低点的左极限位置.

特殊位置 1:

小球从此位置静止下滑, 到达右上端点, 经时 $T/2$. 小球在轨道每一处速度大小

$$v_{\text{球}} = \sqrt{2gh},$$

其中 h 为小球下落高度. R 轮子从图 1-32 左下侧纯滚, 轮子 P 点轨迹即为下滚轮线. 设计一种匀速纯滚, 若轮心所取速度 v_0 能使 P 点在轨道每一位置速度大小

$$v_P = v_{\text{球}},$$

则 R 轮滚动周期 T' 恰为 $T/2$, 即有

$$T = 2T' = 2(2\pi R/v_0).$$

参考图 1-33, R 轮转过 ϕ 角, 轮边缘点 P 的速度 v_P 由 P 相对轮

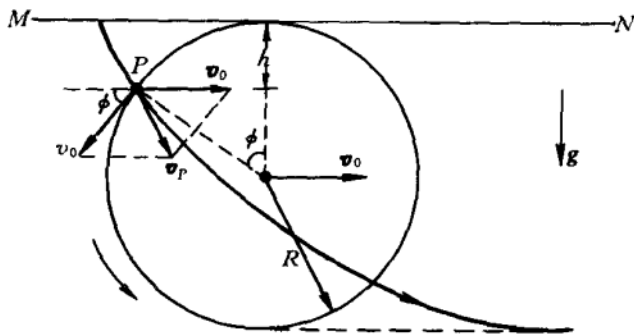


图 1-33

心旋转速度(大小为 v_0)和轮心速度合成,有

$$\begin{aligned} v_P &= \sqrt{(v_0 - v_0 \cos \phi)^2 + (v_0 \sin \phi)^2} = \sqrt{2v_0^2(1 - \cos \phi)} \\ &= \sqrt{2v_0^2 h/R}, \end{aligned}$$

其中 $h = R(1 - \cos \phi)$ 即为等时摆小球下落高度. 为使

$$v_P = v_{\text{球}},$$

只要取

$$v_0 = \sqrt{Rg}$$

即可. 于是,有

$$T = 4\pi R/v_0 = 4\pi \sqrt{R/g}.$$

特殊位置 2:

取此特殊位置的等时摆,相当于幅角趋于零的单摆,将下滚轮线最低处曲率半径记作 ρ , 即有

$$T = 2\pi \sqrt{\rho/g}.$$

此式依据的单摆周期公式在幅角趋于零的极限情况下,由近似公式转化成严格公式.

图 1-33 中 R 轮的 P 点到达最低位置时,速度 $v = 2v_0$, 相对轮心的向心加速度即成相对地面的向心加速度,大小为 $a_{\text{心}} = v_0^2/R$. 于是,得

$$\rho = v^2/a_{\text{心}} = 4R, \quad T = 2\pi \sqrt{4R/g} = 4\pi \sqrt{R/g}.$$

2 牛顿定律 动量定理

A 组

2-1 如图 2-1 所示,一轻绳跨过光滑的定滑轮,绳的两端等高处分别有一个胖猴和瘦猴,两猴身高相同.胖猴使劲沿着绳向上爬,瘦猴懒洋洋地挂在绳上,试问吊在滑轮下边的香蕉将归谁所有?

解 胖猴质量为 m_1 , 向上加速度为 a_1 , 瘦猴的质量为 m_2 , 向上加速度为 a_2 , 绳中张力记为 T , 则有

$$T - m_1g = m_1a_1, \quad T - m_2g = m_2a_2.$$

因 $m_1 > m_2$, 有 $m_1a_1 < m_2a_2$,

进而得 $a_2 > a_1$.

可见瘦猴上升加速度较大, 只要它愿意, 香蕉将归它所有.

2-2 天花板下悬挂轻质光滑小圆环 P . P 可绕着过悬挂点的竖直轴无摩擦地旋转, 长为 L 的轻绳穿过 P , 两端分别连接质量 m_1 和 m_2 的小球. 设两球同时作图 2-2 所示的圆锥摆运动, 且在任意时刻两球和绳均在同一个竖直平面内, 试求两小球各自到 P 点的距离 l_1 和 l_2 .

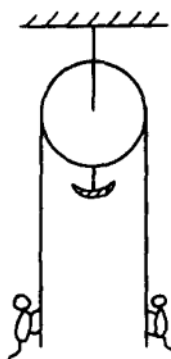


图 2-1

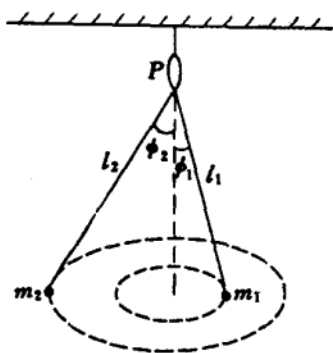


图 2-2

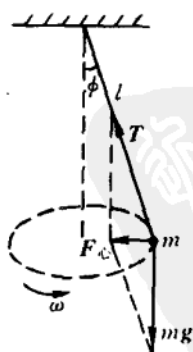


图 2-3

解 圆锥摆如图 2-3 所示, 绳的张力 T 与重力 mg 合成摆球圆

运动向心力 $F_{\text{心}}$, 即有

$$m\omega^2(l \sin \phi) = mg \tan \phi.$$

得摆球旋转角速度 ω 与绳长 l 及幅角 ϕ 的下述关系:

$$\omega^2 = \frac{g}{l \cos \phi},$$

T 与 ϕ 的关系则为

$$T = \frac{mg}{\cos \phi}.$$

本题讨论的两个圆锥摆中, 摆球旋转角速度 ω 相同, 两边绳中张力 T 相同, 即得

$$l_1 \cos \phi_1 = l_2 \cos \phi_2, \quad \frac{m_1}{\cos \phi_1} = \frac{m_2}{\cos \phi_2},$$

其中 ϕ_1, ϕ_2 已在图 2-2 中示出. 结合 $l_1 + l_2 = L$, 可算得

$$l_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} L, \quad l_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} L.$$

2-3 质量 m , 长 l 的匀质细杆 OA , 在光滑的水平面上绕其固定端 O 旋转, 旋转角速度为 ω 常量. 以 O 端为原点, 在杆上建立沿 OA 方向的 x 轴, 试求细杆中张力 T 随 x 的分布函数.

解 参考图 2-4, 在杆中取 $x \rightarrow x+dx$ 段, 两侧张力分别为 T 与 $T+dT$, 可得

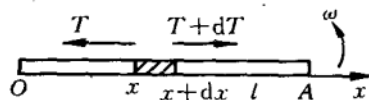


图 2-4

$$T - (T + dT) = \left(\frac{dx}{l} m \right) \omega^2 x,$$

积分
$$\int_{T(x)}^0 dT = - \frac{m}{l} \omega^2 \int_x^l x dx,$$

得
$$T(x) = \frac{m}{2l} \omega^2 (l^2 - x^2).$$

2-4 估算月球中心到地球中心的距离 r .

解 月球、地球质量分别记为 m, M , 月球绕地球圆运动角速度记为 ω , 则有

$$m\omega^2 r = \frac{GMm}{r^2},$$

得
$$r^3 = \frac{GM}{\omega^2}.$$

将 $GM = gR^2, \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$

代入, 其中地球半径 R 约为 $6.4 \times 10^3 \text{ km}$, 月球绕地球旋转周期 T 约为 30 d (天), 可估算得

$$r = \sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}} \sim 4.1 \times 10^8 \text{ m} = 4.1 \times 10^5 \text{ km}$$

(T 实为 27.3 d , r 约为 $3.8 \times 10^5 \text{ km}$).

2-5 A, B 两本书各 300 张, 每张质量 3 g , 纸间摩擦因数同为 $\mu = 0.3$. 将 A, B 两书逐张交叠放在光滑水平桌面上, 试问为将两书水平拉开至少要用多大的力?

解 每张纸质量记为 $m = 3 \text{ g}$, 600 张纸之间共有 599 对摩擦力, A 书受其中 599 个摩擦力, B 书受另外 599 个摩擦力.

第 1 对摩擦力大小为 $f_1 = \mu mg,$

第 2 对摩擦力大小为 $f_2 = \mu(2m)g,$

\vdots

\vdots

第 599 对摩擦力大小为 $f_{599} = \mu(599m)g.$

A, B 各受合摩擦力大小为

$$f_A = f_B = \sum_{i=1}^{599} f_i = \frac{1+599}{2} \times 599\mu mg = 1585 \text{ N}.$$

为了将 A, B 水平拉开, 对 A, B 至少各需施加 1585 N 的力, 此力相当于质量为 162 kg 物块所受重力, 故常人难以用手将 A, B 分开, 或者说拉开前纸已撕碎.

2-6 如图 2-5 所示, 传送带水平段长度为 l , 传动速度为 v_0 , 小物块无水平初速地放在传送带的左端, 经时间 t 到达右端. 已知小物块与传送带之间的摩擦因数处处相同, 试求小物块到达右端时的速度 v 及摩擦因数 μ .

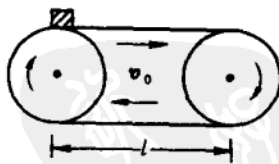


图 2-5

解 v 的计算: 引入平均速度 $\bar{v} = l/t$.

(1) 若 $\bar{v} < v_0/2$, 即 $2l < v_0 t$, 则小物块的末速度 $v < v_0$, 即一直处于匀加速状态, 有

$$v = 2\bar{v} = 2l/t.$$

(2) 若 $\bar{v} \geq v_0/2$, 即 $2l \geq v_0 t$, 则小物块末速度必已达 v_0 , 在达 v_0 后摩擦力即消失, 作匀速运动, 故所求为

$$v = v_0.$$

μ 的计算:

(1) 若 $2l < v_0 t$, 则有

$$l = \frac{1}{2}(\mu g)t^2, \quad \text{得} \quad \mu = \frac{2l}{gt^2}.$$

(2) 若 $2l \geq v_0 t$, 设匀加速段时间为 t' , 匀速段时间便为 $t-t'$, 有

$$\frac{1}{2}(\mu g)t'^2 + v_0(t-t') = l, \quad v_0 = (\mu g)t',$$

解得

$$\mu = \frac{v_0^2}{2(v_0 t - l)g}.$$

2-7 底圆半顶角为 θ 的圆锥形筒水平倒置, 绕其竖直中央轴以恒定的角速度 ω 旋转, 在筒内侧面距筒顶 l 处放一小物块, 如图 2-6 所示. 设物块与筒间摩擦因数为 μ , 试问 l 取何值时, 小物块能相对筒静止?

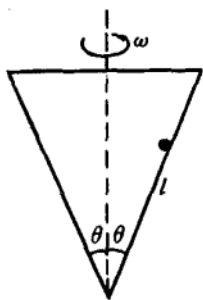


图 2-6

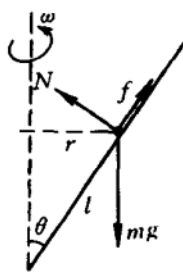


图 2-7

解 参考图 2-7 所示的力矢量和其有关参量, 其中摩擦力取斜向上为基准方向, 可列方程:

$$N \cos \theta - f \sin \theta = m\omega^2 r = m\omega^2 l \sin \theta,$$

$$N \sin \theta + f \cos \theta = mg,$$

$$-\mu N \leq f \leq \mu N,$$

联立后, 解得 l 可取值如下:

$\mu < \tan \theta$ 时,

$$\frac{g}{\omega^2 \sin \theta} \frac{\cot \theta - \mu}{1 + \mu \cot \theta} \leq l \leq \frac{g}{\omega^2 \sin \theta} \frac{\cot \theta + \mu}{1 - \mu \cot \theta};$$

$\mu \geq \tan \theta$ 时,

$$\frac{g}{\omega^2 \sin \theta} \frac{\cot \theta - \mu}{1 + \mu \cot \theta} \leq l < \infty.$$

2-8 将小物块放在水平转盘距中心 $r_1 = 0.10 \text{ m}$ 处, 转盘以 $\beta = 20 \text{ rad/s}^2$ 的角加速度绕着过中心的竖直轴旋转, 当角速度达到 $\omega = 7.0 \text{ rad/s}$ 时, 小物块开始滑动. 如果小物块开始时放在距盘心 $r_2 = 0.15 \text{ m}$ 处, 摩擦因数不变, 盘的旋转情况同前, 问达到多大角速度 ω_2 时, 小物块开始滑动?

解 小物块圆运动所需力由静摩擦力提供, 两处最大静摩擦力相同, 小物块圆运动加速度大小必相同, 故有

$$(\omega_2^2 r_2)^2 + (\beta r_2)^2 = (\omega_1^2 r_1)^2 + (\beta r_1)^2,$$

得
$$\omega_2 = \left[\frac{\omega_1^4 r_1^2 - \beta^2 (r_2^2 - r_1^2)}{r_2^2} \right]^{\frac{1}{4}} = 5.4 \text{ rad/s}.$$

2-9 高台跳水运动员入水后, 当向下的速度降到约 2 m/s 时翻身, 并以双脚蹬池底向上浮出水面为宜. 运动员在水中所受阻力可近似表述为 $\frac{1}{2} C \rho S v^2$, 其中 $C = 0.5$ 是阻力系数, ρ 是人体密度, S 是人体垂直于运动方向的截面积, v 是运动速率, 试为女子 10 m 高台跳水设计游泳池的深度.

解 运动员入水初速近似为

$$v_0 = \sqrt{2gh} = 14 \text{ m/s}.$$

略去人体入水过程, 水中所受浮力与重力也近似抵消, 下水后加速度为

$$a = -\frac{1}{2} C \rho S v^2 / m,$$

式中 m 是人体质量. 从水面建立竖直向下的 y 轴, 则有

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy},$$

代入上式并积分,得

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{C}{2m} \rho S \int_0^y dy, \quad y = \frac{2m}{C\rho S} \ln \frac{v_0}{v}.$$

女跳水运动员 m 可估算为 50 kg , ρ 取 $1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, S 估算为 $(0.20 \times 0.40) \text{ m}^2$, 再将 $C=0.5$, $v_0=14 \text{ m/s}$, $v=2 \text{ m/s}$ 代入, 可算得

$$y \approx 5 \text{ m},$$

即游泳池深度设计在 5 m 左右为宜.

2-10 如图 2-8 所示, 光滑的水平面上放一个大三角形木块, 在木块的光滑斜面上放一个小长方木块. 将两者从静止自由释放, 试利用平移惯性力建立小长方木块相对大三角形木块的动力学方程, 以协助判定小长方木块到达地面前是否会离开大木块.

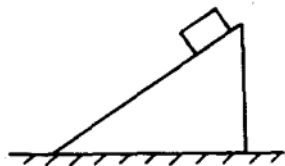


图 2-8

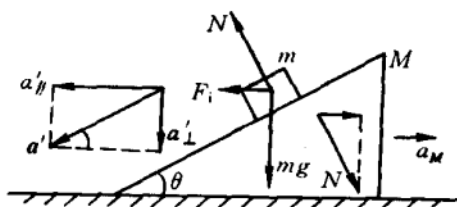


图 2-9

解 小木块离开大木块前, 大木块相对地面系的有关量和小木块相对大木块(平动加速非惯性系)的有关量, 均已在图 2-9 中示出. 据此可列下述方程组:

$$M \text{ 相对地面: } N \sin \theta = M a_M,$$

$$m \text{ 相对 } M: mg - N \cos \theta = m a'_\perp,$$

$$N \sin \theta + F_i = m a'_\parallel,$$

$$F_i = m a_M,$$

$$\text{运动关联: } a'_\perp = a'_\parallel \tan \theta.$$

$$\text{解得} \quad N = \frac{mg \cos \theta}{1 + \frac{m}{M} \sin^2 \theta} > 0,$$

N 恒为正, 表明小木块到达地面前不会离开大木块.



本题考虑到小木块沿斜面法向相对大木块没有运动,也可建立平衡方程:

$$N + ma_M \sin \theta = mg \cos \theta, \quad N \sin \theta = Ma_M$$

联立,简单获解.

2-11 车厢内的滑轮装置如图 2-10 所示,滑轮固定不转动,只是为轻绳提供光滑的接触.物块 A 与水平桌面间摩擦因数 $\mu=0.25$, A 的质量 $m_A=20\text{ kg}$,物块 B 的质量 $m_B=30\text{ kg}$.今使车厢沿图示水平朝左方向匀加速运动,加速度 $a_0=2\text{ m/s}^2$,稳定后绳将倾斜不晃,试求绳中张力 T.

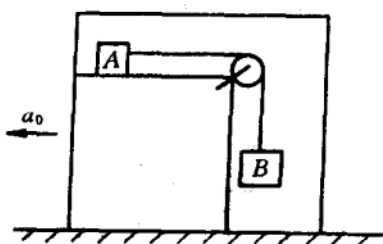


图 2-10

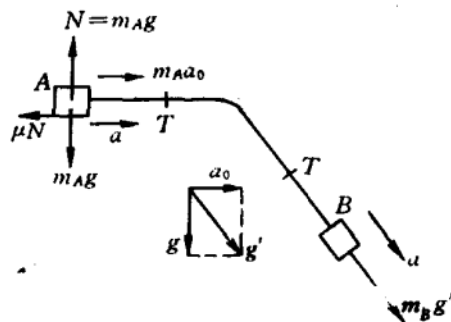


图 2-11

解 车厢系中,“类重力加速度” g' 方向如图 2-11 所示,大小为

$$g' = \sqrt{g^2 + a_0^2} = 10.0\text{ m/s}^2,$$

A, B 的动力学方程为

$$\begin{cases} T + m_A a_0 - \mu m_A g = m_A a, \\ m_B g' - T = m_B a. \end{cases}$$

可解得
$$a = \frac{m_B g' - (\mu g - a_0) m_A}{m_A + m_B} = 5.82\text{ m/s}^2,$$

继而有
$$T = m_B (g' - a) = 125.4\text{ N}.$$

2-12 游乐场中的转笼是一个半径 3 m 的直立圆筒,可绕中央竖直轴旋转,游客可背靠筒壁站立在水平踏板上,筒壁上有粗糙的网纹以增大游客与筒壁之间的摩擦因数 μ .当转速达到每分钟 30 转时,游客脚下踏板脱落,从转笼参考系考虑,为使游客不会掉下落地,试问 μ 至少为多大?

解 设人的质量 m , 因离心力 $m\omega^2 R$ 引起的竖直向上静摩擦力 f 等于重力 mg 时, 乘客不会掉下, 即有

$$\mu m\omega^2 R \geq f = mg, \quad \omega = \pi \text{ s}^{-1},$$

得 $\mu \geq g/(\omega^2 R) = 0.33$.

可见 μ 至少等于 0.33, 为安全起见, μ 还应大些.

2-13 不计空气阻力, 近似计算小球从赤道上空 100 m 高处自由下落时, 因受科里奥利力影响产生的落地偏东值. (数学处理时,

可利用复合函数微商链锁法则: $\frac{dy}{dx} = \frac{dydu}{du dx}$)

解 离心力会影响下落加速度 g , 但修正量很小, 可以略去.

以小球初始位置为原点, 建立竖直向下的 y 坐标和水平朝东的 x 坐标, 如图 2-12 所示. 小球在 y 处的速度近似取为竖直下落速度

$$v = v_y = \sqrt{2gy},$$

F_{Cor} 近似沿 x 方向, 有

$$F_x = 2mv\omega = 2mv_y\omega,$$

与 $F_x = ma_x = m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{dv_x}{dy} \frac{dy}{dt} = m \frac{dv_x}{dy} v_y,$

联立, 得 $\frac{dv_x}{dy} = 2\omega.$

积分 $\int_0^{v_x} dv_x = \int_0^y 2\omega dy,$

得 $v_x = 2\omega y = 2\omega \left(\frac{1}{2}gt^2 \right) = \omega gt^2,$

再积分, 得落地偏东值

$$x_0 = \frac{1}{3}\omega gt_0^3, \quad t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

将 $\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600 \text{ s}}, g = 9.8 \text{ m/s}^2, h = 100 \text{ m}$ 代入后, 算得

$$x_0 = 2.2 \text{ cm}.$$

2-14 以角速度 ω 绕着过中心竖直轴匀速旋转的水平大圆盘上

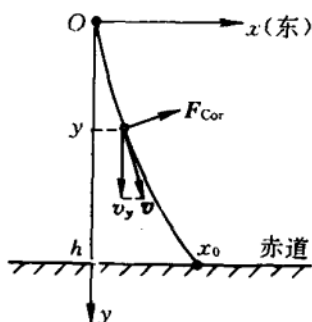


图 2-12

有一弦心距为 d 的足够长直弦槽, 槽内有一个质量 m 的小物块从槽的中央 O 处以初始相对速率 v_0 沿槽运动. 已知小物块与槽的侧壁光滑接触, 与槽底间的摩擦因数为 μ . 试问 μ 为何值, 小物块最终能停住? 再设所给 μ 值能使小物块停住, 试导出小物块滑动时槽的侧壁所受正压力大小 N 与物块经过的路程 x 之间的关系, 并计算小物块通过的总路程 s .

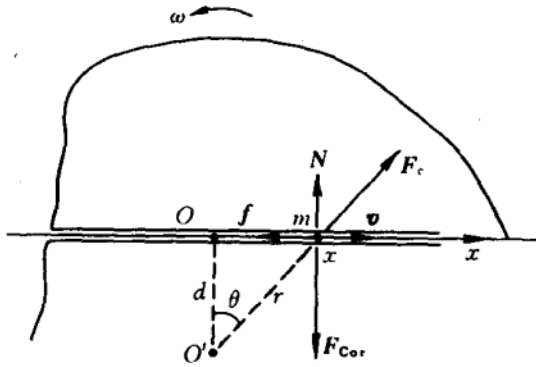


图 2-13

解 小物块在 x 处受力如图 2-13 所示, 离心力、科氏力、摩擦力、正压力分别为

$$F_c = m\omega^2 r, \quad F_{\text{Cor}} = 2mv\omega, \quad f = \mu mg,$$

$$N = |F_{\text{Cor}} - F_c \cos \theta| = m\omega |2v - \omega d|.$$

x 方向有

$$F_x = F_c \sin \theta - f = m\omega^2 x - \mu mg,$$

$$F_x = ma_x = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = m \frac{dv}{dx} v,$$

则
$$v dv = (\omega^2 x - \mu g) dx,$$

积分
$$\int_{v_0}^v v dv = \int_0^x (\omega^2 x - \mu g) dx,$$

得
$$v^2 = v_0^2 + \omega^2 x^2 - 2\mu g x.$$

物块能停住, 要求存在 $x=s$ 的解使得 $v=0$, 即应有实数解

$$s = \frac{\mu g}{\omega^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\omega^2 v_0^2}{\mu^2 g^2}} \right).$$

判别式大于、等于零, μ 可取值范围为

$$\mu \geq \omega v_0 / g,$$

N 与 x 之间的关系为

$$N = m\omega |2\sqrt{v_0^2 + \omega^2 x^2} - 2\mu gx - \omega d|.$$

s 解式中应取负号对应的较小值,意即小物块已在此处先停住,故得

$$s = \frac{\mu g}{\omega^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\omega^2 v_0^2}{\mu^2 g^2}} \right).$$

2-15 半长轴为 a 、半短轴为 b 的椭圆,长轴端点处的曲率半径 $\rho = b^2/a$.

质量 m 的人造卫星绕地球作椭圆运动,近地点离地面的高度为 $2R$,远地点离地面的高度为 $3R$,其中 R 是地球半径.已知地球表面处重力加速度为 g ,试求人造卫星从远地点到近地点运行过程中,地球万有引力给它的总冲量大小 I .

解 卫星椭圆轨道参量为

$$a = \frac{7}{2}R, \quad c = \frac{1}{2}R, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = 2\sqrt{3}R.$$

近地点 1 处附近卫星小圆弧运动的向心力由地球引力提供,即有

$$\frac{mv_1^2}{\rho} = \frac{GMm}{(a-c)^2},$$

其中 M 是地球质量,由此得

$$v_1 = \frac{a+c}{b} \sqrt{\frac{GM}{a}}.$$

同样可求得

$$v_2 = \frac{a-c}{b} \sqrt{\frac{GM}{a}},$$

卫星所得冲量为

$$I = mv_1 + mv_2 = 2m\sqrt{GMa}/b = m\sqrt{\frac{7GM}{6R}}.$$

将 $GM = gR^2$ 代入,即得

$$I = m\sqrt{\frac{7}{6}}gR.$$

2-16 光滑水平地面上有一个倾角 ϕ 、高 H 、质量 M 的劈形木

块,它的顶部有一质量 m 的小物块,两者间有摩擦.开始时系统静止,如图 2-14 所示,而后小物块能够沿斜面下滑到底部,试求过程中劈形木块在地面上通过的路程 s .

解 m 下滑过程中任意时刻水平朝左分速度记为 v_m , M 水平朝右的速度记为 v_M ,因系统水平方向动量守恒,有

$$Mv_M = mv_m.$$

两边乘 dt ,对全过程积分得

$$\int_0^s Mv_M dt = \int_0^{s'} mv_m dt, \quad Ms = ms',$$

其中 s' 是 m 相对地面的左移路程,有

$$s + s' = H \cot \phi, \quad \text{即} \quad s = \frac{m}{m+M} H \cot \phi.$$

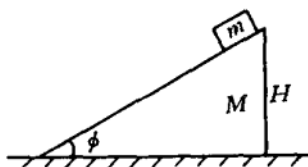


图 2-14

2-17 炮车以仰角 α 发射一炮弹,两者质量分别为 M 和 m . 已知炮弹出口时相对地面速度大小为 v ,略去炮车与水平地面间的摩擦,试求炮车反冲速度 v_0 .

解 炮弹出口时相对地面速度 v 和炮车反冲速度 v_0 如图 2-15(a) 所示,炮弹相对炮车速度 v' 如图 2-15(b) 所示. 应有

$$v = v' \cos \alpha - v_0, \quad v_{\perp} = v' \sin \alpha.$$

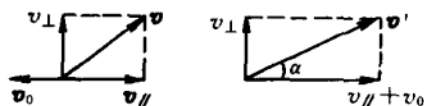


图 2-15

水平方向动量守恒关系式为

$$Mv_0 = mv_{//} = mv' \cos \alpha - mv_0, \quad \text{得} \quad v' = \frac{M+m}{m} \frac{v_0}{\cos \alpha},$$

代入 $v^2 = v_{//}^2 + v_{\perp}^2 = (v' \cos \alpha - v_0)^2 + (v' \sin \alpha)^2,$

可得 $v^2 = \frac{v_0^2}{m^2 \cos^2 \alpha} = (M^2 + 2Mm \cos^2 \alpha + m^2 \sin^2 \alpha),$

即有 $v_0 = \frac{m \cos \alpha}{\sqrt{M^2 + 2Mm \cos^2 \alpha + m^2 \sin^2 \alpha}} v.$

2-18 平直轨道上停着一节质量 $M=20m$ 的车厢,车厢与铁轨间摩擦可略.有 N 名学生列队前行,教员在最后,每名学生的质量同为 m .当他们发现前面车厢时,都以相同速度 v_0 跑步,每名学生在接近车厢时又以 $2v_0$ 速度跑着上车坐下,教员却因跑步速度没有改变而恰好未能上车,试求 N .

解 将 N 名学生与车厢视为一个系统,学生上车前陆续将速度从 v_0 提升为 $2v_0$,可等效处理成速度同为 $2v_0$,系统初始动量便可等效为 $Nm \cdot 2v_0$,都上车后的动量记为 $(M+Nm)u$.沿铁轨方向动量守恒,得

$$2Nmv_0 = (M + Nm)u,$$

$$\text{车厢末速度便是 } u = \frac{2Nm}{M + Nm}v_0 = \frac{2N}{20 + N}v_0,$$

教员恰好未能上车,必有 $u = v_0$,

$$\text{即得 } N = 20.$$

2-19 从喷泉中喷出的水柱,把一个质量 m 的圆筒倒顶在空中,如图 2-16 所示.水以恒定的速率 v_0 从面积为 S 的小孔喷出,射向空中,在冲击桶底后,一半水附在桶底,随即顺内壁流下,其速度可略,另一半水则以原速竖直溅下.将水的密度记为 ρ ,试求桶停留的高度 H .

解 dt 时间喷水质量 $\rho Sv_0 dt$,到 H 高度时速度降为

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gH}.$$

先被桶底吸附的一半水为桶提供向上冲量

$$dI_1 = \frac{1}{2}(\rho Sv_0 dt)v,$$

被桶底溅下的一半水提供向上冲量

$$dI_2 = \frac{1}{2}(\rho Sv_0 dt) \cdot 2v,$$

向上总冲量便是

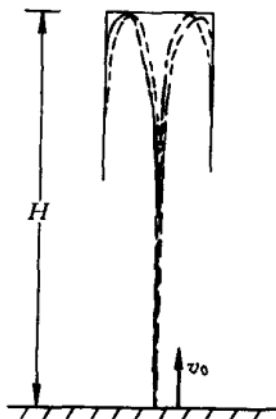


图 2-16

资源
 分享
 交流
 PDG

$$dI = dI_1 + dI_2 = \frac{3}{2}\rho S v_0 v dt.$$

为使桶能停在空中,此 dI 需与桶重力向下冲量 $mgdt$ (略去粘附在桶内部分水的质量) 平衡, 即有

$$mgdt = dI,$$

可解得
$$H = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{2m^2g}{9\rho^2S^2v_0^2}.$$

2-20 质量 m_0 、初速 v_0 的无动力飞行器在太空尘埃中运动, 运动过程中飞行器会吸附尘埃, 吸附质量与路程成正比, 比例系数为常量 α .

- (1) 确定飞行器停止前通过的总路程;
- (2) 确定飞行器运动速度与时间的关系.

解 (1) 通过路程 s 时, 吸附尘埃质量 $\Delta m = \alpha s$, 运动速度记为 v , 则有

$$m_0 v_0 = (m_0 + \Delta m)v = (m_0 + \alpha s)v,$$

飞行器停止前 $v \rightarrow 0$, 通过的总路程必为

$$s \rightarrow \infty.$$

(2) 因无外力, 增质型方程简化成

$$m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} = 0,$$

将 $m = \frac{m_0 v_0}{v}$, $dm = \alpha v dt$ 代入后, 可得

$$\frac{dv}{v^3} = -\frac{\alpha}{m_0 v_0} dt.$$

考虑到 $t=0$ 时, $v=v_0$, 积分后即得

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{1 + \frac{2\alpha v_0}{m_0} t}}.$$

2-21 长 l 、质量线密度为 λ 的匀质软绳, 开始时两端 A 和 B 一起悬挂在固定点上. 使 B 端脱离悬挂点自由下落, 当如图 2-17 所示, B 端下落高度 $x < l$ 时, 试求悬挂点所受拉力 T 的大小.

解 左段绳可处理成变质量物体, B 端降落 x 时速度 $v' =$

$\sqrt{2gx}$, dt 时间内将有质量 $dm = \frac{1}{2}\lambda v' dt$ 绳段进入左段, 此时左段受向下重力 $\lambda \frac{l+x}{2}g$, 受悬挂点向上拉力大小同于题文所求 T , 速度恒为零. 据增质型方程, 有

$$\lambda \left(\frac{l+x}{2} \right) g - T = \lambda \left(\frac{l+x}{2} \right) g \frac{dv}{dt} + (-v') \frac{dm}{dt}$$

$$\text{当 } dv = 0 \text{ 时 } -v' \frac{1}{2} \lambda v',$$

即可解得 $T = \frac{1}{2}(l+3x)\lambda g$.

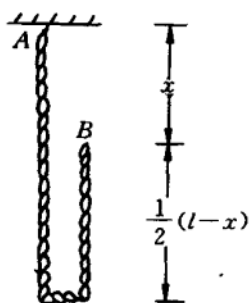


图 2-17

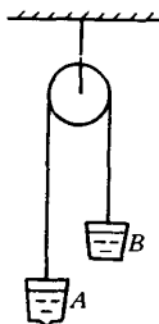


图 2-18

2-22 盛有水的两个桶 A, B 用足够长的轻绳挂在无摩擦定滑轮两侧, A, B 质量同为 m_0 , 已包括桶内水的质量 $m_0/2$, 初始状态系统静止. 如图 2-18 所示, 某时刻开始 A 桶内的水从桶底小孔无相对速度地流出, 流出质量与时间成正比, 比例系数为 α . 试求当 A 桶内的水刚好流完时, A 桶上升速度 v_c .

解 t 时刻 B 桶下落速度和 A 桶上升速度同记为 v , 绳中张力记为 T , A 桶质量 $m = m_0 - \alpha t$, 流出去水的速度 $v' = v$. 可列出下述方程:

$$A \text{ 桶: } T - mg = m \frac{dv}{dt} + (v - v') \frac{dm}{dt} = m \frac{dv}{dt},$$

$$B \text{ 桶: } m_0 g - T = m_0 \frac{dv}{dt}.$$

两式相加, 可得

$$\int_0^v dv = \int_0^t \frac{agt}{2m_0 - at} dt,$$

积分后,有

$$v = \left(\frac{2m_0}{\alpha} \ln \frac{2m_0}{2m_0 - at} - t \right) g.$$

A 桶内的水流净时, $t = m_0 / (2\alpha)$, 得

$$v_e = \left(4 \ln \frac{4}{3} - 1 \right) \frac{mg}{2\alpha}.$$

B 组

2-23 系统如图 2-19 所示, 滑轮与细绳的质量均可略, 绳不可伸长. 设系统所有部位都没有摩擦, 物体 B 借助于固定在大滑块 C 右侧的导轨被限定沿 C 的右侧面运动, 试求大滑块 C 的运动加速度 a_C .

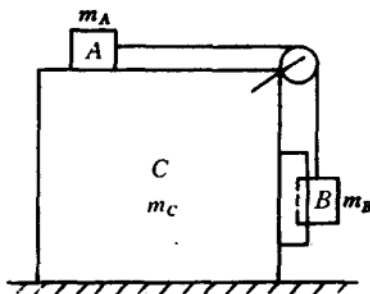


图 2-19

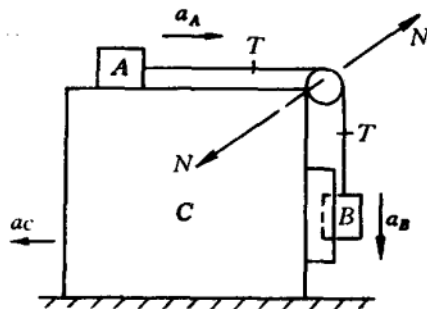


图 2-20

解 系统运动参量和力参量如图 2-20 所示, 可为物块 A, B, C 建立动力学方程:

$$A: \quad T = m_A a_A, \quad (1)$$

$$B: \quad m_B g - T = m_B a_B, \quad (2)$$

$$C: \quad N_{//} = (m_C + m_B) a_C, \quad (3)$$

其中 $N_{//}$ 是滑轮上一段绳对物块 C 作用力 N 的水平分量. 滑轮上一段绳的质量因可略而处理成零, 于是它所受支持力的水平分量 $N_{//}$ 应与水平绳中张力 T 平衡, 即有

$$N_{//} = T. \quad (4)$$

四个方程 5 个未知量,不可求解,需再补充 A, B, C 运动关联方程. 先设 C 不动,则 A 右移量 l_A, B 下移量 l_{B1} ;再令 A 不动, C 左移量 l_C, B 又有下移量 l_{B2} . 于是得

$$l_B = l_{B1} + l_{B2} = l_A + l_C,$$

此式对时间求导,得 $v_B = v_A + v_C$,再求导,即得运动关联方程

$$a_B = a_A + a_C. \quad (5)$$

①~⑤方程联立,可解得

$$a_C = \frac{m_A m_B}{(m_A + m_B)(m_B + m_C) + m_A m_B} g.$$

2-24 如图 2-21 所示, xy 平面是一绝缘水平面, z 轴竖直向上, 在 $A(x_0, 0, 0)$ 处放置一电量为 $-q < 0$ 、质量可略的小物块, 物块与水平面间的摩擦因数为 μ , 物块与一细线相连, 细线的另一端 B 穿过位于坐标原点 O 的光滑小孔, 在水平面下方. 空间加一匀强电场, 场强 E 的方向垂直于 x 轴, 与 z 轴夹角为 $\theta < \pi/2$, 且有 $\mu = \tan \theta$. 今竖直向下缓慢拉动细线 B 端, 使物块在水平面上移动过程的任一位置都可近似认为物块处于力平衡状态. 已知物块的移动轨迹是一条圆锥曲线, 试求其轨迹方程. (物块在电场中受力为 $F = -qE$.)

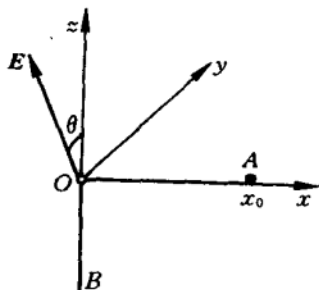


图 2-21

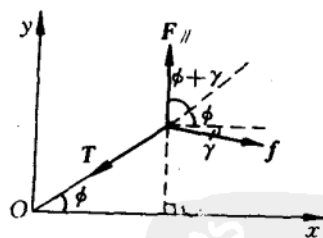


图 2-22

解 将 $F = -qE$ 分解为沿 z 轴负方向的 F_{\perp} 和沿 y 方向的 F_{\parallel} , 大小各为

$$F_{\perp} = qE \cos \theta, \quad F_{\parallel} = qE \sin \theta.$$

F_{\perp} 的存在使物块受图 2-22 所示的摩擦力 f , 大小为

$$f = \mu F_{\perp} = \tan \theta \cdot qE \cos \theta = qE \sin \theta = F_{\parallel}.$$

物块开始时必在第 I 象限移动, 细线处于拉紧状态. 细线拉力记为 T , 则有

$$T + F_{\parallel} + f = 0.$$

考虑到 $f = F_{\parallel}$, 故 T 必与 F_{\parallel} 、 f 间夹角的平分线反向, 即有图 2-22 所示的角关系, 从中可得

$$\phi + (\phi + \gamma) = \frac{\pi}{2},$$

ϕ 是细线与 x 轴夹角, γ 是 f 与 x 轴夹角. f 方向与物块移动方向相反, 故 f 方向即为轨迹切线方向. 由

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - 2\phi$$

可知, 对物块初始位置 $(x_0, 0)$, 有

$$\phi = 0, \quad \gamma = \frac{\pi}{2},$$

即开始时物块沿 y 轴方向移动.

首先考虑抛物线轨迹的可能性. 因需过第 I 象限, 且过 $(x_0, 0)$ 和 $(0, 0)$ 点, 故抛物线需如图 2-23 所示. 物块无限靠近 $(0, 0)$ 点时, T 的方向必沿切线, 物块也沿此方向移动, f 沿相反的方向, 可是 F_{\parallel} 需沿 y 轴方向, 无论抛物线如何设置, 均会有图 2-24 所示的下述结果:

$$T + F_{\parallel} + f \neq 0,$$

故抛物线轨迹不合乎要求.

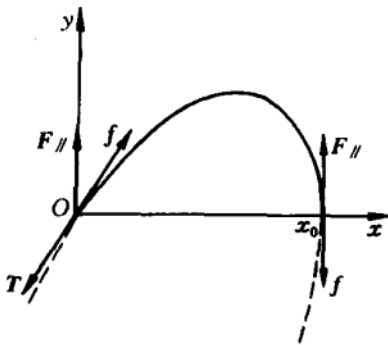


图 2-23

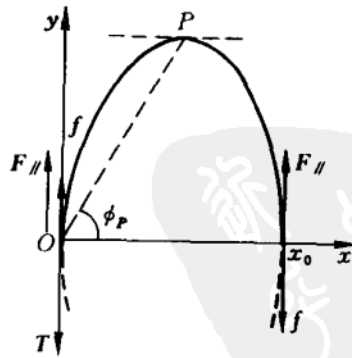


图 2-24

同样分析可知, 双曲线轨迹也不合乎要求.

最后考虑椭圆(包括圆)曲线,曲线需如图 2-24 所示设置,在最高点 P 处有

$$\gamma = 0,$$

据 $\gamma = \frac{\pi}{2} - 2\phi$, 便得

$$\phi_P = \frac{\pi}{4},$$

这仅当椭圆为圆时成立.

综上所述,物块移动轨迹是第 I 象限的半个圆周,曲线方程为

$$\left(x - \frac{x_0}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{x_0}{2}\right)^2.$$

2-25 如图 2-25 所示,平而薄的匀质圆板放在水平桌面上,圆板绕着过中心 O 的竖直轴旋转, O 点沿桌面运动. 如果圆板与桌面间的摩擦因数处处相同,试证圆板所受合摩擦力的方向必与 O 点运动方向相反.

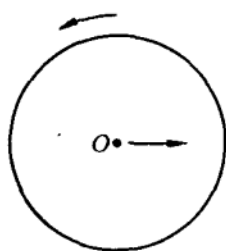


图 2-25

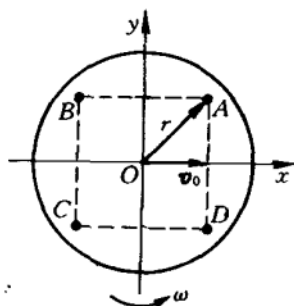


图 2-26

证 运动平板所受摩擦力不仅与平板几何形状有关,而且还与板的运动状态有关. 圆板具有几何形状方面的对称性但不能据此断言圆板所受摩擦力的合力也必定具有相应的对称性. 将几何形状中所具有的圆对称性和圆板各部位运动情况相结合,宜选取图 2-26 中的 4 个对称小部位 A, B, C, D 分析,其中 A 和 B 间、 C 和 D 间相对 y 轴对称, A 和 D 间、 B 和 C 间相对 x 轴对称. 这里的 x 轴与圆板中心 O 点在讨论的时刻具有的运动速度 v_0 方向一致, O 点选取为坐标原点. 总可取 A, B, C, D 4 个小部位所含质量相同,如果它们所受摩擦力的合力与 v_0 反向,那么将圆板分解成一系列的这种小部位

结构组,即可知圆板所受合摩擦力与 v_0 反向.

讨论的部位旋转速度 ωr 较小时,对称的 4 个部位速度与摩擦力方向如图 2-27 所示.有

df_1 与 df_2 的 y 分量抵消,

df_3 与 df_4 的 y 分量抵消,

df_1, df_2, df_3, df_4 的 x 分量均为负,

因此,合摩擦力

$$df = df_1 + df_2 + df_3 + df_4$$

必沿 x 轴负方向,即与 v_0 反向.

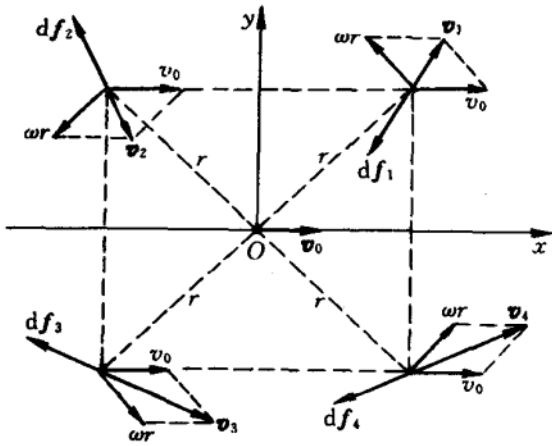


图 2-27

讨论的部位旋转速度 ωr 较大时,对称的 4 个部位速度与摩擦力方向如图 2-28 所示.有

df_1 与 df_2 的 y 分量抵消,

df_3 与 df_4 的 y 分量抵消.

但是 x 方向分量的情况为

df_1 与 df_2 的 x 分量均为正,

df_3 与 df_4 的 x 分量均为负.

考虑到图中 α, β, γ 角间的大小关系为 $\alpha < \beta < \gamma$, 即有

df_2 与 df_3 的 x 分量之和为负,

df_1 与 df_4 的 x 分量之和为负,

同理有

据此,合摩擦力

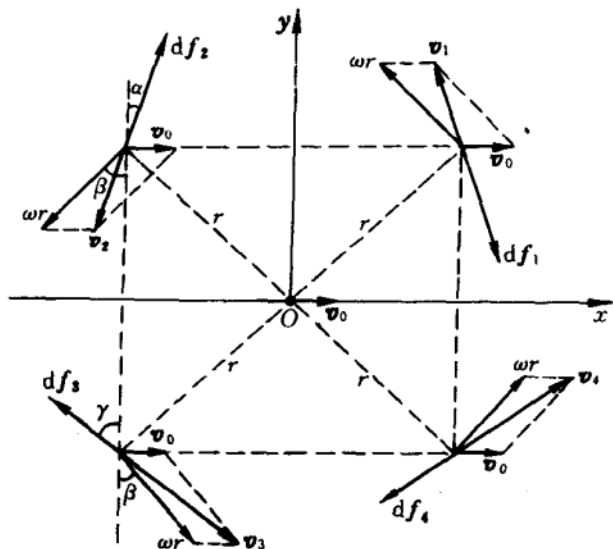


图 2-28

$$df = df_1 + df_2 + df_3 + df_4$$

必沿 x 轴负方向, 即与 v_0 反向.

2-26 质量同为 m 的两个小球, 各自在空气中以速率 v 运动时所受阻力大小为 $f = amv$, 其中 a 是一个常量. 使两球位于同一竖直线上, 球 1 在球 2 上方 h 处, 球 2 离地足够高, 在自由释放球 1 的同时, 以初速度 v_0 将球 2 竖直向上抛出. 试问经多长时间 t_0 , 两球相遇?

解 以球 2 初始位置为原点, 建立竖直向上的 y 坐标. 球 1 和球 2 沿 y 方向的速度 v 和加速度 a 均可改记为 \dot{y} 和 \ddot{y} , 它们的动力学方程同为

$$m\ddot{y} = -am\dot{y} - mg,$$

即
$$\ddot{y} = -(\alpha\dot{y} + g).$$

第一次积分, 可得

$$\dot{y} = C_1 e^{-\alpha t} - \frac{g}{\alpha},$$

其中 C_1 是待定的积分常量. 第二次积分, 可得

$$y = -\frac{C_1}{\alpha} e^{-\alpha t} - \frac{g}{\alpha} t + C_2,$$

C_2 是又一待定的积分常量.



对小球 1, 由初条件 $t=0$ 时, $v_1=0, y_1=h$ 可得

$$C_1 = \frac{g}{\alpha}, \quad C_2 = h + \frac{g}{\alpha^2},$$

即有 $y_1 = \frac{g}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha t}) - \frac{g}{\alpha}t + h.$

对小球 2, 由初条件 $t=0$ 时, $v_2=v_0, y_2=0$ 可得

$$C_1 = v_0 + \frac{g}{\alpha}, \quad C_2 = \frac{1}{\alpha} \left(v_0 + \frac{g}{\alpha} \right),$$

即有 $y_2 = \frac{1}{\alpha} \left(v_0 + \frac{g}{\alpha} \right) (1 - e^{-\alpha t}) - \frac{g}{\alpha}t.$

两球于 t_0 时刻相遇, 要求

$$y_1(t_0) = y_2(t_0),$$

可解得 $t_0 = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{v_0}{v_0 - ah},$

此解有意义的条件是

$$v_0 > ah.$$

2-27 在静止的车厢内有一辐角为 θ ($0 < \theta < 90^\circ$) 的圆锥摆, 当摆球处于图 2-29 的最左位置时车厢开始以常量 a 向右作水平匀加速运动. 试问摆球相对车厢能否恰好从此时刻开始, 以某 θ' ($0 < \theta' < 90^\circ$) 为辐角作圆锥摆运动?

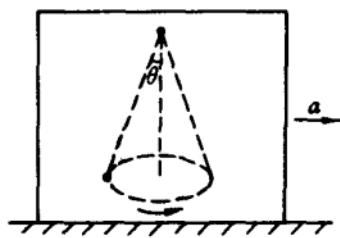


图 2-29

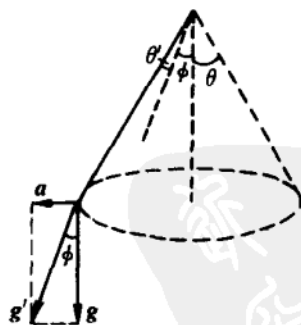


图 2-30

解 设摆线长 l , 很易求得在车厢加速前摆球速度大小为

$$v = \sqrt{gl/\cos\theta} \cdot \sin\theta. \quad ①$$

车厢加速后, 在车厢系中引入“类重力加速度” g' , 大小为

$$g' = \sqrt{g^2 + a^2}.$$

对 g' 与 g 的夹角 ϕ 有

$$\cos \phi = \frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}}, \quad \sin \phi = \frac{a}{\sqrt{g^2 + a^2}}. \quad (2)$$

若摆球恰好从车厢开始加速时相对车厢继续作圆锥摆运动, 则辐角必定为

$$\theta' = \begin{cases} \theta - \phi, & \theta > \phi, \\ \phi - \theta, & \theta < \phi. \end{cases} \quad (3)$$

图 2-30 只画出了 $\theta > \phi$ 的情况, 同样要求

$$v = \sqrt{g'l/\cos \theta'} \cdot \sin \theta', \quad (4)$$

④①式联立, 可得

$$\frac{g' \sin^2 \theta'}{\cos \theta'} = \frac{g \sin^2 \theta}{\cos \theta}. \quad (5)$$

由③②式联立, 可得

$$\cos \theta' = \cos(\theta - \phi) = \cos(\phi - \theta) = \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi$$

$$= \frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}} \cos \theta + \frac{a}{\sqrt{g^2 + a^2}} \sin \theta,$$

$$\sin^2 \theta' = [\sin(\theta - \phi)]^2 = [\sin(\phi - \theta)]^2$$

$$= \frac{1}{g^2 + a^2} (g \sin \theta - a \cos \theta)^2.$$

代入⑤式, 有

$$\begin{aligned} \frac{g \sin^2 \theta}{\cos \theta} &= \frac{g' \sin^2 \theta'}{\cos \theta'} = \frac{\sqrt{g^2 + a^2} \cdot \sin^2 \theta'}{\frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}} \cos \theta + \frac{a}{\sqrt{g^2 + a^2}} \sin \theta} \\ &= \frac{(g \sin \theta - a \cos \theta)^2}{g \cos \theta + a \sin \theta}, \end{aligned}$$

或展开为

$$g^2 \cos \theta \sin^2 \theta + ga \sin^3 \theta$$

$$= g^2 \sin^2 \theta \cos \theta - 2ga \sin \theta \cos^2 \theta + a^2 \cos^3 \theta,$$

即可解得

$$a = g(2 + \tan^2 \theta) \tan \theta. \quad (6)$$

此时 $\tan \phi = \frac{a}{g} = (2 + \tan^2 \theta) \tan \theta > \tan \theta,$

必有 $\phi > \theta.$

据此可得结论:

仅当 a 满足⑥式时, 摆球可作辐角为

$$\theta' = \phi - \theta = \arctan[(2 + \tan^2 \theta) \tan \theta] - \theta$$

的圆锥摆运动.

2-28 盛满同种液体的大容器以恒定的角速度 ω 绕着一固定轴旋转, 稳定后设液体密度 ρ_0 仍可近似认为处处相同.

(1) 如图 2-31 所示, 在容器中以转轴与某旋转平面交点为坐标原点, 设置径向坐标轴 x , 沿 x 方向取一细长条液柱, 它的两端坐标分别为 x_1 和 x_2 , 并且 $x_2 > x_1 \gg (x_2 - x_1)$, 截面积同为 S , 试求此液柱所受离心力 F_c ;

(2) 不计重力, 计算 x 处液体压强 $p(x)$;

(3) 将图 2-31 中的细液柱置换为外加的固态或液态细柱体, 不计重力, 计算它受到的 ρ_0 液体施加的浮力 F .

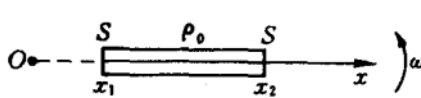


图 2-31

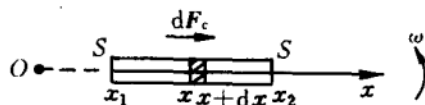


图 2-32

解 (1) 取图 2-32 所示的 x 到 $x+dx$ 段小液柱, 所受离心力 dF_c 方向沿 x 轴, 大小为 $dF_c = (\rho_0 S dx) \omega^2 x$, 积分得

$$F_c = \frac{1}{2} \rho_0 S \omega^2 (x_2^2 - x_1^2), \quad \text{沿 } x \text{ 轴方向.}$$

(2) 液体的重力压强是为平衡重力而引起的, 重力为零处重力压强自然为零. 本题中液体内的压强 $p(x)$ 是为平衡离心力而引起的, $x=0$ 处离心力为零, $p(x)$ 也即为零. 如图 2-33, 取 x 到 $x+dx$ 段细液柱, 据上述 F_c 算式可得

$$dF_c = \rho_0 S \omega^2 x dx,$$

液体两侧压强差 dp 提供的压力与 dF_c 平衡, 得

$$Sdp = dF_c,$$

积分得

$$\int_0^p dp = \int_0^x \rho_0 \omega^2 x dx, \quad p(x) = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 x^2.$$

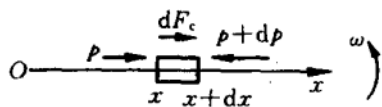


图 2-33

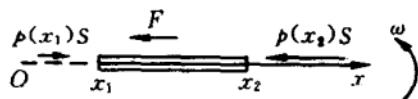


图 2-34

(3) 外加的固态或液态细长液柱所受浮力由 ρ_0 液体中的压强形成,如图 2-34 所示,有

$$F = p(x_2)S - p(x_1)S = \frac{1}{2} \rho_0 S \omega^2 (x_2^2 - x_1^2).$$

可见,此力大小等于 ρ_0 液体柱所受惯性离心力的大小.

2-29 如图 2-35 所示,质量 m_1 的航天飞机 A 绕地球作匀速圆周运动,轨道半径 R ,从航天飞机伸出长 $L \ll R$ 的刚性杆,杆端固定质量 $m_2 \ll m_1$ 的卫星 S. A-S 系统的位置用 α 角表示, α 是杆与 A 和地心连线之间的夹角.试求 A-S 系统的平衡位置,并讨论平衡的稳定性.(稍偏离平衡位置,静态下若有返回趋势者称为稳定平衡,有远离趋势者称为不稳定平衡,能停留者称为随遇平衡.)

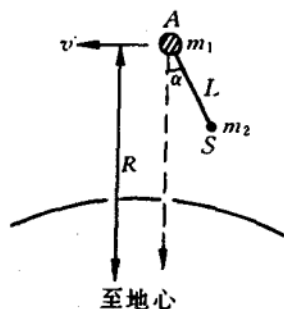


图 2-35

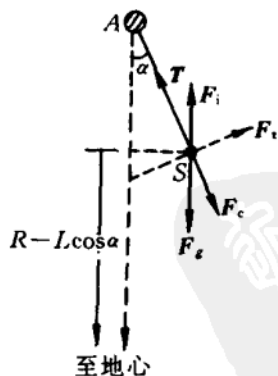


图 2-36

解 参考系 A 中,处于平衡位置的 S 是假设不动的,没有科里奥利力,S 受杆拉力 T 、地球引力 F_g 、平移惯性力 F_i 和惯性离心力

F_c , 如图 2-36 所示. 除拉力外, 其他三个力的大小分别为

$$F_g = \frac{GMm_2}{(R - L \cos \alpha)^2},$$

$$F_i = m_2 a_A = m_2 \omega^2 R,$$

$$F_c = m_2 \omega^2 L,$$

式中 M 是地球质量, a_A 是 A 的中心绕地球圆运动向心加速度, ω 是圆运动角速度, 有

$$\omega^2 R = a_A = \frac{GM}{R^2}.$$

A 绕地球圆运动, 使 A 具有平动加速非惯性系特征, 因而出现上述 F_i . A 作为飞机始终会以腹部朝向地球, 形成类似月球的自转, 自转角速度等于公转角速度 ω , 这又使得 A 具有匀速转动非惯性系特征, 因而出现上述 F_c . (很易判定 F_c 很小, 也可略去.)

T 与 F_c 均无切向分量, S 所得切向力为

$$F_t = (F_i - F_g) \sin \alpha = m_2 \omega^2 R \left[1 - \left(1 - \frac{L}{R} \cos \alpha \right)^{-2} \right] \sin \alpha$$

$$\approx -m_2 \omega^2 L \sin 2\alpha.$$

由 $F_t = 0$, 得 S 的四个平衡位置为

$$\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi.$$

$\alpha = 0$ 时, 若 α 稍有增大, 则 $\sin 2\alpha > 0$, $F_t < 0$, S 有返回趋势; 若 α 稍有减小, $\alpha < 0$, $\sin 2\alpha < 0$, $F_t > 0$, S 仍有返回趋势. 因此, $\alpha = 0$ 是稳定平衡位置.

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 若 α 稍有增大, 则 $\sin 2\alpha < 0$, $F_t > 0$, S 有远离趋势; 若 α 稍有减小, $\sin 2\alpha > 0$, $F_t < 0$, S 仍有远离趋势. 因此, $\alpha = \pi/2$ 是不稳定平衡位置.

同样分析可知, $\alpha = \pi$ 是稳定平衡位置, $\alpha = (3/2)\pi$ 是不稳定平衡位置.

2-30 不计空气阻力, 近似计算小球从北半球纬度 ψ 上空 h 处自由下落 ($h \ll R$ (地球半径)), 因受科里奥利力影响产生的落地偏移值.

解 参见图 2-13 的解答及图 2-12. 在赤道处, v 的 x 分量(朝东) v_x 对应的科里奥利力与 y 轴反向, 产生与 g 反向的加速度, 但影响极小, 也已略去. 若在北纬 ψ 处, v_x 对应的科里奥利力因与地球转轴垂直而有朝南的分量, 这就使小球落地点有朝南的偏移量, 这一偏移量也极小, 近似计算中可略去.

v_x 对应的科里奥利力的影响已经全部略去, 只需讨论 v_y 对应的科里奥利力的影响.

在赤道处, v_y 与地球自转角速度 ω 垂直, 朝东的科里奥利力大小为 $F_x = 2mv\omega$. 在北纬 ψ 处, v_y 与 ω 夹角为 $\frac{\pi}{2} + \psi$, 朝东的科里奥利力大小为

$$F_x = 2mv_y \omega \sin\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) = 2mv_y \omega \cos \psi,$$

而后仿照 2-13 的解答, 最后可得小球落地朝东偏移量为

$$x_0 = \frac{1}{3}(\omega \cos \psi)gt_0^3, \quad t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

即

$$x_0 = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8h^3}{g}} \cdot \omega \cos \psi.$$

若小球在南半球纬度 ψ 上空 $h \ll R$ 高处自由下落, 落地处将朝北、朝东偏移, 朝北偏移量可略, 朝东偏移量 x_0 同上.

2-31 如图 2-37 所示, 四个质量同为 m 的小球, 用长度相同且不可伸长的轻绳连结成菱形 $ABCD$, 静放在光滑的水平面上. 今突然给小球 A 一个历时极短沿 CA 方向的冲击, 使 A 获得速度 v . 已知 $\angle BAD = 2\alpha$ ($\alpha < \frac{\pi}{4}$), 试求系统受冲击后瞬间具有的动量 p 以及 B, C, D 球各自速度 v_B, v_C, v_D .

解 由对称性, 各绳张力冲量和各球速度可设成图 2-38 所示. 可列出四个独立方程:

系统所得动量 p 等于外力施于 A 球冲量 I ,

$$p = I;$$

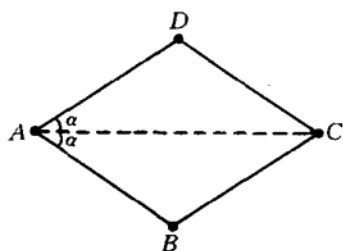


图 2-37

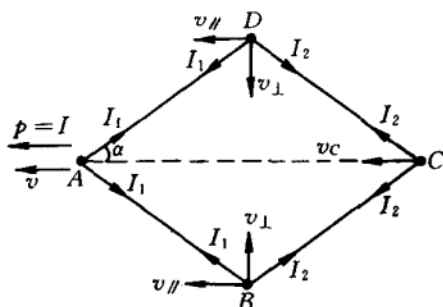


图 2-38

A 球获得的动量 mv 由图中 A 球所受三个冲量合成,

$$I - 2I_1 \cos \alpha = mv;$$

A 球沿 BA 方向的分速度与 B 球沿 BA 方向的分速度相同,

$$I \cos \alpha - I_1 - I_1 \cos 2\alpha = I_1 - I_2 \cos 2\alpha;$$

B 球沿 CB 方向的分速度与 C 球沿 CB 方向的分速度相同,

$$I_1 \cos 2\alpha - I_2 = I_2 + I_2 \cos 2\alpha.$$

解得系统具有的总动量 p 方向如图所示, 大小为

$$p = I = \frac{4mv}{2 - \cos 2\alpha},$$

还可解得绳中各张力冲量大小分别为

$$I_1 = \frac{2 + \cos \alpha}{2 - \cos 2\alpha} \frac{mv}{2 \cos \alpha},$$

$$I_2 = \frac{\cos 2\alpha}{2 - \cos 2\alpha} \frac{mv}{2 \cos \alpha}.$$

所求 v_c , 方向已在图中示出, 大小为

$$v_c = \frac{2I_2 \cos \alpha}{m} = \frac{\cos 2\alpha}{2 - \cos 2\alpha} v,$$

所求 v_B, v_D 均可按图示分量 $v_{//}, v_{\perp}$ 表述, 分别为

$$v_{//} = \frac{I_1 \cos \alpha - I_2 \cos \alpha}{m} = \frac{v}{2 - \cos 2\alpha},$$

$$v_{\perp} = \frac{I_1 \sin \alpha + I_2 \sin \alpha}{m} = \frac{\sin 2\alpha}{2 - \cos 2\alpha} v.$$

2-32 从地面发射的炮弹在达到最高点处炸裂成质量相同的两块, 第一块在炸裂后 1 s 落到爆炸点正下方的地面上, 该处与发射点的距离为 $s_1 = 1000$ m. 已知最高点距地面高度 $h = 19.6$ m, 忽略空气

阻力,试求第二块的落地点与发射点的距离.

解 炮弹射出后升到最高点,所需时间为

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2 \text{ s}.$$

经此时间通过水平距离 s_1 ,故炮弹水平初速为

$$v_x = s_1/t = 500 \text{ m/s}.$$

最高处炸裂后,第一块水平分速度为零,由动量守恒可知第二块水平分速度为

$$v_{2x} = 2v_x = 1000 \text{ m/s}.$$

设第一块竖直向下初速度为 v_{1y} ,经 $t_1 = 1 \text{ s}$ 落地,即有

$$h = v_{1y}t_1 + \frac{1}{2}gt_1^2,$$

算得

$$v_{1y} = \frac{h - \frac{1}{2}gt_1^2}{t_1} = 14.7 \text{ m/s}.$$

由动量守恒,可知第二块竖直向上初速度为

$$|v_{2y}| = 14.7 \text{ m/s},$$

经 1.5 s 到达最高点,再经 1.5 s 回到炮弹炸裂处.此时下落速度大小仍为 14.7 m/s ,与第一块下落初速度相同,故同样再经 1 s 落地.

总之,炮弹炸裂后,第二块经

$$t_2 = 1.5 \text{ s} + 1.5 \text{ s} + 1 \text{ s} = 4 \text{ s}$$

落地.此段时间内又通过水平路程

$$\Delta s_2 = v_{2x}t_2 = 4000 \text{ m},$$

故落地点与发射点相距

$$s_2 = s_1 + \Delta s_2 = 5000 \text{ m}.$$

2-33 船静止在水面上,人从船的一端走到另一端,再返回这一端,若不计水的阻力,船往返合成位移为零.真实情况下水有阻力,如果来回走的快慢不一样,船就有可能获得非零的合成位移.水的阻力较复杂,可以改取水平地面上有摩擦的长木板,板上的小物块替换人,组合成较初等的题目.

如图 2-39 所示,质量 $M=3m$,长 $2l$ 的均匀长木板静止在水平地面上,两者间摩擦因数 $\mu=1/8$. 板的右端有一质量 m 的小物块,从静止出发通过与木板的某种相互作用机制,相

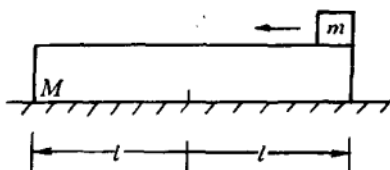


图 2-39

对木板以朝左的恒定加速度 $a = \frac{1}{2}\alpha g$ 运动,其中 $\alpha > 1$ 是一个不变的参数. 小物块到达板中央后,立即改成以 $a = \frac{1}{2}\alpha g$ 的反向加速度继续相对木板运动到左端停下,直到木板在地面上不再运动为止.

(1) 计算木板在地面上朝右的总位移大小 $s_{\text{右}}$;

(2) 若小物块再以同样方式从板的左端运动到板的右端,只是将 a 换成 $a' = \frac{1}{2}\alpha' g, \alpha' > 1$, 导出此过程中木板朝左总位移大小 $s_{\text{左}}$;

(3) 小物块如上所述,在木板上往返一次,确定木板在地面上合成位移的方向和大小 s .

解 (1) m 从右端到 M 中央所经时间和从中间到左端所经时间同为

$$t_0 = \sqrt{\frac{2l}{a}} = 2\sqrt{\frac{l}{\alpha g}}$$

全过程分四个阶段进行讨论.

第一阶段:

m 从右端到 M 中央,如图 2-40 所示,过程中 m 受左向力 f ,相对地面加速度 a_m . M 受右向力 f ,相对地面右向加速度 a_M ,又受地面左向摩擦力 $\mu(M+m)g$. 可列下述方程:

$$a_m = a - a_M, \quad f = ma_m, \quad f - \mu(M+m)g = Ma_M.$$

将 $M=3m, \mu=1/8, a=\frac{1}{2}\alpha g$ 代入,解得

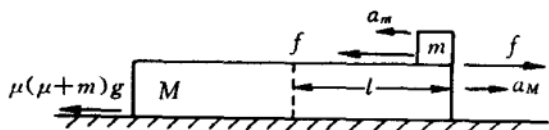


图 2-40

$$a_M = \frac{1}{8}(\alpha - 1)g > 0,$$

M 右行位移和右行末速度分别为

$$s_{1右} = \frac{1}{2}a_M t_0^2 = \frac{\alpha - 1}{4\alpha}l, \quad v_{M1} = a_M t_0 = \frac{1}{4}(\alpha - 1)\sqrt{\frac{gl}{\alpha}}.$$

第二阶段:

m 从 M 中央减速左行, 直到 M 相对地面速度减为零. 参考图 2-41, 可列出方程

$$\begin{aligned} a_m &= a - a_M, & f &= ma_m, \\ f + \mu(M + m)g &= Ma_M, \end{aligned}$$

解得

$$a_M = \frac{1}{8}(\alpha + 1)g,$$

经过的时间

$$\Delta t = \frac{v_{M1}}{a_M} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}t_0,$$

M 右行位移

$$s_{2右} = \frac{1}{2}a_M(\Delta t)^2 = \frac{(\alpha - 1)^2}{4\alpha(\alpha + 1)}l.$$

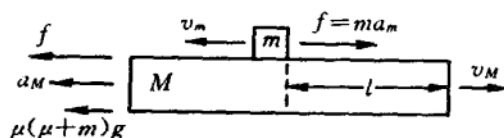


图 2-41

第三阶段:

m 继续减速左行, 直到 M 左端. 期间 M 左行. 参见图 2-42, 与图 2-40 相似, 只是有关矢量反向, 同样可解得

$$a_M = \frac{1}{8}(\alpha - 1)g,$$

经 $t_0 - \Delta t$ 时间, m 到达 M 左端, M 左行位移和左行末速度分别为

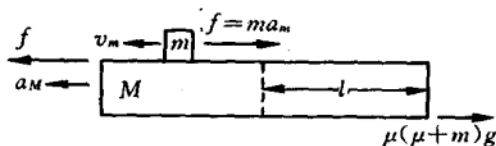


图 2-42

$$s_{3左} = \frac{1}{2} a_M (t_0 - \Delta t)^2 = \frac{\alpha - 1}{\alpha(\alpha + 1)^2} l,$$

$$v_{M3} = a_M (t_0 - \Delta t) = \frac{\alpha - 1}{2(\alpha + 1)} \sqrt{\frac{gl}{\alpha}}.$$

第四阶段:

m 停在 M 左端, f 消失, M 受向右摩擦力 $\mu(M+m)g$, M 与 m 一起获得向右加速度

$$a_{Mm} = \mu g = \frac{1}{8} g,$$

停止前 M 又得左行位移

$$s_{4左} = \frac{v_{M3}^2}{2a_{Mm}} = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha(\alpha + 1)^2} l.$$

综上所述四个运动阶段, 得木板在地面上朝右的总位移为

$$s_{右} = s_{1右} + s_{2右} - s_{3左} - s_{4左} = \frac{(\alpha - 1)^2}{2(\alpha + 1)^2} l > 0.$$

(2) 同样可得

$$s_{左} = \frac{(\alpha' - 1)^2}{2(\alpha' + 1)^2} l.$$

(3) 计算可得

$$s_{右} - s_{左} = \frac{2(\alpha - \alpha')(\alpha\alpha' - 1)}{(\alpha + 1)^2(\alpha' + 1)^2} l.$$

因 $\alpha\alpha' - 1 > 0$, 故

当 $\alpha > \alpha'$ 时, 合位移朝右,

当 $\alpha < \alpha'$ 时, 合位移朝左.

合位移大小为

$$s = \frac{2(\alpha\alpha' - 1)}{(\alpha + 1)^2(\alpha' + 1)^2} |\alpha - \alpha'| l.$$

2-34 球状小水滴在静止的雾气中下落, 下落过程中吸附了全部所遇到的水分子. 设水滴始终保持球状, 雾气密度均匀, 略去空气的黏力, 重力加速度 g 视为不变, 试证经过足够长时间后, 水滴下落加速度趋于稳定值, 并求出此值. 已知满足方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{A}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = B$$

的函数 $y(x)$, 其解为

$$y = (C_1x + C_2)^{\frac{1}{A+1}} + \frac{B}{2(2A+1)}x^2,$$

其中 C_1, C_2 是两个待定的积分常数.

解 水和水汽的密度各记为 ρ_1 和 ρ_2 , t 时刻水滴半径设成 r , 质量便是 $m = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_1$. 下落速度记成 v , 经 dt 时间吸收的水汽质量 $dm = (\pi r^2 v dt)\rho_2$, 水汽速度 $v' = 0$. 据变质量物体动力学方程, 有

$$mg = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt},$$

将各量代入后, 可得

$$\rho_1 g = \rho_1 \frac{dv}{dt} + \frac{3}{4} \frac{1}{r} v^2 \rho_2. \quad (1)$$

dt 时间内水滴半径增量记为 dr , 则有

$$(4\pi r^2 dr)\rho_1 = (\pi r^2 v dt)\rho_2,$$

$$\text{得} \quad v = 4 \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{dr}{dt}, \quad \frac{dv}{dt} = 4 \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{d^2r}{dt^2}. \quad (2)$$

②代入①式, 得

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{3}{r} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{\rho_2 g}{4\rho_1},$$

据题文所给数学公式, 其解为

$$r = (C_1 t + C_2)^{\frac{1}{4}} + \frac{\rho_2 g}{56\rho_1} t^2,$$

其中 C_1 和 C_2 由 $t=0$ 初始时刻的 r 值和 dr/dt 值确定, 都是有限量. 经过足够长时间, r 表述式第一项因远小于第二项而可略去, 得

$$r = \frac{\rho_2 g}{56\rho_1} t^2,$$

代入②式, 得

$$v = \frac{1}{7}gt, \quad a = \frac{1}{7}g,$$

即水滴下落加速度趋于 $g/7$ 这一稳定值.

3 机械能定理

A 组

3-1 图 3-1 中的 A_3BCD_3 是一条长轨道, 其中 A_3B 是斜面段. CD_3 是水平段, BC 是与 A_3B 和 CD_3 都相切的一小段圆弧. 一个小球与斜面段各处摩擦因数相同, 小球与水平段各处摩擦因数也都相同, 但这两个摩擦因数未必相同. 小球依次由 A_1, A_2, A_3 从静止开始滑下, 最后分别停留在 D_1, D_2, D_3 点. 已知 $h_2 - h_1 = 0.30 \text{ m}$, $h_3 - h_2 = 0.48 \text{ m}$, $\overline{D_1D_2} = 1.5 \text{ m}$, 试求 $\overline{D_2D_3}$ 长度.

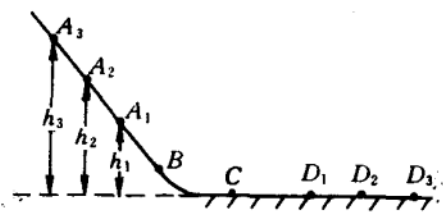


图 3-1

同, 但这两个摩擦因数未必相同. 小球依次由 A_1, A_2, A_3 从静止开始滑下, 最后分别停留在 D_1, D_2, D_3 点. 已知 $h_2 - h_1 = 0.30 \text{ m}$, $h_3 - h_2 = 0.48 \text{ m}$, $\overline{D_1D_2} = 1.5 \text{ m}$, 试求 $\overline{D_2D_3}$ 长度.

解 小球在斜面段所受合力沿斜面向下, 大小恒定, 记为 F ; 小球在水平段所受合力水平朝右, 大小恒定, 记为 f . A_1B 段 F 作正功, CD_1 段 f 作负功, 两者抵消. A_2A_1 段 F 所作正功与 D_1D_2 段 f 所作负功抵消, A_3A_2 段 F 所作正功与 D_2D_3 段 f 所作负功抵消. 将斜面倾角记为 θ , 则有

$$F \frac{h_2 - h_1}{\sin \theta} = f \overline{D_1D_2}, \quad F \frac{h_3 - h_2}{\sin \theta} = f \overline{D_2D_3},$$

两式相除, 即得

$$\overline{D_2D_3} = \frac{h_3 - h_2}{h_2 - h_1} \overline{D_1D_2} = 2.4 \text{ m}.$$

3-2 某人心脏每搏动一次泵出 80.0 mL 的血液, 一次搏动过程中心脏主动脉平均压强为 120 mmHg . 已知此人脉搏为 70.0 次/min , 试求此人心脏工作的功率.

解 血管压强 p , 流出血液量若为 dV , 则作功

$$dW = p dV,$$

平均压强为 \bar{p} , 流出血液总量为 V , 做功为

$$W = \bar{p}V,$$

其中

$$\bar{p} = \frac{120}{760} \times 1.01 \times 10^5 \text{ Pa} = 1.6 \times 10^4 \text{ Pa},$$

一分钟时间内

$$V = 70 \times 80.0 \times 10^{-6} \text{ m}^3 = 5.6 \times 10^{-3} \text{ m}^3,$$

心脏工作功率为

$$P = \frac{W}{t} = \frac{1.6 \times 10^4 \times 5.6 \times 10^{-3}}{60} \text{ W} = 1.5 \text{ W}.$$

3-3 质量同为 m 的两个小球, 用长 $2l$ 轻绳连接后静放在光滑水平面上, 绳处于伸直状态, 如图 3-2 所示. 今用恒力 F 作用于绳的中央, F 方向水平且垂直于绳的初始长度方向, 两球因此运动. 试问在两球第一次相碰前的瞬间, 小球在垂直于 F 作用线方向上的分速度 v_{\perp} 为多大?

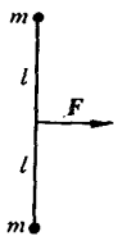


图 3-2

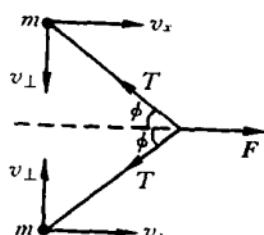


图 3-3

解 系统位形如图 3-3 所示时, 绳中张力

$$T = \frac{F}{2 \cos \phi},$$

小球受绳拉力也为 T , 沿 F 方向的分力为

$$T_x = T \cos \phi = \frac{F}{2},$$

小球获得该方向匀加速度

$$a_x = \frac{T_x}{m} = \frac{F}{2m}.$$

两球第一次碰撞前瞬间, 小球在此方向上速度设已达 v_{\parallel} , F 作用点

已经过的位移量设为 s , 小球在 F 方向位移量对应地为 $s-l$, 则有

$$v_{//} = \sqrt{2a_x(s-l)} = \sqrt{F(s-l)/m},$$

F 作功量已达 Fs , 故有

$$Fs = 2 \times \frac{1}{2} m(v_{//}^2 + v_{\perp}^2),$$

解得

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{Fl}{m}}.$$

3-4 如图 3-4 所示, 表面光滑, 高 h 、倾角 ϕ 的劈形物块以恒定速度 u 水平朝右运动, 在其斜面顶端有一个质量 m 的小木块从相对静止状态开始滑到底端.

- (1) 计算小木块相对劈形物块的末速度大小 v' ;
- (2) 在地面系计算小木块动能总增量 ΔE_k ;
- (3) 在地面系计算斜面支持力 N 对小木块所作总功 W_N ;
- (4) 在地面系验证 $W_N + W_g = \Delta E_k$, 其中 W_g 是重力对小木块所作总功.

解 (1) 在劈形物块参考系中 N 不作功, 据动能定理有

$$W_g = \frac{1}{2} m v'^2, \quad W_g = mgh,$$

即得

$$v' = \sqrt{2gh}.$$

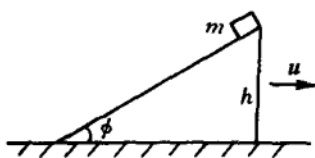


图 3-4

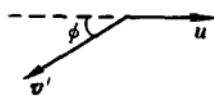


图 3-5

(2) 地面系中小物块初速度 u , 末速度为图 3-5 所示的 $v' + u$, 动能增量为

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= \frac{1}{2} m [(v' \cos \phi - u)^2 + (v' \sin \phi)^2] - \frac{1}{2} m u^2 \\ &= m(gh - \sqrt{2gh} \cdot u \cos \phi). \end{aligned}$$

(3) 如图 3-6 所示, dt 时间小物块位移 $dl_1 + dl_2$, 其中 dl_1 由小木块相对斜面运动引起, 它与支持力 N 垂直, $dl_2 = u dt$. 于是 N 作功

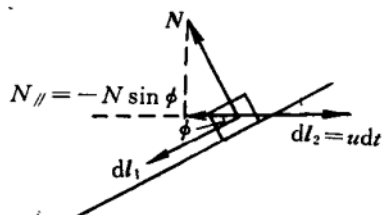


图 3-6

$$\begin{aligned} dW_N &= N \cdot (dl_1 + dl_2) = N \cdot dl_2 \\ &= N \cdot u dt = N_{//} u dt = (-Nu \sin \phi) dt. \end{aligned}$$

设下滑时间为 t , 得

$$W_N = (-Nu \sin \phi)t, \quad N = mg \cos \phi,$$

在劈形物块参考系中, 小物块下滑加速度 $a = g \sin \phi$, 可算得

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \frac{1}{\sin \phi},$$

即得

$$W_N = -mu \sqrt{2gh} \cdot \cos \phi.$$

(4) 地面系中, 重力功是 $W_g = mgh$, 于是有

$$W_g + W_N = mgh - mu \sqrt{2gh} \cdot \cos \phi,$$

联系(2)问所得 ΔE_k 表述式, 即得

$$W_N + W_g = \Delta E_k.$$

3-5 两个仅可压缩的轻弹簧组成的水平弹簧组如图 3-7 所示, 弹簧 1 和 2 的劲度系数分别为 k_1 和 k_2 , 它们的自由长度相差 l . 建立图示的 x 轴, 原点位于弹簧 2 的自由端, 图中长挡板的位置记为 x . 系统势能 $E_p(x)$ 零点按下述两种方式设定, 分别在 $0 \leq x \leq l$ 和 $x < 0$ 两个范围导出 $E_p(x) - x$ 关系式:

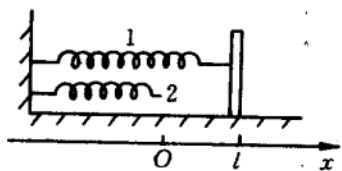


图 3-7

(1) 设定 $x=0$ 点为系统势能零点; (2) 设定 $x=l$ 点为系统势能零点.

解

(1) 对 $0 \leq x \leq l$, 有

$$F_x = k_1(l - x),$$

$$E_p(x) = \int_x^0 F_x dx = \frac{1}{2} k_1 x^2 - k_1 l x.$$

对 $x < 0$, 有

$$F_x = k_1(l - x) - k_2 x,$$

$$E_p(x) = \int_x^0 F_x dx = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) x^2 - k_1 l x.$$

(2) 对 $0 \leq x \leq l$, 有

$$F_x = k_1(l - x),$$

$$E_p(x) = \int_x^l F_x dx = \frac{1}{2} k_1 x^2 - k_1 l x + \frac{1}{2} k_1 l^2.$$

对 $x < 0$, 有

$$F_x = k_1(l - x) - k_2 x,$$

$$E_p(x) = \int_x^l F_x dx = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) x^2 - k_1 l x + \frac{1}{2} k_1 l^2.$$

3-6 地震的里氏 (Richter) 震级 M 与从其释放出来的能量 E 之间的关系为

$$\log E = 5.24 + 1.44M,$$

式中 E 的单位为 J. 1679 年 9 月 2 日, 北京地区发生过一次 8 级地震, 试求该次地震释放的能量.

长江源头为青海高原昆仑山南麓的沱沱河, 从这里经 5000 m 落差注入东海, 它的水利资源的储存量按功率计为 1.125×10^8 kW. 试比较长江一天内所提供的水利资源能量与上述地震释放的能量哪一个大? 估算长江的平均流量.

解 该次地震释放能量为

$$E = 10^{5.24+1.44 \times 8} \text{ J} = 5.75 \times 10^{16} \text{ J},$$

长江一天内所提供的水利资源能量为

$$E_p = 1.125 \times 10^8 \times 10^3 \times 24 \times 3600 \text{ J} = 9.72 \times 10^{15} \text{ J},$$

两者比较, 该次地震释放能量大.

水流量 Q 等于单位时间流过的水质量, 即有

$$Qgh = P = 1.125 \times 10^8 \text{ kW},$$

可得
$$Q = \frac{P}{gh} = \frac{1.125 \times 10^8 \times 10^3}{10 \times 5000} \text{ kg/s} \sim 10^6 \text{ kg/s}.$$

3-7 杂技演员站在蹦床上不动时,网下沉 0.20 m,试问当演员从 10.0 m 高处自由下落时,蹦床网将受到的最大压力是杂技演员自身重力的多少倍(给出 3 位有效数字)? 已知网的下沉量与正压力的二次方根成正比.

解 网的弹力 F 与下沉量 $x > 0$ 间关系为

$$F = \alpha x^2, \quad \alpha = \frac{mg}{(\Delta l)^2}, \quad \Delta l = 0.20 \text{ m},$$

式中 m 是演员质量. 取 $x=0$ 为弹性势能零点, 下沉量为 x 时的弹性势能

$$E_p = \int_x^0 (-\alpha x^2) dx = \frac{1}{3} \alpha x^3.$$

演员从 $h_0=10.0$ m 高处落下后,网的最大下沉量达 h ,演员的重力势能全部转化为网的弹性势能,有

$$mg(h_0 + h) = \frac{1}{3} \alpha h^3,$$

代入有关量后,得

$$h^3 - 0.12h - 1.2 = 0,$$

数值计算可得

$$h = 1.10 \text{ m}.$$

此时网受压力 αh^2 最大,与演员自身重力比为

$$\gamma = \frac{\alpha h^2}{mg} = \frac{h^2}{(\Delta l)^2} = 30.3.$$

3-8 如图 3-8 所示,用细绳悬挂一个匀质圆环,环上穿两个质量相同的小串珠,小串珠与环之间无摩擦. 令小串珠从环顶左、右两侧自静止开始自由滑下,为使过程中环会上升,试求环的质量与一个小串珠的质量之比 γ 的可取值.

解 所设常量已经在图 3-9 中示出, θ 角位置时环受一个小珠拉力 N 可由下述两式

$$mg \cos \theta + N = \frac{mv^2}{R},$$

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgR(1 - \cos \theta),$$

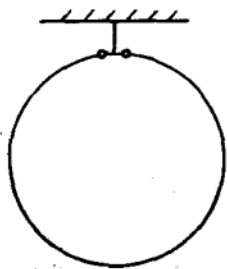


图 3-8

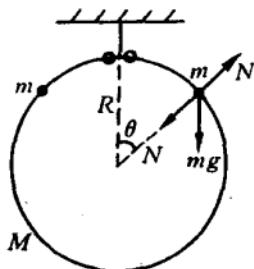


图 3-9

导得为

$$N = mg(2 - 3 \cos \theta).$$

左、右两小珠对称,使环受竖直向上升力为

$$2N \cos \theta = 2mg(2 - 3 \cos \theta) \cos \theta.$$

为使环能上升,要求出现临界状态:

$$2N \cos \theta = Mg,$$

导得 $\cos \theta$ 需满足的方程和解分别为

$$6 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta + \gamma = 0, \quad \gamma = M/m,$$

$$\cos \theta = \frac{1}{3} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{2} \gamma} \right],$$

γ 可取值便是

$$0 < \gamma \leq \frac{2}{3}.$$

两个可使环上升的临界角为

$$\theta_1 = \arccos \left[\frac{1}{3} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{3}{2} \gamma} \right] \right],$$

$$\theta_2 = \arccos \left[\frac{1}{3} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{3}{2} \gamma} \right] \right] > \theta_1,$$

θ_1 先达后, θ_2 便不可达.

3-9 大质量车厢在水平地面上以 v_0 速度匀速行使,车厢内有一半半径 R 的光滑半圆柱面,顶部有一质量为 m 的小球.开始时小球静止,如图 3-10 所示,而后因微小扰动下滑离开圆柱面,试求过程中

圆柱面支持力 N 对小球所作功.

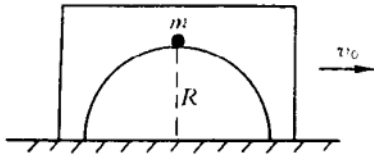


图 3-10

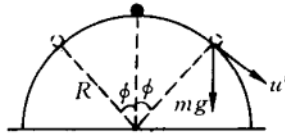


图 3-11

解 车厢系(惯性系)中,小球右滑或左滑离开圆柱面的方位角如图 3-11 所示,应有

$$mg \cos \phi = \frac{mu'^2}{R},$$

$$\frac{1}{2}mu'^2 = mgR(1 - \cos \phi),$$

可解得

$$\cos \phi = \frac{2}{3}, \quad u' = \sqrt{\frac{2}{3}gR}.$$

地面系中,小球初速 $u_0 = v_0$,右滑或左滑离开圆柱面时的速度 u 可分解为水平 x 方向和竖直 y 方向分量,各为

$$u_x = v_0 \pm u' \cos \phi, \quad u_y = u' \sin \phi.$$

过程中圆柱面支持力 N 对小球做功

$$W = \frac{1}{2}m(u_x^2 + u_y^2) - \left[mgR(1 - \cos \phi) + \frac{1}{2}mv_0^2 \right],$$

可算得为

$$W = \pm \frac{2}{3}mv_0 \sqrt{\frac{2}{3}gR}, \quad \begin{cases} +: \text{右行滑离,} \\ -: \text{左行滑离.} \end{cases}$$

3-10 用三根等长轻线,将质量均匀分布的圆环对称地悬挂在天花板下,构成一个扭摆,小角度扭转周期为 T_0 . 再用三根轻质辐条在圆环中心固定一个与环质量相同的小物块,如图 3-12 所示,保持扭转幅度相同,新系统扭转周期记为 T ,试求 T 与 T_0 的比值 γ .

解 设轻线长 l ,环与小物块质量各为 m . 小

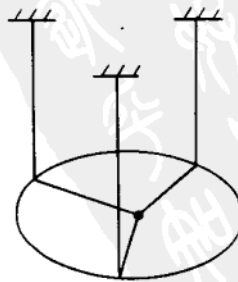


图 3-12

角度扭转时,扭转角 θ (其最大值为幅角 θ_0) 可处理成平面角. 原系统从 θ_0 到 θ 时,由能量关系可得环的扭转速度大小为

$$v_0 = \sqrt{2gl(\cos \theta - \cos \theta_0)}.$$

新系统从 θ_0 到 θ 时,环的速度记为 v ,小物块在竖直方向速度便是

$$v \sin \theta = v\theta \ll v.$$

由能量关联式

$$2mgl(\cos \theta - \cos \theta_0) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m(v \sin \theta)^2 = \frac{1}{2}mv^2,$$

可得 $v = \sqrt{4gl(\cos \theta - \cos \theta_0)} = \sqrt{2} \cdot v_0.$

任意 θ 角位置 v 与 v_0 均有上述正比关系,即得

$$\gamma = \frac{T}{T_0} = \frac{v_0}{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3-11 系统如图 3-13 所示, A 和 B 是两个质量相同的小球,其间是一根轻杆,竖直线代表竖直光滑墙,水平线代表水平光滑地面,开始时 $\theta=0$, A, B 及杆静止,而后因微小扰动而下滑,试问 θ 达到何值时 A 球离墙?

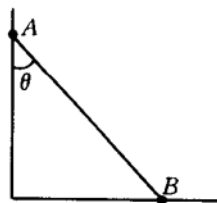


图 3-13

解 A, B 质量同记为 m , 杆长记为 l , 在 θ 角位置时 A 向下速度记为 v_A , B 朝右速度记为 v_B . 地面与 A, B 及轻杆构成的大系统机械能守恒, 即有

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 = mgl(1 - \cos \theta). \quad (1)$$

由 A 和 B 沿杆方向速度相同, 得

$$v_A \cos \theta = v_B \sin \theta, \quad (2)$$

①②式联立, 可解得

$$v_B = \sqrt{2gl(1 - \cos \theta)} \cdot \cos \theta.$$

A, B 及杆构成的小系统水平方向动量为

$$p_x = mv_B = m \sqrt{2gl(1 - \cos \theta)} \cdot \cos \theta,$$

由初始的零值变化为正值的过程中必有正的增长, 这一增量来自于墙通过与 A 球的接触施加给系统水平朝右的力 N . 当 p_x 增到极大

值时, N 必定为零, 即 A 球离墙. p_x 极大值与

$$\sqrt{(1 - \cos \theta) \cdot \cos \theta} \quad \text{或} \quad (1 - \cos \theta) \cos^2 \theta$$

极大值对应. 由

$$(1 - \cos \theta) \cos^2 \theta = 4(1 - \cos \theta) \left(\frac{1}{2} \cos \theta \right) \left(\frac{1}{2} \cos \theta \right)$$

和代数不等式

$$ABC \leq \frac{1}{3}(A + B + C)^3$$

(A, B, C 均为正, 等号在 $A = B = C$ 时取得),

可知, 当

$$1 - \cos \theta = \frac{1}{2} \cos \theta = \frac{1}{2} \cos \theta, \quad \text{即} \quad \cos \theta = \frac{2}{3}$$

时, $(1 - \cos \theta) \cos^2 \theta$ 取得极大值, 即 p_x 取得极大值. 据此,

$$\theta = \arccos \frac{2}{3}$$

时, A 球离墙.

3-12 系统如图 3-14 所示, 细绳的质量线密度为常量 λ , 长 $\pi R + H$, 其中 πR 段搭在半径 R 且固定不可转动的滑轮上, 绳与滑轮光滑接触. 绳左侧 H 段的下端恰好与水平地面自由接触, 绳的右端连接质量 $m = \frac{1}{2} \lambda H$ 的小重物. 开始时系统处于运动状态, 小重物具有竖直向下的速度 v_0 , 绳中各部位也具有沿绳方向的速度 v_0 . 为使小重物能在滑轮右侧着地, 试求 v_0 . (假设已有图中未画出的装置, 使绳不会甩离滑轮.)

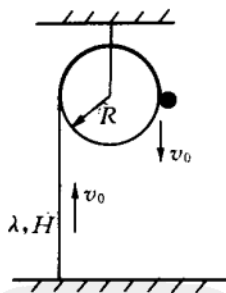


图 3-14

解 关键在于重物下降 $H/4$ 高度时, 系统处于力平衡位置, 只有通过这一位置后小重物才能在滑轮右侧着地. 在下降高度达 $H/4$ 之前, 小重物的向下运动一直处于减速状态, 过 $H/4$ 后, 一直处于加速状态.

对于由图示系统与地面构成的大系统, 可写出机械能守恒式:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[\lambda(\pi R + H) + m]v_0^2 \\ &= \frac{1}{2}[\lambda(\pi R + H) + m]v^2 + \lambda \frac{H}{4}g \left(H - \frac{H}{4} \right) - mg \frac{H}{4}, \\ & m = \frac{1}{2}\lambda H. \end{aligned}$$

为使小重物在 $H/4$ 处 $v > 0$, 要求

$$\frac{1}{2}[\lambda(\pi R + H) + m]v_0^2 > \lambda \frac{H}{4}g \left(H - \frac{H}{4} \right) - mg \frac{H}{4},$$

即得
$$v_0 > \frac{H}{2} \sqrt{\frac{g}{2\pi R + 3H}}.$$

3-13 如图 3-15 所示, 两个等高的小定滑轮相距 2 m, 物块 A 和 B 的质量各为 1 kg, 它们之间用轻绳连接, 在绳的水平段中点挂一个质量 1.9 kg 的小物块 C, 开始时均处于静止状态. 而后 C 被释放, 三物块同时开始运动, 当 C 下降 0.75 m 时, 试问:

- (1) A, B, C 的速度各是多少?
- (2) A, B, C 的加速度各是多少?

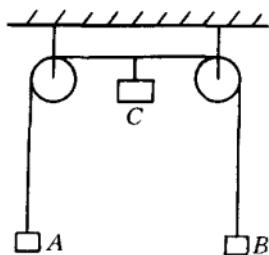


图 3-15

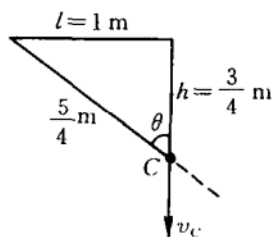


图 3-16

解 物块 C 的悬挂点到滑轮间距记为 $l = 1$ m, C 下降 $h = 0.75$ m 时构成的倾角 θ 如图 3-16 所示, 应有

$$\sin \theta = \frac{4}{5}, \quad \cos \theta = \frac{3}{5}, \quad \cot \theta = \frac{3}{4}.$$

(1) 所求 A, B, C 的速度各记为 v_A, v_B, v_C , 因 $m_A = m_B, v_A = v_B$, 联合地面, 机械能守恒, 有

$$2\left(\frac{1}{2}m_A v_A^2\right) + \frac{1}{2}m_C v_C^2 = m_C g h - 2\left[m_A g \left(\frac{l}{\sin \theta} - l\right)\right],$$

将有关数据代入后,可得

$$v_A^2 + 0.95v_C^2 = 9.065 \text{ m}^2/\text{s}^2,$$

将速度关联式 $v_C \cos \theta = v_A$ 代入后,解得

$$v_C = 2.63 \text{ m/s}, \quad v_A = v_B = 1.58 \text{ m/s}.$$

(2) 绳中张力记为 T , A 的向上加速度记为 a_A , C 的向下加速度记为 a_C , 则有

$$\begin{aligned} T - m_A g &= m_A a_A, \\ m_C g - 2T \cos \theta &= m_C a_C, \end{aligned}$$

消去 T , 可得

$$m_C g - 2m_A(g + a_A) \cos \theta = m_C a_C. \quad (1)$$

a_C 沿绳方向分量 $a_C \cos \theta$, 由 $a_{Cr} = a_A$ 和 $a_{C\dot{\theta}}$

合成. 参考图 3-17, 应有

$$a_C \cos \theta = a_{Cr} - a_{C\dot{\theta}} = a_A - a_{C\dot{\theta}},$$

$$a_{C\dot{\theta}} = \frac{(v_C \sin \theta)^2}{l / \sin \theta},$$

后一式是考虑到 $a_{C\dot{\theta}}$ 因 C 相对绳的左上端作角向运动引起而写出. 整理后, 得

$$a_C \cos \theta = a_A - \frac{v_C^2 \sin^3 \theta}{l}. \quad (2)$$

将有关数据代入①和②式, 可算得

$$a_A = a_B = 4.14 \text{ m/s}^2,$$

$$a_C = 0.996 \text{ m/s}^2.$$

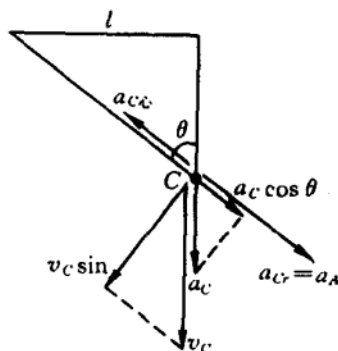


图 3-17

3-14 如图 3-18 所示, 两根长度同为 l 的轻杆用质量 m 的球形铰链相接, 两杆另一端分别连接质量 m 和 $2m$ 的小球. 开始时两杆并拢竖立在光滑水平面上, 铰链球在上, 而后从静止释放, 下面两球朝两侧滑动, 两杆始终在同一竖直平面内. 略去所有阻力, 试求:

- (1) 铰链球碰到桌面时的速度;
- (2) 两杆夹角为 90° 时, 质量为 $2m$ 的小球速度.

解 (1) 水平方向动量守恒, 铰链球与桌面相碰时, 三球的水平

速度同为零,只是铰链球有竖直向下速度 u . 联合地面,据机械能守恒可得

$$\frac{1}{2}mu^2 = mgl, \quad u = \sqrt{2gl}.$$

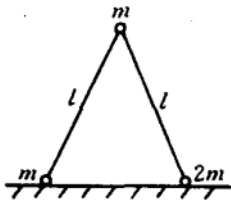


图 3-18

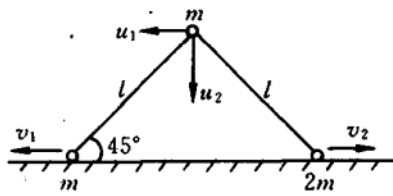


图 3-19

(2) 参考图 3-19,由水平方向动量守恒可得

$$v_1 + u_1 = 2v_2, \quad (1)$$

由机械能守恒可得

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}m(u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{2}(2m)v_2^2 = mgl\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\text{即} \quad v_1^2 + (u_1^2 + u_2^2) + 2v_2^2 = (2 - \sqrt{2})gl. \quad (2)$$

又由运动关联

$$v_1 \cos 45^\circ = (u_1 + u_2) \cos 45^\circ,$$

$$v_2 \cos 45^\circ = (u_2 - u_1) \cos 45^\circ,$$

$$\text{得} \quad v_1 = u_1 + u_2, \quad v_2 = u_2 - u_1. \quad (3)$$

联立①②③式,可解得质量 $2m$ 的小球速度为

$$v_2 = \sqrt{\frac{3}{10}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)gl}.$$

3-15 一个足够深,长 l 、宽 b 的矩形盛水鱼缸放在车厢内,缸的长边方向与车厢长边方向一致. 火车匀速行进时,水面与缸口相距 h . 某时刻开始,火车作加速度为常量 a 的直线运动,为使水不溢出,求 a 的最大可取值,设缸中水面可近似处理为始终保持平面形状.

解 加速时缸中水面的平衡位置如图 3-20 中实线所示,与地面系水平方位有一夹角

$$\theta = \arctan \frac{a}{g}.$$

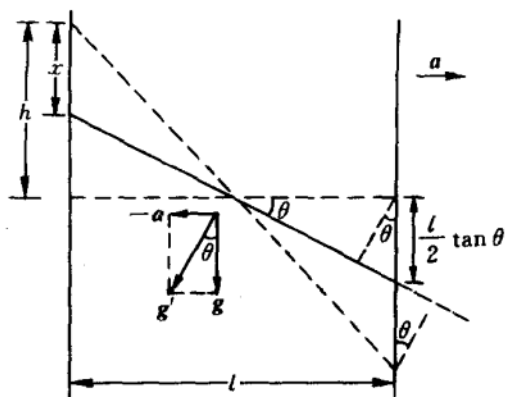


图 3-20

车厢系中,由 g 与 a 合成等效“重力加速度” g' . 设平衡位置对应全部水的等效“重力势能”为零,那么开始时全部水的等效“重力势能”为

$$E_{p,1} = \rho \left[\frac{1}{2} b \left(\frac{l}{2} \right) \left(\frac{l}{2} \tan \theta \right) \right] g' \left[\frac{2}{3} \left(\frac{l}{2} \tan \theta \right) \cos \theta \right]$$

$$= \frac{1}{24} \rho g' b l^3 \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta},$$

式中 ρ 是水的密度. 水面从原水平方位变化到平衡方位时,因水有动能而使水面继续朝图中左侧爬高,直到水面左侧线再沿水缸左壁上升某 x 量为止. 此时全部水的等效“重力势能”为

$$E_{p,2} = \rho \left(\frac{1}{2} b x \frac{l}{2} \right) g' \left(\frac{2}{3} x \cos \theta \right) = \frac{1}{6} \rho g' b l x^2 \cos \theta.$$

车厢系中要求

$$E_{p,2} = E_{p,1},$$

解得

$$x = \frac{l}{2} \tan \theta = \frac{al}{2g}.$$

为使水不溢出,要求

$$x \leq h - \frac{l}{2} \tan \theta = h - \frac{al}{2g},$$

故 a 的最大可取值为

$$a_{\max} = \frac{gh}{l}.$$

3-16 核电站的原子能反应堆中需要用低速热中子维持缓慢的链式反应,反应释放的却是高速快中子. 反应堆中通过快中子与石墨

棒内碳原子($^{12}_6\text{C}$)的不断碰撞逐渐减速,最后成为所需要的热中子.将快中子与热中子的平均动能分别设为 $2.0 \times 10^6 \text{ eV}$ 和 0.025 eV ,每次碰撞前碳原子均处于静止状态,碰撞为弹性.试问经过多少次碰撞,快中子可成为热中子?

解 由弹性碰撞方程

$$m_n v_0 = m_n v_n + m_C v_C,$$

$$\frac{1}{2} m_n v_0^2 = \frac{1}{2} m_n v_n^2 + \frac{1}{2} m_C v_C^2,$$

解得

$$v_n = \frac{m_n - m_C}{m_n + m_C} v_0.$$

碰后中子动能与碰前中子动能比为

$$\frac{v_n^2}{v_0^2} = \left(\frac{m_n - m_C}{m_n + m_C} \right)^2 = \left(\frac{11}{13} \right)^2,$$

设经 N 次碰撞后有

$$0.025 \text{ eV} = 2 \times 10^6 \text{ eV} \times \left(\frac{11}{13} \right)^{2N},$$

算得 $N=54.47$, 即需 55 次碰撞.

3-17 “弹弓效应”是航天技术中增大宇宙探测器速率的一种有效方法.如图 3-21 所示,土星以相对于太阳的轨道速率 $v_M = 9.6 \text{ km/s}$ 运行,一空间探测器以相对于太阳的速率 $v_0 = 10.4 \text{ km/s}$ 迎向土星飞行.由于土星的引力,探测器绕过土星沿着和原来相反的方向离去,试求探测器离去时相对于太阳的速率 v .

解 设土星质量为 M ,探测器质量为 m ,全过程可处理成类弹性碰撞,可得

$$v = \left| \frac{(m - M)v_0 - 2Mv_M}{m + M} \right|,$$

因 $M \gg m$, 即有

$$v = | -v_0 - 2v_M | = 29.6 \text{ km/s}.$$

3-18 如图 3-22 所示,滑块 A_1 和 A_2 由轻杆连接成一个整体,其质量为 M ,轻杆长 L ,滑块 B 的质量为 m ,长为 $L/2$,其左端有一小

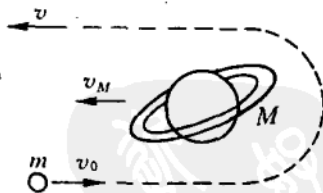


图 3-21

槽,槽内装有轻质弹簧.开始时 B 紧贴 A_1 ,弹簧处于压缩状态,今突然松开弹簧,整个系统获得动能 E_k .弹簧松开后不再起任何作用,以后 B 将在 A_1, A_2 之间发生弹性碰撞.假定整个系统都放在光滑水平面上,试求物块 B 的运动周期 T .

解 开始时 A 的左行速度记为 v_A , B 的右行速度记为 v_B ,由方程组

$$Mv_A = mv_B,$$

$$\frac{1}{2}Mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 = E_k,$$

解得

$$v_A = \sqrt{\frac{2mE_k}{M(M+m)}},$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2ME_k}{m(M+m)}}.$$

两者相对速度大小为

$$u = v_A + v_B = \sqrt{\frac{2(M+m)E_k}{Mm}}.$$

A 与 B 在以后的弹性碰撞中,碰撞后分离速度大小恒等于碰撞前接近速度大小,故 B 相对 A 的速度大小始终为上述 u 值. B 的运动周期等于 B 相对于 A 的左、右往返各碰撞一次的合计时间,即有

$$T = \frac{L}{u} = L \sqrt{\frac{Mm}{2(M+m)E_k}}.$$

3-19 在水平冰面上兄弟俩作推车游戏,哥哥质量 m_1 ,弟弟质量 m_2 ,小车质量 m .开始时哥哥与小车静止在同一地点,弟弟静止在另一地点.而后,哥哥将小车朝着弟弟推去,小车推出后相对于哥哥的速度大小为 u .弟弟接到小车后又将小车推向哥哥,小车推出后相对于弟弟的速度大小仍为 u .哥哥接到小车后又再次将小车推向弟弟,如此继续下去.设冰面光滑,且足够大.

(1) 若某次弟弟推出的小车恰好追不上哥哥,试求三者各自的运动速度大小;

(2) 若无论 u 取什么样的非零值,弟弟第一次推出的小车都是

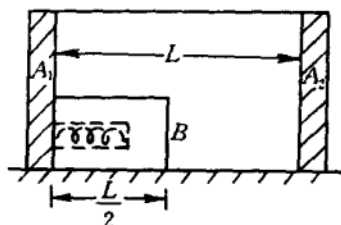


图 3-22

恰好追不上哥哥, 试给出 m_1, m_2, m 之间需满足的关系式.

解 (1) 终态如图 3-23 所示, m 与 m_1 速度必相同, 故有

$$(m_1 + m)v_1 = m_2v_2, \quad v_1 + v_2 = u,$$

解得
$$v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m}u, \quad v_2 = \frac{m_1 + m}{m_1 + m_2 + m}u.$$

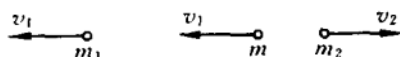


图 3-23

(2) 哥哥第 1 次推出小车后反向速度大小 v'_1 和小车前行速度大小 u' , 可由方程

$$m_1v'_1 = mu', \quad v'_1 + u' = u,$$

解得为
$$v'_1 = \frac{m}{m_1 + m}u, \quad u' = \frac{m_1}{m_1 + m}u.$$

弟弟第 1 次接到小车后所得速度大小为

$$v_{20} = \frac{m}{m_2 + m}u' = \frac{m_1m}{(m_2 + m)(m_1 + m)}u,$$

弟弟再将小车推出后, 弟弟运动速度大小 v'_2 和小车运动速度大小 u'' , 可由方程

$$(m_2 + m)v_{20} = m_2v'_2 - mu'', \quad u'' + v'_2 = u,$$

解得为

$$v'_2 = \frac{m(2m_1 + m)}{(m_2 + m)(m_1 + m)}u, \quad u'' = \frac{m_2m_1 - mm_1 + mm_2}{(m_2 + m)(m_1 + m)}u.$$

为使哥哥的速度与(1)问结果相同, 要求 $v'_1 = v_1$, 即

$$\frac{m}{m_1 + m}u = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m}u,$$

因此, m, m_1, m_2 间需满足关系:

$$m_1m_2 = m(m_1 + m),$$

利用此式可将 u'' 改述成

$$u'' = \frac{m(m_2 + m)}{(m_2 + m) \frac{m_1m_2}{m}}u = \frac{m^2}{m_1m_2}u = \frac{m^2}{m(m_1 + m)}u,$$

即得

$$u'' = v'_1 = v_1,$$

故小车恰好追不上哥哥。

3-20 质量 m 的均匀圆环形光滑细管道放在光滑水平大桌面上, 管内有两个质量同为 m 的小球 A 和 B 位于一条直径的两端. 开始时管道静止, A 和 B 沿着切线方向有相同速度 v_0 , 如图 3-24 所示. A, B 间碰撞的恢复系数 $e = \sqrt{3}/3$, 试求:

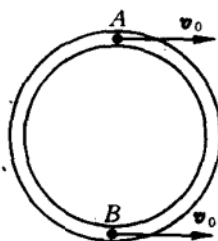


图 3-24

(1) A, B 第一次碰撞前瞬间的相对速度大小 u ;

(2) A, B 第二次碰撞前瞬间各自相对大桌面的速度大小 v' .

解 (1) A, B 第一次碰前瞬间, A, B 及环三者沿原 v_0 方向速度同为

$$v = \frac{2}{3}v_0.$$

此时 A, B 在垂直于 v_0 方向的速度大小相同, 记为 v_{\perp} , 则有

$$2 \times \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(3m)v^2 + 2 \times \frac{1}{2}mv_{\perp}^2,$$

解得

$$v_{\perp} = \frac{v_0}{\sqrt{3}}.$$

故 A 与 B 第一次碰前瞬间的相对速度大小为

$$u = 2v_{\perp} = \frac{2v_0}{\sqrt{3}}.$$

(2) 第一次碰后, A 与 B 间相对速度大小为

$$u' = eu = \frac{2}{3}v_0.$$

各自在垂直于 v_0 方向的速度大小同为

$$v'_{\perp} = \frac{u'}{2} = \frac{v_0}{3}.$$

第二次碰前瞬间, A, B 在环的左端, 此时三者沿 v_0 方向速度不变,

仍为 $v = \frac{2}{3}v_0$, 因此 A, B 各自相对于大桌面的速度大小同为

$$v' = \sqrt{v^2 + v'_{\perp}{}^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}v_0.$$

3-21 小球 A, B 在光滑水平面上沿同一直线朝着对方运动, A 球质量大于 B 球质量. 已知碰前两球动能相同, 碰后 A 球速度为零, B 球速度不为零, 试求 A 球质量与 B 球质量之比 γ .

解 A 球碰前速率记为 v_{A0} , B 球碰前、碰后速率分别记为 v_{B0} 和 v_B . B 球质量记为 m , A 球质量便为 γm . 由动能相等, 可得

$$v_{B0} = \sqrt{\gamma} \cdot v_{A0}, \quad (1)$$

由动量守恒式 $\gamma m v_{A0} - m v_{B0} = m v_B$,

可得

$$\gamma v_{A0} - v_{B0} = v_B. \quad (2)$$

碰后 B 球动能有如下限制

$$\frac{1}{2} m v_B^2 \leq 2 \times \frac{1}{2} m v_{B0}^2,$$

又可得

$$v_B \leq \sqrt{2} v_{B0}. \quad (3)$$

由②③式可得

$$\gamma v_{A0} \leq (\sqrt{2} + 1) v_{B0}, \quad (4)$$

将①式代入④, 可得

$$\gamma \leq (\sqrt{2} + 1)^2,$$

据题设, $\gamma > 1$, 故 γ 的可能值为

$$1 < \gamma \leq (\sqrt{2} + 1)^2.$$

3-22 长平板在水平方向上以恒定的速度 v_0 朝右运动, 板上方 H 高处有一小球自静止自由下落与平板碰撞. 已知球与平板间摩擦因数 $\mu = 0.1$, 小球反弹高度仍为 H , 试确定图 3-25 中小球反弹抛射角 ϕ 的正切 $\tan \phi$ 与 \sqrt{H} 之间的函数关系.

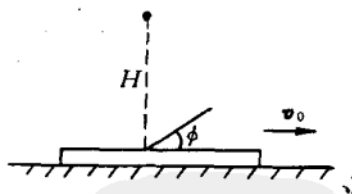


图 3-25

解 碰撞时间 Δt_N 内正碰力平均值记为 \bar{N} , 小球受摩擦力作用时间记为 Δt_f , 必有

$$\Delta t_f \leq \Delta t_N,$$

Δt_f 期间摩擦力平均值记为 \bar{f} . 碰撞前后小球竖直方向速度大小同为

$$v_{\perp} = \sqrt{2gH},$$

碰撞过程的冲量、动量关系为

$$\bar{N}\Delta t_N = 2mv_{\perp}, \quad \bar{f}\Delta t_f = mv_{\parallel},$$

式中 m 是小球质量, v_{\parallel} 是小球碰后的水平速度. 若是 $\Delta t_f = \Delta t_N$, 则可得

$$\bar{f} = \mu\bar{N}, \quad v_{\parallel} = 2\mu v_{\perp} = 2\mu\sqrt{2gH}.$$

真实的 v_{\parallel} 不可超过 v_0 , 即要求

$$2\mu v_{\perp} \leq v_0,$$

故 $\Delta t_f = \Delta t_N$ 的条件是

$$v_0 \geq 2\mu\sqrt{2gH}.$$

(1) 设 $v_0 \geq 2\mu\sqrt{2gH} = \frac{1}{5}\sqrt{2gH}$, 则有

$$\tan \phi = \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} = \frac{1}{2\mu} = 5.$$

(2) 设 $v_0 < 2\mu\sqrt{2gH} = \frac{1}{5}\sqrt{2gH}$, 此时 $\Delta t_f < \Delta t_N$, 有

$$v_{\parallel} = v_0, \quad \tan \phi = \frac{v_{\perp}}{v_0} = \frac{\sqrt{2gH}}{v_0}.$$

3-23 一斜面体静放在光滑水平地面上, 斜面倾角 $\theta = 15^\circ$. 如图 3-26 所示, 小球从静止自由下落到光滑斜面, 下落高度 $h = 1.60 \text{ m}$, 碰撞点距地面高度 $H = 1.00 \text{ m}$. 小球与斜面法向碰撞恢复系数 $e = 0.60$, 碰后斜面体不离地, 小球与斜面体的质量比 $m/M = 0.5$.

- (1) 求碰后小球反弹速度和斜面体获得的速度;
- (2) 求碰后小球最高位置相对原碰撞点的高度;
- (3) 判断小球碰后将落于斜面还是落于地面?

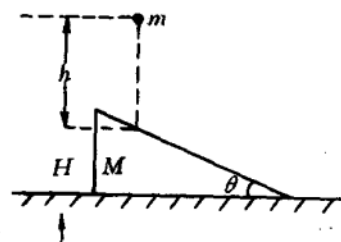


图 3-26

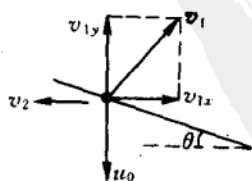


图 3-27

解 m 与 M 碰撞期间, M 与地面间有碰撞性法向作用, 故为三

体碰撞. 考虑到地面质量足够大, 碰后竖直方向速度为零, 水平方向与 M 无相互作用, 因此可以避开地面作用的讨论. 参考图 3-27, m 碰前竖直向下速度大小为

$$u_0 = \sqrt{2gh}.$$

碰后速度 v_1 有水平和竖直分量 v_{1x} 和 v_{1y} , M 碰后速度水平大小记为 v_2 . 为求这三个运动量, 需建三个方程, 其一为

$$mv_{1x} = Mv_2, \quad (1)$$

m 碰撞前后沿斜面方向速度不变, 可得方程

$$v_{1x} \cos \theta - v_{1y} \sin \theta = u_0 \sin \theta, \quad (2)$$

由 e 涉及的 m, M 法向碰撞关系, 可得方程

$$(v_{1x} \sin \theta + v_{1y} \cos \theta) + v_2 \sin \theta = eu_0 \cos \theta. \quad (3)$$

(1) 由①式得 $v_2 = \frac{m}{M}v_{1x}$, 代入③式, 再与②式联立消去 v_{1y} , 即可解得 v_{1x} , 继而可得 v_{1y} 与 v_2 , 它们分别为

$$v_{1x} = \frac{(1+e)\sin\theta\cos\theta}{1+\frac{m}{M}\sin^2\theta}u_0,$$

$$v_{1y} = \left[\frac{(1+e)\cos^2\theta}{1+\frac{m}{M}\sin^2\theta} - 1 \right] u_0,$$

$$v_2 = \frac{(1+e)\sin\theta\cos\theta}{\frac{M}{m} + \sin^2\theta}u_0.$$

将

$u_0 = \sqrt{2gh} = 5.6 \text{ m/s}$, $\theta = 15^\circ$, $e = 0.60$, $m/M = 0.5$
代入, 可算得

$$v_{1x} = 2.17 \text{ m/s}, \quad v_{1y} = 2.49 \text{ m/s}, \quad v_2 = 1.08 \text{ m/s}.$$

由 v_{1x}, v_{1y} 也可得

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = 3.30 \text{ m/s}.$$

(2) 碰后小球最高位置相对原碰撞点的高度为

$$h_{\max} = v_{1y}^2/2g = 0.32 \text{ m}.$$

(3) 设碰后小球将落于地面, 则其间历时

$$t = \frac{v_{1y}}{g} + \sqrt{2(h_{\max} + H)/g} = 0.773 \text{ s.}$$

此段时间内小球水平向右的位移和斜面体水平向左的位移量分别为

$$l_m = v_{1x}t = 1.68 \text{ m}, \quad l_M = v_2t = 0.835 \text{ m.}$$

如小球落于地面, 则要求

$$l_m + l_M > H \cot \theta = 3.73 \text{ m},$$

显然不成立, 故小球将落于斜面.

3-24 三个编号分别为 1, 2, 3 的相同匀质光滑小立方块, 按图 3-28 所示方式放在光滑水平面上, 直径与立方块边长相同的匀质光滑小圆柱块沿着图中对称方向以速度 u_0 运动过来, 接着便发生弹性碰撞. 已知圆柱块质量是每一立方块质量的 2 倍, 试求碰后各物块运动速度大小 v_1, v_2, v_3 和 u .

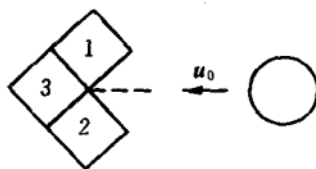


图 3-28

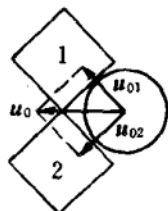


图 3-29

解 圆柱块先与立方块 1, 2 一起发生三体碰撞. 将 u_0 正交分解为图 3-29 所示的 u_{01} 和 u_{02} , 它们的大小为

$$u_{01} = u_{02} = \frac{\sqrt{2}}{2} u_0,$$

圆柱块与立方块 1 沿 u_{01} 方位线发生弹性碰撞, 很易求得碰后立方块 1 和圆柱块沿该方向的速度大小分别为

$$v_1 = \frac{4}{3} u_{01} = \frac{2\sqrt{2}}{3} u_0, \quad u'_1 = \frac{1}{3} u_{01} = \frac{\sqrt{2}}{6} u_0.$$

圆柱块与立方块 2 有相同的碰撞, 碰后立方块 2 和圆柱块沿 u_{02} 方向的速度大小分别为

$$v_2 = \frac{4}{3} u_{02} = \frac{2\sqrt{2}}{3} u_0, \quad u'_2 = \frac{1}{3} u_{02} = \frac{\sqrt{2}}{6} u_0.$$

碰后圆柱块合速度为

$$u' : \begin{cases} \text{大小: } u' = \frac{1}{3}u_0, \\ \text{方向: 与 } u_0 \text{ 同.} \end{cases}$$

圆柱块接着与立方块 3 沿 u' 方向发生弹性碰撞, 碰后各自沿 u' 方向的速度大小分别为

$$v_3 = \frac{4}{3}u' = \frac{4}{9}u_0, \quad u = \frac{1}{3}u' = \frac{1}{9}u_0.$$

3-25 在一水平面上有两根相互平行的固定导轨 M_1N_1 和 M_2N_2 , 质量 m_1 的物块 P_1 穿在 M_1N_1 上, 质量 m_2 的物块 P_2 穿在 M_2N_2 上, P_1 与 P_2 间用一根不可伸长的轻绳连接, 开始时绳处于松弛状态. 今使 P_1 获得沿导轨方向速度 v_0 , P_2 静止, 如图 3-30 所示. 设系

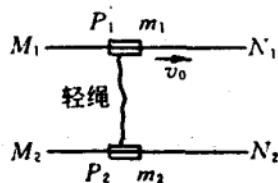


图 3-30

统处处无摩擦, P_1 运动一段时间后绳被拉直, 其内产生拉力, 同时使导轨与相应的物块间有力的作用, 这些力的作用时间 Δt 非常短. 试就下述两种情况, 计算 Δt 刚结束时 P_1 和 P_2 运动速度 u_1 和 u_2 .

- (1) 绳的作用不损耗系统动能;
- (2) 绳的作用使 P_1 和 P_2 沿绳长方向的速度相同.

解 系统沿导轨方向无外力, 该方向动量守恒式为

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_0.$$

- (1) 绳的作用不损耗系统动能(类弹性碰撞). 可补充方程

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_0^2.$$

得第 1 组解为

$$u_1 = v_0, \quad u_2 = 0,$$

对应的是绳伸直前的初态. 绳伸直后的末态不可能有此解, 否则绳将被拉长. 第 2 组解为

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_0, \quad u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_0,$$

对应真实的末态. 有三种可能的情况:

$m_1 > m_2$: $u_1 > 0$, $u_2 > u_1$ (绳又将松弛),

$m_1 = m_2$: $u_1 = 0$, $u_2 = v_0$ (P_1 与 P_2 交换速度),

$m_1 < m_2$: $u_1 < 0$, $u_2 > 0$ (P_1 左行, P_2 右行, 绳又将松弛).

(2) 绳的作用使 P_1, P_2 沿绳长方向的速度相同(类完全非弹性碰撞). 可补充方程

$$u_1 \cos \phi = u_2 \cos \phi,$$

ϕ 为拉直的绳与导轨间的夹角. 解得

$$u_1 = u_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0,$$

这一末态解意味着绳一旦伸直便不再回缩.

B 组

3-26 一架质量 $M = 810 \text{ kg}$ 的直升飞机, 靠螺旋桨的转动使 $S = 30 \text{ m}^2$ 面积内的空气以 v_0 速度向下运动, 从而使飞机悬停在空中. 已知空气密度 $\rho_0 = 1.20 \text{ kg/m}^3$, 求 v_0 大小, 并计算发动机的最小功率 p .

解 方法一 螺旋桨的作用是将几乎静止的空气向下加速到 v_0 . dt 时间内有 $\rho_0 S v_0 dt$ 的空气被加速到 v_0 , 这些空气的动量增量为

$$dp = \rho_0 S v_0^2 dt.$$

螺旋桨提供的冲量 dI 和螺旋桨对空气的作用力 F 分别为

$$dI = dp, \quad F = \frac{dI}{dt} = \rho_0 S v_0^2,$$

空气对螺旋桨的反作用力大小也为此值. 为使飞机悬停在空中, 要求

$$F = Mg,$$

即得
$$v_0 = \sqrt{\frac{Mg}{\rho_0 S}} = 14.9 \text{ m/s}.$$

dt 时间内, 质量为 $\rho_0 S v_0 dt$ 的空气获得动能

$$dE_k = \frac{1}{2} (\rho_0 S v_0 dt) v_0^2.$$

此动能来源于发动机做功, 即得

$$p = \frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2} \rho_0 S v_0^3 = 5.96 \times 10^4 \text{ W}.$$

方法二 利用公式 $p = F \cdot v$ 来计算发动机功率 p .

正在受力加速的空气,速度并非一致地为 v_0 ,而是从零到 v_0 连续分布,平均速度为 $v_0/2$.因此公式 $p = Fv$ 中的 v 不应取为 v_0 ,而应代之以 $v_0/2$,即有

$$p = F \frac{v_0}{2} = \frac{1}{2} \rho_0 S v_0^3.$$

3-27 内外半径几乎同为 R 的竖直固定圆环管,底部有一质量为 m 的小球,环内有根轻绳连接小球,绳的另一端从管的上方缺口水平引出,绳与管壁间摩擦可略.用力 F 将绳拉出,并保证小球在运动的过程中始终具有原始的速率 v_0 .设圆环管的外壁、内壁与小球的摩擦因数分别为 μ_1, μ_2 ,试求小球从图 3-31 所示位置到达最高位置的过程中,力 F 所作功 W .

解 小球动能不变,力 F 做功 W ,重力 mg 做功

$$W_g = -mg2R,$$

摩擦力 f 做功 W_f ,三者之和为零,即有

$$W = -W_g - W_f = 2mgR - W_f,$$

算出 W_f 即可求得 W .

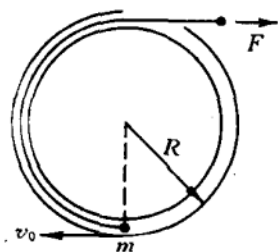


图 3-31

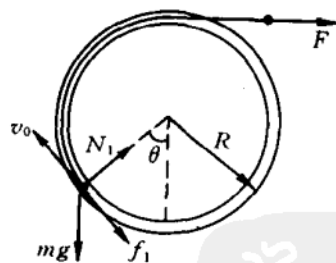


图 3-32

小球处于图 3-32 所示 θ 角位置时,外壁对小球的径向朝里作用力

$$N_1 = mg \cos \theta + m \frac{v_0^2}{R},$$

外壁对小球的摩擦力

$$f_1 = \mu_1 N = \mu_1 m \left(g \cos \theta + \frac{v_0^2}{R} \right),$$

N_1 随 θ 增大而减小, θ 超过 $\pi/2$ 时需作如下讨论.

(1) $v_0^2 \geq Rg$, 则 N_1 恒为非负, 小球只受到外壁摩擦力 f_1 , 如上所述.

(2) $v_0^2 < Rg$, 则在 $\pi/2 \sim \pi$ 范围内存在 θ_0 , 使得

$$\cos \theta_0 = -\frac{v_0^2}{Rg}, \quad \text{即} \quad \theta_0 = \pi - \arccos \frac{v_0^2}{Rg},$$

当 $\theta \leq \theta_0$ 时, N_1, f_1 如上所述. 当 $\theta > \theta_0$ 时, 外壁不再对小球施力, 改由内壁对小球施以径向朝外力 N_2 和摩擦力 f_2 , 各为

$$N_2 = -mg \cos \theta - m \frac{v_0^2}{R} > 0,$$

$$f_2 = \mu_2 N_2 = -\mu_2 m \left(g \cos \theta + \frac{v_0^2}{R} \right) > 0,$$

分两种情况计算 W .

(a) $v_0^2 \geq Rg$. 全过程中只有 f_1 , 得

$$W_f = -\int_0^\pi f_1 R d\theta = -\pi \mu_1 m v_0^2,$$

$$W = 2mgR + \pi \mu_1 m v_0^2.$$

(b) $v_0^2 < Rg$. 全过程中先有 f_1 , 后有 f_2 , 得

$$W_f = -\int_0^{\theta_0} f_1 R d\theta - \int_{\theta_0}^\pi f_2 R d\theta$$

$$= -(\mu_1 + \mu_2)mg \sin \theta_0 - [(\mu_1 + \mu_2)\theta_0 - \mu_2\pi]mv_0^2,$$

$$W = 2mgR + (\mu_1 + \mu_2)mg \sin \theta_0 + [(\mu_1 + \mu_2)\theta_0 - \mu_2\pi]mv_0^2,$$

其中 θ_0 已在前面给出, 据此补充算式:

$$\sin \theta_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{v_0^2}{Rg} \right)^2}.$$

3-28 在航天飞船上, 如图 3-33 所示, 有一个长 $l=20\text{ cm}$ 的圆筒绕着与筒的长度方向垂直的轴 MN 以恒定的角速度

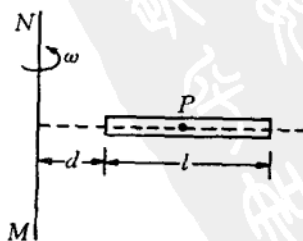


图 3-33

$\omega = \frac{10}{3} \pi \text{ s}^{-1}$ 旋转. 筒的近轴端与轴相距 $d = 10 \text{ cm}$, 筒内装满非常黏稠、密度 $\rho = 1.2 \text{ g/cm}^3$ 的液体. 有一个质量 $m' = 1.0 \text{ mg}$ 、密度 $\rho' = 1.5 \text{ g/cm}^3$ 的颗粒 P , 从圆筒中央位置静止释放, 试求 P 在到达筒端过程中克服液体黏性阻力所作功. 又问, 如果 P 的密度 $\rho'' = 1.0 \text{ g/cm}^3$, 其他条件不变, 则 P 在到达筒端过程中克服液体黏性阻力所作功又是多少?

解 要求计算的是在飞船系中液体黏性力 f 所作功. f 是真实力, 在所有参考系中度量相同, 因此可转移到圆筒系中度量. f 作功与 P 的位移有关, 飞船系中 P 的位移由两部分组成. 第一部分是 P 随圆筒绕轴转动的位移, 它与 f 垂直, 在飞船系中对应零功; 第二部分是 P 相对圆筒的径向位移 dr , 它与 f 反平行, 在飞船系中对应负功, 总量记为 W_f . dr 既然是 P 相对筒的位移, 便可转而在圆筒系中计算 W_f .

圆筒中 P 在径向上还受到惯性离心力 F_c 和液体给它的浮力 F_f , 液体非常黏稠, 意即 P 运动缓慢, 速度近似为零, 于是有

$$f = - (F_c + F_f),$$

所求克服 f 作功量 W 便为

$$W = -W_f = \int (F_c + F_f) \cdot dr.$$

据图 2-28 的解答, 可知 F_f 方向指向转轴, 大小等于 P 排除的液体应受的惯性离心力. 圆筒系中, 建立图 3-34 所示的径向 r 坐标轴. 两种情况下, P 在 r 处所受 F_c 大小同为

$$F_c = m' \omega^2 r,$$

所受 F_f 与 F_c 反向, 大小分别为

$$F_{f1} = \rho V' \omega^2 r = \frac{\rho}{\rho'} m' \omega^2 r < F_c,$$

$$F_{f2} = \rho V'' \omega^2 r = \frac{\rho}{\rho''} m' \omega^2 r > F_c.$$

第一种情况, P 将缓慢移动到筒的右端, 克服 f 作功量

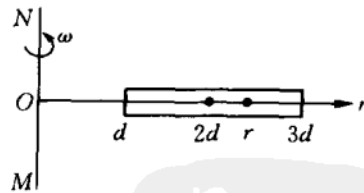


图 3-34

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \int_{2d}^{3d} (F_c - F_{f1}) dr = \int_{2d}^{3d} \left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) m' \omega^2 r dr \\
 &= \frac{5}{2} \left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) m' \omega^2 d^2 = 5.48 \times 10^{-7} \text{ J.}
 \end{aligned}$$

第二种情况, P 将缓慢移动到筒的左端, 克服 f 作功量

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \int_{2d}^d (F_c - F_{f2}) dr = -\frac{3}{2} \left(1 - \frac{\rho}{\rho''}\right) m' \omega^2 d^2 \\
 &= 3.29 \times 10^{-7} \text{ J.}
 \end{aligned}$$

3-29 两个核子之间的相互作用势能可表述为 $U(r) = -\frac{r_0}{r} U_0 e^{-r/r_0}$, 这便是汤川(Yukawa)势. 式中 r_0 ($r_0 = 1.5 \times 10^{-15} \text{ m}$), U_0 ($U_0 = 50 \text{ MeV}$) 均为常量.

(1) 给出两个核子之间相互作用力的表达式;

(2) 计算当 $r = 2r_0, 5r_0, 10r_0$ 时的作用力与 $r = r_0$ 时的作用力之比, 由此可见此种力的短程特征.

解 (1) 先作下述数学演算:

$$\frac{dU}{dr} = \frac{r_0}{r^2} U_0 e^{-r/r_0} + \frac{1}{r} U_0 e^{-r/r_0} = \left(\frac{r_0}{r} + 1\right) \frac{1}{r} U_0 e^{-r/r_0},$$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

两个核子间相互作用力 F 的三个分量为

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{dU}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = -\left(\frac{r_0}{r} + 1\right) \frac{1}{r^2} U_0 e^{-r/r_0} x,$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\left(\frac{r_0}{r} + 1\right) \frac{1}{r^2} U_0 e^{-r/r_0} y,$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -\left(\frac{r_0}{r} + 1\right) \frac{1}{r^2} U_0 e^{-r/r_0} z,$$

即得 $F = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} = -\left(\frac{r_0}{r} + 1\right) \frac{1}{r^2} U_0 e^{-r/r_0} \mathbf{r},$

这是一个相互吸引力.

(2) F 的大小为

$$F = \left(\frac{r_0}{r} + 1 \right) \frac{1}{r} U_0 e^{-r/r_0},$$

可算得

$$r=r_0 \text{ 时, } F_1 = \frac{2}{r_0} U_0 e^{-1}, \quad r=2r_0 \text{ 时, } F_2 = \frac{3}{4r_0} U_0 e^{-2}, \text{ 则}$$

$$F_2 : F_1 = \frac{3}{8} e^{-1} = 0.138;$$

$$r=5r_0 \text{ 时, } F_5 = \frac{6}{25r_0} U_0 e^{-5}, \text{ 则}$$

$$F_5 : F_1 = \frac{3}{25} e^{-4} = 2.20 \times 10^{-3};$$

$$r=10r_0 \text{ 时, } F_{10} = \frac{11}{100r_0} U_0 e^{-10}, \text{ 则}$$

$$F_{10} : F_1 = \frac{11}{200} e^{-9} = 6.79 \times 10^{-6}.$$

3-30 地面上有一固定的点电荷 A . A 的正上方有另一带电质点 B , 在重力和库仑斥力作用下, B 在 A 的正上方 H 到 $H/2$ 高度间往返运动, 试求 B 的最大运动速度 v_{\max} .

解 将 A 和 B 同号电荷量的绝对值分别记为 Q 和 q , B 的质量记为 m , B 在 H 和 $H/2$ 两高度间的能量关联式为

$$mg \frac{H}{2} = kQq \left(\frac{1}{H/2} - \frac{1}{H} \right),$$

可得
$$kQq = \frac{1}{2} mgH^2,$$

将力平衡点距地高度记为 h , 则有

$$mg = \frac{kQq}{h^2}, \quad h = \frac{H}{\sqrt{2}}.$$

在力平衡点 B 的速度最大, 由能量关联

$$mg(H-h) = kQq \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{H} \right) + \frac{1}{2} mv_{\max}^2,$$

解得
$$v_{\max} = (\sqrt{2} - 1) \sqrt{gH}.$$

3-31 将劲度系数为 k 、自由长度为 L 、质量为 m 的均匀柱形弹性体竖直朝下, 上端固定, 下端自由. 开始时弹性体处处无形变, 而后

在重力作用下各部位发生运动和形变,因为空气阻力等作用,最后弹性体处于静止状态,试求弹性体的弹性势能和重力势能的各自增量.

解 将弹性势能增加量记为 ΔE_{ps} , 重力势能增加量记为 ΔE_{pg} .

ΔE_{ps} 的计算如下:

弹性体处于原长时,将悬挂点记为 $x=0$,弹性体沿长度方向各部位均可用坐标量 $x(0 \leq x \leq L)$ 标记.取 x 到 $x+dx$ 段,劲度系数为

$$k_{dx} = \frac{L}{dx}k.$$

放手后处于平衡态,该小段两端受拉力为

$$\text{上端: } \frac{m}{L}[L - (x + dx)]g, \quad \text{下端: } \frac{m}{L}(L - x)g,$$

两者差无穷小量,可处理为两端各有 $\frac{m}{L}(L-x)g$ 拉力.该小段伸长量为

$$dl = \frac{m(L-x)g}{Lk_{dx}} = \frac{mg}{kL^2}(L-x)dx,$$

弹性体伸长量便是

$$\Delta L = \int_0^L dl = \frac{mg}{2k}.$$

x 到 $x+dx$ 段内弹性力处处相同,内含弹性势能

$$dE_{ps} = \frac{1}{2}k_{dx}(dl)^2 = \frac{m^2g^2}{2kL^3}(L-x)^2dx,$$

弹性体内含的弹性势能,即 ΔE_{ps} 为

$$\Delta E_{ps} = \int_0^L dE_{ps} = \frac{m^2g^2}{6k}.$$

$-\Delta E_{pg}$ (重力势能减少量) 的计算:

弹性体从 $x=0$ 到原 x 点之间的一段,质量为

$$m_x = \frac{x}{L}m,$$

伸长量则是

$$\Delta L_x = \int_0^x dl = \frac{mg}{2kL^2}(2L-x)x.$$

原 x 到 $x+dx$ 小段重力势能减少量为



$$-dE_{pg} = \left(\frac{dx}{L}m\right)g(\Delta L_x) = \frac{m^2g^2}{2L^3k}(2L-x)xdx,$$

积分得
$$-\Delta E_{pg} = \int_0^L (-dE_{pg}) = \frac{m^2g^2}{3k},$$

即有

$$\Delta E_{pg} = -\frac{m^2g^2}{3k}.$$

3-32 各边长为 l 的匀质立方体大木块,如图 3-35 所示,对半切成两块,将上表面为 AB_1CB_2 斜平面的一块留下放在水平面上,其质量为 $2m$. 沿 AB_1, AB_2, B_1C, B_2C 设置四根斜直细管道,质量均为 m 的两个小球同时从 A 端静止释放,分别沿 AB_1C, AB_2C 管道滑下,它们在 B_1, B_2 处可光滑迅速地拐弯.

(1) 设木块固定在水平面上,管道平直部分与各小球之间的摩擦因数同为 μ ,试问 μ 为何值,小球才能滑下? 并计算小球到达 C 处时的速度.

(2) 设木块与水平面光滑接触,管道内处处无摩擦,试求小球到达 C 处时相对地面的速度大小.

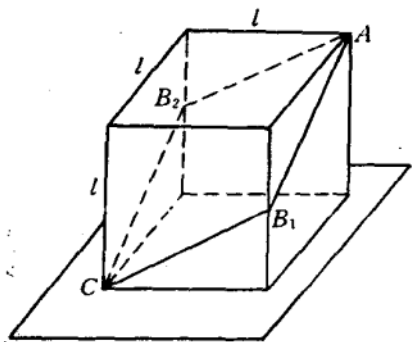


图 3-35

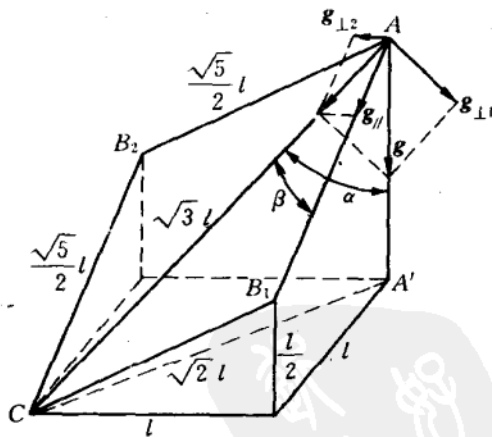


图 3-36

解 参考图 3-36 中的几何参量,有

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.$$

(1) 小球沿 AB_1 方向运动时, g 可分解为图示 $g_{//}, g_{\perp 1}, g_{\perp 2}$, 其中

$$g_{//} = g \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}g,$$

$g_{\perp 1}$ 与 $g_{\perp 2}$ 合成与小球运动方向垂直的 g_{\perp} (图中未画出), 必有

$$g_{\perp} = \sqrt{g^2 - g_{//}^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}g.$$

小球沿 AB_1 运动时, 加速度为

$$a = g_{//} - \mu g_{\perp} = (1 - 2\mu) \frac{1}{\sqrt{5}}g,$$

为使小球能下滑, 要求 $a > 0$, 即得 μ 的取值范围为

$$\mu < \frac{1}{2}.$$

小球沿 B_1C 管道运动时, 下滑加速度仍为上述 a 值. 小球所经总路程为

$$s = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{2}l = \sqrt{5}l,$$

到达 C 处时速度大小为

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2(1 - 2\mu)gl}.$$

(2) 木块与水平面光滑接触时, 木块会沿图中 CA' 方向运动, 速度记为 u . 因对称性, 小球无论沿哪一个管道运动, 相对于木块的速度可同记为 v' . 参考图 3-36 中的 α 和 β 角, v' 可分解为沿 $A'C$ 方向的分量 v'_{AC} 和垂直于 $A'C$ 方向的分量 v'_{\perp} , 大小各为

$$v'_{AC} = v' \cos \beta \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}v', \quad v'_{\perp} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}v'.$$

小球相对地面速度 v 也可分解为沿 $A'C$ 方向的分量 v_{AC} 和垂直于 $A'C$ 方向的分量 v_{\perp} , 大小各为

$$v_{AC} = v'_{AC} - u = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}v' - u, \quad v_{\perp} = v'_{\perp} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}v'.$$

$A'C$ 方向动量守恒式为

$$2mv_{A'C} = 2mu,$$

得

$$v' = \sqrt{10}u, \quad v_{A'C} = u, \quad v_{\perp} = \sqrt{6}u,$$

$$v^2 = v_{A'C}^2 + v_{\perp}^2 = 7u^2.$$

两小球到达 C 点时, 由机械能守恒式

$$2 \times \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(2m)u^2 = 2mgl,$$

可解得小球到 C 处时, 相对地面的速度大小为

$$v = \frac{\sqrt{7}}{2} \sqrt{gl}.$$

3-33 如图 3-37 所示, 质量 $2m$ 的小环套在水平光滑的固定细杆上, 并用长 l 的轻线与质量为 m 的小球相连. 今将轻线沿水平拉直, 使小球从与环等高处由静止释放, 试问当轻线与水平杆夹角为 θ 时线中张力 T 为多大?

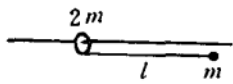


图 3-37

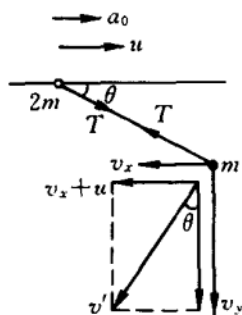


图 3-38

解 θ 角方位时运动量已在图 3-38 中给出, 有

$$v_x = 2u,$$

$$\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}(2m)u^2 = mgl \sin \theta,$$

$$v_x + u = v_y \tan \theta,$$

由此可得

$$v_x^2 = \frac{8gl \sin \theta}{3(2 + 3 \cot^2 \theta)}, \quad v_y = \frac{3}{2}v_x \cot \theta, \quad u = \frac{1}{2}v_x.$$

将小球相对小环速度记为 v' , 则有

$$v'^2 = (v_x + u)^2 + v_y^2 = \frac{6gl}{(2 + 3\cot^2\theta)\sin\theta}$$

小环向右加速度 a_0 与线中张力 T 的关系为

$$2ma_0 = T \cos\theta, \quad (1)$$

小球相对小环的动力学方程为

$$T + ma_0 \cos\theta - mg \sin\theta = \frac{mv'^2}{l}, \quad (2)$$

联立①②可解得

$$T = \frac{2(8 + \cos^2\theta)}{\sin\theta(2 + \cos^2\theta)(2 + 3\cot^2\theta)} mg.$$

3-34 在一个带有活塞的固定柱形汽缸内有一单原子分子沿着汽缸的长度方向往返运动, 它与汽缸左壁及活塞均作弹性正碰撞.

(1) 如图 3-39 所示, 设汽缸的初始长度为 l_0 , 活塞推进速度为常量 u , 分子从活塞近旁以 $v_0 \gg u$ 的初始速率朝汽缸左壁运动. 略去重力影响, 试确定分子与活塞多次碰撞后, 其速率 v 与汽缸长度 l 之间的关系.

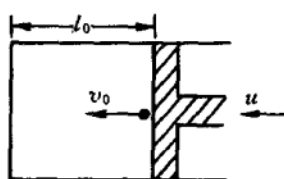


图 3-39

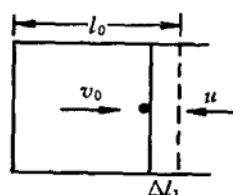


图 3-40

(2) 设汽缸截面积为 S , 则汽缸初始体积 $V_0 = S \cdot l_0$, 汽缸长度为 l 时的体积 $V = S \cdot l$. 再为该分子引入“温度”量 T , 使其正比于分子的动能, 试求 T 与 V 之间的关系.

解 (1) 分子经 Δt_1 时间与活塞第 1 次碰撞, 此时活塞推进 Δl_1 , 参考图 3-40, 应有

$$l_0 + (l_0 - \Delta l_1) = v_0 \Delta t_1, \quad \Delta l_1 = u \Delta t_1,$$

解得

$$\Delta t_1 = \frac{2l_0}{v_0 + u}, \quad \Delta l_1 = \frac{2l_0 u}{v_0 + u}.$$

以活塞为参考系,分子碰前、碰后速度大小同为 $v_0 + u$,故分子碰后相对固定汽缸的速率为

$$v_1 = v_0 + 2u.$$

第1次相碰后汽缸长度为

$$l_1 = l_0 - \Delta l_1 = \frac{l_0(v_0 - u)}{v_0 + u}.$$

分子又经 Δt_2 时间与活塞第2次相碰,此时活塞又推进了 Δl_2 路程,类似地可得

$$\Delta t_2 = \frac{2l_1}{v_0 + u}, \quad \Delta l_2 = \frac{2l_1 u}{v_0 + u} = \frac{2l_0(v_0 - u)u}{(v_0 + u)(v_0 + 3u)}.$$

第2次碰撞后分子运动速率和汽缸长度分别是

$$v_2 = v_1 + 2u = v_0 + 4u, \quad l_2 = l_1 - \Delta l_2 = \frac{l_0(v_0 - u)}{v_0 + 3u}.$$

第 k ($k \geq 2$) 次相碰后分子运动速率和汽缸长度分别是

$$v_k = v_0 + 2ku, \quad l_k = \frac{l_0(v_0 - u)}{v_0 + (2k - 1)u},$$

即得

$$l_k = \frac{l_0(v_0 - u)}{v_k - u}.$$

因 $v_0 \gg u, v_k \gg u$, 故有

$$l_k = \frac{l_0 v_0}{v_k}.$$

v_k 和 l_k 均可近似处理成连续变化,于是 v_k 和 l_k 即为题文所述 v 和 l , 可得它们之间的关系为

$$v = \frac{l_0 v_0}{l}.$$

(2) 由上式可得

$$\frac{1}{2}mv^2 = \left(\frac{l_0}{2}\right)^2 \frac{1}{2}mv_0^2,$$

其中 m 是分子质量. 因 $V_0 = Sl_0, V = Sl, T \propto \frac{1}{2}mv^2$, 得

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} = \frac{V_0^2}{V^2},$$

T 和 V 间关系即为

$$TV^2 = T_0V_0^2.$$

应当指出,温度是描述大量分子不规则热运动剧烈程度的,热运动分子因频繁地相互碰撞而使其速率快速地变化着,温度 T 用于描述分子运动的平均动能. 一个分子无所谓平均平动动能,温度也就失去原意. 本题设置的单分子模型严格来说不可代替理想气体的众多分子,但它确能象征性地说明理想气体受压缩的过程中分子热运动动能,乃至其温度何以得到增高. 此模型中分子只接受外界通过活塞做功方式传输的能量,故即为理想气体绝热过程中的功能转换关系.

3-35 光滑水平桌面上静止放置若干个相同的匀质光滑小球,打击其中某个球,与别的球逐个弹性碰撞经一闭合路线后又可停在原位置上,试问至少需放多少个球? 给出一种球的放置图.

解 如图 3-41 所示,球 1 以 v_0 速度与静止的球 2 弹性斜碰撞后,球 1 失去 v_0 的法向分量 $v_{0\perp}$,保留 v_0 的切向分量 $v_{0\parallel}$,球 2 则获得 $v_{0\perp}$. 可见碰后球 1 运动方向偏转 θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$),球 1、球 2 的运动方向相互垂直.

至少需要 5 个球,如图 3-42 放置. 令球 1 被打,与球 2,3,4 弹性斜碰撞后偏转角可超过 π ,最终与球 5 作弹性正碰撞后停留在原位.

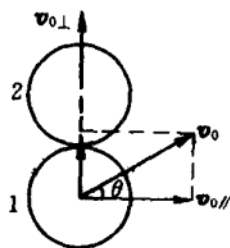


图 3-41

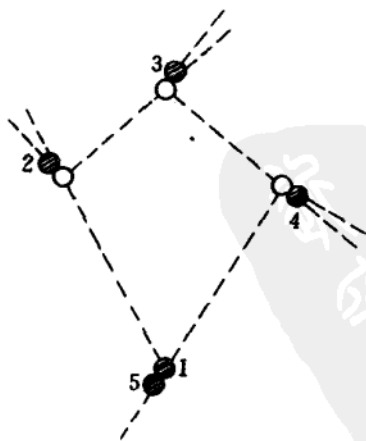


图 3-42

3-36 小球从水平地面上以初速 v_0 斜抛出去, 小球落地时在竖直方向上发生的非弹性碰撞恢复系数为 e , 小球与地面间的摩擦因数为 μ . 若要求小球第一次与地面碰撞后能竖直弹起, 试求小球可能达到的最大水平射程 s_{\max} .

解 小球与地面第一次碰撞中, 若地面摩擦力的作用可使小球水平分速度降为零, 小球便能竖直弹起. 显然小球水平速度不可太大, 这对抛射角 ϕ 是一种限制, 在这一限制内寻求 s_{\max} .

小球竖直方向初速度, 水平方向初速度及水平射程分别为

$$v_{\perp} = v_0 \sin \phi, \quad v_{\parallel} = v_0 \cos \phi, \quad s = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\phi.$$

落地后竖直方向反弹速度 $v'_{\perp} = ev_{\perp}$, 对应的法向冲量为

$$\bar{N}\Delta t_N = (1 + e)mv_0 \sin \phi,$$

其中 m 为小球质量. 小球受地面摩擦力提供的冲量大小为

$$\bar{f}\Delta t_f \leq \mu \bar{N}\Delta t_N = \mu(1 + e)mv_0 \sin \phi, \quad (1)$$

为使小球竖直弹起, 要求

$$\bar{f}\Delta t_f = mv_{\parallel} = mv_0 \cos \phi, \quad (2)$$

①②式联立后, 即要求

$$\tan \phi \geq \frac{1}{\mu(1 + e)}.$$

下面分两种情况讨论.

(1) 若 $\frac{1}{\mu(1 + e)} \leq 1$, 可取到 $\phi \geq 45^\circ$, 则得

$$s_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\phi \Big|_{\phi=45^\circ} = \frac{v_0^2}{g}.$$

(2) 若 $\frac{1}{\mu(1 + e)} > 1$, 则可取的抛射角范围为

$$\phi \geq \phi_0 = \arctan \frac{1}{\mu(1 + e)} > 45^\circ,$$

此时

$$\pi > 2\phi > \frac{\pi}{2}.$$

$\sin 2\phi$ 随 ϕ 增大而减小, 为使 $\sin 2\phi$ 取最大, 应取 2ϕ 为最小, 即取 $\phi = \phi_0$, 故有

$$s_{\max} = \frac{2v_0^2}{g} \sin \phi_0 \cos \phi_0 = \frac{2v_0^2 \tan \phi_0}{g \sqrt{1 + \tan^2 \phi_0}} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi_0}},$$

将 $\tan \phi_0 = \frac{1}{\mu(1+e)}$ 代入, 即得

$$s_{\max} = \frac{2v_0^2}{g} \frac{\mu(1+e)}{\mu^2(1+e)^2 + 1}$$

3-37 如图 3-43 所示, 质量 M 、倾角 ϕ 的斜面体静放在光滑水平面上, 质量 m 的小球以水平速度 v_0 与斜面发生碰撞, 设小球与斜面间无摩擦, 且碰撞无动能损失.

(1) 试求碰后小球沿斜面方向的速度 v_{\parallel} 和垂直于斜面方向速度 v_{\perp} , 以及斜面体沿地面运动速度 u ;

(2) M, m, ϕ 之间满足什么样的关系, 能使小球碰后速度竖直向上?

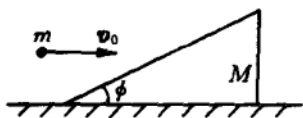


图 3-43

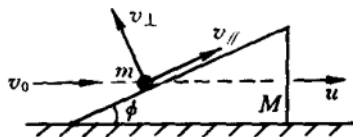


图 3-44

解 (1) 本题为地面也参与的三体碰撞, 但因竖直方向地面运动可略, 水平方向与斜面体间无摩擦力, 故可避开地面作用的讨论, 直接处理小球与斜面碰撞前后的力学关联.

参考图 3-44, 可建立方程组:

$$v_{\parallel} = v_0 \cos \phi,$$

$$mv_{\parallel} \cos \phi - mv_{\perp} \sin \phi + Mu = mv_0,$$

$$\frac{1}{2}m(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) + \frac{1}{2}Mu^2 = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

后两式改述成

$$Mu - mv_{\perp} \sin \phi = mv_0 \sin^2 \phi,$$

$$\frac{1}{2}mv_{\perp}^2 + \frac{1}{2}Mu^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \sin^2 \phi.$$

进而可得

$$u = \frac{m}{M}(v_0 \sin^2 \phi + v_{\perp} \sin \phi),$$

$$v_0^2 \sin^2 \phi = v_{\perp}^2 + \frac{M}{m} \left[\frac{m}{M}(v_0 \sin^2 \phi + v_{\perp} \sin \phi) \right]^2,$$

解得

$$v_{\perp} = \begin{cases} \frac{(M - m \sin^2 \phi)v_0 \sin \phi}{M + m \sin^2 \phi}, \\ -v_0 \sin \phi. \end{cases}$$

后一解将对应 $u=0$, 这是不可能的, 应舍去. 最后可得

$$v_{//} = v_0 \cos \phi, \quad v_{\perp} = \frac{M - m \sin^2 \phi}{M + m \sin^2 \phi} v_0 \sin \phi,$$

$$u = \frac{2m \sin^2 \phi}{M + m \sin^2 \phi} v_0.$$

据所得解, 小球与斜面体碰撞后, 在法向上的分离速度

$$v_{\perp} + u \sin \phi = \dots = v_0 \sin \phi,$$

即等于碰撞前的接近速度, 故法向恢复系数 $e=1$.

(2) 参考图 3-45, 若小球碰后速度竖直向上, 则有

$$\tan \phi = v_0 \cos \phi / v_{\perp},$$

即得 M, m, ϕ 间满足的关系为

$$\sin^2 \phi = \frac{M}{2M - m}, \quad M > m.$$

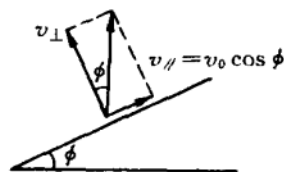


图 3-45

3-38 质量相同的两个小球 A 和 B 用长 L 轻绳连接, 开始时都静止在光滑的水平桌面边缘. 今使 B 球以 $v_0 = \sqrt{\frac{gL}{2\sqrt{2}}}$ 的初速水平抛出, 如图 3-46 所示. 设绳不损耗机械能, 试求绳伸直后很短时间内因绳的作用而使 A, B 各自具有的速度 v_A, v_B .

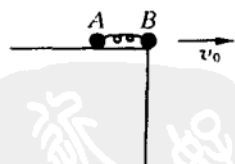


图 3-46

解 B 球抛出后, 水平、竖直方向位移量 x, y 与时间 t 的关系为

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2} g t^2,$$

t 时刻 B 球所在位置与 A 球相距

$$l = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{v_0^2 t^2 + \frac{1}{4} g^2 t^4},$$

l 随 t 单调增大. 设 t_0 时刻 $l=L$, 则可解得

$$t_0^2 = \frac{\sqrt{2} L}{g}.$$

此时

$$x = v_0 t_0 = \frac{L}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{1}{2} g t_0^2 = \frac{L}{\sqrt{2}}.$$

A, B 间相对位置如图 3-47 所示, 其中

$$\phi = 45^\circ.$$

轻绳开始处于伸直状态, B 的水平、竖直分速度为

$$v_x = v_0, \quad v_y = g t_0 = \sqrt{\sqrt{2} \cdot g L} = 2v_0.$$

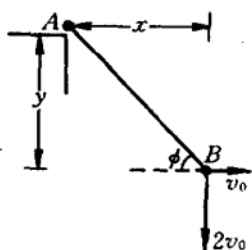


图 3-47

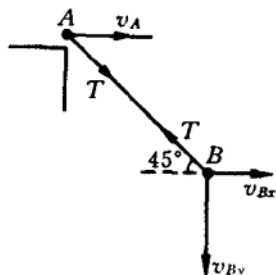


图 3-48

绳拉紧过程中绳内平均张力记为 \bar{T} , 经 Δt 作用时间后, A, B 各自具有的速度 v_A, v_B 如图 3-48 所示. 将 A, B 质量同记为 m , 则有

$$m v_A + m v_{Bx} = m v_0,$$

$$(\bar{T} \cos 45^\circ) \Delta t = m v_A,$$

$$(\bar{T} \sin 45^\circ) \Delta t = m 2v_0 - m v_{By},$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} m (v_{Bx}^2 + v_{By}^2) = \frac{1}{2} m [v_0^2 + (2v_0)^2].$$

可简化为

$$v_A + v_{Bx} = v_0, \quad (1)$$

$$v_A = 2v_0 - v_{By}, \quad (2)$$

$$v_A^2 + v_{Bx}^2 + v_{By}^2 = 5v_0^2, \quad (3)$$

由①②式得

$$v_A = v_0 - v_{Bx}, \quad v_{By} = v_0 + v_{Bx},$$

代入③式,可得

$$3v_{Bx}^2 = 3v_0^2.$$

其中一组解为

$$v_{Bx} = v_0, \quad v_{By} = 2v_0, \quad v_A = 0.$$

对应系统初态,略去.取另一组解

$$v_{Bx} = -v_0, \quad v_{By} = 0, \quad v_A = 2v_0.$$

这就是所求 v_A, v_B 的分量有述式.

注意, A 球还受到桌面支持力 N , 它对绳拉力 T 的竖直分量起平衡作用, 不可略. 因此, A, B 沿绳长方向并非简单地交换速度.



4 角动量定理 天体运动

A 组

4-1 如图 4-1 所示,质量 m 的小球某时刻具有水平朝右的速度 v , 小球相对图示长方形中 A, B, C 三个顶点的距离分别是 d_1, d_2, d_3 , 且有 $d_2^2 = d_1^2 + d_3^2$. 试求:

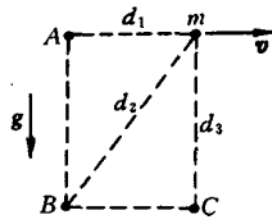


图 4-1

(1) 小球所受重力相对 A, B, C 的力矩;

(2) 小球相对 A, B, C 的角动量.

解 (1) 据力矩定义式 $M = r \times F$, 得

$$M_A: \begin{cases} \text{方向: 垂直图平面朝里,} \\ \text{大小: } M_A = mgd_1, \end{cases}$$

$$M_B = M_A,$$

$$M_C = 0.$$

(2) 据角动量定义式 $L = r \times mv$, 得

$$L_A = 0,$$

$$L_B: \begin{cases} \text{方向: 垂直图平面朝里,} \\ \text{大小: } L_B = mvd_3, \end{cases}$$

$$L_C = L_B.$$

4-2 质量 m_0 的质点固定不动, 在它的万有引力作用下, 质量 m 的质点作半径为 R 的圆轨道运动. 取圆周上 P 点为参考点, 如图 4-2 所示, 试求:

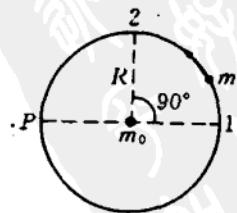


图 4-2

(1) 质点 m 在图中点 1 处所受引力的力矩 M_1 和质点 m 的角动量 L_1 ;

(2) 质点 m 在图中点 2 处所受引力的力矩

M_2 和质点 m 的角动量 L_2 .

解 (1) 在点 1 处, m 所受引力指向 P 点, 故

$$M_1 = 0.$$

速度切向, 大小为 $v_1 = \sqrt{Gm_0/R}$,

故角动量为 L_1 : $\begin{cases} \text{方向: 垂直图平面朝外,} \\ \text{大小: } L_1 = 2m\sqrt{Gm_0R}. \end{cases}$

(2) 在点 2 处, 可相应求得

$$M_2: \begin{cases} \text{方向: 垂直图平面朝里,} \\ \text{大小: } M_2 = Gm_0m/R. \end{cases}$$

速度切向, 大小同 v_1 , 角动量为

$$L_2: \begin{cases} \text{方向: 垂直图平面朝外,} \\ \text{大小: } L_2 = m\sqrt{Gm_0R}. \end{cases}$$

4-3 运动中的某质点, 在惯性系 S_1 中相对于任一参考点的角动量都守恒. 试问该质点在惯性系 S_2 中, 是否相对于任一参考点的角动量也都守恒? 为什么?

解 是. 此质点在惯性系 S_1 中, 相对任一参考点的角动量都守恒, 其受力 F 相对任一参考点的力矩必定都是零, 即有

$$M_1 = r_1 \times F = 0,$$

r_1 为任意矢量, 这仅在 $F=0$ 时, 才有可能. 该质点在惯性系 S_2 中, 因 $F=0$, 相对任一参考点的力矩仍都是零, 角动量也都是守恒的.

此质点在 S_1, S_2 系中均作匀速直线运动.

4-4 氢原子中的核近似处理为不动, 波尔假设电子绕核作圆轨道运动时, 相对于核的角动量大小必定是 $\hbar = h/2\pi$ (h 为普朗克常量) 的整数倍. 将电子质量记作 m , 试导出电子可取的圆轨道半径 r .

解 将半径 r 的圆运动速率记作 v , 由圆运动向心力公式和相对核的波尔角动量假设:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{ke^2}{r^2}, \quad mvr = n\hbar, \quad n = 1, 2, \dots,$$

可导得

$$r = \frac{n^2 \hbar^2}{kme^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

4-5 半径 R 的圆环固定在水平桌面上,不可伸长的柔软轻细绳全部缠绕在环外侧,绳末端系一质量 m 的小球,开始时小球紧贴圆环. $t=0$ 时刻使小球获得背离环心的水平速度 v ,于是细绳从环外侧打开. 设打开过程中细绳始终处于伸直状态,且与环间无相对滑动,小球与桌面间无摩擦.

(1) 计算 $t>0$ 时刻小球相对环心的角动量 L ;

(2) 利用小球的运动,验证质点角动量定理.

解 (1) 绳不可伸长且打开的绳段处于伸直状态,小球速度 v 必与绳长方向垂直,或者说 v 与绳的拉力 T 垂直,后者不作功. 小球与桌面无摩擦,动能不变,速率 v 恒定. 建立竖直向上的 z 轴,参照图 4-3 所示参量,小球相对环心 O 的角动量为

$$L = r \times mv = lmvk,$$

式中 l 为 t 时刻已打开的绳段长度. 在 $t+dt$ 时刻再打开的无穷小绳段长

$$dl = Rd\phi.$$

已打开的绳段旋转角速度为

$$\omega = \frac{d\phi}{dt},$$

小球速度

$$v = \omega l,$$

于是得

$$dl = Rvdt/l.$$

因 $t=0$ 时, $l=0$, 积分可得

$$l = \sqrt{2Rvt},$$

便有

$$L = mv \sqrt{2Rvt}k.$$

(2) 不难导得(参见数学补充知识附-25 题的解)小球运动加速度为

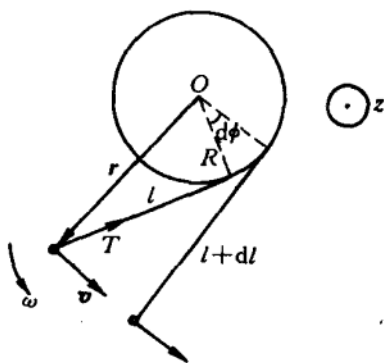


图 4-3

$$a: \begin{cases} \text{方向: 沿绳指向打开点,} \\ \text{大小: } a = v^2/l. \end{cases}$$

$$\text{绳拉力 } T = ma: \begin{cases} \text{方向: 沿绳指向打开点,} \\ \text{大小: } a = mv^2/l, \end{cases}$$

此力相对环心 O 的力矩为

$$M = r \times T = (mv^2 R/l)k.$$

$$\text{又 } \frac{dL}{dt} = mv \frac{dl}{dt}k,$$

将 $dl = Rvdt/l$ 代入, 即得

$$\frac{dL}{dt} = \frac{mv^2 R}{l}k = M.$$

这就验证了质点角动量定理.

4-6 如图 4-4 所示, 在半顶角为 ϕ 的倒立固定圆锥面光滑内壁上, 一小球在距锥顶 h_0 高度处作水平圆周运动.

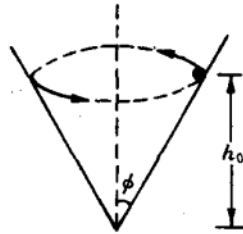


图 4-4

(1) 试求圆运动速率 v_0 ;

(2) 若在某时刻, 小球的速度不改变方向地从 v_0 增为 $\sqrt{1+\alpha}v_0$, 其中 $\alpha > 0$, 小球随即离开原轨道但不会离开锥面内壁, 试问小球是否会在距离锥顶某个 h 高度处作水平圆周运动?

(3) 接(2)问, 小球若不再作圆周运动, 试求运动过程中相对锥顶能达到的最大高度 h_{\max} 和最低高度 h_{\min} .

解 (1) v_0 对应的向心力由重力 mg 和锥面法向支持力 N 合成, 据此可解得

$$v_0 = \sqrt{gh_0}.$$

(2) 质量记为 m 的小球, 在沿锥面运动过程中机械能守恒. 若在 h 高处小球不再爬高或爬低, 速度记为 $v_{//}$, 则有

$$\frac{1}{2}mv_{//}^2 + mgh = \frac{1}{2}m(1+\alpha)v_0^2 + mgh_0. \quad (1)$$

小球所受重力 mg 和锥面支持力 N 之和相对锥顶力矩的竖直分量为零, 故小球相对锥顶角动量的竖直分量守恒. 若在 h 高度处小球不再

爬高或爬低,则有

$$mv_{//} h \tan \phi = m \sqrt{1 + \alpha} v_0 h_0 \tan \phi. \quad (2)$$

如果此时小球恰好作圆周运动,那么又需要满足类似 $v_0 = \sqrt{gh_0}$ 的下述关系式:

$$v_{//} = \sqrt{gh}. \quad (3)$$

两个未知量 $h, v_{//}$, 有三个方程, 一般不会有解. 或者将 α 也设成待确定的量, 将 $v_0 = \sqrt{gh_0}$ 代入后, 上述①②③式可化简成

$$v_{//}^2 + 2gh = (3 + \alpha)gh_0, \quad (4)$$

$$v_{//} h = \sqrt{1 + \alpha} \sqrt{gh_0} h, \quad (5)$$

$$v_{//} = \sqrt{gh}. \quad (6)$$

再将⑥代入④和⑤式, 可得

$$h = \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right) h_0, \quad h^3 = (1 + \alpha) h_0^3.$$

要求 $\alpha = 0$ 或 $\alpha = -8$,

这与题给 $\alpha > 0$ 矛盾, 故 h 无解.

(3) 删去(2)问解答中⑥式, 由④和⑤式消去 $v_{//}$, 相继可得

$$2h^3 + (1 + \alpha)h_0^3 = (3 + \alpha)h^2 h_0,$$

$$2h^3 - 2h^2 h_0 = (1 + \alpha)h^2 h_0 - (1 + \alpha)h_0^3,$$

$$2h^2(h - h_0) = (1 + \alpha)h_0(h + h_0)(h - h_0),$$

可分解为

$$2h^2 = (1 + \alpha)h_0(h + h_0), \quad h = h_0,$$

三个根分别为

$$h_1 = \frac{1 + \alpha}{4} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{8}{1 + \alpha}} \right] h_0 < 0 \quad (\text{舍去}),$$

$$h_{\max} = h_2 = \frac{1 + \alpha}{4} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{8}{1 + \alpha}} \right] h_0 > h_0,$$

$$h_{\min} = h_0.$$

(关于 h_{\max} 与 h_0 的大小关系, 可这样考虑: 若使 $h_{\max} > h_0$, 则 α 需取何

值? 于是有下述推演:

$$h_{\max} > h_0,$$

$$(1 + \alpha) \left[1 + \sqrt{1 + \frac{8}{1 + \alpha}} \right] > 4,$$

则

$$(1 + \alpha) \sqrt{1 + \frac{8}{1 + \alpha}} > 3 - \alpha.$$

若 $\alpha \geq 3$, 上式必成立;

若 $0 < \alpha < 3$, 将上式两边平方, 相继得

$$(1 + \alpha)^2 + 8(1 + \alpha) > (3 - \alpha)^2,$$

$$16\alpha > 0,$$

$$\alpha > 0.$$

可见 α 取任何正值, 均可使 $h_{\max} > h_0$.)

4-7 半径 R , 用轻辐条支撑的匀质圆环, 可绕中央水平轴无摩擦地转动, 开始时旋转角速度为 ω_0 , 如图 4-5 所示. 而后, 将转轴向下移动, 直到圆环重力全部都由水平地面支持力抵消为止, 并将转轴固定. 已知环与地面间的摩擦因数为 μ , 试问经多长时间停止转动?

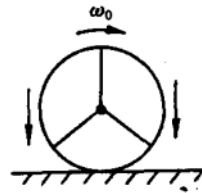


图 4-5

解 环的质量记为 m , 旋转角速度为 ω 时相对环心角动量为

$$L = mR^2\omega,$$

地面摩擦力相对环心的力矩为

$$M = -\mu mgR,$$

由角动量定理, 得

$$-\mu mgR = M = \frac{dL}{dt} = mR^2\beta.$$

据

$$\omega = \omega_0 + \beta t = \omega_0 - \mu \frac{g}{R} t,$$

环停止转动时 $\omega = 0$, 需经时间

$$t = \frac{\omega_0 R}{\mu g}.$$

4-8 设想全世界所有的人都在赤道上自西向东, 以接近百米世

界记录的速度跑步,试估算地球日长将增长还是缩短多少秒?已知质量 m 、半径 R 的匀质球绕其直径以角速度 ω 旋转时,相对球心的角动量为 $\frac{2}{5}mR^2\omega$.

解 世界人口数约算为 50 亿,人平均质量估算为 50 kg,总质量为

$$m = 2.5 \times 10^{11} \text{ kg}.$$

地球初始角速度 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$.

人跑步速度估算为 $v = 10 \text{ m/s}$,相对地球圆运动角速度为

$$\omega' = \frac{v'}{R_E} = \frac{10}{6.4 \times 10^6} \text{ s}^{-1},$$

地球新的自转角速度和周期分记为 ω_E 和 T_E ,则有

$$\omega_E = \frac{2\pi}{T_E},$$

人相对地心参考系的角速度为 $\omega_E + \omega'$,由角动量守恒,相继得

$$\frac{2}{5}m_E R_E^2 \omega_E + m R_E^2 (\omega_E + \omega') = \frac{2}{5}m_E R_E^2 \omega_0,$$

$$\frac{2}{5}m_E R_E^2 \omega_0 - \left(\frac{2}{5}m_E + m \right) R_E^2 \omega_E = m R_E^2 \omega',$$

近似有

$$m R_E^2 \omega' = \frac{2}{5}m_E R_E^2 (\omega_0 - \omega_E) = \frac{2}{5}m_E R_E^2 \frac{2\pi(T_E - T_0)}{T_0 T_E},$$

解得

$$T_E - T_0 = \frac{5}{4\pi} \frac{m}{m_E} \omega' T_0 T_E \approx \frac{5}{4\pi} \frac{m}{m_E} \omega' T_0^2.$$

将 m, ω' 和 $m_E = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}, T_0 = 24 \times 3600 \text{ s}$ 等数据代入后,可算得

$$T_0 - T_E \approx 2.0 \times 10^{-10} \text{ s},$$

即地球日长(自转周期)增长 $2.0 \times 10^{-10} \text{ s}$ (0.2 ns),这将是微不足道的变化.

4-9 如图 4-6 所示,光滑的水平大台面绕着过中央 O 点的竖直固定轴逆时针方向匀速旋转,角速度为 ω . 台面上的一个固定点 P 与 O 相距 b ,在 P 点连接长 l 的轻线,线的另一端系一小球 Q, Q 的稳定

平衡位置在 O 与 P 连线上. 设轻线始终处于伸直状态, 小球在台面上作圆弧运动, 引入从平衡位置逆时针方向取正的转角 θ , 试求角加速度 β 与角 θ 之间的关系.

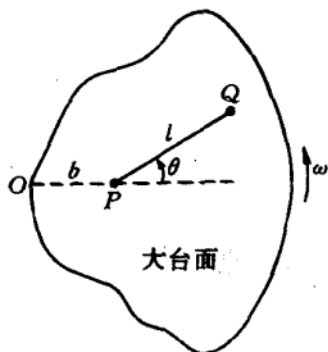


图 4-6

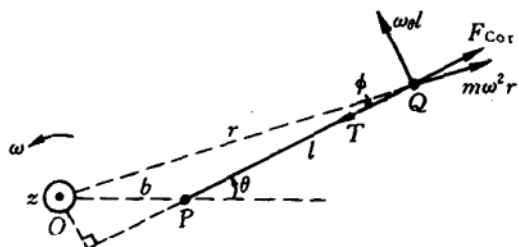


图 4-7

解 Q 质量记作 m , 在台面参考系中, 建立竖直向上的 z 轴. Q 受绳拉力 T 、科里奥利力 F_{Cor} 和惯性离心力 $m\omega^2 r$, 相对于 O 点, 前两个力的力矩为零, 惯性离心力力矩可表述为

$$\mathbf{M} = M_z \mathbf{k}, \quad M_z = -l(m\omega^2 r) \sin \phi,$$

r, ϕ 已在图 4-7 中标出. 参考图中所画辅助图形可得

$$r \sin \phi = b \sin \theta, \quad M_z = -m\omega^2 l b \sin \theta.$$

将 θ 角的角速度记作 ω_θ , 小球对 P 点角动量为

$$\mathbf{L} = L_z \mathbf{k}, \quad L_z = ml^2 \omega_\theta.$$

据角动量定理, 有

$$-m\omega^2 l b \sin \theta = M_z = \frac{dL_z}{dt} = ml^2 \beta,$$

即得 β - θ 的关系:

$$\beta + \frac{\omega^2 b}{l} \sin \theta = 0.$$

这一关系与单摆中 β - θ 关系的数学结构相同, 因此小球 Q 在台面上作类单摆运动.

4-10 质量同为 m 的两个小球系于一轻弹簧两端后, 放在光滑水平桌面上, 弹簧处于自由长度状态, 长为 a , 它的劲度系数为 k . 今使两球同时受水平冲量作用, 各获得与连线垂直的等值反向初速度,

如图 4-8 所示. 若在以后运动过程中弹簧可达的最大长度 $b=2a$, 试求两球初速度大小 v_0 .

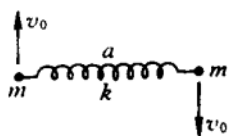


图 4-8

解 因对称, 弹簧中点 O 相对桌面不动.

开始时, 系统相对 O 点角动量大小为

$2mv_0 \cdot (a/2)$. 当弹簧达最大长度 $b=2a$ 时, 两球

均无径向速度, 各自速度大小记为 v , 则系统相对 O 点角动量大小为

$2mv \cdot (b/2)$. 因相对 O 点角动量守恒, 便有

$$m v b = m v_0 a,$$

两个状态间又有能量关联

$$2 \times \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k (b - a)^2 = 2 \times \frac{1}{2} m v_0^2,$$

将 $b=2a$ 代入, 可算得

$$v_0 = \sqrt{\frac{2k}{3m} a}.$$

4-11 光滑水平桌面上有一轻质细杆, 杆可绕着过中心 O 点的竖直轴无摩擦地转动. 有四个质量相同的小球, 其中两个分别固定在细杆两端 A_1 和 A_2 处, 另外两个穿在细杆上可沿杆无摩擦自由滑动, 它们的初始位置分别在 OA_1 和 OA_2 的中点. 今使系统在极短时间内获得绕 O 轴转动角速度, 而后让其自由运动, 可动小球将沿杆朝固定小球撞去, 试求动球相对细杆初始径向加速度与最后和固定球碰前瞬间径向加速度的比值.

解 将细杆长记为 $4b$, 各球

质量记为 m , 系统初始角速度记为 ω_0 , 而后动球与 O 点的距离为 r

时的系统角速度记为 ω , 动球径向速度记为 v_r , 径向加速度记为 a_r .

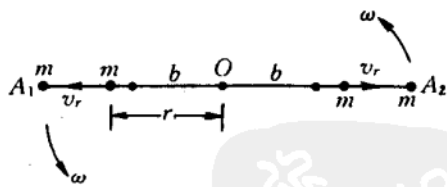


图 4-9

参考图 4-9, 考虑到 r 初始值为 b , 相对 O 点的角动量守恒式为

$$2m\omega r^2 + 2m\omega(2b)^2 = 2m\omega_0 b^2 + 2m\omega_0(2b)^2,$$

系统动能守恒式为

$$2m(v_r^2 + \omega^2 r^2) + 2m(\omega \cdot 2b)^2 = 2m\omega_0^2 b^2 + 2m(\omega_0 2b)^2,$$

联立后消去 ω , 可得

$$v_r^2 + \frac{25\omega_0^2 b^4}{r^2 + 4b^2} = 5\omega_0^2 b^2.$$

两边对 t 求导, 得

$$a_r = \frac{25\omega_0^2 b^4 r}{(r^2 + 4b^2)^2},$$

本题所求比值为

$$a_r|_{r=b} : a_r|_{r=2b} = 32 : 25.$$

4-12 (1) 若一个静止地处于平衡状态的物体所受 $N \geq 3$ 个外力中, 有 $N-1$ 个是共点力, 试证这全部 N 个力是共点力.

(2) 半径 R 的光滑圆环固定在某竖直平面内, 三边长分别为 $R, \sqrt{3}R, 2R$ 的匀质三角板放在环内, 静止地处于平衡状态, 如图 4-10 所示, 试求三角板 $2R$ 长边与圆环水平直径间的夹角 θ .

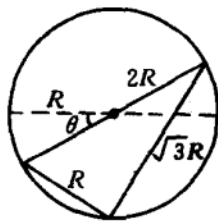


图 4-10

解 (1) 物体静止地处于平衡状态, 相对任何一个参考点的角动量都恒为零. 物体所受 $N \geq 3$ 个外力中, 已有 $N-1$ 个力交于一点 Q , 那么这 $N-1$ 个力中的每一个力相对 Q 点的力矩都是零. 如果第 N 个力不过 Q 点, 它相对 Q 点力矩便不为零, 与物体角动量恒为零矛盾. 所以此力必过 Q 点, 即 N 个力是共点力.

(2) 所给三角板是锐角为 30° 和 60° 的直角三角板, $2R$ 长边中点位于环心, 重心在环心与直角顶点连线上, 此连线与 $2R$ 长边夹角 60° , 与水平直径夹角为 $\theta + 60^\circ$. 三角板受四个外力, 其中由环施于三个顶点的力都过环心, 因此第四个力即重力也必过环心. 这要求环心与直角顶点连线垂直于水平直径, 即 $\theta + 60^\circ = 90^\circ$, 得

$$\theta = 30^\circ.$$

4-13 无动力航天器从远处以初速 v_0 朝质量 M 、半径 R 的行星飞去, 行星中心 O 到 v_0 方向线的距离称为瞄准距离, 记为 b . $b \leq R$ 时, 航天器可落到行星表面, 即被行星俘获. $b > R$ 时由于万有引力作用, 航天器也可能如图 4-11 所示, 落在行星表面, 被行星俘获.

(1) 计算航天器可被行星俘获的瞄准距离最大可取值 b_0 ;

(2) 初速率为 v_0 的航天器, 在远处只要瞄准正前方以行星中心

O 为心, b_0 为半径的几何靶上任何一点飞去, 都会被行星俘获, 故称 $S = \pi b_0^2$ 为行星的俘获截面, 试求 S .

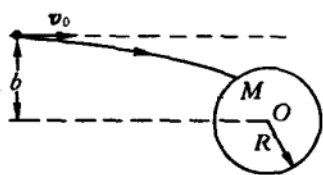


图 4-11

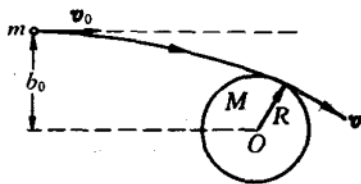


图 4-12

解 (1) b_0 对应的轨道必定恰好与行星表面相切, 如图 4-12 所示. 设航天器质量为 m , 据角动量和能量守恒式

$$Rmv = b_0mv_0,$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

可解得

$$b_0 = \sqrt{1 + 2G\frac{M}{Rv_0^2}}R.$$

$$(2) S = \pi b_0^2 = \pi \left(1 + 2G\frac{M}{Rv_0^2} \right) R^2.$$

可见, v_0 越大, S 越小, $v_0 \rightarrow \infty$ 时, $S \rightarrow \pi R^2$; v_0 越小, S 越大, $v_0 \rightarrow 0$ 时, $S \rightarrow \infty$.

4-14 从地球表面以第一宇宙速度朝着与竖直方向成 α 角的方向发射一物体, 忽略空气阻力和地球转动的影响, 试问物体能上升多高?

解 物体到最高 h 处, 速度 v 的方向必定与地球中心至物体的径矢垂直, 如图 4-13 所示. 可建立能量守恒关联和面积速度关联式

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r_h} = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{R},$$

$$\frac{1}{2}vr_h = \frac{1}{2}v_0 R \sin \alpha,$$

其中 $r_h = R + h$. 将 $v_0 = \sqrt{GM/R}$ 代入后, 可解得

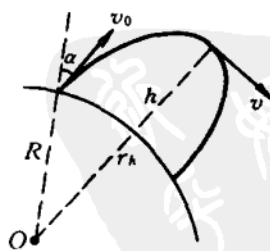


图 4-13

$$r_h = \begin{cases} R(1 - \cos \alpha), & (\text{舍去}) \\ R(1 + \cos \alpha), \end{cases}$$

即有 $h = r_h - R = R \cos \alpha$.

4-15 小行星 1 和 2 的质量相同, 小行星 1 绕太阳的轨道是一个圆. 小行星 2 绕太阳的轨道是一个非圆的椭圆. 已知圆半径恰好等于椭圆半长轴, 试比较两者轨道能量的大小.

解 将太阳和小行星的质量分别记为 M 和 m , 圆轨道半径记为 R , 椭圆轨道半长轴记为 a . 不难导得小行星 1 的动能、势能和总能量分别为

$$E_{k1} = \frac{GMm}{2R}, \quad E_{p1} = -\frac{GMm}{R}, \quad E_1 = E_{k1} + E_{p1}.$$

小行星 2 在短轴顶点处的速度可导得(过程略)为

$$v_2 = \sqrt{\frac{GM}{a}},$$

在该处的动能、势能和总能量分别为

$$E_{k2} = \frac{GMm}{2a}, \quad E_{p2} = -\frac{GMm}{a}, \quad E_2 = E_{k2} + E_{p2}.$$

因 $R=a$, 即有

$$E_1 = E_2.$$

(也可由 $E_2 = E_{k2} + E_{p2} = -\frac{GMm}{2a}$ 得知椭圆轨道能量与半短轴无关,

直接得 $E_1 = E_2$)

4-16 小行星抛物线轨道方程可表述成 $y^2 = 2px$, 太阳位于焦点 $x=p/2, y=0$ 处. 将太阳质量记为 M , 试求小行星在抛物线顶点处的速度 v_0 .

解 小行星的抛物线轨道能量为 0, 近日点处由

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{p/2} = 0,$$

即可求得

$$v_0 = \sqrt{\frac{4GM}{p}}.$$

4-17 某彗星受其他星体引力干扰后进入双曲线轨道, 已知双

曲线参数 a, b , 彗星和太阳质量分别记为 m 和 M , 试求彗星近日点速度 v_D 和轨道能量 E .

解 参考图 4-14, 太阳位于内焦点 $x=c, y=0$ 处, 其中

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

内焦点到渐近线的距离为 $h=b$.

彗星在近日点和无穷远两处的能量关联和角动量关联式分别为

$$\frac{1}{2}mv_D^2 - G\frac{Mm}{c-a} = \frac{1}{2}mv_\infty^2,$$

$$mv_D(c-a) = mv_\infty b,$$

可解得

$$v_D = \frac{b}{c-a} \sqrt{\frac{GM}{a}}, \quad v_\infty = \sqrt{\frac{GM}{a}}.$$

轨道能量便是

$$E = \frac{1}{2}mv_\infty^2 = \frac{GMm}{2a}.$$

4-18 1994 年 7 月 16 日 20 时 15 分, 哈勃望远镜观察到了休梅克-列维 9 号彗星的第一块碎片与木星相撞, 而后其他碎片相继与木星相撞, 直至 7 月 22 日 8 时 12 分才告结束.

在这之前彗星早已开始绕木星作椭圆运动, 据天文测量数据绘制的轨道如图 4-15 所示, 请估算彗星碎片刚进入木星大气层时相对木星的速度大小.

解 轨道图线中最远两点间距约 5.6 cm, 与此间距线垂直的最宽间距约 0.4 cm. 标度尺中 30×10^6 km 对应的长度约 3.5 cm, 因此得

$$a = 24 \times 10^6 \text{ km}, \quad b = 1.7 \times 10^6 \text{ km}.$$

彗星在 1993 年 7 月 1 日的位置和 1994 年 7 月 16 日与木星相撞位置间几乎相隔半个椭圆, 周期可估算为

$$T = 2 \text{ 年} = 730 \text{ 天}.$$

彗星碎片刚进入木星大气层时相对木星的速度, 可估算为椭圆轨道

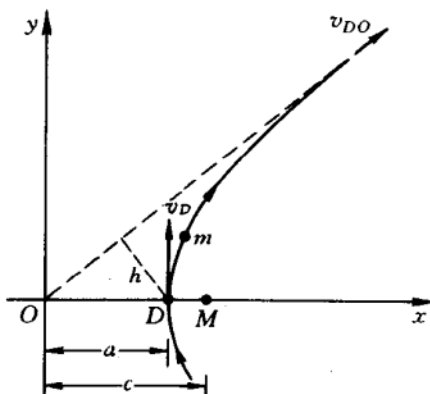


图 4-14

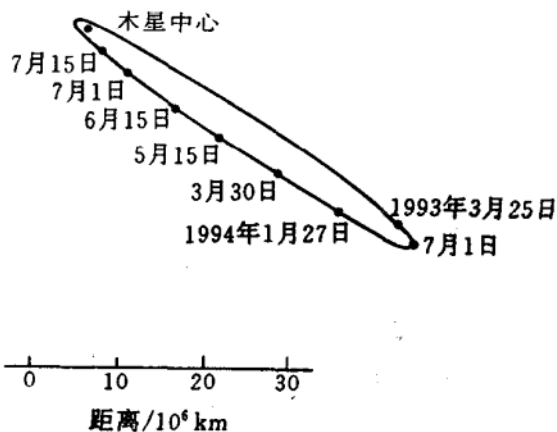


图 4-15

中近木星点的速度 v , 可求得(过程略)

$$v = \frac{a+c}{b} \sqrt{\frac{GM}{a}},$$

式中 M 为木星质量. 椭圆轨道周期公式为

$$T = 2\pi a \sqrt{a/GM},$$

又因 $b \ll a, c \approx a$, 得

$$v = \frac{4\pi a^2}{bT} = 67 \text{ km/s}.$$

4-19 质量分别为 m_1, m_2 的两个质点相距 l , 开始时均处于静止状态, 其间仅有万有引力相互作用.

(1) 假设 m_1 固定不动, m_2 将经多长时间后与 m_1 相碰?

(2) 假设 m_1 也可动, 两者将经多长时间后相碰?

解 (1) 假设 m_1 不动时, m_2 朝着 m_1 的直线段运动轨道可处理成半长轴 $a=l/2$, 半短轴 $b \rightarrow 0$ 的椭圆退化轨道. 利用椭圆轨道周期公式:

$$T = 2\pi a \sqrt{a/Gm_1},$$

两球相碰所需时间为

$$t_1 = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} l \sqrt{\frac{l}{2Gm_1}}.$$

(2) 假设 m_1 也可动时, m_2 相对 m_1 的椭圆轨道周期公式修正为

$$T' = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{G(m_1 + m_2)}},$$

两球相碰所需时间为

$$t' = \frac{T'}{2} = \frac{\pi l}{2} \sqrt{\frac{l}{2G(m_1 + m_2)}}.$$

4-20 一陨石在地表上方高为 $h = 4.2 \times 10^3$ km 的圆形轨道上绕地球运动,它突然与另一质量小得多的小陨石发生正碰,碰后损失掉 2% 的动能. 假定碰撞不改变大陨石的运动方向和质量,试求大陨石在碰撞后最接近地心的距离. 地球半径取为 $R = 6.4 \times 10^3$ km.

解 碰前陨石动能和陨石的总能量分别为

$$E_k = \frac{GMm}{2(R+h)}, \quad E = -\frac{GMm}{2(R+h)},$$

碰后总能量为

$$E' = E - 0.02E_k = -\frac{1.02GMm}{2(R+h)},$$

式中 M, m 分别为地球和陨石质量. 碰后陨石进入椭圆轨道, 半长轴记为 a , 则有(参阅 4-15 题解)

$$E' = -\frac{G(M+m)}{2a},$$

得

$$a = \frac{R+h}{1.02} < R+h,$$

故切入点必为椭圆远地点. 将椭圆半焦距记为 c , 即有

$$a + c = R + h, \quad c = \frac{0.02}{1.02}(R + h),$$

近地点与地心相距

$$r_{\min} = a - c = \frac{0.98}{1.02}(R + h) = 1.02 \times 10^4 \text{ km}.$$

4-21 行星绕着恒星 S 作圆周运动, 设 S 在很短时间内发生爆炸, 通过强辐射流使其质量减少为原质量 γ 倍, 行星随即进入椭圆轨道绕 S 运行, 试求椭圆偏心率 e .

解 若行星轨道转换点为图 4-16 中 1 处, 则对原轨道、新轨道分别有

$$\frac{mv^2}{a-c} = G \frac{M_0 m}{(a-c)^2}, \quad \frac{mv_1^2}{\rho_1} = G \frac{Mm}{(a-c)^2},$$

其中 m 为行星质量, M_0 为恒星原质量, M 为恒星新质量, $a-c$ 为原轨道半径, ρ_1 为椭圆在 1 处的曲率半径. 因 $v_1=v$, $M < M_0$, 得

$$\frac{b^2}{a} = \rho_1 > a-c, \quad \text{即} \quad ac > a^2 - b^2 = c^2.$$

这显然成立.

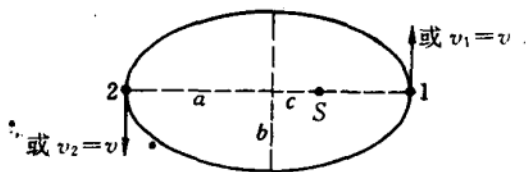


图 4-16

若行星轨道转换点为图 4-16 中 2 处, 相应有

$$\frac{mv^2}{a+c} = G \frac{M_0 m}{(a+c)^2}, \quad \frac{mv_2^2}{\rho_2} = G \frac{Mm}{(a+c)^2},$$

$$v_2 = v, \quad \rho_2 = \rho_1 = b^2/a, \quad M < M_0,$$

则得

$$\frac{b^2}{a} > a+c, \quad \text{即} \quad b^2 > a^2 + ac.$$

对于椭圆这是不可能的.

综上所述, 行星轨道转换点应在图中 1 处. 可解得

$$v^2 = \frac{GM_0}{a-c}, \quad v_1^2 = \frac{GM\rho_1}{(a-c)^2},$$

将 $v_1=v$, $\rho_1=b^2/a$, $M=\gamma M_0$ 代入, 得

$$a(a-c) = \gamma(a^2 - c^2),$$

继而算得偏心率为

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1-\gamma}{\gamma}.$$

4-22 宇宙飞船在距火星表面 H 高度处作匀速圆周运动, 火星半径记为 R . 设飞船在极短时间内向外侧点火喷气, 使其获得一径向速度, 大小为原速度 α 倍, α 很小, 飞船新轨道不会与火星表面交会.

飞船喷气质量可略。

- (1) 计算飞船新轨道近火星点高度 h_1 和远火星点高度 h_2 ;
- (2) 设飞船原来的运行速度大小为 v_0 , 计算新轨道运行周期 T .

解 向外侧点火, 新轨道如图 4-17 中实椭圆所示, 若改向内侧点火, 新轨道将如图中虚椭圆所示. 两个椭圆对称, h_1, h_2, T 都相同.

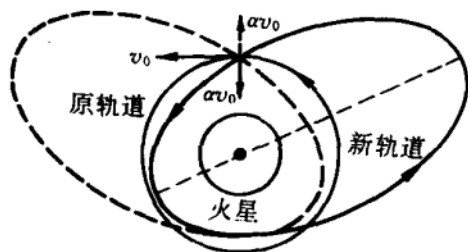


图 4-17

(1) 近火星点或远火星点状态与点火喷气后瞬间状态间的能量守恒和面积定律关联如下:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}m[v_0^2 + (\alpha v_0)^2] - G\frac{Mm}{r_0}, \quad (1)$$

$$vr = v_0 r_0, \quad (2)$$

各量意义按常规理解. 再补充原圆轨道向心力公式:

$$\frac{mv_0^2}{r_0} = \frac{GMm}{r_0^2}. \quad (3)$$

由①②两式消去 v , 再由③式消去 m , 两者联立, 再消去 GM , 可得

$$(1 - \alpha^2)r^2 - 2r_0 r + r_0^2 = 0,$$

解得

$$r_1 = \frac{r_0}{1 + \alpha} \quad (\text{近火星点}),$$

$$r_2 = \frac{r_0}{1 - \alpha} \quad (\text{远火星点}).$$

将 $r_0 = R + H$ 代入, 得

$$h_1 = r_1 - R = \frac{H - \alpha R}{1 + \alpha},$$

$$h_2 = r_2 - R = \frac{H + \alpha R}{1 - \alpha}.$$



(2) 原轨道周期

$$T_0 = \frac{2\pi r_0}{v_0},$$

新轨道半长轴 $a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = \frac{r_0}{1 - \alpha^2},$

由周期定律, 得 $\frac{a^3}{T^2} = \frac{r_0^3}{T_0^2},$

可解得 $T = \frac{2\pi(R + H)}{(1 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}v_0}.$

B 组

4-23 以圆锥摆摆球为讨论对象, 取悬挂点为参考点, 验证质点角动量定理.

解 参考图 4-18 所设参量, 据几何关系和圆运动向心力公式, 可算得摆球水平圆轨道半径和运动速率分别为

$$R = l \sin \theta, \quad v = \sqrt{\frac{gl}{\cos \theta}} \sin \theta.$$

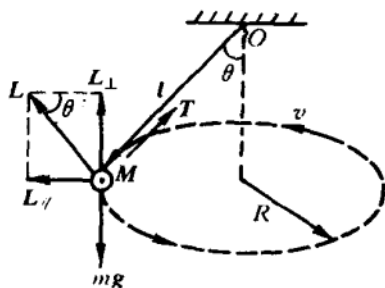


图 4-18

摆球受拉力 T 和重力 mg , 相对于 O 点力矩为

$$M = l \times mg: \begin{cases} \text{方向: 水平切向旋转,} \\ \text{大小: } M = Rmg. \end{cases}$$

摆球相对于 O 点角动量为

$$L = l \times mv, \quad L = lmv.$$

L 可分解成竖直向上的分量 L_{\perp} 与水平旋转的分量 L_{\parallel} , 且有

$$L_{\perp} = lmv \sin \theta = Rmv,$$

$$L_{\parallel} = lmv \cos \theta.$$

竖直方向上便有

$$M_{\perp} = 0, \quad \frac{dL_{\perp}}{dt} = 0.$$

水平方向上,参考图 4-19,在 $t \rightarrow t + dt$ 时间内,有

$$dL_{\parallel}: \begin{cases} \text{方向: 水平切向旋转,} \\ \text{大小: } dL_{\parallel} = Rmgdt. \end{cases}$$

dL_{\parallel} 的计算过程如下:

$$\begin{aligned} dL_{\parallel} &= lmv \cos \theta d\phi = lmv \cos \theta \frac{v}{R} dt \\ &= lm \left(\frac{gl}{\cos \theta} \sin^2 \theta \right) \cos \theta \frac{dt}{R} = Rmgdt, \end{aligned}$$

于是,水平方向有

$$M_{\parallel} = M: \begin{cases} \text{方向: 水平切向旋转,} \\ \text{大小: } M_{\parallel} = Rmg, \end{cases}$$

$$\frac{dL_{\parallel}}{dt}: \begin{cases} \text{方向: 水平切向旋转,} \\ \text{大小: } \frac{dL_{\parallel}}{dt} = Rmg, \end{cases}$$

与竖直方向联合,便有

$$M = \frac{dL}{dt}.$$

这就验证了质点角动量定理.

4-24 质量均为 m 的小球 1,2 用长 $4a$ 的柔软轻细线相连,同以速度 v 沿着与线垂直的方向在光滑水平面上运动,线处于伸直状态.在运动过程中,线上距离小球 1 为 a 的一点与固定在水平面上的竖直光滑细钉相遇,如图 4-20 所示.设在以后的运动过程中两球不相碰,试求:

- (1) 小球 1 与钉的最大距离(给出 4 位有效数字);
- (2) 线中的最小张力.

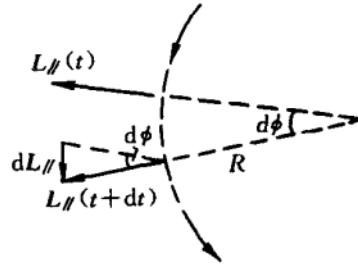


图 4-19

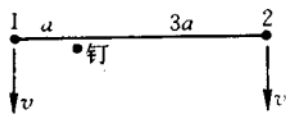


图 4-20

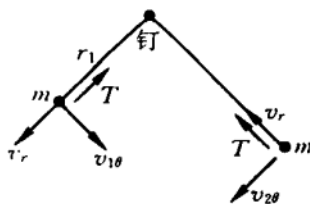


图 4-21

解 (1) 以钉为参考点, 球 1 和球 2 所受线中拉力的力矩都为零, 各自角动量守恒. 线与钉接触后的过程中, 球 1 和球 2 的速度 v_1, v_2 可分解为沿线长方向的径向分量 $v_{1r} = v_{2r} = v_r$ 和垂直于线长方向的角向分量 $v_{1\theta}, v_{2\theta}$, 如图 4-21 所示. 当球 1 与钉的距离 r_1 达最大时, 必有 $v_r = 0$, 得

$$mv_{1\theta} r_1 = mva, \quad (1)$$

$$mv_{2\theta}(4a - r_1) = mv3a, \quad (2)$$

过程中系统动能守恒, 即有

$$\frac{1}{2}mv_{1\theta}^2 + \frac{1}{2}mv_{2\theta}^2 = 2 \times \frac{1}{2}mv^2. \quad (3)$$

三个方程, 三个未知量 $v_{1\theta}, v_{2\theta}, r$ 均可解. 联立三式, 消去 $v_{1\theta}, v_{2\theta}$, 可得

$$\left(\frac{a}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4a - r_1}\right)^2 = 2.$$

引入参量 $x = \frac{r_1}{a}$ 后, 可展开成

$$x^4 - 8x^3 + 11x^2 + 4x - 8 = 0,$$

因式分解为

$$(x - 1)(x^3 - 7x^2 + 4x + 8) = 0,$$

数学解为

$$x = 1 \quad \text{即} \quad r_1 = a, \quad \text{对应初态, 舍去,}$$

$$x^3 - 7x^2 + 4x + 8 = 0.$$

引入函数

$$y = x^3 - 7x^2 + 4x + 8 = 0.$$

由

$$\begin{aligned} x: & -1, & 0, & 1, & 2, & 4, & 7, \\ y: & < 0, & > 0, & > 0, & < 0, & < 0, & > 0. \end{aligned}$$

可知, x 在 $(-1, 0)$, $(1, 2)$, $(4, 7)$ 三个区间内, 有 $y(x)=0$ 的三个根. 因 $a < r_1 \leq 4a$, 故可取的根在 $(1, 2)$ 区间内, 取二分逼近法, 用计算器可找到此根的数值为

$$x = 1.653, \quad \text{对应 } r_1 = 1.653a.$$

此 r_1 值即为小球 1 与钉的最大距离, 即

$$r_{1\max} = 1.653a.$$

(2) 参考图 4-21, 对球 1 有

$$T = -ma_r, \quad a_r = \frac{d^2 r_1}{dt^2} - r_1 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{dv_r}{dt} - \frac{v_{t\theta}^2}{r_1} = \frac{dv_r}{dt} - \frac{v^2 a^2}{r_1^3}.$$

将动能守恒式

$$\frac{1}{2}m(v_{1\theta}^2 + v_r^2) + \frac{1}{2}m(v_{2\theta}^2 + v_r^2) = 2 \times \frac{1}{2}mv^2,$$

和前面的角动量守恒式①②联立, 可得

$$\left(\frac{va}{r_1} \right)^2 + \left(\frac{3va}{4a - r_1} \right)^2 + 2v_r^2 = 2v^2,$$

两边对 t 求导, 得

$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{v^2 a^2}{2r_1^3} - \frac{9v^2 a^2}{2(4a - r_1)^3},$$

代入 T 表达式, 得

$$T = \frac{mv^2}{2a} \left[\frac{1}{x^3} + \frac{9}{(4-x)^3} \right], \quad x = \frac{r_1}{a}.$$

由
$$\frac{dT}{dx} = \frac{mv^2}{2a} \left[\frac{-3}{x^4} + \frac{27}{(4-x)^4} \right] = 0,$$

得
$$x = x_0 = \frac{4}{\sqrt{3} + 1}$$

时, T 有极值, 为

$$T_0 = \frac{(\sqrt{3} + 1)^4}{128} m \frac{v^2}{a} = 0.435 \frac{mv^2}{a}.$$

由 T 对 x 的二阶导数在 x_0 处取正(略), 可知 T_0 为极小值, 即有

$$T_{\min} = T_0 = \frac{(\sqrt{3} + 1)^4}{128} m \frac{v^2}{a} = 0.435 \frac{mv^2}{a}.$$

4-25 光滑水平面上有一小孔, 轻细线穿过小孔, 两者间无摩擦. 细线一端连接质量 m_1 的小球, 另一端在水平面下方连接质量 m_2 的小球, m_1 绕小孔作半径 r_0 的圆周运动时, m_2 恰好处于静止状态, 如图 4-22 所示.

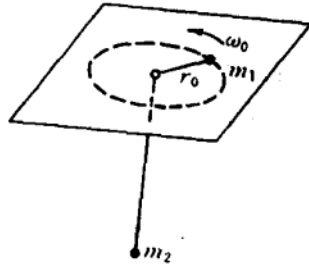


图 4-22

(1) 试求 m_1 圆运动角速度 ω_0 .

(2) 假设 m_1 有径向小扰动, m_2 有相应的竖直方向小扰动, 此时可将 m_1 与孔的距离表述成 $r(t) = r_0 + \delta(t)$, 其中 $\delta(t)$ 是随时间变化的小量. 试证 δ 随 t 的变化是简谐振动, 并导出振动角频率 ω_δ 与 ω_0 间的比值.

解 (1) 设线中张力为 T , 则有

$$m_2 g = T = m_1 \omega_0^2 r_0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{m_2 g}{m_1 r_0}}. \quad (1)$$

(2) 有扰动时, m_1 有径向速度 v_r 和角向速度 v_θ 之分, m_2 有竖直方向的速度, 可用 v_r 代表. 有

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega, \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}. \quad (2)$$

m_1 相对小孔角动量守恒, 有

$$m_1 r^2 \omega = m_1 r_0^2 \omega_0, \quad \text{即} \quad \omega = \frac{r_0^2 \omega_0}{r^2}, \quad (3)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{r_0^2 \omega_0}{r^2} \right) = -2 \frac{r_0^2 \omega_0}{r^3} \frac{dr}{dt} = -2 \frac{r_0^2 \omega_0}{r^3} v_r. \quad (4)$$

系统机械能守恒, 有

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_r^2 + \frac{1}{2} m_1 v_\theta^2 + m_2 g (r - r_0) = E_0, \quad (5)$$

式中 E_0 为恒量. 上式两边对 t 求导, 得

$$(m_1 + m_2) v_r \frac{dv_r}{dt} + m_1 v_\theta \frac{dv_\theta}{dt} + m_2 g \frac{dr}{dt} = 0, \quad (6)$$

将
$$\frac{dv_\theta}{dt} = \frac{dr}{dt}\omega + r \frac{d\omega}{dt} = v_r\omega - 2 \frac{r_0^2\omega_0}{r^2}v_r$$

等式代入⑥式,相继得

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2r}{dt^2} + m_1 r \omega \left(\omega - 2 \frac{r_0^2\omega_0}{r^2} \right) + m_2 g = 0, \quad (7)$$

将③代入⑦

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2r}{dt^2} - m_1 \frac{r_0^4\omega_0^2}{r^3} + m_2 g = 0, \quad (8)$$

将
$$r = r_0 + \delta, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2\delta}{dt^2}$$

代入⑧,相继得

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2\delta}{dt^2} - m_1 \frac{r_0^4\omega_0^2}{r_0^3} \left(1 + \frac{\delta}{r_0} \right)^{-3} + m_2 g = 0,$$

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2\delta}{dt^2} - m_1 r_0 \omega_0^2 \left(1 - 3 \frac{\delta}{r_0} \right) + m_2 g = 0, \quad (9)$$

将①式($m_2 g = m_1 r_0 \omega_0^2$)代入⑨得

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = - \frac{3m_1}{m_1 + m_2} \omega_0^2 \delta. \quad (10)$$

(⑩式与水平弹簧振子振动方程 $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$ 的数学结构一致) 故 δ 随时间 t 的变化是简谐振动, 振动角频率为

$$\omega_\delta = \sqrt{\frac{3m_1}{m_1 + m_2}} \omega_0,$$

ω_δ 与 ω_0 的比值为

$$\frac{\omega_\delta}{\omega_0} = \sqrt{\frac{3m_1}{m_1 + m_2}}.$$

4-26 约束在某参考系 xy 平面上运动的质点系, 任一时刻动量记作 \boldsymbol{p} . 试证:

(1) 若 $\boldsymbol{p} = 0$, 则该时刻质点系相对 xy 平面上所有参考点的角动量相同;

(2) 若 $\boldsymbol{p} \neq 0$, 则在 xy 平面上必有一条相应的瞬时直线, 使得该时刻质点系相对此直线上任何一点的角动量都是零.

证 在 xy 平面上任取一点 O , O 至各质点的径矢记作 r_i , 质点系相对 O 的角动量

$$L_O = \sum_i r_i \times p_i,$$

xy 平面上 O 至另一点 Q 的径矢记作 R_Q , 如图 4-23 所示, Q 至各质点的径矢便是 $r_i - R_Q$. 质点系相对于 Q 的角动量可表述成

$$L_Q = \sum_i (r_i - R_Q) \times p_i = \sum_i r_i \times p_i - R_Q \times \sum_i p_i,$$

即有

$$L_Q = L_O - R_Q \times p.$$

(1) 若 $p=0$, 则在该时刻对任何点 Q , 均有

$$L_Q = L_O,$$

即质点系相对 xy 平面上所有参考点的角动量相同.

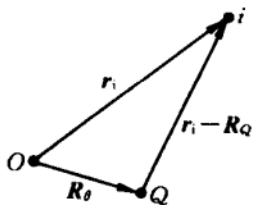


图 4-23

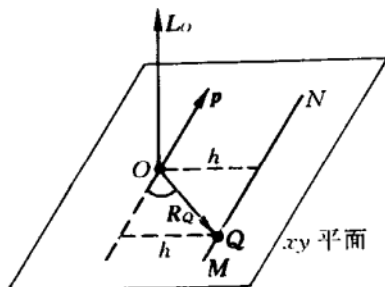


图 4-24

(2) 若 $p \neq 0$, 再分两种情况讨论.

设 $L_O = 0$, 则只要 $R_Q \parallel p$, 必有 $L_Q = 0$.

因此, 在 xy 平面上过 O 点作一与 p 平行的直线, 质点系相对此直线上任何一点 Q , 均有 $L_Q = 0$.

设 $L_O \neq 0$, 可将 p 和 L_O 都平移到 O 点后, 各自的方向取为图 4-24 所示. 此时总能在 xy 平面上找到一条与 p 平行的直线 MN , 使得 O 点到 MN 的距离为

$$h = L_O / p,$$

而且 O 点到 MN 上任何一点 Q 的径矢 R_Q 与 p 的矢积方向恰好与 L_O 方向一致, 则必有

$$R_Q \times p = L_O, \quad L_Q = 0,$$

直线 MN 即为所求瞬时直线.

4-27 如图 4-25 所示,在光滑的水平面上有一个固定的光滑大圆环,一个小的发射装置 P 紧贴在圆环的内侧,开始时处于静止状态,且头部朝右,尾部朝左. P 内存有许多微小的光滑珠子,其总质量与空的发射装置质量相同.某时刻起, P 从其尾部不断向后发射小珠子,因珠子微小,发射可以认为是连续进行的.设珠子射出时相对 P 的速率为常量,单位时间发射的珠子质量也是常量;再设当 P 的头部与前方运动过来的第一个珠子相遇时, P 刚好将其中的珠子全部发射完毕.



图 4-25

(1) 试求 P 在发射珠子的全过程中, P 相对圆环转过的总角度 θ (精确到 1°);

(2) 若 P 的头部遇到前方运动过来的珠子时,能将珠子吞入其中且不再发射,试确定 P 相对圆环的最终运动速率 v_e .

解 (1) 将空的发射装置质量和全部珠子质量同记为 m ,珠子相对于 P 的发射速率记为常量 u ,单位时间内射出的珠子质量记为 λu (λ 也是常量).再将开始发射时刻记为 $t=0$,全部发射完时刻记为 $t=T$,应有

$$m = \lambda u T.$$

某个时刻 t , P 和内含剩余珠子的总质量记为 M ,沿圆环内侧圆运动速率记为 v ,相对环心角动量便是

$$L = RMv,$$

其中 R 为环半径.经 dt 时间,发射了质量为 $-dM$ 的珠子,这些珠子相对环的反向速率为 $u-v$, P 的剩余质量为 $M+dM$,正向速率增为 $v+dv$,两者角动量之和为

$$\begin{aligned} L' &= R[(M+dM)(v+dv) - (-dM)(u-v)] \\ &= R(Mv + Mdv + udM). \end{aligned}$$

因角动量守恒,有 $L' = L$,

由此得 $Mdv + udM = 0$,

$$\text{积分} \quad \int_{2m}^M \frac{dM}{M} = - \int_0^v \frac{dv}{u}, \quad M = 2m - \lambda ut,$$

$$\text{可得} \quad v = u \ln \frac{2m}{2m - \lambda ut},$$

则末态 $v_e = u \ln 2 < u$.

从 $t=0$ 时刻到 $t=T$ 通过的总路程便为

$$l = u \int_0^T \left(\ln \frac{2m}{2m - \lambda ut} \right) dt = uT \ln 2m - u \int_0^T \ln(2m - \lambda ut) dt,$$

利用积分公式 $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$ 和 $m = \lambda u T$ 继而可得

$$l = uT \ln 2m - \frac{m}{\lambda} (\ln m + 2 \ln 2 - 1) = uT \ln \frac{e}{2}.$$

在 $t=0$ 时刻发射的第一个珠子, 经 T 时间沿反方向走过的路程为

$$l_0 = uT,$$

于是有

$$l = l_0 \ln \frac{e}{2}.$$

设 l 和 l_0 各自对应的圆心角为 θ 和 θ_0 , 据题设应有

$$\theta + \theta_0 = 2\pi, \quad \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{l}{l_0} = \ln \frac{e}{2},$$

消去 θ_0 , 解得

$$\theta = \frac{\ln \frac{e}{2}}{1 + \ln \frac{e}{2}} \cdot 2\pi = \frac{\ln \frac{e}{2}}{1 + \ln \frac{e}{2}} \cdot 360^\circ = 85^\circ,$$

即 P 在发射珠子的全过程中相对固定圆环转过的总角度为 85° .

(2) 系统角动量守恒, 任何时刻角动量都等于初始的零值. P 刚发射完珠子的系统状态如图 4-26 所示, 此时最后发射出的珠子相对圆环逆时针方向速度 $u - v_e = u \ln \frac{e}{2} > 0$, 而后 P 将陆续吞入前方的珠子并减速. 如果 P 在尚未吞完全部珠子前, 便与剩余的珠子一起顺时针方向运动, 那么系统的角动量必不为零, 这将与初始值为零矛盾. 可见 P 必能吞入全部珠子, 最后速率为

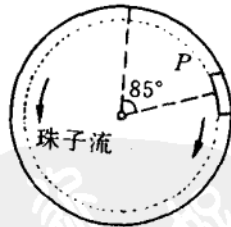


图 4-26

$$v_e = 0.$$

4-28 质量相同的两个小球 A_1 和 A_2 固连在一根轻杆两端, 轻杆中点 O 固连在一水平轻轴上, 轻杆与轻轴夹一锐角. 以 O 为原点

建立 $Oxyz$ 坐标系, 其中 x 轴位于轻轴的中央轴线上, 轻轴夹在两个固定的光滑水平轴承内, 可无摩擦地绕 x 轴旋转. 今使 A_1, A_2 分别在图 4-27 所示两个平行的竖直平面内作匀速圆周运动, 试问由 A_1, A_2 , 轻杆和轻轴构成的系统相对 O 点的角动量是否守恒? 若不守恒, 定性说明相对 O 点提供非零力矩的是哪些力?

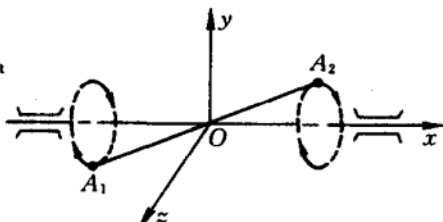


图 4-27

解 A_1, A_2 质量同记为 m , 速度各为 $v_1, v_2 (v_1 = -v_2)$, O 点至 A_1, A_2 的径矢分别为 $r_1, r_2 (r_1 = -r_2)$, 各自相对 O 点的角动量为

$$L_1 = r_1 \times mv_1,$$

$$L_2 = r_2 \times mv_2,$$

$$L_1 = L_2,$$

如图 4-28 所示. $\{A_1, A_2, \text{轻杆}, \text{轻轴}\}$ 系统相对 O 点的角动量

$$L = L_1 + L_2,$$

是一个在半顶角为 $\theta = \frac{\pi}{2} - \phi$

的圆锥面上匀速旋转的定长矢量, 此处 ϕ 是轻杆与轻轴所夹锐角. 可见, 系统相对 O 点的角动量不守恒.

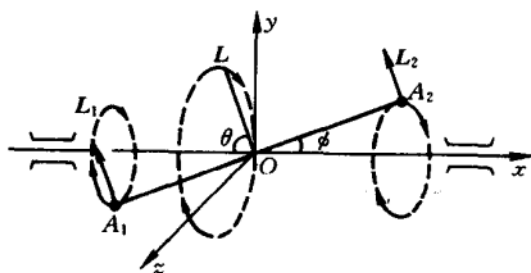


图 4-28



将 L 分解为 x 方向分量 L_x 和 yz 平面上的分量 L_{yz} , 即有

$$L = L_x + L_{yz},$$

其中 L_x 是一个恒定的矢量, L_{yz} 是一个在 yz 平面上旋转的定长矢量, 它的变化率 $\frac{dL_{yz}}{dt}$ 也是 yz 平面上的旋转定长矢量, 因此系统的外力矩必为

$$M = M_{yz} \quad (M_x = 0).$$

A_1, A_2 重力相对于 O 点力矩之和为零, 两个水平轴承必定提供两组 yz 平面上的支持力, 一则抵消 A_1, A_2 所受重力, 再则构成相对于 O 点的非零力矩 M_{yz} .

顺便一提, 若取 $\{A_1, A_2, \text{轻杆}\}$ 系统, L 仍如上述, 轻轴必须通过与轻杆连接的部位为轻杆提供两组 yz 平面上的作用力, 也是为抵消 A_1, A_2 所受重力和构成相对于 O 点的非零力矩 M_{yz} . 可见轻杆与轻轴连接部位不能是一个点, 至少应占据杆的一小段长度.

4-29 五根相同的匀质细杆, 用质量与线度均可忽略的光滑铰链两两首尾相接连成一个五边形, 将其一个顶点悬挂在天花板下, 试求平衡时此五边形的五个顶角. (给到 0.1°)

又若在最下边的细杆中点再悬挂一重物, 能否使五根细杆构成一个等腰三角形?

解 每根杆质量记为 m , 长记为 l , 因对称性, 只需求出图 4-29 中 ϕ_1 和 ϕ_2 两角即可.

由竖直及水平力平衡, 可得左侧两杆受力分布如图 4-29 所示. 据此可列出下述力矩平衡方程及几何关系式:

$$Tl \cos \phi_1 = mg \frac{l}{2} \sin \phi_1 + \frac{3}{2} mgl \sin \phi_1,$$

$$Tl \cos \phi_2 = mg \frac{l}{2} \sin \phi_2 + \frac{1}{2} mgl \sin \phi_2,$$

$$l \sin \phi_1 + l \sin \phi_2 = \frac{l}{2},$$

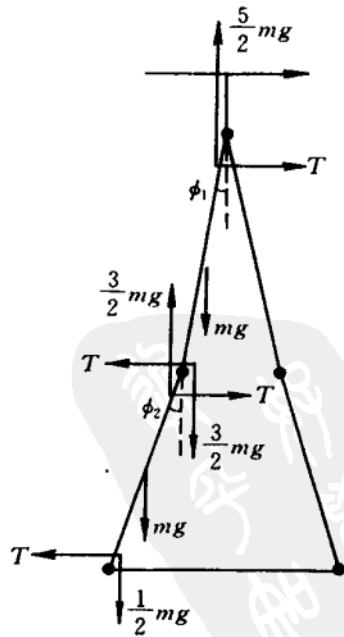


图 4-29

其中力 T 源于下边杆左下顶点铰链的水平推力. 上述三个方程可简化成

$$T = 2mg \tan \phi_1, \quad T = mg \tan \phi_2, \quad \sin \phi_1 + \sin \phi_2 = \frac{1}{2}.$$

由前两式得

$$\frac{\sin^2 \phi_2}{1 - \sin^2 \phi_2} = 4 \frac{\sin^2 \phi_1}{1 - \sin^2 \phi_1},$$

再将 $\sin \phi_2 = \frac{1}{2}(1 - 2 \sin \phi_1)$ 代入, 化简后可得

$$f(x) = 12x^4 - 12x^3 - 9x^2 - 4x + 1 = 0, \quad x = \sin \phi_1.$$

用计算器可在 $0 < x < 1$ 范围内逼近搜索出如下数值解:

$$x: \quad 0.1 \quad 0.2 \quad 0.15 \quad 0.17 \quad 0.171 \quad 0.1715$$

$$f(x): \quad 0.5 \quad -0.24 \quad 0.16 \quad 0.011 \quad 0.0031 \quad -0.00086$$

即取

$$\sin \phi_1 = x = 0.1715, \quad \sin \phi_2 = \frac{1}{2}(1 - 2 \sin \phi_1) = 0.3285,$$

因此 $\phi_1 = 9.9^\circ, \quad \phi_2 = 19.2^\circ.$

由此可算得

上方顶角为: $2\phi_1 = 19.8^\circ,$

侧方顶角为: $180^\circ + (\phi_2 - \phi_1) = 189.3^\circ,$

下方顶角为: $90^\circ - \phi_2 = 70.8^\circ.$

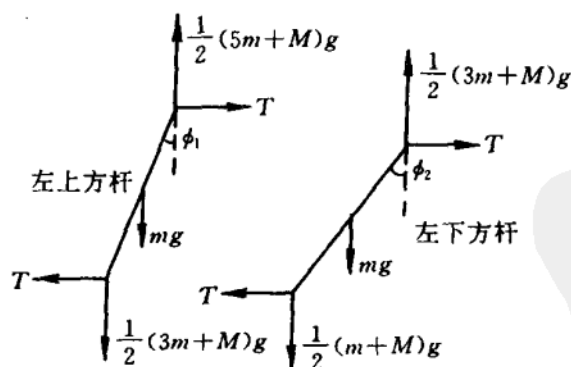


图 4-30

如若在下边水平杆的中点悬挂一个质量为 M 的重物, 那么左侧上方杆和左侧下方杆受力如图 4-30 所示, 可建立方程组:

$$Tl \cos \phi_1 = mg \frac{l}{2} \sin \phi_1 + \frac{1}{2}(3m + M)gl \sin \phi_1,$$

$$Tl \cos \phi_2 = mg \frac{l}{2} \sin \phi_2 + \frac{1}{2}(m + M)gl \sin \phi_2,$$

$$l \sin \phi_1 + l \sin \phi_2 = \frac{l}{2}.$$

化简为

$$2T = (4m + M)g \tan \phi_1,$$

$$2T = (2m + M)g \tan \phi_2,$$

$$\sin \phi_1 + \sin \phi_2 = \frac{1}{2},$$

解得

$$\tan \phi_1 = \frac{2m + M}{4m + M} \tan \phi_2.$$

无论 M 取何有限值, 恒有

$$\tan \phi_1 < \tan \phi_2, \quad \phi_1 < \phi_2,$$

可见无论在下边水平杆的中点悬挂多大质量的重物, 均不能使 $\phi_1 = \phi_2$, 即不能使五根杆构成一个等腰三角形.

4-30 在行星的轨道运动中引入隆格-楞茨(Runge-Lenz)矢量

$$\mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{L} - GMm \frac{\mathbf{r}}{r},$$

其中 M 是太阳质量, $m, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{L}$ 分别是行星的质量、相对于太阳的径矢、速度和角动量.

(1) 试证 \mathbf{B} 是个守恒量, 即必有 $\frac{d\mathbf{B}}{dt} = 0$;

(2) 试证 $B^2 = G^2 M^2 m^2 + \frac{2EL^2}{m}$;

(3) 试证 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \frac{L^2}{m} - GMmr$;

(4) 导出极坐标系中的行星轨道方程.

解 (1) $\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{L}) - \frac{d}{dt}\left(GMm - \frac{\mathbf{r}}{r}\right)$

$$= m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \frac{\mathbf{L}}{m} + \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} - GMm \left(\frac{1}{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{\mathbf{r}}{r^2} \frac{dr}{dt} \right)$$

$$= -G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + 0 + G \frac{Mm}{r^3} (r\mathbf{v}, \mathbf{r} - r^2 \mathbf{v})$$

$$= -G \frac{Mm}{r^3} [(r \cdot v)r - (r \cdot r)v] \\ + G \frac{Mm}{r^3} (rv_r r - r^2 v),$$

因 $(r \cdot v)r - (r \cdot r)v = rv_r r - r^2 v,$

即得 $\frac{dB}{dt} = 0.$

(2) 引入径向方向矢量 e_r 和角向方向矢量 e_θ , 有

$$B = (v_r e_r + v_\theta e_\theta) \times L - GMm e_r \\ = (-v_r L e_\theta + v_\theta L e_r) - GMm e_r, \\ B^2 = v_r^2 L^2 + v_\theta^2 L^2 - 2v_\theta LGMm + G^2 M^2 m^2 \\ = G^2 M^2 m^2 + v^2 L^2 - 2v_\theta LGMm.$$

由 $\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{r} = E, rmv_\theta = L$ 得

$$v^2 = 2G \frac{M}{r} + 2 \frac{E}{M}, \quad mv_\theta = \frac{L}{r},$$

代入 B^2 表达式, 即得

$$B^2 = G^2 M^2 m^2 + \frac{2EL^2}{m}.$$

(3) $r \cdot B = r \cdot (v \times L) - GMmr \cdot \frac{r}{r} = L \cdot (r \times v) - GMmr,$

即得 $r \cdot B = \frac{L^2}{m} - GMmr.$

(4) 由 $rB \cos \theta = r \cdot B = \frac{L^2}{m} - GMmr,$ 得

$$r = \frac{L^2}{GMm^2 + mB \cos \theta},$$

或表述成

$$\begin{cases} r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \\ p = \frac{L^2}{GMm^2}, \\ e = \frac{B}{GMm}. \end{cases}$$

这就是极坐标系中的行星轨道方程. 结合 B^2 表达式, 也可将 e 表述为



$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$$

4-31 质量为 M 的宇航站和质量为 m 的飞船对接后,一起沿半径为 nR 的圆形轨道绕地球运动,这里的 $n=1.25$, R 为地球的半径. 而后飞船又从宇航站沿运动方向发射出去,并沿某椭圆轨道飞行,其最远点到地心的距离为 $8nR$,宇航站的飞行轨道也变成一椭圆. 如果飞船绕地球运行一周后恰好与宇航站相遇,则质量比 m/M 应为何值?

解 参考图 4-31,其中画斜直线的区域为地球,外面是飞船离开后的宇航站椭圆轨道,再外面的是原圆轨道,最外面的是飞船椭圆轨道. 原圆轨道速度

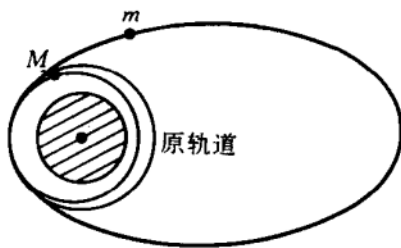


图 4-31

$$u = \sqrt{\frac{GM_E}{nR}},$$

M_E 为地球质量. 发射后,宇航站、飞船瞬间速度分别记为 V, v , 则有

$$(M + m)u = MV + mv,$$

质量比可表述为

$$\frac{m}{M} = \frac{V - u}{u - v}. \quad (1)$$

飞船新轨道参量为

$$a = \frac{1}{2}(nR + 8nR) = \frac{9}{2}nR, \quad c = a - nR = \frac{7}{2}nR,$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = 2\sqrt{2}nR.$$

v 为飞船新轨道近地点速度,故有

$$v = \frac{a + c}{b} \sqrt{\frac{GM_E}{a}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{GM_E}{nR}} = \frac{4}{3}u. \quad (2)$$

宇航站新轨道近地点与地心距离设为 r ,新轨道参量为

$$a = \frac{1}{2}(nR + r),$$

$$c = nR - a = \frac{1}{2}(nR - r),$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{nRr},$$

V 为宇航站新轨道远地点速度, 故有

$$V = \frac{a-c}{b} \sqrt{\frac{GM_E}{a}} = \sqrt{\frac{2r}{nR+r}} \sqrt{\frac{GM_E}{nR}} = \sqrt{\frac{2r}{nR+r}} u. \quad (3)$$

由①②③式可以看出, 若求得 r , 便可算出 m/M 值.

为求 r , 可利用开普勒第三定律. 飞船新轨道周期设为 t , 半长轴则为 $\frac{9}{2}nR$; 宇航站新轨道周期记为 T , 半长轴则为 $\frac{1}{2}(nR+r)$, 便有

$$\frac{(9nR)^3}{t^2} = \frac{(nR+r)^3}{T^2},$$

即为

$$\frac{(9nR)^3}{(nR+r)^3} = \frac{t^2}{T^2}.$$

飞船运行一周后恰好与宇航站相遇, 必有

$$t = kT, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

代入上式后, 便得

$$r = \frac{9 - k^{2/3}}{k^{2/3}} nR. \quad (4)$$

宇航站不能与地球相碰, 否则它不可能再与飞船相遇, 故要求

$$r > R,$$

代入④式, 并考虑到 $n=1.25$, 可得

$$k \leq 11.$$

由①②③④式, 可得

$$\frac{m}{M} = 3 - \sqrt{2(9 - k^{2/3})}.$$

要求 $\frac{m}{M} > 0$, 因此

$$k^{2/3} > \frac{9}{2} \rightarrow k \geq 10,$$

可见 k 可取值为 $k = 10$ 或 11 ,

即得 $\frac{m}{M} = 0.048$ 或 0.153 .

4-32 如图 4-32 所示, 质量 $m = 1.20 \times 10^4 \text{ kg}$ 的飞船在距月球表面高度 $h = 100 \text{ km}$ 处绕月球作圆运动. 飞船采用两种登月方式:

(1) 在 A 点向前短时间喷气,使飞船与月球相切地到达月球上的 B 点;(2) 在 A 点向外侧沿月球半径短时间喷气,使飞船与月球相切地到达月球上的 C 点. 设喷气相对原飞船的速度为 $u = 1.00 \times 10^4 \text{ m/s}$. 已知月球半径 $R = 1700 \text{ km}$, 月球表面重力加速度 $g = 1.700 \text{ m/s}^2$. 试求两种登月方式各需要的燃料质量.

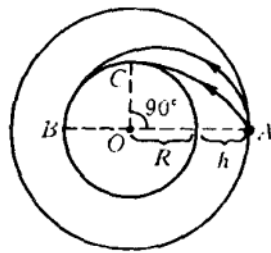


图 4-32

解 飞船喷气前在 A 点的速度为

$$v_0 = \sqrt{\frac{R^2 g}{R+h}} = 1652 \text{ m/s}.$$

(1) 向前喷气后,飞船在 A 点的速度降为 v_A ,方向不变. 飞船到达 B 点的速度记为 v_B ,有

$$mv_B R = mv_A (R+h),$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{Mm}{R+h} = \frac{1}{2}mv_B^2 - G\frac{Mm}{R},$$

可解得
$$v_A = \sqrt{\frac{2R^3 g}{(R+h)(2R+h)}} = 1628 \text{ m/s}.$$

喷气质量记为 Δm ,则有

$$(m - \Delta m)v_A + \Delta m(v_0 + u) = mv_0,$$

算得
$$\Delta m = \frac{m(v_0 - v_A)}{u + v_0 - v_A} = 28.7 \text{ kg}.$$

(2) 向外侧喷气后,飞船获得附加的指向月球中心的分速度,记为 Δv ,使得飞船在 A 点的速度大小为

$$v_A = \sqrt{v_0^2 + (\Delta v)^2}.$$

飞船到达 C 点的速度为 v_C ,有

$$mv_C R = mv_0 (R+h),$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{Mm}{R+h} = \frac{1}{2}mv_C^2 - G\frac{Mm}{R},$$

可解得
$$\Delta v = \frac{H}{R}v_0 = 97.2 \text{ m/s}.$$

喷气过程中径向动量守恒,有

$$(m - \Delta m)\Delta v = (\Delta m)u,$$

得

$$\Delta m = \frac{\Delta v}{u + \Delta v}m = 117 \text{ kg}.$$

4-33 一质量为 m 的行星绕质量为 M 的恒星运动,设在以恒星为球心的球形大空间范围内均匀地分布着稀薄的宇宙尘埃,尘埃的密度 ρ 很小,可以略去行星与尘埃之间的直接碰撞作用.

(1) 试问,对于角动量为 L 的圆形行星轨道,其半径 r_0 应满足什么方程(列出方程即可,不必求解)?

(2) 考虑对上述圆轨道稍有偏离的另一轨道,试解释它是一条作进动的椭圆轨道,进动方向与行星运行方向相反,并求出进动角速度(用 r_0 表述).

解 (1) 将行星轨道径矢记为 r ,行星受 r 半径球形空间尘埃的附加引力为

$$-G \frac{M' m}{r^3} r, \quad M' = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho,$$

于是行星的径向运动动力学方程为

$$-G \frac{M' m}{r^2} - mkr = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2), \quad k = \frac{4}{3} \pi G \rho,$$

式中 \ddot{r} 为 $\frac{d^2 r}{dt^2}$, $\dot{\theta}$ 为 $\frac{d\theta}{dt}$ 的简书. 上述方程也可通过

$$L = mr^2\dot{\theta},$$

简化成

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} - kr + \frac{L^2}{m^2 r^3}. \quad (1)$$

对于圆轨道, r 取为参量 r_0 , 且 $\ddot{r} = 0$, 即得 r_0 满足的方程为

$$\frac{L^2}{m^2 r_0^3} - \frac{GM}{r_0^2} - kr_0 = 0. \quad (2)$$

(2) 若行星轨道稍稍偏离圆轨道,可列出径矢 r 相对于 r_0 的小偏离量 δ 遵守的动力学微分方程. 将可发现,这是一个简谐振动方程,偏离量 δ 随时间作简谐振动,振动频率略大于圆运动角频率,故行星轨道大致是一个椭圆,但椭圆将以较慢的角速度作进动.

将径矢 r 相对 r_0 的小偏移量表述成

$$r(t) = r_0 + \delta(t), \quad \ddot{r}(t) = \ddot{\delta}(t),$$

代入前述 \ddot{r} 方程①, 可得

$$\ddot{\delta} = -\frac{GM}{r_0^2} \left(1 - 2 \frac{\delta}{r_0} \right) - k(r_0 + \delta) + \frac{L^2}{m^2 r_0^3} \left(1 - 3 \frac{\delta}{r_0} \right). \quad (3)$$

利用 r_0 满足的方程②, ③式可简化为

$$\ddot{\delta} + \left(\frac{L^2}{m^2 r_0^4} + 3k \right) \delta = 0,$$

这是简谐振动微分方程, δ 随时间 t 作简谐振动, 角频率为

$$\omega_r = \sqrt{\frac{L^2}{m^2 r_0^4} + 3k}.$$

注意到 r_0 圆运动角速度为

$$\omega_0 = \dot{\theta} = \frac{L}{mr_0^2}.$$

可见, 当无宇宙尘埃, 即当 $\rho=0$, 从而 $k=0$ 时, $\omega_r = \omega_0$. 这表明行星绕恒星运行一周, r 的振动也恰好经历一个周期, r 值取两次极大和两次极小, 行星的轨道是闭合的椭圆, 如图 4-33 所示. 当存在宇宙尘埃, 即当 $k>0$ 时, $\omega_r > \omega_0$. 这表明行星轨道不再是一个闭合的椭圆. 但因 k 很小, ω_r 仅稍大于 ω_0 , 两个 r 极大值之间经过的时间稍短于半个圆周角经过的时间, 于是形成图 4-34 所示的椭圆进动. 若行星逆时针方向运行, 则椭圆进动方向为顺时针. 将进动角速度记为 ω_p , 椭圆长轴进动一周所需时间(即进动周期)为

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}.$$

进动一周时, 圆运动与径向振动之间的相位差为 2π , 即有

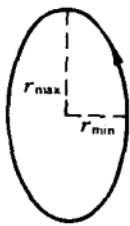


图 4-33

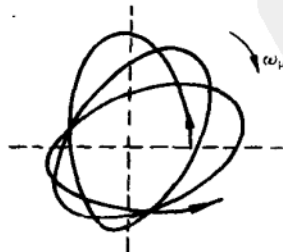


图 4-34

$$(\omega_r - \omega_0)T_p = 2\pi,$$

故进动角速度为

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T_p} = \omega_r - \omega_0 = \sqrt{\frac{L^2}{m^2 r_0^4} + 3k} - \frac{L}{mr_0^2},$$

展开后,略去高阶小量,得

$$\omega_p = \frac{3mkr_0^2}{2L}.$$

由

$$m\omega_0^2 r_0 = \frac{GMm}{r_0^2},$$

得

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0^3}}, \quad L = mr_0^2 \omega_0 = m \sqrt{GM r_0}.$$

与 k 表述式一起代入 ω_p 表述式,得

$$\omega_p = 2\pi\rho \sqrt{\frac{Gr_0^3}{M}}.$$



5 质心 刚体

A 组

5-1 用质量线密度为 λ 常量的细丝构成如图 5-1 所示的无限内接等边三角形框架, 最外层的等边三角形 ABC 的每边长为 a , 而在其三边中点内接各边长为 $a/2$ 的等边三角形, 再在上方各边长为 $a/2$ 的等边三角形三边中点内接边长为 $a/4$ 的等边三角形……

- (1) 试求框架的总质量 m ;
- (2) 确定框架质心 C_0 与顶点 A 之间的距离 h .

解 (1) 第一个大三角形的质量为 $3a\lambda$, 而后内接的三角形三边长度之和迭次减半, 质量也迭次减半, 故框架总质量为

$$m = 3a\lambda \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) = 6a\lambda.$$

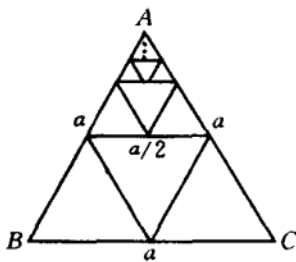


图 5-1

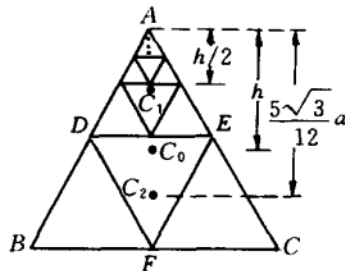


图 5-2

(2) 将原框架分解为图 5-2 所示两部分, 上方 $\triangle ADE$ 是一个与原框架同构的框架, 只是外三角形每边长由 a 减为 $a/2$, 故质量减为

$$m_1 = 6 \times \left(\frac{a}{2} \right) \lambda = 3a\lambda,$$

其质心 C_1 与顶点 A 的距离也必减为 $h/2$. 下方两个小三角形 $\triangle DBF$ 和 $\triangle EFC$ 的合质量为

$$m_2 = m - m_1 = 3a\lambda,$$

其质心 C_2 与原顶点 A 的距离不难算得(计算从略)为 $\frac{5\sqrt{3}}{12}a$. 据此可为 h 列出方程:

$$m_1\left(h - \frac{h}{2}\right) = m_2\left(\frac{5\sqrt{3}}{12}a - h\right),$$

即可算得

$$h = \frac{5\sqrt{3}}{18}a.$$

5-2 质量线密度相同,但长度未必相同的三根细棒若能构成一个三角形,试确定此三角形框架的质心位置.

解 质量线密度记为 λ , 三棒长分别记为 a, b, c . 三棒各自质心分别位于各棒中点, 质量分别为 $a\lambda, b\lambda, c\lambda$, 原系统质心即为此三质点系的质心. 三质点构成三角形如图 5-3 中虚线所示. $a\lambda$ 与 $b\lambda$ 的质心位于连线某点 P 处, 按图示应有

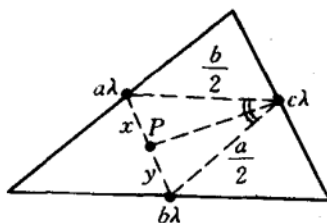


图 5-3

$$(a\lambda)x = (b\lambda)y,$$

得
$$x : y = b : a = \frac{1}{2}b : \frac{1}{2}a,$$

这表明 P 必在三质点构成的三角形顶角之角平分线上. P 与 $c\lambda$ 的质心即为系统质心, 后者必在此对角线上. 同样处理 $b\lambda$ 与 $c\lambda$ 的质心, 必在相应的另一条对角线上, 系统质心也必须在此对角线上.

综上所述, 原三角形框架的质心位于以各边中点构成的小三角形之内心上.

5-3 习题 1-29 中, 人的质量设为 M , 每个小球的质量同设为 m , 取较长的抛球游戏时间, 试求地面对人的平均支持力 \bar{N} .

解 对于人与 3 个小球构成的系统, 较长时间内质心在竖直方向的平均加速度为零, 竖直方向合外力平均值也必为零, 即得

$$\bar{N} = (M + 3m)g.$$

5-4 系统如图 5-4, 两小球 A, B 质量相同, 轻绳一半在水平桌面外, A 球与桌面间无摩擦. 将 B 球从静止自由释放后, 试问在 A 球

尚未离开桌面前 B 球能否已碰到桌子侧面?

解 不能. 若能, 则系统质心从初态位于桌边到终态位于桌内的过程中, 必有左向加速运动, 这需要有水平向左的外力, 但事实上并无此种外力.

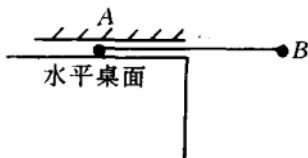


图 5-4

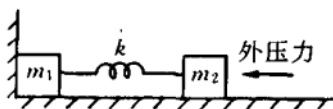


图 5-5

5-5 系统和有关参量均如图 5-5 所示, 开始时两个物块都处于静止状态, 轻弹簧压缩量为 l . 设水平地面光滑, 试求撤去右侧外压力后, 系统质心可获得的最大加速度值 a_{C0} 和最大速度值 v_{C0} .

解 撤去右侧外压力后, 水平方向系统受竖直墙的右向弹力 N , 质心获得右向加速度 a_C . 开始时, $N = N_0 = kl$ 为最大, 即得

$$a_{C0} = N_0 / (m_1 + m_2) = kl / (m_1 + m_2).$$

$N = 0$ 时, a_C 降为零, v_C 达极大值, 此时 m_1 尚未运动, m_2 有右向速度 v_2 . 可为 v_{C0}, v_2 建立方程组:

$$(m_1 + m_2)v_{C0} = m_2v_2,$$

$$\frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}kl^2,$$

解得

$$v_{C0} = \frac{\sqrt{km_2}l}{m_1 + m_2}.$$

5-6 各边长为 a 、质量为 M 的匀质刚性正方形细框架, 开始时静止在光滑水平桌面上, 框架右侧边中央有一小孔 P , 桌面上另有一个质量为 m 的小球以初速 v_0 从小孔 P 外射入.

设 v_0 的方向如图 5-6 所示, 小球与框架碰撞无摩擦且为弹性.

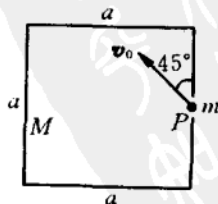


图 5-6

- (1) 证明小球仍能从小孔 P 射出框架;
- (2) 计算小球从射入到射出小孔全过程的时间及它相对于桌面的平均速度.

解 (1) 小球与框边的中点相碰, 将 v_0 分解为沿框边分量 $v_{//}$ 和垂直于框边分量 v_{\perp} . 碰撞无切向摩擦力, 小球保留 $v_{//}$; 法向弹性, 碰后小球离开框边相对的反弹速度大小仍为 v_{\perp} . 可见, 小球与框边的碰撞效果如同光的镜面反射. 每次碰撞效果都如此, 小球相对于框架将沿各边长为 $\sqrt{2}a/2$ 的小正方形路径又从小孔 P 射出.

(2) 小球相对于框架的速率恒为 v_0 , 射入到射出的全过程中相对框架经过的路程为 $2\sqrt{2}a$, 所经时间便是

$$t = 2\sqrt{2}a/v_0.$$

{小球、框架}系统质心速度恒为

$$v_c = \frac{m}{M+m} v_0,$$

开始时框架中心、系统质心和小球三者共线, 最后三者仍共线且排位顺序不变. 因此, 小球位移与系统质心位移相同, 小球平均速度与系统质心平均速度相同, 后者即为 v_c , 即得

$$\bar{v}_{\text{球}} = v_c = \frac{m}{M+m} v_0.$$

5-7 两个滑冰运动员质量都是 m , 在两条相距 l_0 的光滑平直冰道上均以 v_0 速率相向匀速滑行. 当他们之间的距离等于 l_0 时, 分别抓住一根长 l_0 的轻绳两端, 而后每人都用力缓慢往自己一边拉绳子, 直到两者相距 l 为止. 计算这一过程中两人拉力所作总功 W , 进而确认 W 等于系统动能增量 ΔE_k .

解 开始时每人作半径为 $r_0 = l_0/2$ 、速度为 v_0 的圆周运动, 相对于绳中点的系统角动量为 $2mv_0r_0$. 拉绳过程中位于绳中点的质心相对于地面始终静止, 质心系与地面系重合. 质心系中系统相对于质心角动量守恒, 拉绳过程缓慢, 每个运动员相对系统质心的运动都可近似为半径 r 逐渐缩短的圆运动. 圆运动半径 r 对应的速率记为 v , 则有

$$2mvr = 2mv_0r_0,$$

得 v 和绳中拉力 T 分别为

$$v = v_0r_0/r, \quad T = mv^2/r = mv_0^2r_0^2/r^3.$$

拉力做功为

$$\begin{aligned} W &= 2 \int_{r_0}^r dW = 2 \int_{r_0}^r T(-dr) \\ &= 2 \int_{r_0}^r -mv_0^2 r_0^2 \frac{dr}{r^3} = mv_0^2 \left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1 \right), \end{aligned}$$

将 $r_0=l_0/2, r=l/2$ 代入, 得

$$W = mv_0^2 \left(\frac{l_0^2}{l^2} - 1 \right).$$

其间系统动能增量为

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= 2 \left(\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 \right) = m(v^2 - v_0^2) \\ &= mv_0^2 \left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1 \right) = mv_0^2 \left(\frac{l_0^2}{l^2} - 1 \right), \end{aligned}$$

即有

$$W = \Delta E_k.$$

5-8 质量分别为 m_1, m_2 的两个质点构成的系统, 试证在其质心系中的动能为 $\frac{1}{2} \mu \Delta \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v}$, 式中 μ 为两质点的约化质量, $\Delta \mathbf{v}$ 为两质点的相对速度.

证 质心系中 m_1, m_2 速度分别记为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, 则由

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = 0,$$

可得

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = -\frac{m_1 + m_2}{m_2} \mathbf{v}_1.$$

系统动能

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{m_1^2}{m_2^2} v_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1(m_1 + m_2)}{m_2} v_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1(m_1 + m_2)}{m_2} \left(\frac{-m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1), \end{aligned}$$

即有

$$E_k = \frac{1}{2} \mu \Delta \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1.$$

5-9 内外半径几乎同为 R 、质量为 M 的匀质圆环, 静止地平放在水平桌面上, 环内某直径的两端各有一个质量同为 m 的静止小球. 今以一个恒定的水平力 F 拉环, F 方向线通过环心且与上述直径垂直, 如图 5-7 所示. 设系统处处无摩擦, 试求两小球相碰前瞬间的相对速度大小 v .

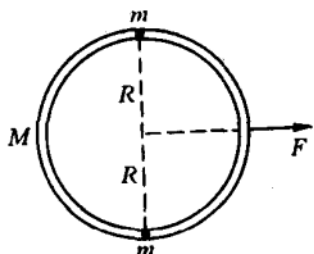


图 5-7

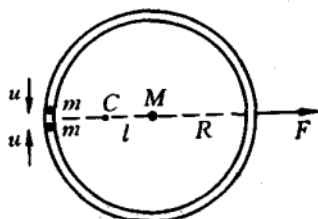


图 5-8

解 开始时系统质心 C 位于圆心处, 两小球相碰前瞬间 C 的位置如图 5-8 所示, 它与圆心相距

$$l = \frac{2m}{M + 2m}R.$$

质心系中 F 作用点的总位移大小即为 l , 作功量便是

$$W = Fl = \frac{2m}{M + 2m}FR,$$

此功等于系统相对质心动能增量 ΔE_k . 终态时, 圆环、两小球在 F 作用线方向上相对质心的速度为零, 两小球在 F 作用线垂直方向上有非零速度, 大小同记为 u , 即得

$$W = \Delta E_k = 2 \times \frac{1}{2}mu^2,$$

因此, 两小球相碰前的相对速度大小为

$$v = 2u = 2\sqrt{2FR/(M + 2m)}.$$

5-10 两个质量相同的小球 A, B , 用长为 $2a$ 的轻绳联结, 开始时 A, B 位于同一竖直线上, B 在 A 的下方, 相距为 a , 如图 5-9 所示. 今给 A 水平初速度 v_0 , 同时静止释放 B , 不计空气阻力, 且设绳一旦伸直便不再回缩. 试问经多长时间 t , A, B 恰好第一次位于同一水平线上?

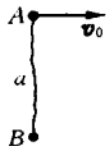


图 5-9

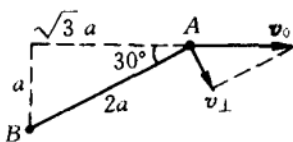


图 5-10

解 取开始时随 B 一起作自由落体运动的匀变速平动非惯性系 S , 在绳拉直前, B 相对 S 系静止, A 相对 S 系作水平匀速运动, 经过时间

$$t_1 = \sqrt{3}a/v_0,$$

A, B 间距达 $2a$, 绳伸直.

仍在 S 系中讨论, 由于绳的作用, 在绳拉直的短暂过程中, A, B 沿此时绳的长度方向的分速度 v_{AB} 相同, 其大小可由该方向上系统动量守恒解出 $v_{AB} = \frac{\sqrt{3}}{4}v_0$. A 在绳垂直方向上的分速度不变, 参照图 5-10, 有

$$v_{\perp} = v_0 \sin 30^\circ = \frac{1}{2}v_0,$$

以后系统质心在 S 系中将以 $v_c = v_{AB} + \frac{1}{2}v_{\perp}$ 作匀速直线运动. 在质心系中, 系统相对质心角动量守恒, A, B 各以 a 为半径, 以 $\frac{1}{2}v_{\perp}$ 为速度大小, 绕质心作匀速圆周运动. 转过 $30^\circ = \pi/6$ 需经时间

$$t_2 = \frac{a\pi/6}{v_{\perp}/2} = 2a\pi/3v_0,$$

此时 A, B 第一次位于同一水平线.

综上所述, 本题答案为

$$t = t_1 + t_2 = \left(\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} \right) \frac{a}{v_0}.$$

5-11 已知质量 m 、半径 R 的匀质薄球壳相对直径轴的转动惯量为 $\frac{2}{3}mR^2$, 试求质量 m , 内、外半径分别为 R_2, R_1 的匀质球壳相对直径轴的转动惯量 I .

解. 将球壳分解为一系列内、外半径分别记为 r 和 $r+dr$ 的匀

质薄球壳, 则所求为

$$I = \int_{R_2}^{R_1} \frac{2}{3} \left[\frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi(R_1^3 - R_2^3)} m \right] r^2 = \frac{2}{5} m \frac{R_1^5 - R_2^5}{R_1^3 - R_2^3}.$$

5-12 图 5-11 所示的钟摆, 由质量 m 、长 l 的匀质细杆和质量 M 、半径 R 的匀质圆盘连接而成, 试求相对于过摆端 A 并且与摆面垂直的轴的转动惯量 I_A .

解 I_A 由细杆相对于 A 轴的转动惯量 I_1 和圆盘相对于 A 轴的转动惯量 I_2 相加而成, 结合平行轴定理, 有

$$\begin{aligned} I_A &= I_1 + I_2 = \frac{1}{3}ml^2 + \left[\frac{1}{2}MR^2 + M(R+l)^2 \right] \\ &= \frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{2}M[R^2 + 2(R+l)^2]. \end{aligned}$$

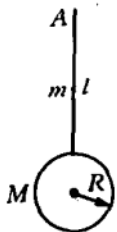


图 5-11

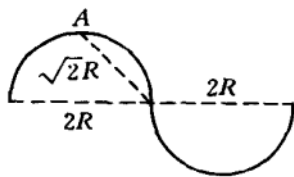


图 5-12

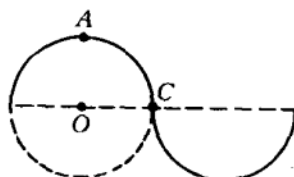


图 5-13

5-13 质量 m 的匀质细丝, 在平面上弯曲成两个半径同为 R 的相切连接的半圆形状, 如图 5-12 所示. 过左半圆周中点 A 设置垂直于圆平面的转轴, 试求弯曲细丝相对此转轴的转动惯量 I_A .

解 如图 5-13 所示, 设置过质心 C 的转轴, 转动惯量记为 I_C , 则有

$$I_A = I_C + m(\sqrt{2}R)^2,$$

右半圆绕 C 轴转动惯量与图中左半虚圆绕 C 轴转动惯量相同, 因此 I_C 等于左侧整圆相对 C 轴转动惯量 I'_C . I'_C 与左侧整圆相对过圆心 O 转轴的转动惯量 I_0 之间的关系可由平行轴定理确定, 从而有

$$I_C = I'_C = I_0 + mR^2 = 2mR^2,$$

于是有

$$I_A = 4mR^2.$$

5-14 两根质量同为 m 、长度同为 l 的匀质细杆,对称地联结成丁字尺,如图 5-14 所示.过尺上每一点部位设置垂直于尺平面的转轴,转动惯量记为 I ,试求 I_{\min} 和 I_{\max} .

解 丁字尺质心 C 位于两杆联结点下方 $l/4$ 处,或者说 C 与各杆中心相距都是 $l/4$,即有

$$\begin{aligned} I_{\min} = I_C &= \left[\frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 \right] + \left[\frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 \right] \\ &= \frac{7}{24}ml^2. \end{aligned}$$

图 5-14 中的丁字尺下端与质心 C 相距最远,为 $\frac{3}{4}l$,故有

$$I_{\max} = I_C + (2m)\left(\frac{3}{4}l\right)^2 = \frac{17}{12}ml^2.$$

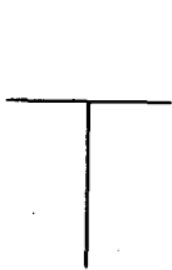


图 5-14

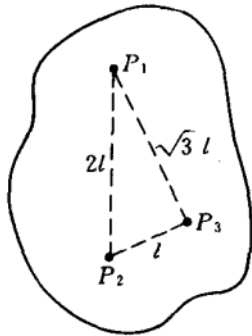


图 5-15

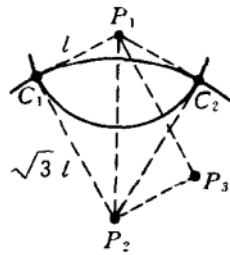


图 5-16

5-15 在图 5-15 所示的薄平板刚体中, P_1 和 P_2 两点相距 $2l$, P_2 和 P_3 两点相距 l , P_3 和 P_1 两点相距 $\sqrt{3}l$. 已知刚体绕通过 P_1 点的垂直轴的转动惯量为 $I_1 = I_C + ml^2$, 绕通过 P_2 点的垂直轴的转动惯量为 $I_2 = I_C + 3ml^2$, 其中 I_C 为刚体绕通过质心 C 的垂直轴的转动惯量. 设 I_C, m, l 已知, 试求刚体绕通过 P_3 点的垂直轴的转动惯量 I_3 .

解 由 $I_1 = I_C + ml^2$ 可知, C 应在以 P_1 为圆心、以 l 为半径的圆周上; 由 $I_2 = I_C + 3ml^2$ 可知, C 应在以 P_2 为圆心、 $\sqrt{3}l$ 为半径的圆周上. 因此, C 应在两圆交点上, 即应在图 5-16 的 C_1 或 C_2 位置上.

图 5-16 中的 $\triangle P_1P_2P_3$, $\triangle P_1P_2C_1$ 和 $\triangle P_1P_2C_2$ 是三个全等的直

角三角形, 据此得

$$\overline{P_3C_1} = 2l, \quad \overline{P_3C_2} = l.$$

若以 C_1 为质心, 所求量为

$$I_3 = I_C + 4ml^2,$$

若以 C_2 为质心, 所求量为

$$I_3 = I_C + ml^2.$$

5-16 匀质正方形薄板质量为 m , 各边长为 a , 如图 5-17 所示, 在板平面上设置过中心 O 的转轴 MN , 求板相对该轴的转动惯量 I .

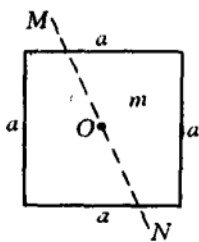


图 5-17

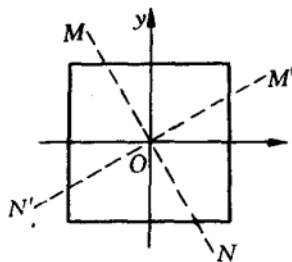


图 5-18

解 如图 5-18 所示, 在板平面上设置过 O 点且与 MN 垂直的 $M'N'$ 轴, 相应的转动惯量记为 I' , 因对称, 有

$$I' = I.$$

在板平面上建立 Oxy 坐标架, 相对 x, y 轴转动惯量相同, 即有

$$I_x = I_y = \frac{1}{12}ma^2,$$

再据垂直轴定理, 得

$$I + I' = I_z, \quad I_x + I_y = I_z,$$

其中 I_z 是板绕着过 O 点且垂直于板平面的转轴的转动惯量. 于是有

$$I + I' = I_x + I_y,$$

得

$$I = I_x = \frac{1}{12}ma^2.$$

5-17 系统和参量如图 5-19 所示, 物块与水平桌面间无摩擦, 轻绳与实心匀质滑轮间无相对滑动, 滑轮与转轴间无摩擦, 试求物块运动加速度 a .

解 竖直、水平绳段内的张力分别记为 T_1, T_2 , 滑轮转动角加速度记为 β , 可建立方程组:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a,$$

$$T_1 R - T_2 R = I \beta,$$

$$I = \frac{1}{2} M R^2,$$

$$T_2 = m_2 a,$$

$$a = \beta R,$$

解得

$$a = \frac{2m_1}{2(m_1 + m_2) + M} g.$$

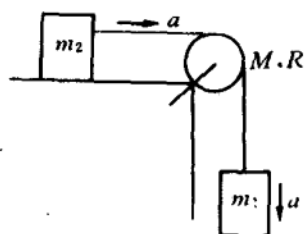


图 5-19

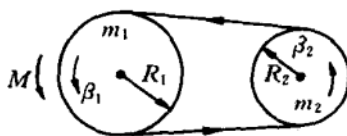


图 5-20

5-18 两个匀质圆盘质量分别为 m_1, m_2 , 半径分别为 R_1, R_2 , 各自可绕互相平行的固定水平轴无摩擦地转动, 轻皮带紧围在两个圆盘外侧, 如图 5-20 所示. 今对圆盘 1 相对其转轴施加外力矩 M , 圆盘、皮带都被带动, 设圆盘、皮带间无相对滑动, 试求圆盘 1, 2 各自的转动角加速度 β_1, β_2 .

解 将图 5-20 的两直段皮带中的张力差记为 ΔT , 则有

$$M - (\Delta T)R_1 = I_1 \beta_1, \quad I_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2,$$

$$(\Delta T)R_2 = I_2 \beta_2, \quad I_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2,$$

$$R_1 \beta_1 = R_2 \beta_2,$$

解得

$$\beta_1 = \frac{2M}{(m_1 + m_2)R_1^2}, \quad \beta_2 = \frac{2M}{(m_1 + m_2)R_1 R_2}.$$

5-19 某竖直平面内有一半径为 R 的固定半圆环, 它的两个端点等高. 如图 5-21 所示, 质量 m 、长 R 的匀质细杆一端靠着环的端点, 另一端在环内壁, 从静止自由滑下. 设杆与环内壁间无摩擦, 试求细杆滑到最低位置时两端各受环的支持力 N_1, N_2 .

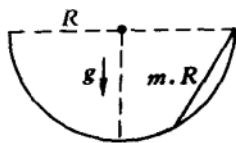


图 5-21

解 杆的下滑运动即为绕着过环心水平几何轴的定轴转动, 转动惯量为

$$I = I_C + m \left(\frac{\sqrt{3}}{2} R \right)^2 = \frac{5}{6} m R^2,$$

滑到最低位置时绕转轴的角速度 ω , 可由能量方程

$$mg \frac{\sqrt{3}}{2} R (1 - \cos 60^\circ) = \frac{1}{2} I \omega^2,$$

解得为

$$\omega = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{5} \frac{g}{R}}.$$

此时细杆两端所受环的支持力 N_1, N_2 都指向环心, 大小相同, 记为

$$N_1 = N_2 = N.$$

由质心运动的向心分量式

$$2N \cdot \sin 60^\circ - mg = m\omega^2 \frac{\sqrt{3}}{2} R,$$

解得

$$N = \frac{19}{10\sqrt{3}} mg.$$

5-20 某刚体可绕过其 A 点的水平固定轴无摩擦地自由转动, 开始时刚体静止地处于图 5-22 所示位置, 它的质心 C 到转轴的垂线恰好处于水平状态. 刚体自由释放后, 已知 C 到达最低处时转轴对刚体的支持力是刚体重力的 $\alpha (\alpha > 1)$ 倍, 试问过程中转轴提供的最大水平支持力是刚体重力的多少倍?

解 刚体质量记为 m , 质心 C 到转轴的距离记为 r , 刚体相对 A 轴的转动惯量记为 I_A . 当刚体转到图 5-23 所示 θ 角位置时, 据动能定理和转动定理, 有

$$mgr \sin \theta = \frac{1}{2} I_A \omega^2,$$

$$mgr \cos \theta = I_A \beta,$$

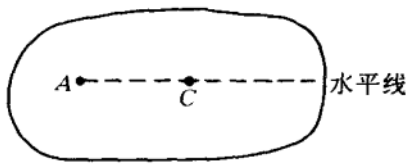


图 5-22

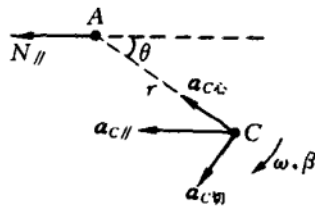


图 5-23

解得转动角速度和角加速度分别为

$$\omega = \sqrt{2mgr \sin \theta / I_A},$$

$$\beta = mgr \cos \theta / I_A.$$

C 到达最低位置时, $\theta = \pi/2$, 质心仅有向心加速度

$$a_C = \omega^2 r = 2mgr^2 / I_A,$$

转轴支持力为

$$amg = N = mg + ma_C = mg \left(1 + \frac{2mr^2}{I_A} \right),$$

得

$$I_A = \frac{2}{\alpha - 1} mr^2.$$

θ 角位置时, 质心的向心和切向加速度分别为

$$a_{C\text{心}} = \omega^2 r = 2mgr^2 \sin \theta / I_A = (\alpha - 1)g \sin \theta,$$

$$a_{C\text{切}} = \beta r = mgr^2 \cos \theta / I_A = \frac{1}{2}(\alpha - 1)g \cos \theta,$$

质心的水平方向加速度便是

$$a_{C//} = a_{C\text{心}} \cos \theta + a_{C\text{切}} \sin \theta = \frac{3}{4}(\alpha - 1)g \sin 2\theta,$$

A 轴提供的水平支持力为

$$N_{//} = ma_{C//} = \frac{3}{4}(\alpha - 1)mg \sin 2\theta.$$

$\theta = \pi/4$ 时有最大值, 为

$$N_{//\text{max}} = \frac{3}{4}(\alpha - 1)mg,$$

是重力的 $\frac{3}{4}(\alpha - 1)$ 倍.

5-21 如图 5-24 所示,一颗小子弹水平射击静止悬挂于顶端 A 的匀质长棒下端,棒长为 l ,质量为 M . 设碰撞时间为 Δt ,碰后瞬间棒绕 A 端固定光滑水平转轴的角速度为 ω ,试求碰撞过程中转轴提供的水平方向平均支持力的方向和大小 $\bar{N}_{//}$.

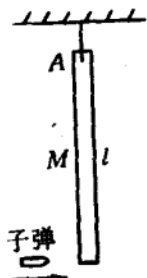


图 5-24

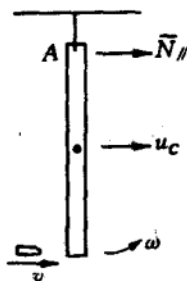


图 5-25

解 题文未告知碰撞是弹性的、非弹性的还是完全非弹性的,故解答必须对所有情况都适用.

若无 A 轴,碰后棒的 A 端也许会有水平方向速度,据此理解 A 轴可能应该提供水平方向阻动性支持力. 设子弹质量为 m ,碰前速度 v_0 ,碰后子弹与棒的运动参量如图 5-25 所示. 可为{子弹,棒}系统写出冲量-动量方程和相对 A 轴的角动量守恒方程组

$$\bar{N}_{//} \Delta t = (mv + Mu_c) - mv_0,$$

$$u_c = \omega \cdot \frac{l}{2},$$

$$mv_0 l = mvl + I\omega,$$

$$I = \frac{1}{3}Ml^2.$$

作下述推演:

$$\begin{aligned} (\bar{N}_{//} \Delta t)l &= (mv - mv_0)l + Mu_c l \\ &= -I\omega + \frac{1}{2}M\omega l^2 = \frac{1}{6}Ml^2\omega, \end{aligned}$$

得
$$\bar{N}_{//} = Ml\omega/6\Delta t > 0.$$

$\bar{N}_{//} > 0$,表明水平方向支持力确如图 5-25 所示与子弹射来的方向一致,此力对棒的质心有助动作用,对棒的 A 端却有阻动作用.

5-22 长度为 2(长度取某约定单位)的刚性细杆 AB , 两端被约束在 $y=x^2$ 的固定抛物线轨道上运动. 当 AB 杆恰好与 x 轴平行时, A 端的速度大小为 v_A , 试确定此时 AB 杆中点 P 的速度大小 v_P .

解 参考图 5-26, 过抛物线 A 点的切线与 x 轴的夹角记为 θ , 则有

$$\tan \theta = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = 2,$$

v_A 沿切线方向. 过 A 点作与 v_A 垂直的直线, 与 y 轴交点 M 即为细杆瞬心, 有

$$\overline{MP} = \overline{MA} \cos \theta = \overline{MA} / \sqrt{5}.$$

将细杆转动角速度记为 ω , 则有

$$v_P = \omega \cdot \overline{MP} = \frac{v_A}{\overline{MA}} \cdot \overline{MP} = v_A / \sqrt{5}.$$

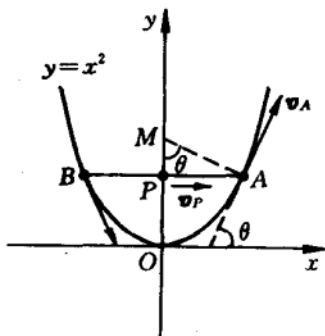


图 5-26

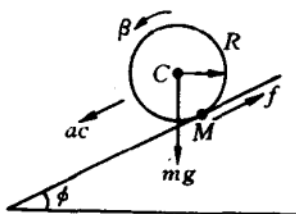


图 5-27

5-23 半径为 R 、质量为 m 的匀质球体静止于倾角为 ϕ 的斜面上, $t=0$ 开始纯滚下来, 试求在滚到斜面底部前的 t 时刻瞬心 M 的加速度 a_M . 再问, 球体与斜面间的摩擦因数 μ 为多大?

解 参考图 5-27, 有

$$mg \sin \phi - f = ma_c,$$

$$fR = I_C \beta, \quad I_C = \frac{2}{5} mR^2, \quad a_c = \beta R,$$

解得
$$a_c = \frac{5}{7} g \sin \phi, \quad \beta = \frac{5g \sin \phi}{7R},$$

t 时刻的转动角速度为

$$\omega = \beta t.$$

将瞬心 M 相对于质心 C 的加速度记为 a'_M , 则有

$$a_M = a'_M + a_C.$$

M 相对质心作变速圆周运动, 有

$$a'_{M\dot{C}}: \begin{cases} \text{方向: 垂直斜面向上,} \\ \text{大小: } a'_{M\dot{C}} = \omega^2 R, \end{cases}$$

$$a'_{M\text{切}}: \begin{cases} \text{方向: 平行斜面向上,} \\ \text{大小: } a'_{M\text{切}} = \beta R, \end{cases}$$

考虑到

$$a_C: \begin{cases} \text{方向: 平行斜面向下,} \\ \text{大小: } a_C = \beta R, \end{cases}$$

即得

$$a_M = a'_{M\dot{C}}: \begin{cases} \text{方向: 垂直斜面向上,} \\ \text{大小: } a_M = \omega^2 R = (25g^2 \sin^2 \phi / 49R) t^2. \end{cases}$$

由上述方程组还可解得

$$f = I_C \beta / R = \frac{2}{7} mg \sin \phi,$$

纯滚要求 f 为静摩擦力, 即有

$$f \leq \mu mg \cos \phi,$$

得 μ 值可能范围为

$$\mu \geq \frac{2}{7} \tan \phi.$$

5-24 半径为 r 、质量为 m 的匀质轮子, 以角速度 ω_0 旋转. 现将轮子轻轻地放在水平地面上, 轮与地面间的摩擦因数设为处处相同.

- (1) 求运动稳定后轮子的动量大小及对轮心的角动量大小;
- (2) 由功的定义式直接计算过程中摩擦力所作总功, 验证此功等于轮子动能增加量.

解 达稳定运动状态(即纯滚状态)前的全过程中, 轮子始终受图 5-28 所示的滑动摩擦力, 大小为

$$f = \mu mg,$$

μ 是引入的摩擦因数.

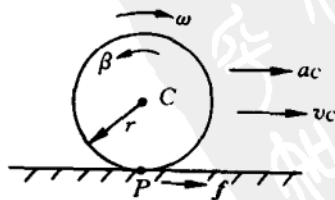


图 5-28

(1) 由 $f = ma_c, fr = I\beta, I = mr^2$, 得

$$a_c = \mu g, \quad \beta = \mu g/r, \quad v_c = a_c t = \mu g t,$$

$$\omega = \omega_0 - \beta t = \omega_0 - \frac{\mu g}{r} t.$$

当某时刻 t_0 , 恰有

$$v_c = \omega r$$

时, 轮子便进入稳定的匀速纯滚状态, 摩擦力也随即消失. 由

$$\mu g t_0 = \left(\omega_0 - \frac{\mu g}{r} t_0 \right) r,$$

可解得稳定后

$$v_c = \frac{1}{2} \omega_0 r, \quad \omega = \omega_0/2,$$

轮子动量和相对质心的角动量大小分别为

$$p = mv_c = \frac{1}{2} m \omega_0 r, \quad L' = I\omega = \frac{1}{2} m r^2 \omega_0.$$

(2) 滑动摩擦力对轮与地接触点 P 做功的功率为

$$dW/dt = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_P = -f(\omega r - v_c) = -\mu mg(\omega_0 r - 2\mu g t),$$

所作总功为

$$W = \int_0^{t_0} dW = -\mu mg \int_0^{t_0} (\omega_0 r - 2\mu g t) dt,$$

积分可得

$$W = -\frac{1}{4} m \omega_0^2 r^2.$$

轮子动能增量为

$$\Delta E_k = \left(\frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \right) - \frac{1}{2} I \omega_0^2 = -\frac{1}{4} m \omega_0^2 r^2,$$

可见有

$$W = \Delta E_k.$$

5-25 如图 5-29 所示, 质量 m 的平板受水平力 F 的作用沿水平地面运动, 板与地面间的摩擦因数为 μ . 板上放一质量为 M 、半径为 R 的匀质圆柱体, 圆柱体与板间的摩擦因数也为 μ .

(1) 若圆柱体在板上的运动是纯滚动, 求板的加速度;

(2) 为使圆柱体在板上仍作纯滚动, 试求 F 可取的最大值.

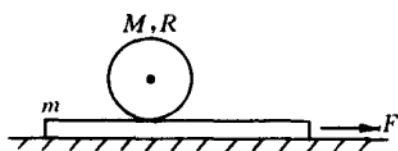


图 5-29

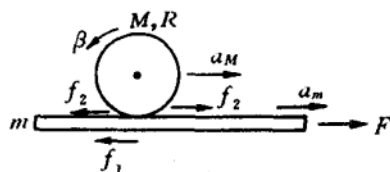


图 5-30

解 (1) 参考图 5-30, 可列下述方程组

$$\begin{aligned} F - f_1 - f_2 &= ma_m, \\ f_1 &= \mu(M + m)g, \\ f_2 &= Ma_M, \\ f_2 R &= I\beta, \\ I &= \frac{1}{2}MR^2, \\ a_m - a_M &= \beta R \quad (\text{纯滚条件}), \end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned} a_M &= [F - \mu(M + m)g]/(3m + M), \\ a_m &= 3a_M = [F - \mu(M + m)g]/(m + M/3). \end{aligned}$$

(2) 圆柱体在板上作纯滚动, f_2 是静摩擦力, 因此有

$$\mu Mg \geq f_2 = Ma_M,$$

即 $\mu g \geq a_M = [F - \mu(M + m)g]/(3m + M),$

由此得 $F \leq F_{\max} = 2\mu(2m + M)g.$

5-26 如图 5-31 所示, 在倾角为 θ 的固定斜面上, 一质量为 m 、半径为 r 的匀质圆柱体上绕有轻绳, 绳的另一端缠绕在斜面顶端的定滑轮上, 定滑轮是质量 M 、半径 r 的匀质圆盘. 设圆柱体沿斜面滚下时细绳拉直且不能伸长, 并与斜面平行, 细绳与圆柱体及定滑轮之间无相对滑动, 略去滑轮轴承处的摩擦.

(1) 若圆柱体的运动为纯滚动, 求其质心加速度;

(2) 试求圆柱体作纯滚动的条件.

解 (1) 参考图 5-32 引入的参量, 有

$$m: mg \sin \theta - T - f = ma,$$

$$fr - Tr = I_m \beta_m,$$

$$I_m = \frac{1}{2}mr^2,$$

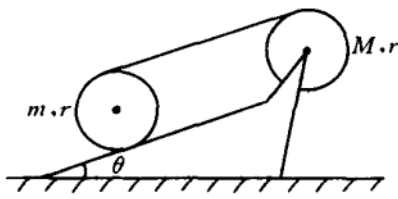


图 5-31

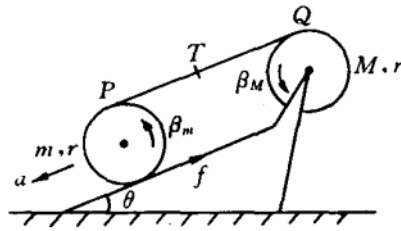


图 5-32

$$M: Tr = I_M \beta_M,$$

$$I_M = \frac{1}{2} Mr^2.$$

因 $\omega_M r = v_Q = v_P = \omega_m \cdot 2r,$

得 $\omega_M = 2\omega_m, \quad \beta_M = 2\beta_m,$

再写出关联式 $a = \beta_m r,$

联立后解得 $a = \frac{2m}{4M + 3m} g \sin \theta.$

(2) 由上述诸式还可得

$$f = (I_m + 2I_M) \frac{a}{r^2} = \frac{m(2M + m)}{4M + 3m} g \sin \theta,$$

纯滚要求 f 为静摩擦力, 即有

$$f \leq \mu mg \cos \theta,$$

故纯滚条件为

$$\mu \geq \frac{2M + m}{4M + 3m} \tan \theta.$$

5-27 有两个相同的匀质球体 A, B , 开始时 B 球静止在水平地面上, A 球在此地面上朝着 B 球作匀速纯滚动, A, B 随即发生弹性碰撞. 碰后 A, B 因与地面间有摩擦, 最后都达到稳定的匀速纯滚状态, 试求全过程中系统动能损失百分比 α .

解 A, B 质量同记为 M , 半径同记为 R , A 球初速记为 v_0 , 初始角速度便为 $\omega_0 = v_0/R$. 碰后, A, B 交换平动速度, A 保留转动角速度, B 未获得转动角速度, 即有

$$v_{AO} = 0, \quad \omega_{AO} = \omega_0 = v_0/R; \quad v_{BO} = v_0, \quad \omega_{BO} = 0.$$

碰后 A 球初态相对地面任意一点 P 的角动量为

$$L_{AO} = I\omega_{AO}, \quad I = \frac{2}{5}MR^2,$$

接着因受地面摩擦力的作用,最后达匀速纯滚状态,角速度 ω_A 与平动速度 v_A 间关系为

$$\omega_A = v_A/R,$$

相对 P 点角动量为

$$L_A = Mv_AR + I\omega_A = \frac{7}{5}Mv_AR.$$

摩擦力相对 P 点力矩为零,角动量守恒,有

$$L_A = L_{AO},$$

得

$$v_A = \frac{2}{7}v_0, \quad \omega_A = \frac{2}{7} \frac{v_0}{R}.$$

碰后 B 球初态相对 P 点角动量为

$$L_{BO} = Mv_{BO}R = Mv_0R,$$

也因受摩擦力作用,最后达匀速纯滚状态,角速度 ω_B 与平动速度 v_B 间关系为

$$\omega_B = v_B/R,$$

相对 P 点角动量为

$$L_B = Mv_BR + I\omega_B = \frac{7}{5}Mv_BR.$$

同理,角动量守恒,相继有

$$L_B = L_{BO}, \quad v_B = \frac{5}{7}v_0, \quad \omega_B = \frac{5}{7} \frac{v_0}{R}.$$

全过程中动能损失量百分比为

$$\alpha = 1 - \frac{(Mv_A^2/2 + I\omega_A^2/2) + (Mv_B^2/2 + I\omega_B^2/2)}{Mv_0^2/2 + I\omega_0^2/2},$$

$$= 20/49 = 40.8\%.$$

5-28 质量 M 、长 L 的匀质细杆 AB ,某时刻在水平桌面上绕着它的中心 C 以角速度 ω 逆时针方向旋转,同时 C 又具有与杆垂直的水平向右速度 v_C ,如图 5-33 所示. 设细杆各部位与桌面间的摩擦因数同为 μ ,试求该时刻 C 的加速度方向和大小 a_C 以及细杆的角加速

度方向和大小 β .

解 细杆下半部分 CB 各部位合速度均朝右,上半部分 CA 各部位合速度在 ω 较小时也均朝右,但在 ω 较大时,靠近 C 的部位合速度朝右,靠近 A 的部位合速度朝左. 据此,分两种情况讨论.

(1) $\omega < 2v_C/L$, 即 $\omega L/2 < v_C$.

瞬心在 A 端上方,细杆各部位合速度均朝右,所受摩擦力都朝左,合摩擦力为

$$f: \begin{cases} \text{方向: 朝左,} \\ \text{大小: } f = \mu mg. \end{cases}$$

C 的加速度为

$$a_C = f/M: \begin{cases} \text{方向: 朝左,} \\ \text{大小: } a_C = \mu g, \end{cases}$$

摩擦力相对 C 的力矩和 $M_f = 0$, 角加速度便为

$$\beta = 0.$$

(2) $\omega \geq 2v_C/L$, 即 $\omega L/2 \geq v_C$.

参考图 5-34, 瞬心 P 与质心 C 的距离为

$$l = v_C/\omega \leq L/2,$$

P' 是 P 的对称点. 将 CP 段所受摩擦力记为 f_1 , PA 段所受摩擦力记为 f_2 , 方向均已在图中标出, 大小分别为

$$f_1 = \mu \frac{M}{L} l g = \mu M v_C g / \omega L,$$

$$f_2 = \mu \frac{M}{L} \left(\frac{L}{2} - l \right) g = \mu \frac{M}{L} \left(\frac{L}{2} - \frac{v_C}{\omega} \right) g,$$

细杆所受合摩擦力为

$$f = 2f_1: \begin{cases} \text{方向: 朝左,} \\ \text{大小: } f = 2\mu M v_C g / \omega L. \end{cases}$$

C 的加速度为

$$a_C = f/M: \begin{cases} \text{方向: 朝左,} \\ \text{大小: } a_C = 2\mu v_C g / \omega L. \end{cases}$$

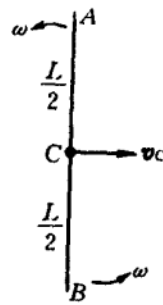


图 5-33

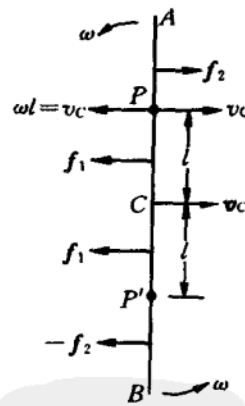


图 5-34

细杆所受摩擦力相对 C 点力矩和的方向垂直图平面朝里, 大小为

$$M_f = 2f_2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} + l \right) \right] = \mu \frac{M}{L} \left(\frac{L^2}{4} - \frac{v_C^2}{\omega^2} \right) g,$$

由质心轴转动定理, 角加速度方向垂直图平面朝里, 大小为

$$\beta = M_f / I_C = 3 \frac{\mu}{L} \left(1 - \frac{4v_C^2}{\omega^2 L^2} \right) g.$$

5-29 匀质细杆 AB , 开始时静止地靠墙竖立在水平地面上, 后因轻微扰动而倾斜滑动. 设系统处处无摩擦, 试问当图 5-35 中倾角 ϕ 达何值时杆的 A 端将离墙?

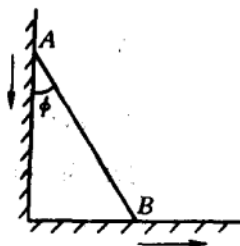


图 5-35

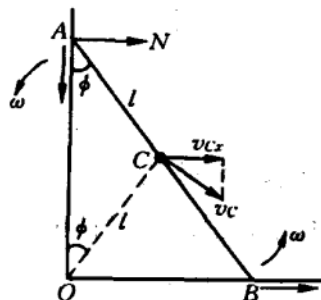


图 5-36

解 杆质量设为 m , 长度设为 $2l$, 绕质心轴转动惯量便是

$$I_C = \frac{1}{3} ml^2,$$

转到图 5-36 所示 ϕ 角时, 有

$$mgl(1 - \cos \phi) = \frac{1}{2} mv_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2, \quad v_C = \omega l,$$

解得

$$v_C = \sqrt{\frac{3g}{2l}(1 - \cos \phi)}.$$

水平分速度平方为

$$v_{Cx}^2 = (v_C \cos \phi)^2 = \frac{6g}{l}(1 - \cos \phi) \left(\frac{1}{2} \cos \phi \right) \left(\frac{1}{2} \cos \phi \right),$$

当 $1 - \cos \phi = \frac{1}{2} \cos \phi = \frac{1}{2} \cos \phi$ 时, v_{Cx}^2 和 v_{Cx} 均取极大, 对应 $a_{Cx} = 0$, 此时墙对 A 端支持力 $N = 0$. 因此, 当

$$\phi = \arccos \frac{2}{3}$$

时, A 端将离墙.

5-30 光滑水平桌面上静放一根匀质细杆, 一小球在桌面上以垂直于细杆长度方向的速度朝着细杆 P 部位运动, 如图 5-37 所示. 设两者发生弹性碰撞, 试求碰后小球与 P 间分离速度大小与碰前两者接近速度大小的比值.

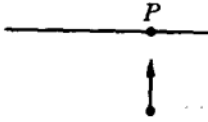


图 5-37

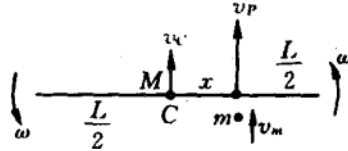


图 5-38

解 细杆参量记为 M, L , 小球碰前参量记为 m, v , 碰后参量如图 5-38 所示, 图中 C 为杆的质心, x 为 P 到 C 的距离. 可列方程:

$$Mv_C + mv_m = mv,$$

$$\frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 + \frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{1}{2}mv^2,$$

$$mv_mx + I_C\omega = mv_x,$$

其中 $I_C = \frac{1}{12}ML^2$. 引入

$$\gamma = M/m, \quad l = L/2,$$

可解得

$$v_C = \frac{2l^2}{l^2 + \gamma l^2 + 3x^2} v, \quad \omega = \frac{6x}{l^2 + \gamma l^2 + 3x^2} v,$$

$$v_m = \frac{l^2 - \gamma l^2 + 3x^2}{l^2 + \gamma l^2 + 3x^2} v.$$

于是有

$$v_P = v_C + \omega x = \frac{2l^2 + 6x^2}{l^2 + \gamma l^2 + 3x^2} v,$$

所求分离速度大小与接近速度大小的比值为

$$(v_P - v_m) : v = 1 : 1.$$

5-31 如图 5-39 所示, 匀质细杆 AB 静放在光滑水平桌面上,

小球 P 在此平面上对准杆的 B 端运动, 速度方向与杆的长度方向垂直. 已知球与细杆弹性碰撞后, 两者又会发生第二次碰撞, 试求杆的质量与球的质量比 γ .

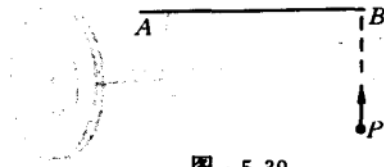


图 5-39

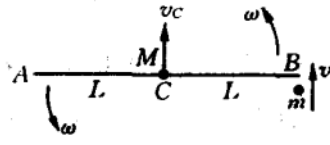


图 5-40

解 设杆长 $2L$, 质量 M , 小球质量 m , 初速 v_0 . 将碰后细杆质心 C 的速度记为 v_C , 杆的转动角速度记为 ω , 小球速度记为 v , 方向如图 5-40 所示. 可建立方程组:

$$Mv_C + mv = mv_0,$$

$$I_C\omega + mvL = mv_0L,$$

$$I_C = \frac{1}{3}ML^2,$$

$$\frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

将 $M = \gamma m$ 代入后, 简化成

$$\gamma v_C + v = v_0, \quad \frac{1}{3}\gamma\omega L + v = v_0,$$

$$\gamma v_C^2 + \frac{1}{3}\gamma\omega^2 L^2 + v^2 = v_0^2.$$

考虑到仅在

$$v_C = v$$

时, 两者才能发生第二次碰撞, 即可解得

$$\gamma = 2.$$

5-32 在长为 l 的轻轴一端装上回转仪的轮子, 轴的另一端吊在长为 L 的绳上. 当轮子绕轴快速转动且轴处于水平状态时, 轮子将绕着过支点 O 的竖直轴进动, 如图 5-41 所示. 已知轮子质量为 m , 相对于自转轴的转动惯量为 I_0 , 自转角速度为 ω_s , 轮子质心位于中心, 试求绳与竖直线之间的小夹角 β .

解 轮子和轻杆构成的陀螺, 相对轻杆延长线与图中竖直线的

交点作定点转动. β 是小角度, 绳的拉力 T 相对定点的力矩可略, 进动由重力矩引起, 进动角速度为

$$\Omega = mgl/I_0\omega_s.$$

陀螺质心圆运动向心加速度由 T 的水平分量提供, 且 T 的竖直分量与陀螺重力平衡, 即有

$$T \sin \beta = m\Omega^2 l, \quad T \cos \beta = mg,$$

因 β 是小角度, 得

$$\beta = \Omega^2 l / g = m^2 g l^3 / I_0^2 \omega_s^2.$$

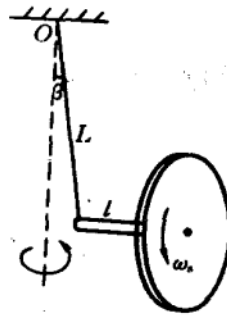


图 5-41

5-33 如图 5-42 所示, 用夹子去夹半径 R 的对称球体. 已知夹子两臂与球表面间的静摩擦因数为 μ , 若球可以不动, 略去重力, 试求图中线度 l .

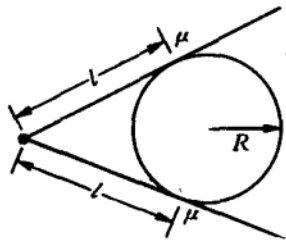


图 5-42

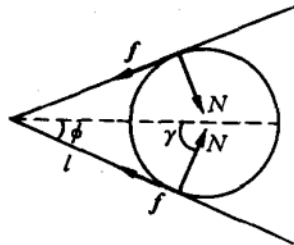


图 5-43

解 球体受力如图 5-43 所示, 因对称, 相对夹子端点力矩和为零. 力平衡条件为

$$f \cos \phi = N \cos \gamma = N \sin \phi,$$

其中 f 是摩擦力, N 是正压力. 由上式可得

$$\mu N \geq f = N \tan \phi = NR/l,$$

即有

$$l \geq R/\mu.$$

B 组

5-34 试用物理方法证明任意三角形三条边上的高共点.

证 任意三角形 ABC 的三条边长分别记为 a, b, c , 在三个顶点

上放三个质点,它们的质量分别为

$$m_A = \lambda a \cos B \cos C,$$

$$m_B = \lambda b \cos C \cos A,$$

$$m_C = \lambda c \cos A \cos B,$$

其中 λ 为假设的质量线密度常量. 作 BC 边上的高 AD , 如图 5-44 所示, 有

$$\overline{BD} = c \cos B, \quad \overline{CD} = b \cos C,$$

因为

$$m_B \cdot \overline{BD} = \lambda b c \cos C \cos A \cos B,$$

$$m_C \cdot \overline{CD} = \lambda b c \cos A \cos B \cos C,$$

即有

$$m_B \cdot \overline{BD} = m_C \cdot \overline{CD},$$

故 D 为 m_B, m_C 的质心, 于是 $\{m_A, m_B, m_C\}$ 的系统质心必在 AD 直线段上, 即在 BC 边的高上.

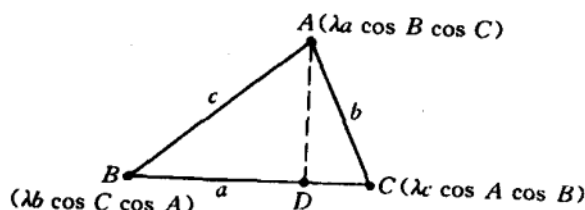


图 5-44

同理可证系统质心必在 CA 边的高上, 也必在 AB 边的高上, 由于系统质心唯一, 故三角形三条边上的高共点.

上述讨论对锐角三角形自然成立, 对于直角、钝角三角形同样也是成立的, 说明如下.

设 C 为直角, 则

$$m_A = \lambda a \cos B \cos C = 0, \quad m_B = \lambda b \cos C \cos A = 0,$$

系统质心即为 C 点, C 点也为三高交点.

设 C 为钝角, 则

$$m_A < 0, \quad m_B < 0,$$

即 m_A, m_B 均为“负质量”, 此时

$$\overline{CD} = b \cos C < 0,$$

即 D 点在三角形 ABC 之外. 据此仍可确定系统质心在 BC 边的高 AD 上, 而后的讨论仍可进行, 结论不变.

5-35 如图 5-45 所示, 质量 m 的对称滑板装置 A 开始时静止在倾角为 ϕ 的斜面上, A 的底板长 L , 底部与斜面之间的摩擦因数 $\mu < \frac{1}{2} \tan \phi$. 今在 A 的底板上方正中间静止放一个质量也是 m 的小滑块 B , 两者之间光滑接触. 将 A, B 同时释放后, A, B 分别向下滑动, A 的前部挡板还会与 B 发生弹性碰撞. 设斜面足够长, 试求从开始释放到 A, B 发生第 3 次碰撞间

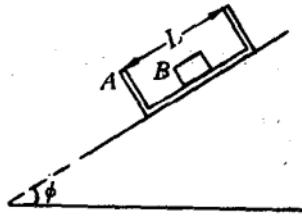


图 5-45

(1) 经历过的时间 T ;

(2) 摩擦力所作功 W_f .

解 (1) 很易求得 A, B 沿斜面向下滑动加速度分别为

$$a_A = \frac{1}{m}(mg \sin \phi - \mu \cdot 2mg \cos \phi) = g(\sin \phi - 2\mu \cos \phi)$$

$$a_B = g \sin \phi,$$

B 相对 A 的向下加速度便为

$$a'_B = a_B - a_A = 2\mu g \cos \phi.$$

B 相对 A 初速为零, 以此 a'_B 通过 $L/2$ 路程, 需时

$$t_0 = \sqrt{L/a'_B} = \sqrt{L/2\mu g \cos \phi},$$

B 与 A 相碰前, 相对 A 的速度大小为

$$v_B^* = a'_B t_0.$$

B 与 A 第 1 次弹性碰撞, 相对地面系交换速度. 碰后 B 相对 A 的速度反向, 大小不变, 仍为 v_B^* . 经 t_0 时间, B 返回到 A 的底板中央相对 A 静止; 再经 t_0 时间, 又以 v_B^* 相对速度与 A 碰撞; ... 可见, 每相邻两次碰撞之间的时间同为 $2t_0$, 因此, 从开始到第 3 次碰撞, 经过的时间为

$$T = 5t_0 = 5\sqrt{L/2\mu g \cos \phi}.$$

(2) 系统质心 C 相对斜面的下行加速度为

$$a_c = \frac{1}{2m}(2mg \sin \phi - \mu \cdot 2mg \cos \phi) = g(\sin \phi - \mu \cos \phi),$$

在 T 时间内, C 通过路程为

$$s_c = \frac{1}{2}a_c T^2 = \frac{25}{4\mu}L(\tan \phi - \mu).$$

A 通过的路程应为

$$s_A = s_c - \frac{L}{4} = \frac{L}{4\mu}(25 \tan \phi - 26\mu),$$

摩擦力做功为

$$W_f = -(2\mu mg \cos \phi) \cdot s_A = -\frac{1}{2}mgL(25 \sin \phi - 26\mu \cos \phi).$$

5-36 轻质细杆两端分别固定小球 A, B . B 球的质量是 A 球质量的 α 倍, 其中 $\alpha > 1$. 开始时细杆左半部分静止在水平桌面上, 右半部分露在桌面外. 自由释放后, 细杆会绕着桌面侧棱倾斜偏转, 即图 5-46 中的 ϕ 角会从零增大. 开始时, 倾斜偏转过程中细杆中点一直不离开桌面侧棱, 直到倾角 ϕ 达到某 ϕ_0 ($0 < \phi_0 < \pi/2$) 值时, 细杆中点开始滑离桌面侧棱, 试求细杆中部与桌面侧棱之间的摩擦因数 μ .

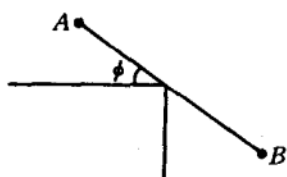


图 5-46

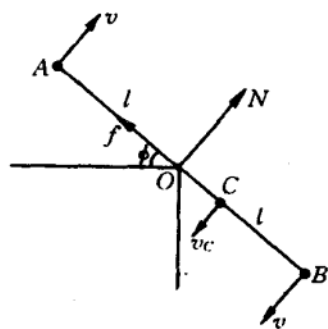


图 5-47

解 A, B 质量分别记为 $m, \alpha m$, 细杆长度记为 $2l$, 质心记为 C . 参照图 5-47, 有

$$\overline{AC} = \frac{\alpha m}{m + \alpha m} 2l = \frac{2\alpha}{\alpha + 1} l, \quad \overline{OC} = \overline{AC} - l = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} l.$$

细杆未滑动前, A, B 转动速度记为 v , 据能量关系依次可得

$$\frac{1}{2}(m + \alpha m)v^2 = \alpha mgl \sin \phi - mgl \sin \phi,$$

$$v^2 = 2 \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} gl \sin \phi,$$

$$v_C^2 = \left(\frac{OC}{l} \right)^2 v^2 = 2 \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right)^3 gl \sin \phi,$$

$$a_{C\phi} = \frac{v_C^2}{OC} = 2 \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right)^2 g \sin \phi.$$

细杆所受摩擦力为

$$f = (m + am)a_{C\phi} + (m + am)g \sin \phi$$

$$= \frac{3\alpha^2 - 2\alpha + 3}{\alpha + 1} mg \sin \phi.$$

对 $v_C^2 - \phi$ 关系式两边对 t 求导, 依次可得

$$2v_C a_{C\phi} = 2 \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right)^3 gl \cos \phi \left(\frac{d\phi}{dt} \right) \quad \left(\text{因 } \frac{d\phi}{dt} = \frac{v_C}{OC} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right)^2 g \cos \phi \cdot v_C,$$

得

$$a_{C\phi} = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right)^2 g \cos \phi.$$

细杆所受法向支持力为

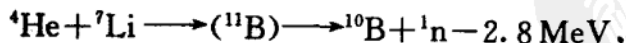
$$N = (m + am)g \cos \phi - (m + am)a_{C\phi}$$

$$= \frac{4\alpha}{\alpha + 1} mg \cos \phi,$$

细杆刚要滑动时, $\phi = \phi_0$, $f = \mu N$, 即得

$$\mu = (f/N)_{\phi=\phi_0} = \frac{3\alpha^2 - 2\alpha + 3}{4\alpha} \tan \phi_0.$$

5-37 动能为 E_0 的 ${}^4\text{He}$ 核轰击静止的 ${}^7\text{Li}$ 核, 作完全非弹性碰撞后成为复合核 ${}^{11}\text{B}$, 后者进一步分裂成 ${}^{10}\text{B}$ 和中子 ${}^1\text{n}$. 上述核反应过程需消耗能量 $\theta = 2.8 \text{ MeV}$, 反应方程为



试求上述核反应过程所需的 E_0 最小值及对应的中子动能值.

解 核反应损失的机械能属于粒子间内力消耗的机械能, 在任一参考系中是相同的, 较方便的是在质心参考系中处理.

实验室参考系中 ${}^4\text{He}$ 初动能为 E_0 , 速度为

$$v_0 = \sqrt{2E_0/m_{\text{He}}},$$

系统质心速度便是

$$v_c = m_{\text{He}} v_0 / (m_{\text{He}} + m_{\text{Li}}) = \frac{4}{11} \sqrt{2E_0/m_{\text{He}}},$$

${}^4\text{He}$, ${}^7\text{Li}$ 核在质心系中的速度大小以及它们的动能之和依次为

$$v'_{\text{He}} = v_0 - v_c = \frac{7}{11} \sqrt{2E_0/m_{\text{He}}},$$

$$v'_{\text{Li}} = v_c = \frac{4}{11} \sqrt{2E_0/m_{\text{He}}},$$

$$E_k(0) = \frac{1}{2} m_{\text{He}} v'^2_{\text{He}} + \frac{1}{2} m_{\text{Li}} v'^2_{\text{Li}} = \frac{7}{11} E_0.$$

核反应后生成的 ${}^{10}\text{B}$ 核和 ${}^1_0\text{n}$ 中子在质心系中的速度分别记为 v'_B 和 v'_n , 则有

$$\frac{7}{11} E_0 = E_k(0) \geq \left(\frac{1}{2} m_B v'^2_B + \frac{1}{2} m_n v'^2_n \right) + Q,$$

即得

$$\text{当 } v'_B = 0, v'_n = 0 \text{ 时, } E_0 = E_{0,\min} = \frac{11}{7} Q = 4.4 \text{ MeV},$$

此时质心系中中子速度 $v'_n = 0$, 在实验室参考系中, 中子速度和动能便分别为

$$v_n = v_c = \frac{4}{11} \sqrt{2E_0/m_{\text{He}}},$$

$$E_{k,n} = \frac{1}{2} m_n v_c^2 = \frac{4}{121} E_0 = 0.15 \text{ MeV}.$$

5-38 讨论地球在月球引力作用下的潮汐现象.

取地球和月球构成的系统, 地球中心 O 绕着系统质心作圆周运动, 地心参考系为平动变速非惯性系. 在地心系中设置 Oxy 坐标系, 某时刻月球位于 x 轴上, 月心的坐标 $x_M = r_M$ 中的 r_M 即为地心与月心的间距. 设想地球表面被海水层覆盖, 潮汐作用使

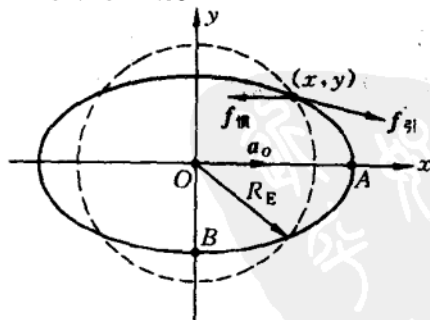


图 5-48

其表面相对地球半径 R_E 有起伏, 如图 5-48 所示. 在 Oxy 平面上取一块质量为 m 的海水, 位于海水表面 x, y 处. 不考虑地球自转影

响,试求:

- (1) 该块海水所受潮汐力;
- (2) 图中 A, B 两处海水的高度差 h_{AB} .

已知: 月球质量 $M = 7.35 \times 10^{22} \text{ kg}$, $r_M = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$; $R_E = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$.

解 (1) 地球中心相对地-月系统质心的圆运动向心加速度为

$$a_0 = G \frac{M}{r_M^2} \mathbf{i},$$

地心系中位于 x, y 处, 一块质量为 m 的海水所受潮汐力为月球引力与平移惯性力之和, 即有

$$\begin{aligned} f_{\text{潮}} &= f_{\text{引}} + f_{\text{惯}} \\ &= \left\{ \frac{GMm(r_M - x)}{[(r_M - x)^2 + y^2]^{3/2}} \mathbf{i} - \frac{GMmy}{[(r_M - x)^2 + y^2]^{3/2}} \mathbf{j} \right\} \\ &\quad + m \left(-G \frac{M}{r_M^2} \mathbf{i} \right). \end{aligned}$$

因 $r_M \gg x, y$, 得

$$\begin{aligned} f_{\text{潮}} &= \left\{ G \frac{Mm}{r_M^2} \left(1 + \frac{2x}{r_M} \right) \mathbf{i} - G \frac{Mmy}{r_M^3} \mathbf{j} \right\} - G \frac{Mm}{r_M^2} \mathbf{i} \\ &= G \frac{Mm}{r_M^3} (2xi - yj). \end{aligned}$$

(2) 随着地心参考系绕地-月系统质心作圆周平动, 经四分之一圆周期, B 处海水将在原地升高成为类 A 处海水. 这可等效为 B 处海水沿图中第 IV 象限四分之一海面成为 A 处海水, 其间潮汐力做功等于重力势能增量, 即有

$$\begin{aligned} mgh_{AB} &= \int_B^A f_{\text{潮}} \cdot d\mathbf{r} = G \frac{Mm}{r_M^3} \left[\int_0^{R_E} 2x dx - \int_{-R_E}^0 y dy \right] \\ &= \frac{3}{2} G \frac{Mm}{r_M^3} R_E^2, \end{aligned}$$

得

$$h_{AB} = \frac{3}{2} G \frac{M}{r_M^3} \frac{R_E^2}{g} = 0.54 \text{ m}.$$

5-39 如图 5-49 所示, 匀质立方体的质量为 m 、各边长为 a , 试

求该立方体绕对角线轴 MN 的转动惯量 I 。

解 从量纲方面分析, 所求转动惯量必可表述为

$$I = \alpha ma^2,$$

其中 α 是待定常数, 将原立方体等分成各边长为 $a/2$ 的 8 个小立方体, 每个小立方体绕自身对角线轴的转动惯量为

$$I' = \alpha \left(\frac{m}{8} \right) \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{\alpha}{32} ma^2.$$

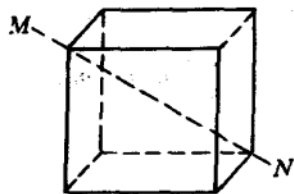


图 5-49

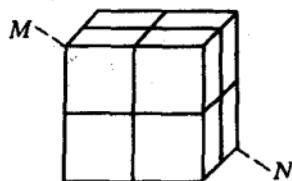


图 5-50

参考图 5-50, 8 个小立方体中, 有 2 个小立方体的转轴即为 MN 轴, 另外 6 个小立方体的对角线轴都与 MN 平行, 且与 MN 的距离可算得为

$$d = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{a}{2} = a / \sqrt{6},$$

于是有

$$I = 2I' + 6 \left[I' + \left(\frac{m}{8} \right) d^2 \right],$$

由上述诸式, 解得

$$\alpha = \frac{1}{6}, \quad I = \frac{1}{6} ma^2.$$

5-40. 椭圆细环的半长轴为 a , 半短轴为 b , 质量为 m (未必匀质). 已知细环绕长轴的转动惯量为 I_a , 试求细环绕短轴的转动惯量 I_b .

解 以椭圆中心为原点, 沿长轴设置 x 轴, 沿短轴设置 y 轴, 椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

有

$$I_a = I_x = \sum_i m_i y_i^2,$$

$$I_b = I_y = \sum_i m_i x_i^2,$$

其中 m_i 是细环上位于 (x_i, y_i) 质元的质量, 继而可得

$$\frac{I_a}{b^2} = \sum_i m_i \frac{y_i^2}{b^2},$$

$$\frac{I_b}{a^2} = \sum_i m_i \frac{x_i^2}{a^2},$$

$$\frac{I_a}{b^2} + \frac{I_b}{a^2} = \sum_i m_i \left(\frac{y_i^2}{b^2} + \frac{x_i^2}{a^2} \right) = \sum_i m_i = m,$$

即有

$$I_b = ma^2 - \frac{a^2}{b^2} I_a.$$

5-41 如图 5-51 所示, 质量为 m 的匀质圆柱体, 截面半径为 R , 长为 $2R$, 试求圆柱体绕通过中心及两底面边缘转轴的转动惯量 I .

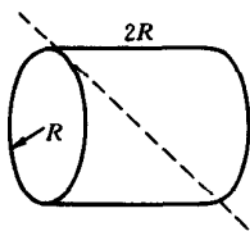


图 5-51

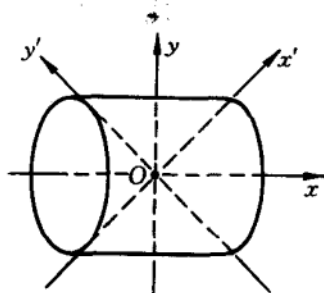


图 5-52

解 如图 5-52 所示, 以柱体中心为原点设置 $Oxyz$ 坐标框架, 其中 x 轴在柱体中央轴上, z 轴在图中未画出. 在 Oxy 平面上过 O 点再设置通过柱体两底面边缘且互相垂直的 x', y' 轴, 因对称, $I'_x = I'_y$, 其中 I'_y 即为所求 I , 有

$$I = I'_x = I'_y.$$

在 $Oxyz$ 坐标系中, 柱体任一质元参量可表述为 m_i, x_i, y_i, z_i, r_i , 对于 I_x, I_y, I_z , 有

$$I_x + I_y + I_z = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) + \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2)$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \\
 & = 2 \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = 2 \sum_i m_i r_i^2.
 \end{aligned}$$

在 $Ox'y'z$ 坐标系中, 质元参量表述为 $m_i, x'_i, y'_i, z_i, r'_i$, 对于 I'_x, I'_y, I_z , 有

$$\begin{aligned}
 I'_x + I'_y + I_z &= \sum_i m_i (y_i'^2 + z_i^2) + \sum_i m_i (z_i^2 + x_i'^2) \\
 & + \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2) \\
 & = 2 \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i^2) = 2 \sum_i m_i r_i'^2.
 \end{aligned}$$

因 $r'_i = r_i$,

故有

$$I'_x + I'_y + I_z = I_x + I_y + I_z, \quad I'_x + I'_y = I_x + I_y,$$

所求量即为

$$I = \frac{1}{2}(I_x + I_y).$$

由已给量可得

$$I_x = \frac{1}{2}mR^2.$$

为求 I_y , 可将圆柱体分割成一系列垂直于 x 轴的薄圆板, 薄圆板沿 x 轴的参量可用 $x, x+dx$ 表述, 其中 dx 为厚度. 利用垂直轴定理, 每一块薄圆板绕自己直径转轴(其中之一恰好与 y 轴平行)的转动惯量为

$$\frac{1}{4} \left(\frac{dx}{2R} m \right) R^2,$$

薄圆板相对 y 轴转动惯量便是

$$\frac{1}{4} \left(\frac{dx}{2R} m \right) R^2 + \left(\frac{dx}{2R} m \right) x^2 = \frac{m}{2R} \left(\frac{1}{4} R^2 + x^2 \right) dx,$$

积分可得

$$I_y = \int_{-R}^R \frac{m}{2R} \left(\frac{1}{4} R^2 + x^2 \right) dx = \frac{7}{12} m R^2.$$

最后, 由 I_x, I_y 算得

$$I = \frac{13}{24}mR^2.$$

5-42 某人手握长棒一端猛击岩石, 意欲使棒折断. 为在碰撞时, 手不致于受到很大的冲击力, 设棒长 L 且匀质. 试问碰撞点与手的距离 l 取什么值较为合适?

解 撞击使棒制动, 制动前短时间内, 棒的运动可处理成绕着手握端的定轴转动, 制动前角速度记为 ω . 撞击时间 Δt 内, 略去其他力的作用, 棒受岩石的法向平均碰撞力 \bar{N} 的作用, 使棒的质心速度和转动角速度都降为零. 参考图 5-53 所示参量, 有

$$\bar{N}\Delta t = Mv_c, \quad v_c = \omega \cdot \frac{L}{2},$$

$$(\bar{N}l)\Delta t = I\omega, \quad I = \frac{1}{3}ML^2,$$

解得 $l = \frac{2}{3}L.$

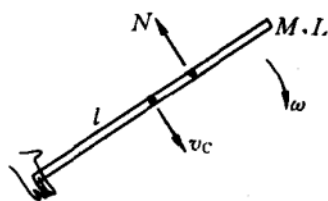


图 5-53

5-43 半径为 R_1, R_2 , 质量为 m_1, m_2

的两个匀质圆盘, 各自以角速度 ω_1, ω_2 绕自己的中心竖直轴顺时针方向无摩擦地在水平面上旋转. 而后使它们缓慢移近, 互相接触后保持转轴不动, 如图 5-54 所示.

(1) 计算两盘在接触处摩擦力作用下, 各自最终的转动角速度 ω_1', ω_2' .

(2) 试问过程中在地面系中能否找到一个参考点 P , 使得系统相对 P 点角动量守恒?

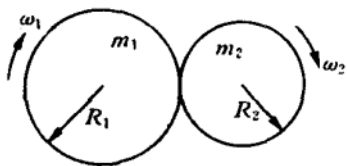


图 5-54

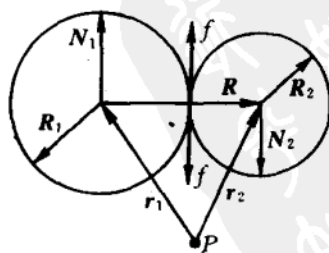


图 5-55

解 (1) 以顺时针方向作为旋转正方向, 终态接触处无相对滑动, 应有

$$\omega'_1 R_1 = -\omega'_2 R_2,$$

ω'_1, ω'_2 必是一正一负, 负者实为逆时针方向转动. 摩擦力大小记为 f , 方向如图 5-55 所示, 作用时间设为 Δt , 相对各自转轴有

$$\bar{f}R\Delta t = I_1(\omega'_1 - \omega_1), \quad I_1 = \frac{1}{2}m_1R_1^2,$$

$$\bar{f}R\Delta t = I_2(\omega'_2 - \omega_2), \quad I_2 = \frac{1}{2}m_2R_2^2,$$

式中 \bar{f} 为平均值. 据此解得

$$\omega'_1 = \frac{m_1R_1\omega_1 - m_2R_2\omega_2}{(m_1 + m_2)R_1},$$

$$\omega'_2 = \frac{m_2R_2\omega_2 - m_1R_1\omega_1}{(m_1 + m_2)R_2}.$$

(2) 不能.

为使两盘质心不动, 各自转轴提供支持力 N_1, N_2 , 方向已在图 5-55 示出, 大小为

$$N_1 = f, \quad N_2 = f.$$

相对任一参考点 P , 两个摩擦力作为内力, 它们的力矩之和自然为零, N_1, N_2 力矩之和则为

$$\mathbf{M}_P = N_1 \times \mathbf{r}_1 + N_2 \times \mathbf{r}_2 = (-N_2) \times \mathbf{r}_1 + N_2 \times \mathbf{r}_2$$

$$= N_2 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = N_2 \times \mathbf{R},$$

$$\mathbf{R} = R_1 + R_2,$$

可见过程中 \mathbf{M}_P 不为零, 系统相对参考点 P 的角动量不守恒.

5-44 半径 R 的均匀圆木在水平地面上以平动速度 v_0 作匀速纯滚动时, 与高 h 的台阶相遇, 接触处发生完全非弹性碰撞, 即在碰撞后图 5-56 中圆木与台阶侧棱接触部位 A 的速度降为零. 再设两者间的摩擦因数足够大, 使得部位 A 不会与台阶侧棱在而后的接触过程中发生相对滑动.

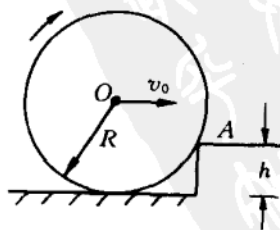


图 5-56

- (1) v_0 和 h 取何值时, 圆木能绕侧棱滚上台阶;
 (2) 在(1)问基础上, 确定部位 A 与侧棱间摩擦因数 μ 的取值范围.

解 (1) 碰撞前圆木转动角速度

$$\omega_0 = v_0/R,$$

碰后瞬间圆木转动角速度记为 ω_0^* , 因碰撞前后相对侧棱角动量守恒, 故有

$$I_A \omega_0^* = mv_0(R-h) + I_0 \omega_0, \quad I_A = \frac{3}{2}mR^2, \quad I_0 = \frac{1}{2}mR^2,$$

其中 m 为圆木质量. 可解得

$$\omega_0^* = (3R-2h)v_0/3R^2.$$

而后的定轴转动过程中机械能守恒, 为能滚上台阶, 首先要求

$$\frac{1}{2}I_A \omega_0^{*2} > mgh,$$

即得

$$v_0 > 2R \sqrt{3gh}/(3R-2h).$$

过程中除了摩擦因数足够大, 确保 A 与侧棱间无相对滑动, 还要求侧棱指向圆木中心的法向支持力 N 始终大于零. 参照图 5-57, 将转动过程中角速度记为 ω , 则有

$$N = mg \sin \theta - m\omega^2 R,$$

上滚时, θ 增大, $\sin \theta$ 增大, ω 减小 (因势能增大, 动能减小), 故 N 增大. 可见, N 在转动的最初时刻最小. 于是, 要求

$$0 < N_{\min} = mg \frac{R-h}{R} - m\omega_0^{*2} R,$$

即要求

$$v_0 < 3R \sqrt{(R-h)g}/(3R-2h).$$

综上所述, v_0 可取范围为

$$3R \sqrt{(R-h)g}/(3R-2h) > v_0 > 2R \sqrt{3gh}/(3R-2h).$$

为使上式能满足, 还要求

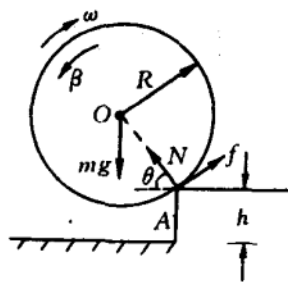


图 5-57

$$3R \sqrt{(R-h)g} > 2R \sqrt{3gh},$$

即得 h 可取范围为

$$h < \frac{3}{7}R.$$

(2) 相对台阶侧棱的转动定理公式为

$$mgR \cos \theta = I_A \beta,$$

角加速度沿逆时针方向,已在图 5-57 中示出.若取质心系中质心为参考点,转动定理公式又为

$$fR = I_0 \beta,$$

其中 f 是侧棱提供的摩擦力,方向也已在图 5-57 中示出.于是可得

$$f = \frac{I_0}{I_A} mg \cos \theta = \frac{1}{3} mg \cos \theta,$$

圆木上滚时, θ 增大, N 增大, f 减小,故 f/N 减小.可见, f/N 在转动的最初时刻最大.因此,

$$\mu \geq f_{\max}/N_{\min},$$

$$f_{\max} = \frac{1}{3} mg \frac{\sqrt{R^2 - (R-h)^2}}{R} = \frac{1}{3} mg \frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R},$$

$$N_{\min} = mg \frac{R-h}{R} - m\omega_0^2 R = mg \frac{R-h}{R} - mv_0^2 \frac{(3R-2h)^2}{9R^3},$$

μ 的可取范围为

$$\mu \geq \frac{\sqrt{h(2R-h)}}{3} \left[(R-h) - \frac{(3R-2h)^2}{9R^2g} v_0^2 \right].$$

5-45 刚体在参考系 S 中作平面平行运动时,不同时刻的瞬心在 S 系中的位置可形成迹线 L . t 时刻刚体瞬心 M 在 L 上的位置可用 S 系中的位矢 \mathbf{R}_M 标记, \mathbf{R}_M 是随时间 t 变化的矢量.引入 $\mathbf{v}_M^* = d\mathbf{R}_M/dt$,称为刚体瞬心在迹线上的转移速度,再将刚体在 S 系中的转动角速度记为 ω ,试导出刚体瞬心加速度 \mathbf{a}_M 与 \mathbf{v}_M^* , ω 的关系,且给出两个实例.

解 t 时刻瞬心设为 M ,速度 $\mathbf{v}_M = 0$,加速度记为 \mathbf{a}_M .在 $t+dt$ 时刻,刚体中的 M' 成为瞬心,并位于迹线 L 中的一点,迹线 L 中 M 到 M' 的移动量即为 $d\mathbf{R}_M$,在迹线 L 中 M 相对 M' 的位置矢量便是

$-dR_M$, 如图 5-58 所示.

$t+dt$ 时刻, 刚体中原 M 点应已随刚体运动而移动到新的位置, 其间位移量为 $v_M dt$, 这一新的位置相对 M' 的位矢便是

$$v_M dt + (-dR_M) = -dR_M,$$

其间利用了 $v_M = 0$. 在 $t+dt$ 时刻, 刚体中原 M 点的速度一方面为 $a_M dt$, 另一方面又为 $\omega \times (-dR_M)$, 即有

$$a_M dt = -\omega \times dR_M,$$

得
$$a_M = -\omega \times \frac{dR_M}{dt} = -\omega \times v_M^*,$$

v_M^* 沿迹线 L 的切线方向, 故 a_M 必与迹线 L 垂直.

实例 1 参考图 5-59, 半径 R 的圆环沿直线 PQ 纯滚动, 与地接触点 M 为瞬心, 瞬心迹线 L 与直线 PQ 重合, 有

$$v_M^* = v_0,$$

其中 v_0 为环心速度. 圆环绕 O 点转动角速度矢量 ω 方向如图 5-59 示, 大小为

$$\omega = v_0/R,$$

瞬心 M 的加速度便为

$$a_M = -\omega \times v_M^* : \begin{cases} \text{方向: 向上,} \\ \text{大小: } a_M = \omega^2 R, \end{cases}$$

不难验证这一结果是正确的(略).

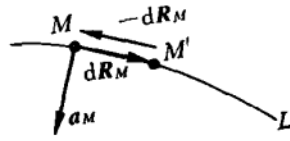


图 5-58

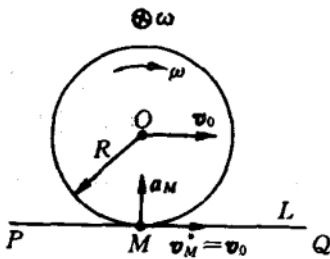


图 5-59

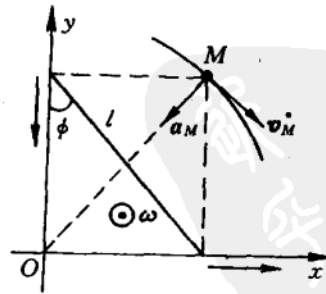


图 5-60

实例 2 长 l 的细杆以图 5-60 所示方式在 Oxy 坐标面上运动,

ϕ 方位时细杆转动角速度记为 ω , 瞬心迹线是以 O 为圆心、 l 为半径的四分之一圆周. v_M^* 方向如图所示, 大小为

$$v_M^* = \omega l,$$

得瞬心加速度为

$$a_M = -\omega \times v_M^* : \begin{cases} \text{方向: 指向 } O \text{ 点,} \\ \text{大小: } a_M = \omega^2 l, \end{cases}$$

可以验证这一结果是正确的, 此处仍从略.

5-46 在光滑水平地面上有一质量 M 、半径 R 的匀质圆盘, 盘边缘有一质量为 m 的小车(处理成质点), 开始时系统静止, 而后小车沿盘边缘逆时针方向运动, 如图 5-61 所示. 若小车相对圆盘转过 N 圈, 试问小车与盘心连线相对地面逆时针方向还是顺时针方向转过多少圈?

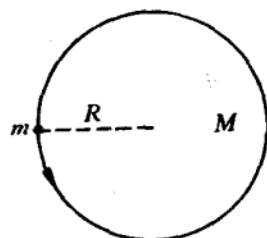


图 5-61

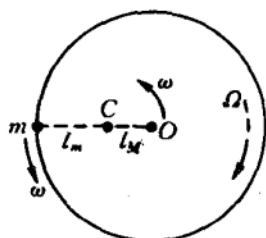


图 5-62

解 系统质心 C 到小车的距离和到盘心 O 的距离分别为

$$l_m = \frac{M}{M+m} R, \quad l_M = \frac{m}{M+m} R,$$

质心 C 相对地面不动, 小车、 C 、盘心 O 始终共线, 小车与 O 必以相同的逆时针方向角速度 ω 绕着 C 转动, 如图 5-62 所示. 为使系统在地面系相对 C 点角动量守恒, 圆盘绕 O 必有顺时针方向自转角速度 Ω , 如图 5-62 中虚线所示. 角动量守恒式为

$$I_0 \Omega = m \omega l_m^2 + M \omega l_M^2, \quad I_0 = \frac{1}{2} M R^2,$$

算得

$$\Omega = \frac{2m}{M+m} \omega,$$

小车相对圆盘逆时针方向角速度便为

$$\omega' = \omega + \Omega = \frac{M + 3m}{M + m} \omega.$$

小车相对圆盘逆时针方向转过的 $\theta' = N \cdot 2\pi$ 角度和小车与盘心连线相对地面逆时针方向转过的 $\theta_0 = N_0 \cdot 2\pi$ 角度之间的关系便是

$$N \cdot 2\pi = \theta' = \frac{M + 3m}{M + m} \theta_0 = \frac{M + 3m}{M + m} N_0 2\pi,$$

即得小车与盘心连线相对地面逆时针方向转过的圈数为

$$N_0 = \frac{M + m}{M + 3m} N.$$

关于本题角速度的合成关系,参看图 5-63,小车 m 位置从(1)平动到(2),再经 Ω 转动到(3),最终经 ω' 转动到(4).

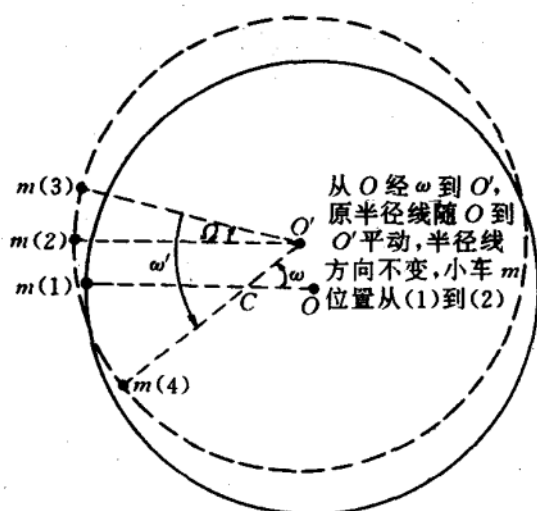


图 5-63

5-47 半径 R 、质量 m 的匀质球壳,开始时以角速度 ω_0 绕水平直径轴旋转. $t=0$ 时将球壳无初始平动地轻放在水平地面上,球壳与地面间的摩擦因数为 μ .

(1) 确定球壳恰好达到纯滚状态的时刻 t_0 ;

(2) 确定 $0 \leq t < t_0$ 时刻瞬心的位置 M 及其加速度 a_M .

解 球壳达纯滚前的运动学量及地面施加的水平摩擦力如图 5-64 所示.

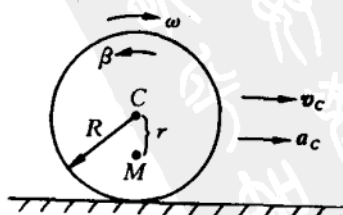


图 5-64

(1) 由

$$\mu mg = f = ma_C,$$

$$\mu mgR = fR = I_C\beta = \frac{2}{3}mR^2\beta,$$

得

$$a_C = \mu g, \quad v_C = a_C t = \mu g t,$$

$$\beta = 3\mu g/2R, \quad \omega = \omega_0 - \beta t = \omega_0 - \frac{3\mu g}{2R}t.$$

 t_0 时刻达纯滚, 要求 $v_C(t_0) = \omega(t_0)R$, 即

$$\mu g t_0 = \omega_0 R - \frac{3}{2}\mu g t_0,$$

得

$$t_0 = 2\omega_0 R / 5\mu g.$$

(2) $0 \leq t < t_0$ 时刻瞬心位置 M 如图所示, 即 M 在球心 C 下方

$$r = v_C / \omega = \mu g t / \left(\omega_0 - \frac{3\mu g}{2R}t \right) = 2R\mu g t / (2\omega_0 R - 3\mu g t)$$

处. M 相对 C 作变速圆周运动, 有

$$a'_{M\dot{C}}: \begin{cases} \text{方向: 竖直向上,} \\ \text{大小: } a'_{M\dot{C}} = \omega^2 r, \end{cases} \quad a'_{M\text{切}}: \begin{cases} \text{方向: 水平朝右,} \\ \text{大小: } a'_{M\text{切}} = \beta r. \end{cases}$$

 M 相对地面加速度便为

$$a_M = a'_M + a_C,$$

$$a_{M//}: \begin{cases} \text{方向: 水平朝右,} \\ \text{大小: } a_{M//} = a'_{M\text{切}} + a_C = \frac{2\omega_0 R}{2\omega_0 R - 3\mu g t} \mu g. \end{cases}$$

$$a_{M\perp}: \begin{cases} \text{方向: 竖直向上,} \\ \text{大小: } a_{M\perp} = a'_{M\dot{C}} = \frac{(2\omega_0 R - 3\mu g t)\mu g t}{2R}. \end{cases}$$

5-48 如图 5-65 所示, 质量 m 、半径 R 的匀质圆环静止在水平地面上, 它的水平直径右端点连结一个质量也是 m 的小物体 P . 系统自由释放后, 假设环与地面间不会发生相对滑动, 试求圆环转过 θ 角时,

(1) 圆环转动角速度 ω ;(2) 圆环受地面静摩擦力 f .

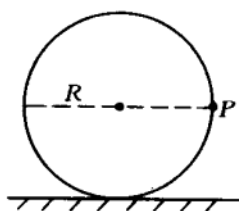


图 5-65

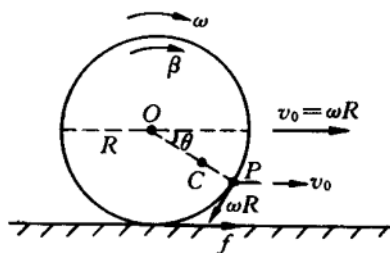


图 5-66

解 (1) 转过 θ 角, 参照图 5-66, 建立能量方程和运动关联式:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 + \frac{1}{2}mv_P^2 = mgR \sin \theta,$$

$$v_0 = \omega R,$$

$$I_0 = mR^2,$$

$$v_{P//} = v_0 - \omega R \sin \theta,$$

$$v_{P\perp} = \omega R \cos \theta.$$

可简化成

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 + \frac{1}{2}m[(\omega R - \omega R \sin \theta)^2 + \omega^2 R^2 \cos^2 \theta] \\ = mgR \sin \theta, \end{aligned}$$

解得

$$\omega = \sqrt{\frac{\sin \theta}{2 - \sin \theta}} \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

(2) 由

$$\omega^2 = \frac{\sin \theta}{2 - \sin \theta} \frac{g}{R}, \quad 2\omega\beta = \left(\frac{\sin \theta}{2 - \sin \theta} \right)'_{\theta} \cdot \omega \frac{g}{R},$$

可算得环的角加速度为

$$\beta = \frac{\cos \theta}{(2 - \sin \theta)^2} \frac{g}{R}.$$

(注意, 相对系统质心 C , 有环的重力力矩、 P 的重力力矩、地面支持力 N 的力矩和摩擦力 f 的力矩, 前两个力矩相互抵消, N 的力矩必大于 f 的力矩, 以产生有图示顺时针方向的角加速度 β 。) 系统质心 C 的水平方向速度, 从几何关系可知, 必为

$$v_{C//} = \frac{1}{2}(v_0 + v_{P//}) = \frac{1}{2}\omega R(2 - \sin \theta),$$

水平方向加速度便是

$$\begin{aligned} a_{c//} &= \frac{1}{2}\beta R(2 - \sin\theta) + \frac{1}{2}\omega R(-\cos\theta)\omega \\ &= \frac{(1 - \sin\theta)\cos\theta}{2(2 - \sin\theta)} g, \end{aligned}$$

由质心运动定理,得

$$f = 2ma_{c//} = \frac{(1 - \sin\theta)\cos\theta}{2 - \sin\theta} mg.$$

5-49 质量 m 、半径 r 的匀质球位于倾角为 θ 的斜面底端. 开始时球的中心速度为零, 球相对过中心且与斜面平行的水平轴以角速度 ω_0 旋转, 如图 5-67 所示. 已知球与斜面间的摩擦因数 $\mu > \tan\theta$, 球在摩擦力作用下会沿斜面向上运动, 试求球能上升的最大高度 h .

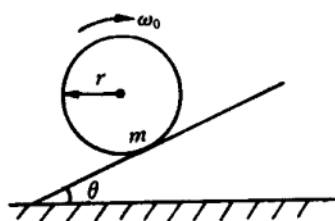


图 5-67

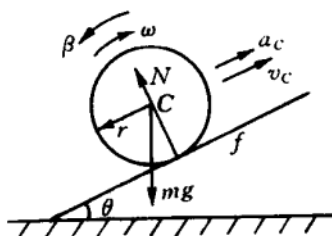


图 5-68

解 分两阶段讨论小球沿斜面的爬高.

第一阶段, 从开始到小球在斜面上刚达到纯滚状态.

此阶段斜面摩擦力斜向上, 是动摩擦力, 如图 5-68 所示. 参照图示参量, 可列方程:

$$\begin{aligned} N &= mg \cos\theta, & f &= \mu N, \\ f - mg \sin\theta &= ma_c, & v_c &= a_c t, \\ fr &= I_c \beta, & I_c &= \frac{2}{5} mr^2, & \omega &= \omega_0 - \beta t, \end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned} a_c &= (\mu \cos\theta - \sin\theta)g > 0, & v_c &= (\mu \cos\theta - \sin\theta)gt, \\ \beta &= 5\mu g \cos\theta / 2r, & \omega &= \omega_0 - (5\mu g \cos\theta / 2r)t. \end{aligned}$$

刚达到纯滚时, 有

$$\omega r = v_c,$$

该时刻与球心速度分别为

$$t_1 = 2\omega_0 r / (7\mu \cos \theta - 2 \sin \theta) g,$$

$$v_{c1} = 2\omega_0 r (\mu \cos \theta - \sin \theta) / (7\mu \cos \theta - 2 \sin \theta).$$

此阶段小球沿斜面爬升路程为

$$l_1 = v_{c1}^2 / 2a_c = 2\omega_0^2 r^2 (\mu \cos \theta - \sin \theta) / (7\mu \cos \theta - 2 \sin \theta)^2 g.$$

第二阶段,从刚进入纯滚状态到小球中心沿斜面向上速度降为零.

过程中,斜面对小球若无摩擦力,或有向下的静摩擦力或滑动摩擦力, v_c 都会减小, ω 或不变,或增大,球与斜面接触点相对斜面便会向下滑动,又应受向上滑动摩擦力,有矛盾,不可取. 过程中,斜面若对小球仍有向上滑动摩擦力,则如第一阶段, v_c 继续增大, ω 继续减小,小球与斜面接触点向上滑动,应受向下的滑动摩擦力,仍有矛盾,也不可取.

综上所述,此过程中斜面对小球必定有向上的静摩擦力 f' , 此力一方面使 ω 继续减小,同时与重力分力联合使 v_c 也减小,两者配合,保证小球与斜面接触点速度为零. 可见,第二阶段实为小球纯滚减速阶段,直到 v_c, ω 均降到零为止.

f' 方向如图 5-69 所示,可列方程组:

$$mg \sin \theta - f' = ma'_c,$$

$$f' r = I_c \beta,$$

$$a'_c = \beta r,$$

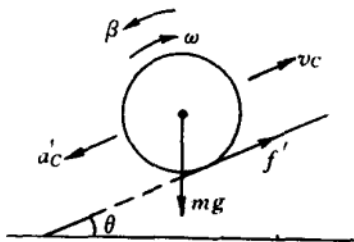


图 5-69

解得
$$a'_c = \frac{5}{7} g \sin \theta.$$

(还可得

$$f' = \frac{2}{7} mg \sin \theta < mg \sin \theta = \tan \theta mg \cos \theta$$

$$< \mu mg \cos \theta = f,$$

f 即为第一阶段所述滑动摩擦力,可见 f' 确为静摩擦力.)

小球球心速度降为零前,又沿斜面爬升路程

$$l_2 = v_{c1}^2 / 2a'_c$$

$$= 14\omega_0^2 r^2 (\mu \cos \theta - \sin \theta)^2 / 5g \sin \theta (7\mu \cos \theta - 2 \sin \theta)^2,$$

最后, 可得小球爬升的高度为

$$h = (l_1 + l_2) \sin \theta$$

$$= 2\omega_0^2 r^2 (\mu \cos \theta - \sin \theta) / 5(7\mu \cos \theta - 2 \sin \theta)g.$$

5-50 光滑桌面上有两个半径同为 R 、质量同为 m 的匀质刚性圆盘 A, B . 设 A 以平动速度 v 与静止的 B 相碰, 接触时连心线与 v 方向线成 45° 夹角, 如图 5-70 所示. 已知碰撞过程中连心线方向为弹性碰撞, 但接触处有切向摩擦, 摩擦因数为 μ . 试求碰后 A, B 的平动速度 v_A, v_B 和各自转动角速度 ω_A, ω_B , 答案须按图中所示的 x, y, z 坐标轴给出各矢量的分量表述.

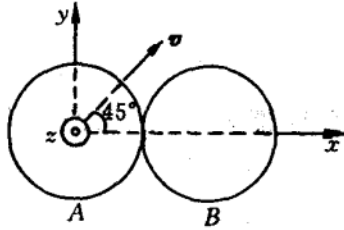


图 5-70

解 A 的初速度分解为

$$v_x = \frac{\sqrt{2}}{2}v, \quad v_y = \frac{\sqrt{2}}{2}v,$$

连线方向正碰力记为 N , 作用时间记为 Δt_N , 接触处摩擦力 $f = \mu N$, 作用时间记为 Δt_f . 考虑到弹性碰撞使 A, B 交换 x 方向速度, 可列下述方程:

$$x \text{ 方向平动: } A, B: \quad N\Delta t_N = mv_x. \quad (1)$$

$$y \text{ 方向平动: } A: \quad mv_y - mv_{Ay} = f\Delta t_f = \mu N\Delta t_f, \quad (2)$$

$$B: \quad mv_{By} = f\Delta t_f = \mu N\Delta t_f, \quad (3)$$

$$\text{转动: } A, B: \quad \mu N\Delta t_f R = f\Delta t_f R = I\omega, \quad (4)$$

其中 $I = \frac{1}{2}mR^2$. 下面分两种情况讨论.

(1) $\Delta t_f = \Delta t_N = \Delta t$ (等效为 $\mu \leq 1/6$).

由①~④式可解得

$$v_{Ay} = (1 - \mu) \frac{\sqrt{2}}{2}v, \quad v_{By} = \mu \frac{\sqrt{2}}{2}v, \quad \omega = \sqrt{2} \mu \frac{v}{R}.$$

碰后 A 中与 B 的接触点 P_A 速度为

$$v_{P_A} = v_{Ay} - \omega R = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 3\mu)v,$$

碰后 B 中与 A 的接触点 P_B 速度为

$$v_{P_{By}} = v_{By} + \omega R = \frac{3}{2} \sqrt{2} \mu v,$$

$\Delta t_f = \Delta t_N$ 成立的条件是

$$v_{P_{Ay}} \geq v_{P_{By}} \longrightarrow \mu \leq \frac{1}{6}.$$

若 $\mu > \frac{1}{6}$, 则 $\Delta t_f < \Delta t_N$, 即当达到

$$v_{P_{Ay}} = v_{P_{By}}$$

时, 摩擦力 $f = \mu N$ 便消失, 对应下面的情况.

(2) $\Delta t_f < \Delta t_N$ (等效为 $\mu > 1/6$)

此时必有

$$v_{Ay} - \omega R = v_{By} + \omega R, \quad (5)$$

将⑤式与①~④式联立, 解得

$$v_{Ay} = \frac{5\sqrt{2}}{12}v, \quad v_{By} = \frac{\sqrt{2}}{12}v, \quad \omega = \frac{\sqrt{2}v}{6R}.$$

最后答案可表述为

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A(0, v_{Ay}, 0), & \quad \mathbf{v}_B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}v, v_{By}, 0\right), \\ \boldsymbol{\omega}_A(0, 0, -\omega), & \quad \boldsymbol{\omega}_B(0, 0, -\omega). \end{aligned}$$

$\mu \leq \frac{1}{6}$ 时:

$$v_{Ay} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \mu)v, \quad v_{By} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mu v, \quad \omega = \sqrt{2}\mu \frac{v}{R}.$$

$\mu > \frac{1}{6}$ 时:

$$v_{Ay} = \frac{5\sqrt{2}}{12}v, \quad v_{By} = \frac{\sqrt{2}}{12}v, \quad \omega = \frac{\sqrt{2}v}{6R}.$$

5-51 匀质细杆的 A 端约束在光滑的水平长横梁上, 且可在横梁上自由滑行, 引入细杆与竖直方向夹角 θ 如图 5-71 所示. 设开始时 $\theta = \pi/2$, 而后从静止释放细杆, 试问 θ 降到多大锐角时横梁给细杆 A 端的向上支持力 N 等于细杆所受重力 mg ?

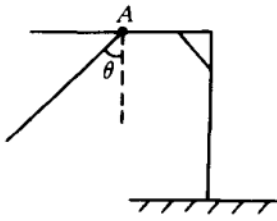


图 5-71

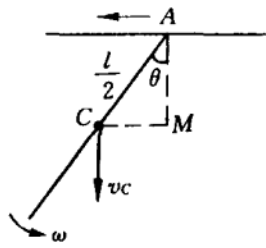


图 5-72

解 细杆长记为 l , 因无水平外力, 细杆质心在竖直方向上运动, θ 角位置时质心速度记为 v_C , 转动角速度记为 ω , 则有

$$mg \frac{l}{2} \cos \theta = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2, \quad (1)$$

$$I_C = \frac{1}{12} m l^2. \quad (2)$$

参考图 5-72, 此时细杆瞬心为 M , 有

$$v_C = \left(\frac{l}{2} \sin \theta \right) \omega, \quad (3)$$

②③式代入①式, 解得

$$v_C^2 = 3lg \sin^2 \theta \cos \theta / (1 + 3 \sin^2 \theta),$$

两边对 t 求导, 可得

$$2v_C a_C = 3lg \left(\frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{1 + 3 \sin^2 \theta} \right)' \cdot \omega.$$

将③式代入, 消去 ω 后, 得

$$a_C = 3g \frac{2 - 3 \sin^2 \theta - 3 \sin^4 \theta}{(1 + 3 \sin^2 \theta)^2},$$

据质心运动定理, 当 $a_C = 0$ 时, 即当

$$\theta = \arcsin \left(\frac{\sqrt{33} - 3}{6} \right)^{\frac{1}{2}} = 42^\circ 33'$$

时 $N = mg$.

5-52 如图 5-73 所示, 质量 M 的匀质细杆 AB 静止在光滑水平面上, B 端的弹簧机构(其质量可略)将质量 m 的小球相对地面以速度 v 水平弹出, v 的方向与 AB 杆的夹角记为 ϕ . 设弹出的小球恰好

能与细杆的 A 端相遇, 且细杆转过的角度不超过 π , 试求质量比 $\gamma = M/m$ 和角度 ϕ 的取值范围.

解 参考图 5-74, 小球弹出后匀速运动, 细杆有随质心 C 的平动和绕质心 C 的转动. 设经 Δt 时间后, 细杆首先平动到 $A'B'$ 位置, 再转到 $A''B''$ 位置, 小球经过 Δt 时间刚好到达 A'' 位置与细杆 A 端相遇. 设细杆长 l , 质心速度为 v_c , 旋转角速度为 ω , 有

$$mv = Mv_c,$$

$$\frac{l}{2}mv \sin \phi = I_C \omega.$$

将 $I_C = \frac{1}{12}Ml^2$ 代入, 算得

$$v_c = \frac{m}{M}v = \frac{1}{\gamma}v,$$

$$\omega = \frac{6mv}{Ml} \sin \phi = \frac{6v}{\gamma l} \sin \phi.$$

据图 5-74 所示几何关系, 小球与细杆 A 端相遇在 A'' 位置的条件是

$$\phi + \alpha = \omega \Delta t,$$

$$\frac{1}{2}(v + v_c)\Delta t = \frac{l}{2} \cos \phi,$$

考虑到 $\overline{CB} = \overline{C'A''}$ 及 $CC' \parallel A''B''$, 不难导得

$$\alpha = \phi.$$

由上述诸式可解得

$$\frac{1}{3}(1 + \gamma) = \sin 2\phi / 2\phi,$$

因 $0 < \phi < \pi/2$, 故

$$\sin 2\phi / 2\phi < 1, \quad \frac{1}{3}(1 + \gamma) < 1,$$

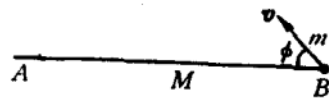


图 5-73

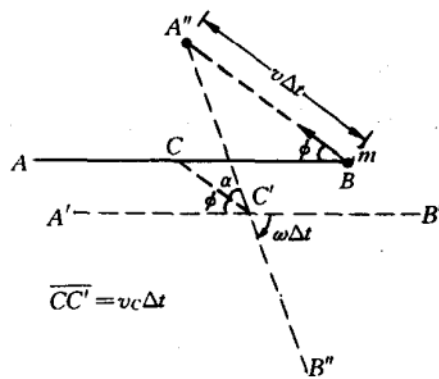


图 5-74

得 $0 < \gamma < 2.$

同时,因 $\gamma > 0$,又有 $\sin 2\phi/2\phi > \frac{1}{3},$

得 $0 < \phi < 1.139 \text{ rad}.$

5-53 如图 5-75 所示,在匀质刚性圆盘中间切割出一个半径为原圆盘半径二分之一的同轴小圆盘,切割使小圆盘与其外部圆环之间形成很小的缝隙,缝隙宽度虽可略,但它却使小圆盘与圆环之间只有点接触(因盘有厚度,实际上相接触的是垂直于盘面的一小段直线).将系统放在水平地面上,通过打击使它们具有共同的沿水平方向的初速度 v_0 .

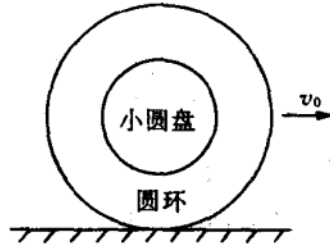


图 5-75

设圆环与地面间的摩擦因数 $\mu_0 = 0.5$,圆环与小圆盘间的摩擦因数记为 μ .

(1) 设在而后的运动过程中,圆环与小圆盘之间曾发生过相对滑动,试确定 μ 的取值范围;

(2) 取 $\mu = 0.2$,试求系统最后沿水平方向的速度.

解 运动过程分析.

圆环因受地面左向摩擦力,将顺时针转动,并通过与小圆盘间的摩擦力,带动小圆盘也作顺时针转动. μ 足够大时,小圆盘与圆环一起转动,其间无相对滑动. μ 较小时,小圆盘的转动会落后于圆环的转动,其间有相对滑动.小圆盘转动角加速度记为 β_1 ,角速度记为 ω_1 ;圆环的相应量分别记为 β_2, ω_2 ;系统质心左向加速度记为 a ,系统右行速度记为 v .下面分阶段讨论系统运动情况.

第一阶段: $\beta_1 < \beta_2, \omega_1 < \omega_2, a$ 对 v 起减速作用.当 ω_2 达到与 v 匹配,恰好使圆环与地面的接触点为瞬心时,即当

$$\omega_2 \cdot 2R = v$$

时,地面滑动摩擦力消失.上式中 R 为小圆盘半径.

第二阶段:因 $\omega_1 < \omega_2$,小圆盘与圆环间的滑动摩擦继续存在,使 ω_1 继续加速, ω_2 继续减速,圆环与地面的接触点又有相对滑动趋势,圆环又会受到地面摩擦力作用.

圆环所受地面摩擦力不能向右,否则质心会加速,圆环角速度 ω_2 减小,使接触点右行,会与摩擦力向右矛盾.地面摩擦力只能向左,但又不能是滑动摩擦力,否则动力学方程与第一阶段完全相同,将使 ω_2 继续加速,质心继续减速,圆环的触地点左行,与摩擦力向左矛盾.

综上所述,圆环所受地面摩擦力只能是向左的静摩擦力,触地点仍为瞬心.这样, ω_2 减小,质心继续减速,且两者匹配,有

$$a = \beta_2 \cdot 2R, \quad v = \omega_2 \cdot 2R,$$

当 ω_2 减小到与 ω_1 相等,小圆盘与圆环间无相对滑动时,系统达到稳定状态,此后,质心右行速度为恒量.

小圆盘与圆环间作用力的分析如下.

运动过程中,无论小圆盘与圆环之间作用力的作用点在何位置,小圆盘所受法向支持力 N_1 与摩擦力 f_1 均应满足下述关系:

$$f_1 \perp N_1, \quad f_1 = \mu N_1,$$

其中 N_1 未必在竖直方向, N_1 也未必等于小圆盘所受重力大小.小圆盘所受圆环的合作力为

$$F_1 = f_1 + N_1, \quad F_1 = \sqrt{1 + \mu^2} N_1,$$

且有

$$F_{1\perp} = mg, \quad F_{1\parallel} = ma,$$

其中 m 是小圆盘的质量.据此,有

$$N_1 = \frac{m \sqrt{a^2 + g^2}}{\sqrt{1 + \mu^2}}, \quad f_1 = \frac{\mu m \sqrt{a^2 + g^2}}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

开始时圆环与小圆盘接触点在小圆盘正右侧略偏下处,第一阶段中接触点降在小圆盘右下侧某处,第二阶段接触点进一步下降在右下侧另一处,最后达到稳定运动状态时,接触点在小圆盘正下方.接触点以上四个位置的过渡是连续的,但因缝隙极小,过渡的时间可视为无穷小,忽略,按不连续过渡方式处理.

(1) 小圆盘质量记成 m ,圆环质量便是 $3m$,它们各自相对中心轴转动惯量分别为

$$I_1 = \frac{1}{2} m R^2, \quad I_2 = \frac{15}{2} m R^2.$$

设圆环受地面支持力与摩擦力大小分别为 N_2 与 f_2 , 其他物理量已在前面的分析中设定.

第一阶段运动过程中, 参考图 5-76, 对于小圆盘, 有

$$F_{1\perp} = mg, \quad (1)$$

$$F_{1\parallel} = ma, \quad (2)$$

$$f_1 = \frac{\mu m \sqrt{a^2 + g^2}}{\sqrt{1 + \mu^2}}, \quad (3)$$

$$f_1 R = I_1 \beta_1. \quad (4)$$

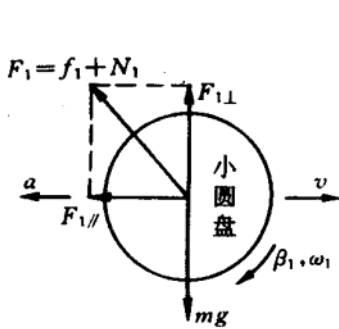


图 5-76

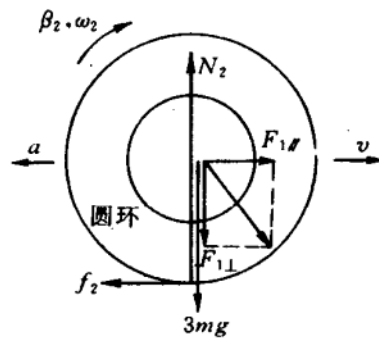


图 5-77

参考图 5-77, 对于圆环, 有

$$f_2 - F_{1\parallel} = 3ma, \quad (5)$$

$$N_2 = 3mg + F_{1\perp}, \quad (6)$$

$$f_2 \cdot 2R - f_1 R = I_2 \beta_2, \quad (7)$$

$$f_2 = \mu_0 N_2. \quad (8)$$

由①~⑧式, 可解出其中所含的 8 个未知量, 感兴趣的有

$$a = \mu_0 g = g/2, \quad (9)$$

$$\beta_1 = 2 \sqrt{\frac{1 + \mu_0^2}{1 + \mu^2}} \mu \frac{g}{R} = \sqrt{\frac{5}{1 + \mu^2}} \mu \frac{g}{R}, \quad (10)$$

$$\beta_2 = \frac{2}{15} \left[8\mu_0 - \sqrt{\frac{1 + \mu_0^2}{1 + \mu^2}} \mu \right] \frac{g}{R} = \frac{1}{15} \left(8 - \sqrt{\frac{5}{1 + \mu^2}} \mu \right) \frac{g}{R}. \quad (11)$$

小圆盘与圆环间有相对滑动, 要求

$$\beta_2 > \beta_1, \quad \text{即} \quad \mu < \frac{1}{\sqrt{19}} = 0.23, \quad (12)$$

这就是 μ 的取值范围.

(2) 所给 $\mu=0.2$, 满足⑫式的要求, 代入⑩和⑪式, 得

$$\beta_1 = 0.44 \frac{g}{R}, \quad \beta_2 = 0.50 \frac{g}{R}.$$

当

$$(\beta_2 t) \cdot (2R) = \omega_2' \cdot (2R) = v' = v_0 - at = v_0 - \mu_0 g t$$

时, 第一阶段运动结束, 此时可求得

$$v' = 0.67v_0, \quad \omega_2' = 0.33 \frac{v_0}{R}, \quad \omega_1' = \frac{\beta_1}{\beta_2} \omega_2 = 0.29 \frac{v_0}{R},$$

即有 $\omega_2' > \omega_1'$. 据前面的分析可知, 系统将进入第二阶段运动.

在第二阶段运动中, 圆环受到地面左向静摩擦力, ①~⑥式仍成立, ⑧式不成立, 改取为

$$a = \beta_2 \cdot 2R, \quad (13)$$

β_2 沿逆时针方向, 故⑦式应改为

$$f_2 \cdot 2R - f_1 R = I_2 (-\beta_2), \quad (7')$$

为方便, 引入 μ_0' , 使其满足

$$f_2 = \mu_0' N_2. \quad (8')$$

⑦'⑧'式与⑦⑧式有相同形式, 故①~⑥及⑦'⑧'式有与⑨⑩⑪式类似的解:

$$a = \mu_0' g, \quad (9')$$

$$\beta_1 = 2 \sqrt{\frac{1 + \mu_0'^2}{1 + \mu^2}} \mu \frac{g}{R}, \quad (10')$$

$$-\beta_2 = \frac{2}{15} \left[8\mu_0' - \sqrt{\frac{1 + \mu_0'^2}{1 + \mu^2}} \mu \right] \frac{g}{R}. \quad (11')$$

结合⑬式, 并将 $\mu=0.2$ 代入, 得

$$\mu_0' = 0.0167,$$

代入⑨'⑩'⑪'式, 得

$$a = 0.0167g, \quad \beta_1 = 0.39 \frac{g}{R}, \quad \beta_2 = 0.0083 \frac{g}{R}.$$

注意, β_1 使 ω_1 增大, β_2 使 ω_2 减小. 设再经 t' 时间达到

$$\omega_1 = \omega_2, \quad \text{即} \quad \omega'_1 + \beta_1 t' = \omega'_2 - \beta_2 t',$$

$$\text{解得} \quad t' = \frac{\omega'_2 - \omega'_1}{\beta_1 + \beta_2} = 0.050 \frac{v_0}{g},$$

此后系统达到稳定的纯滚状态,其水平向右速度恒为

$$v = v' - at' = 0.67v_0.$$

略去细微过程,这一结果也可用简单的方法获得.取地面某点为参考点,重力、地面支持力和摩擦力的力矩之和为零,系统角动量守恒,即有

$$(4m)v_0 \cdot (2R) = (4m)v \cdot (2R) + (I_1 + I_2)\omega, \quad \omega = v/2R,$$

便得

$$v = \frac{2}{3}v_0 = 0.67v_0.$$

5-54 匀质小球从圆柱面顶端自静止下滚,过程参量均已在图 5-78 中示出.

(1) 为保证在 $\phi \leq 45^\circ$ 的范围内小球作纯滚动,试求摩擦因数 μ 的取值范围;

(2) 设 $\mu = 0.7$, 试求纯滚结束时小球质心速度 v_1 ;

(3) 试求小球离开圆柱面时角位置 ϕ 所满足的方程(不必求解).

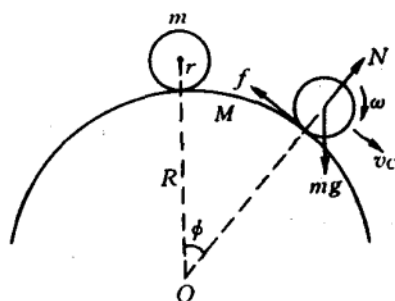


图 5-78

解 (1) 可为小球列出下述方程:

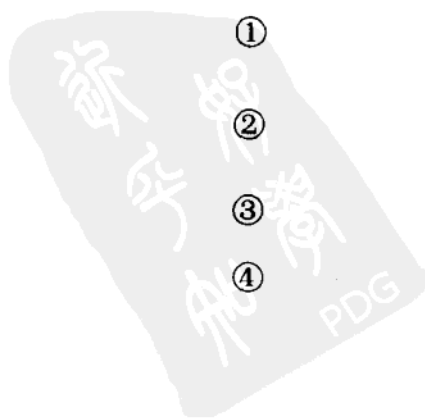
$$mg \sin \phi - f = m \frac{dv_c}{dt}, \quad \text{①}$$

$$mg \cos \phi - N = \frac{mv_c^2}{R + r}, \quad \text{②}$$

$$fr = I \frac{d\omega}{dt}, \quad \text{③}$$

$$v_c = \omega r, \quad \text{④}$$

由①③④式,得



$$\left(\frac{I}{r} + mr\right) \frac{d\omega}{dt} = mg \sin \phi. \quad (5)$$

因

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\omega}{d\phi} \dot{\phi}, \quad (6)$$

由④式 $v_C = \omega r$ 和 $v_C = (R+r)\dot{\phi}$, 得

$$\dot{\phi} = \frac{v_C}{R+r} = \frac{r}{R+r} \omega, \quad (7)$$

由⑥⑦式得

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{r}{R+r} \omega \frac{d\omega}{d\phi}, \quad (8)$$

由⑤⑧式得

$$\omega d\omega = \frac{mg(R+r)}{I+mr^2} \sin \phi d\phi,$$

积分, 得

$$\frac{1}{2} \omega^2 = -\frac{mg(R+r)}{I+mr^2} \cos \phi + C,$$

由初条件 $t=0$ 时, $\phi=0, \omega=0$ 和 $I=\frac{2}{5}mr^2$ 确定 C 后, 得

$$\omega^2 = \frac{10(R+r)}{7r^2} g(1 - \cos \phi). \quad (9)$$

将④⑨式代入②式, 得

$$N = mg \left(\frac{17}{7} \cos \phi - \frac{10}{7} \right), \quad (10)$$

⑨式对 ϕ 求导, 得 $2\omega \frac{d\omega}{d\phi} = \frac{10(R+r)}{7r^2} g \sin \phi$,

代入⑧式, 得 $\frac{d\omega}{dt} = \frac{5}{7r} g \sin \phi$,

代入③式, 得 $f = \frac{2}{7} mg \sin \phi$,

纯滚要求

$$f \leq \mu N, \quad \text{即} \quad \mu \geq 2 \sin \phi / (17 \cos \phi - 10),$$

在 $\phi \leq 45^\circ$ 范围内为保证小球纯滚, μ 的取值范围为

$$\mu \geq 0.7. \quad (11)$$

注意以下两点:

第一, 可据机械能守恒式

$$mg(R+r)(1-\cos\phi) = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \quad v_c = \omega r,$$

直接获得⑨式.

第二, 若设小球在离开圆柱面之前, 始终作纯滚动, 则由⑩式脱离圆柱面时 $N=0$, 得相应的方位角应满足

$$\cos\phi = \frac{10}{17}, \quad \text{即} \quad \phi = 54^\circ.$$

应当指出, 这种计算是错误的. 因为小球在离开圆柱面之前, 已经从纯滚状态进入又滚又滑状态. 除非 μ 为无穷大, 否则小球不可能在脱离圆柱面前始终处于纯滚状态, 因此⑩式不能用来确定小球离开圆柱面时的方位角.

(2) 由(1)问可知, 纯滚结束时, 小球方位角 ϕ_1 , 应满足

$$\mu = 2 \sin\phi_1 / (17 \cos\phi_1 - 10), \quad (12)$$

$\mu=0.7$ 对应

$$\phi_1 = 45^\circ.$$

据②⑩式, 得此时小球质心速度应满足

$$\frac{v_1^2}{R+r} = \frac{10}{7}g(1-\cos\phi_1), \quad (13)$$

故小球结束纯滚时的质心速度为

$$v_1 = \sqrt{\frac{5}{7}(2-\sqrt{2})(R+r)g}.$$

(3) 在又滚又滑阶段, 小球受滑动摩擦力

$$f = \mu N,$$

质心运动方程为

$$mg \sin\phi - \mu N = ma_c, \quad (14)$$

$$mg \cos\phi - N = mv_c^2 / (R+r). \quad (15)$$

将

$$a_c = \frac{dv_c}{dt} = \frac{dv_c}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dt} = \frac{dv_c}{d\phi} \cdot \frac{v_c}{R+r} = \frac{1}{2(R+r)} \frac{dv_c^2}{d\phi},$$

代入⑭式,得

$$mg \sin \phi - \mu N = \frac{m}{2(R+r)} \frac{dv_C^2}{d\phi}, \quad (16)$$

由⑮⑯式,消去 N ,得

$$\frac{dv_C^2}{d\phi} - 2\mu v_C^2 + 2(R+r)g(\mu \cos \phi - \sin \phi) = 0. \quad (17)$$

⑰式相应的齐次方程 $(dv_C^2/d\phi) - 2\mu v_C^2 = 0$ 的通解为

$$v_{C1}^2 = Ae^{2\mu\phi},$$

其中 A 为任意常量. ⑰式的特解设为

$$v_{C2}^2 = B \cos \phi + C \sin \phi,$$

代入⑰式后,得

$$\begin{aligned} & [B + 2\mu C + 2(R+r)g] \sin \phi \\ & = [C - 2\mu B + 2\mu(R+r)g] \cos \phi, \end{aligned}$$

此式对任意 ϕ 都成立,可解得

$$B = \frac{2(R+r)(2\mu^2 - 1)g}{1 + 4\mu^2}, \quad C = -\frac{6\mu(R+r)g}{1 + 4\mu^2},$$

故⑰式的通解为

$$\begin{aligned} v_C^2 &= v_{C1}^2 + v_{C2}^2 \\ &= \frac{R+r}{1 + 4\mu^2} g [2(2\mu^2 - 1) \cos \phi - 6\mu \sin \phi] + Ae^{2\mu\phi}. \end{aligned} \quad (18)$$

由初条件 $\phi = \phi_1$ 时 $v_C = v_1$,可确定

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{10}{7}(1 + 4\mu^2)(1 - \cos \phi_1) - 2(2\mu^2 - 1) \cos \phi_1 \right. \\ & \quad \left. + 6\mu \sin \phi_1 \right] (R+r) g e^{-2\mu\phi_1}. \end{aligned} \quad (19)$$

设 $\phi = \phi_2$ 时小球脱离圆柱面,此时 $N = 0$,由⑮式,得

$$mg \cos \phi_2 = mv_2^2 / (R+r),$$

式中 v_2 是 $\phi = \phi_2$ 时的质心速度,可由⑱⑲式确定. 据此可导得

$$\begin{aligned} \cos \phi_2 &= \frac{1}{1 + 4\mu^2} [2(2\mu^2 - 1) \cos \phi_2 - 6\mu \sin \phi_2] \\ & \quad + \left[\frac{10}{7}(1 + 4\mu^2)(1 - \cos \phi_1) \right. \end{aligned}$$

$$-2(2\mu^2 - 1)\cos\phi_1 + 6\mu\sin\phi_1 \Big] e^{2\mu(\phi_2 - \phi_1)}, \quad (20)$$

这就是确定小球脱离圆柱面时方位角 ϕ_2 的方程.

作为一个特例, 设 $\mu=0$, 则由(12)式 $\phi_1=0$, 将(20)式化为

$$\cos\phi_2 = -2\cos\phi_2 + 2, \quad \text{即} \quad \cos\phi_2 = \frac{2}{3}.$$

5-55 质量 M 、半径 R 的匀质圆筒直立地放在光滑水平面上, 质量 m 的小球可从圆筒顶部沿圆筒内壁的等距螺旋构槽无摩擦地下滑, 筒高 h 恰好等于螺距. 将系统从静止状态自由释放, 试求小球落地前相对地面系通过的路程 s .

解 在水平方向上系统质心 C 不动, 小球 m 、筒心 O 与 C 共线地绕着 C 作圆周运动, 圆半径分别为

$$r_m = \frac{M}{M+m} R, \quad r_M = \frac{m}{M+m} R,$$

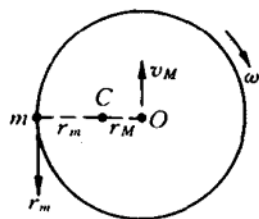


图 5-79

圆运动速度分别记为 v_m, v_M , 圆筒自转角速度

记为 ω , 方向如图 5-79 所示. 由水平方向上动量守恒和角动量守恒式

$$mv_m = Mv_M, \quad mr_mv_m + Mr_Mv_M = I\omega, \quad I = MR^2,$$

可求得
$$\omega = \frac{m}{MR} v_m.$$

引入小球相对质心 C 旋转角速度

$$\omega_m = v_m/r_m,$$

可得
$$\omega = \frac{m}{M+m} \omega_m,$$

小球相对圆筒的旋转角速度便为

$$\omega'_m = \omega_m + \omega = \frac{M+2m}{M+m} \omega_m.$$

dt 时间内小球相对地面系转过的水平圆弧长 dl 和相对圆筒转过的水平圆弧长分别为

$$dl = \omega_m r_m dt, \quad dl' = \omega'_m R dt,$$

其间关系便是

$$dl = \frac{\omega_m r_m}{\omega'_m R} dl' = \frac{M}{M+2m} dl',$$

对落地前全过程积分,得

$$l = \frac{M}{M+2m} 2\pi R.$$

因此,落地前小球相对地面系通过的路程为

$$s = \sqrt{l^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi M}{M+2m}\right)^2 R^2 + h^2}.$$

5-56 小心地让一枚硬币在水平桌面上纯滚动,有可能会滚出一个圆周轨道来,此时硬币自转轴稍稍向内倾斜,如图 5-80 所示. 设圆轨道半径为 R , 硬币半径 $r \ll R$, 硬币中心速度为 v , 试求自转轴小倾角 ϕ .

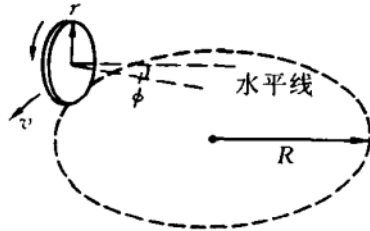


图 5-80

解 参考图 5-81, 硬币自转角速度 ω_s 应斜向下, 进动角速度 Ω 应竖直向上, 其间大小关系为

$$r\omega_s = R\Omega,$$

ϕ 是小角度, 有

$$v = \Omega(R - r \sin \phi) = \Omega R.$$

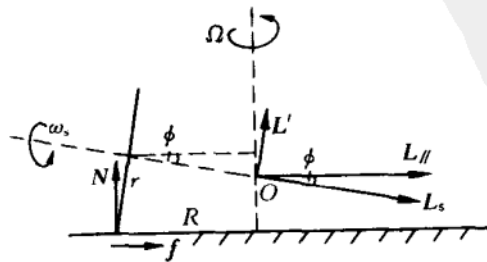


图 5-81

硬币质量记作 m , 据质心运动定理, 桌面竖直向上的支持力 N 和水平朝内的摩擦力 f 分别为

$$N = mg, \quad f = mv^2 / (R - r \sin \phi) = mv^2 / R.$$

硬币所受诸力相对图 5-81 中定点 O 的力矩记作 M , 方向垂直于图平面朝里, 大小为

$$\begin{aligned} M &= [NR - mg(R - r \sin \phi)] - f[r \cos \phi - (R - r \sin \phi) \tan \phi] \\ &= mgr \sin \phi - m \frac{v^2}{R} (r - R \tan \phi), \end{aligned}$$

因 $\tan \phi \approx \sin \phi$, 有

$$M = mgr \sin \phi - mv^2 \frac{r}{R} + mv^2 \sin \phi.$$

硬币定点转动总角速度

$$\omega = \omega_s + \Omega,$$

沿自转轴方向的分量为

$$\omega_{ss} = \omega_s - \Omega \sin \phi = \omega_s = \frac{R}{r} \Omega,$$

形成沿自转轴方向角动量 L_s 的大小为

$$L_s = I_s \omega_{ss} = \frac{1}{2} mr^2 \frac{R}{r} \Omega = \frac{1}{2} mrR\Omega.$$

ω 沿垂直于自转轴方向的分量为

$$\omega_{\perp} = \Omega \cos \phi = \Omega,$$

形成该方向角动量 L' 的大小为

$$L' = I' \omega_{\perp},$$

$$I' = \frac{1}{4} mr^2 + m \left(\frac{R - r \sin \phi}{\cos \phi} \right)^2 = \frac{1}{4} mr^2 + mR^2,$$

因 $r \ll R$, 得

$$L' = mR^2 \Omega.$$

硬币总角动量

$$L = L_s + L'$$

的水平分量 $L_{//}$ 的大小为

$$L_{//} = L_s \cos \phi + L' \sin \phi = \frac{1}{2} mrR\Omega + mR^2 \Omega \sin \phi,$$

因力矩 M 使 $L_{//}$ 进动, 故有 $M=L_{//}\Omega$, 即

$$mgr \sin \phi - mv^2 \frac{r}{R} + mv^2 \sin \phi$$

$$= \left(\frac{1}{2}mrR\Omega + mR^2\Omega \sin \phi \right) \Omega = \frac{1}{2}mv^2 \frac{r}{R} + mv^2 \sin \phi,$$

解得

$$\sin \phi = 3v^2/2Rg,$$

即

$$\phi = \arcsin \left(\frac{3v^2}{2Rg} \right).$$



6 流 体

A 组

6-1 两端开口、向上直立的 U 型试管内盛有水银. 今从试管右端缓慢注入 13.6 cm 高的水柱, 左管水银未外溢, 试求左管水银面上升的高度 h .

解 未注入水前, 左右两管水银面位置如图 6-1 中实线所示. 右管注入 $H=13.6$ cm 高的水柱后, 右管水银面下降 h 高度, 左管水银面上升 h 高度. 水银中取图示的等高点 A 和 B, 有

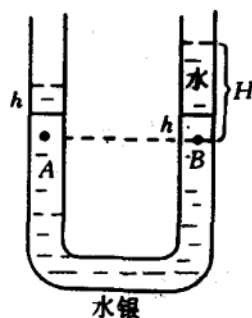


图 6-1

$$p_A = p_B,$$

$$p_A = p_0 + \rho_{\text{汞}} g \cdot 2h,$$

$$p_B = p_0 + \rho_{\text{水}} g H,$$

式中 p_0 为大气压强, $\rho_{\text{汞}}$ 和 $\rho_{\text{水}}$ 分别是水银和水的密度. 由上述诸式可得

$$h = \frac{\rho_{\text{水}}}{2\rho_{\text{汞}}} H,$$

将 $\rho_{\text{汞}} = 13.6\rho_{\text{水}}$ 、 $H = 13.6$ cm 代入, 得

$$h = 0.5 \text{ cm}.$$

6-2 西藏布达拉宫的海拔高度为 3756.5 m, 不计大气温度随高度的变化, 试求该处大气压强 p .

解 据公式

$$p = p_0 e^{-(\mu g / RT)z},$$

将 $p_0 = 1.01 \times 10^5$ Pa, $\mu = 28.8 \times 10^{-3}$ kg/mol, $R = 8.3$ J/(mol · K), $T = 273$ K, $z = 3756.5$ m 代入后算得

$$p = 0.63 p_0 = 0.63 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

6-3 长和宽同为 L 的长方容器中盛有密度为 ρ 、高也为 L 的液体,开始时静止在水平地面上.今使容器以恒定的加速度 $a = g/\sqrt{3}$ 水平朝右运动,如图 6-2 所示.大气压强记作 p_0 ,容器中液体稳定静止后,试求液体中压强的最大值 p_{\max} .

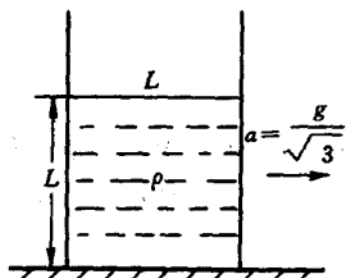


图 6-2

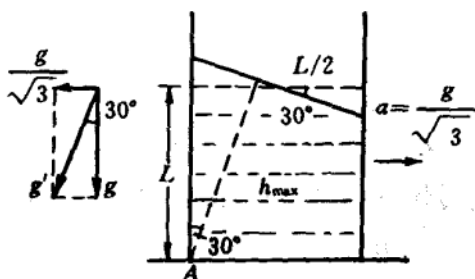


图 6-3

解 稳定后,如图 6-3 所示,液面将与水平方向成 30° 夹角,左下角 A 处与液面间的距离最大,为

$$h_{\max} = \left(L + \frac{L}{2} \tan 30^\circ \right) \cos 30^\circ = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{4} L.$$

A 处压强最大,为

$$p_{\max} = p_0 + \rho g' h_{\max},$$

将等效重力加速度 $g' = 2g/\sqrt{3}$ 代入,得

$$p_{\max} = p_0 + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) gL.$$

6-4 将两个半径同为 $R = 20 \text{ cm}$ 的半球壳,合成“马德堡球”,估算两侧各需施加多大的力方可将球拉成两半?

解 结合立体解析几何知识,可知大气对半个球面的合压力等于大气对半径为 R 的圆平面的压力.因此,所求拉力为

$$F = p_0 \pi R^2 \sim 1.0 \times 10^4 \text{ N}.$$

6-5 一根横截面积 $S_1 = 5.00 \text{ cm}^2$ 的细管连接在一个容器上,容器的横截面积 $S_2 = 100 \text{ cm}^2$,高度 $h_2 = 5.00 \text{ cm}$.今将水注入,使水相对容器底部的高度 $h_1 + h_2 = 100 \text{ cm}$,如图 6-4 所示.

- (1) 计算水对容器底部的压力值和容器内水的重力;
- (2) 解释这两个值为何不同.

解 (1) 水对容器底部的压力 F_1 , 方向朝下, 大小为

$$F_1 = \rho g(h_1 + h_2)S_2 = 98 \text{ N}.$$

水的重力为

$$W = \rho g(h_1S_1 + h_2S_2) = 9.56 \text{ N}.$$

(2) 水对容器上平板的压力 F_2 , 方向朝上, 大小为

$$F_2 = \rho gh_1(S_2 - S_1).$$

水对容器的总压力

$$F = F_1 + F_2, \quad \text{方向: 朝下,}$$

大小为

$$F = F_1 - F_2 = \rho g(h_1S_1 + h_2S_2) = W.$$

可见是 F 与 W 相等, 不是 F_1 与 W 相等.

6-6 冰的密度记为 ρ_1 , 海水密度记为 ρ_2 , 有 $\rho_1 < \rho_2$. 金字塔形 (正四棱锥) 的冰山漂浮在海水中, 平衡时塔顶离水面高度为 h , 试求冰山自身高度 H .

解 冰山正方形底面每边长记为 a , 所受重力大小为

$$W = \frac{1}{3}\rho_1 a^2 H g.$$

冰山排开海水的体积为

$$\frac{1}{3}a^2 \left(H - \frac{h^3}{H^2} \right),$$

对应浮力大小为

$$F = \frac{1}{3}\rho_2 a^2 \left(H - \frac{h^3}{H^2} \right) g.$$

平衡时 $F=G$, 即可解得

$$H = \sqrt[3]{\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} h}.$$

6-7 一根长为 l 、密度为 ρ 的匀质细杆, 浮在密度为 ρ_0 的液体里. 杆的一端由一竖直细绳悬挂着, 使该端高出液面的距离为 d , 如图 6-5 所示.

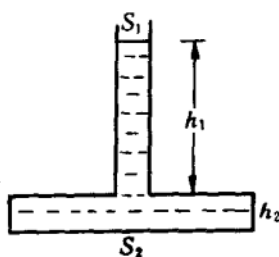


图 6-4

- (1) 计算杆与液面的夹角 θ ;
 (2) 设杆的截面积为 S , 计算绳中的张力 T .

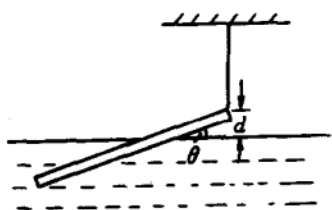


图 6-5

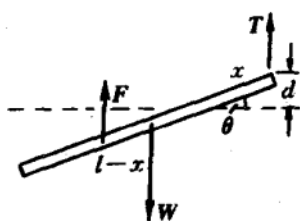


图 6-6

解 细杆浮出水面部分的长度设为 x , 细杆所受重力 W 、浮力 F 和绳的拉力 T 均已在图 6-6 中示出。

(1) 由

$$W = (\rho l S)g, \quad F = [\rho_0(l-x)S]g,$$

和相对悬挂点的力矩平衡式

$$W \cdot \frac{l}{2} \cos \theta = F \left(\frac{l-x}{2} + x \right) \cos \theta,$$

可解得
$$x = \sqrt{\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0}} l.$$

再由三角函数关系, 可得

$$\theta = \arcsin \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho}} \frac{d}{l}.$$

(2) 细杆竖直方向受力平衡, 得

$$T = W - F = [\rho - \rho_0 + \sqrt{\rho_0(\rho_0 - \rho)}] l S g.$$

6-8 在一截面积为 50 cm^2 的水管上接有一段弯管, 使管轴偏转 75° , 如图 6-7 所示. 设管中水的流速为 3.0 m/s , 试求水流作用在弯管上力的方向和大小 F .

解 管中水的质量流量为

$$\theta_m = \rho v S,$$

参考图 6-8, 流速差为

$$v_1 - v_2: \begin{cases} \text{方向: 与直管夹角 } \theta = 52.5^\circ, \\ \text{大小: } 2v \cos \theta. \end{cases}$$

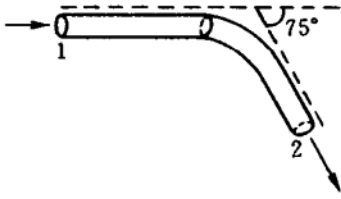


图 6-7

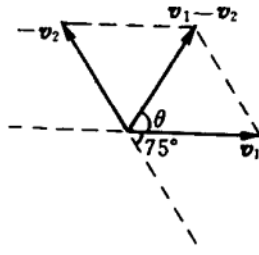


图 6-8

所求力为

$$F = \rho_m(v_1 - v_2),$$

$$F = 2\rho v^2 S \cos 52.5^\circ = 55 \text{ N}, \quad \text{方向: 与直管成 } 52.5^\circ \text{ 角.}$$

6-9 图 6-9 所示的直立容器盛水高度 H , 图中 A, B 两处容器截面积分别为 S_A, S_B . 将下端 C 处活塞打开后, 水的流动近似处理成定常流动. 试问各在什么样的条件下, A, B 两处压强 p_A, p_B 间分别满足

$$p_A = p_B, \quad p_A < p_B, \quad p_A > p_B.$$

解 上方水面下降速度可略, 由伯努利方程

$$p_0 + \rho g H = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_C^2,$$

$$\text{得} \quad \frac{1}{2} \rho v_C^2 = \rho g H.$$

由 A, B 间的伯努利方程关联式

$$p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g h_A = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g h_B,$$

和速度关联式

$$v_A = \frac{S_B}{S_A} v_B, \quad v_B = v_C,$$

$$\text{得} \quad p_A - p_B = \frac{1}{2} \rho v_C^2 \frac{S_A^2 - S_B^2}{S_A^2} - \rho g (h_A - h_B),$$

$$\text{即} \quad p_A - p_B = \rho g H \frac{S_A^2 - S_B^2}{S_A^2} - \rho g (h_A - h_B).$$

可见,

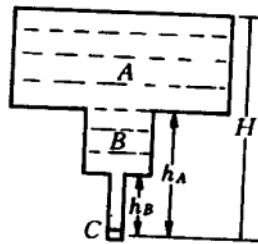


图 6-9

$$h_A - h_B = \frac{S_A^2 - S_B^2}{S_A^2} H \text{ 时, } p_A = p_B;$$

$$h_A - h_B > \frac{S_A^2 - S_B^2}{S_A^2} H \text{ 时, } p_A < p_B;$$

$$h_A - h_B < \frac{S_A^2 - S_B^2}{S_A^2} H \text{ 时, } p_A > p_B.$$

6-10 圆桶形油箱内盛有水和石油,水的厚度为 1 m,油的厚度为 4 m,石油密度为 $0.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,试求水从箱底小孔流出时的速度 v .

解 油层上表面与下表面之间的伯努利方程为

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho_{\text{油}} v_1^2 + \rho_{\text{油}} g h_{\text{油}} = p_2 + \frac{1}{2} \rho_{\text{油}} v_2^2, \quad v_2 = v_1,$$

得

$$p_2 = \rho_{\text{油}} g h_{\text{油}}.$$

水层上表面压强、流速分别与油层下表面压强、流速相同,水层上表面与小孔流水间的伯努利方程为

$$p_2 + \frac{1}{2} \rho_{\text{水}} v_2^2 + \rho_{\text{水}} g h_{\text{水}} = p_0 + \frac{1}{2} \rho_{\text{水}} v^2,$$

$v_2 \ll v_1$, 可略, 即得

$$v = \sqrt{2g \frac{\rho_{\text{油}} h_{\text{油}} + \rho_{\text{水}} h_{\text{水}}}{\rho_{\text{水}}}}.$$

将有关数值代入后, 算得

$$v = 9.5 \text{ m/s}.$$

6-11 桶的底部有一洞,水面距桶底 30 cm. 当桶以 120 m/s^2 的加速度上升时,水从洞漏出的速度多大?

解 考虑到惯性力的作用,引入等效重力加速度 $g' = g + a$, 所求速度便是

$$v = \sqrt{2g'h} = 8.8 \text{ m/s}.$$

6-12 为了避免火车停下来加水,可在铁轨旁设置长水槽,从火车上垂挂一根弯水管于水槽中,使水沿管上升流入火车的水箱,如图 6-10 所示. 如果水箱与水槽的高度差为 $h = 3.5 \text{ m}$, 那么火车的速度至少达多大才能使水流入箱中? 若火车走了 $L = 1.00 \text{ km}$ 的路程要

使水箱得到体积为 $V = 3.00 \text{ m}^3$ 的水, 已知水管直径 $d = 10 \text{ cm}$, 试问火车速度为多大?

解 水流相对地面系并非定常流动, 相对火车系(也是惯性系)近似为定常流动. 火车系中水槽以速度 v 朝左匀速运动, 为使水能上升到 h 高度进入水箱, 需满足不等式

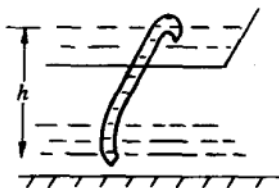


图 6-10

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 > p_0 + \rho gh,$$

即要求 $v_{\min} = \sqrt{2gh} = 8.3 \text{ m/s}$.

取 $v > v_{\min}$, 水管出水速度设为 u , 则有

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_0 + \rho gh + \frac{1}{2}\rho u^2,$$

$$u^2 = v^2 - 2gh.$$

经 $t = L/v$ 时间, 给水箱灌水体积达

$$\dot{V} = u \cdot \frac{\pi d^2}{4} t = u \cdot \frac{\pi d^2}{4} \frac{L}{v}.$$

于是, 相继可得

$$u = \frac{4V}{\pi d^2 L} = \frac{v}{L},$$

$$\left(\frac{4V}{\pi d^2 L}\right)^2 v^2 = v^2 - 2gh,$$

$$v = \sqrt{2gh / \left[1 - \left(\frac{4V}{\pi d^2 L}\right)^2\right]} = 9.0 \text{ m/s}.$$

6-13 匀速地将水注入大水盆内, 注入的流量 $Q_v = 150 \text{ cm}^3/\text{s}$, 盆底有一小孔, 面积为 0.50 cm^2 , 求稳定时水面将在盆中保持的高度 h .

解 小孔流速 v 与体积流量 Q_v 、高度 h 间的关系为

$$V = Q_v / S, \quad v = \sqrt{2gh},$$

联立后, 得 $h = Q_v^2 / 2gS^2 = 46 \text{ cm}$.

6-14 在一直径很大的圆柱形水桶壁的近底部处有一直径为 0.04 m 的小孔, 桶内水的深度为 1.60 m . 求:

- (1) 此时从小孔中流出的体积流量 Q_1 ;
 (2) 若小孔为薄壁圆孔, 收缩系数为 61%, 实际的体积流量 Q_2 .

解 (1) 由 $Q_1 = vS$, $v = \sqrt{2gh}$, $S = \pi d^2/4$, 得

$$Q_1 = \sqrt{2gh} \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 7.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}.$$

(2) 考虑到收缩系数 $\alpha = 61\%$, 有

$$Q_2 = v(\alpha S) = \alpha Q_1 = 4.3 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}.$$

6-15 一倒立的圆锥形容器, 高为 H , 底面半径为 R . 容器内装满水, 下方锥顶角处有一面积为 S 的小孔, 水从小孔中流出, 试求水面下降到 $H/2$ 高度时所需的时间 t .

解 水面高为 h 时, 水面半径和面积分别为

$$r = \frac{h}{H}R, \quad S_r = \pi r^2 = \pi \frac{h^2}{H^2}R^2,$$

小孔流速 v 和经过 dt 时间容器中水的体积增加量 dQ_v 分别为

$$v = \sqrt{2gh}, \quad dQ_v = -vSdt = -\sqrt{2gh}Sdt.$$

高度增加量(实为减少量)便是

$$dh = \frac{dQ_v}{S_r} = -\frac{\sqrt{2gH^2S}}{\pi R^2} h^{-\frac{3}{2}} dt,$$

积分
$$\int_0^t dt = \int_H^{\frac{H}{2}} -\frac{\pi R^2}{\sqrt{2gH^2S}} h^{\frac{3}{2}} dh,$$

得
$$t = \frac{\pi R^2}{20S} \sqrt{\frac{H}{g}} (4\sqrt{2} - 1).$$

6-16 图6-11中的水平圆柱形桶内盛水高度 $h_1 = 50 \text{ cm}$, 插入的细弯管称为虹吸管, 下端 C 在桶底下方 $h_2 = 40 \text{ cm}$ 处, 虹吸管侧面与另一开口的细弯管连通. 开始时虹吸管内已充满水, 而后再将 C 处小活塞打开, 设很短时间内右侧弯管水面 Q_0 降落到某一个近似稳定的位置 Q . 先求 C 处水流速度 v_C , 再确定 Q 与 C 之间的高度差 h_{QC} .

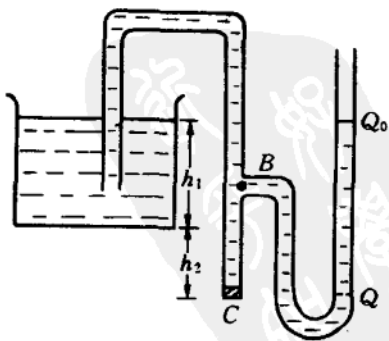


图 6-11

解 类似小孔流速算式,可得 C 处流速为

$$v_C = \sqrt{2g(h_1 + h_2)} = 4.2 \text{ m/s.}$$

虹吸管与右侧弯管连接处 B ,一方面由运动流体伯努利方程

$$p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_{BC} = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_C^2,$$

$$v_B = v_C,$$

其中 h_{BC} 为 B 相对 C 的高度,得

$$p_B + \rho g h_{BC} = p_0.$$

另一方面,由右侧弯管内静止流体压强差关系,可得

$$p_B + \rho g h_{BQ} = p_Q = p_0,$$

其中 h_{BQ} 为 B 相对 Q 的高度.因此,

$$h_{BQ} = h_{BC},$$

即 Q 与 C 等高,或者说

$$h_{QC} = 0.$$

6-17 将犬的一根大动脉中流动的血液接到一支两直管型文丘里流量计上.流量计宽段面积 $S_1 = 0.08 \text{ cm}^2$,它等于这根动脉的横截面积,细段面积 $S_2 = 0.04 \text{ cm}^2$,流量计中显示的压强差为 25 Pa .已知血液密度 $\rho = 1060 \text{ kg/m}^3$,试求动脉血液的体积流量 Q_v .

解 两直管型文丘里流量计测得的体积流量可表述为

$$Q_v = \sqrt{\frac{2ghS_1^2S_2^2}{S_1^2 - S_2^2}},$$

其中 h 是两个直管中静止血液上端面的高度差. h 与压强差 Δp 的关系为

$$\Delta p = \rho g h.$$

于是体积流量也可表述成

$$Q_v = \sqrt{\frac{2\Delta p S_1^2 S_2^2}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}},$$

数值计算可得

$$Q_v = 1.0 \text{ cm}^3/\text{s}.$$

6-18 一喷泉竖直喷出高 H 的水流, 喷泉的喷嘴具有上细下粗的截锥形状, 上截面的直径为 d , 下截面的直径为 D , 喷嘴高为 h . 设大气压强为 p_0 , 试求:

- (1) 水的体积流量 Q_v ;
- (2) 喷嘴下截面处水的压强 p_D .

解 喷水速度

$$v = \sqrt{2gH}.$$

- (1) 体积流量

$$Q_v = v \left(\pi \frac{d^2}{4} \right) = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gH}.$$

- (2) 下截面与上截面之间的伯努利方程关系为

$$p_D + \frac{1}{2} \rho v_D^2 = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_d^2 + \rho gh,$$

$$v_d = v, \quad v_D = \frac{d^2}{D^2} v_d,$$

即得

$$p_D = p_0 + \rho g H \frac{D^4 - d^4}{D^4} + \rho gh.$$

6-19 在直径为 305 mm 的输油管内, 安装了一个开口面积为原面积 1/5 的隔片, 管中的石油体积流量为 $70 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$, 其运动黏度 $\eta/\rho = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$. 试问石油经过隔片时, 是否变为湍流?

解 输油管半径 $R = 1.53 \times 10^{-1} \text{ m}$, 隔片开口半径为

$$r = R / \sqrt{5} = 6.8 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

该处石油流速为

$$v = Q_v / \pi r^2,$$

得

$$Re = \frac{\rho v r}{\eta} = \frac{Q_v}{\pi r (\eta/\rho)},$$

计算可得

$$Re = 3300.$$

已超出 Re 的临界值, 故为湍流.

6-20 血液密度与水的密度相近, 黏度 $\eta = 4.0 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. 犬的一根大动脉内半径 $r = 4 \text{ mm}$, 平均血液流速 $\bar{v} = 40 \text{ m/s}$, 试问其内

的血液流动是层流还是湍流?

解 计算可得

$$Re = \rho \bar{v} r / \eta = 400,$$

小于 Re 的临界值, 故为层流.

6-21 油泵将黏度 $\eta = 0.30 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 的油, 经过半径 $R = 0.10 \text{ m}$ 的水平钢管运送到 $l = 100 \text{ m}$ 的远处. 已知体积流量 $Q_V = 0.05 \text{ m}^3/\text{s}$, 试求油泵显示的管道两端间压强差 Δp 和油泵消耗的功率 P .

解 据泊肃叶公式得

$$\Delta p = p_1 - p_2 = 8\eta l Q_V / \pi R^4,$$

数值计算可得

$$\Delta p = 4.0 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

油泵消耗的功率便是

$$P = \Delta p \cdot Q_V = 2.0 \times 10^5 \text{ W}.$$

6-22 密度为 ρ 的黏性液体, 因重力作用在半径为 R 的竖直圆管道内向下作定常流动. 已测得管道的体积流量为 Q_V , 试求液体的黏度 η .

解 管道内取高 h 、半径 r 的同轴液体圆柱, 质心加速度为零, 竖直方向力平衡式为

$$\rho(\pi r^2 h)g = -\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r h.$$

考虑到管壁处流速为零, 得积分式

$$\int_0^v dv = -\frac{\rho g}{2\eta} \int_R^r r dr,$$

即有

$$v = \frac{\rho g}{4\eta} (R^2 - r^2).$$

体积流量便是

$$Q_V = \int_0^R v \cdot 2\pi r dr = \pi \rho g R^4 / 8\eta,$$

得

$$\eta = \pi \rho g R^4 / 8Q_V.$$

6-23 已知空气的密度 $\rho_A = 1.3 \text{ kg/m}^3$, 黏度 $\eta = 1.81 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, 试分别计算半径 $r_1 = 1.0 \times 10^{-3} \text{ mm}$ 和 $r_2 = 5.0 \times 10^{-2} \text{ mm}$ 的雨滴下落的终极速度 v_{e1} 和 v_{e2} .

解 空气密度($\rho_A = 1.3 \text{ kg/m}^3$)远小于雨滴密度($\rho_0 = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$),浮力可略.雨滴终极速度 v_e 对应的力平衡方程为

$$\rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3 g = 6\pi r \eta v_e,$$

得
$$v_e = 2\rho_0 r^2 g / 9\eta.$$

将 $r_1 = 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}$, $r_2 = 50r_1$ 代入,得

$$v_{e1} = 1.2 \times 10^{-4} \text{ m/s} = 1.2 \times 10^{-2} \text{ cm/s},$$

$$v_{e2} = (50)^2 v_{e1} = 30 \text{ cm/s}.$$

6-24 密度为 2.56 g/cm^3 、半径为 3.0 mm 的玻璃球,在一盛甘油的筒中从静止下落.已知甘油密度为 1.26 g/cm^3 ,测得玻璃球最终恒定的速度为 3.1 cm/s ,试求甘油黏度 η 和小球下落过程中加速度恰为 $g/2$ 时的速度 v .

解 小球终极速度 $v_e = 3.1 \times 10^{-2} \text{ m/s}$ 对应的力平衡方程为

$$\begin{cases} (\rho_1 - \rho_2) \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 g = 6\pi r \eta v_e, \\ \rho_1 = 2.56 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \\ \rho_2 = 1.26 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \\ r = 3.0 \times 10^{-3} \text{ m}, \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

式中已考虑到浮力作用.由此可得

$$\eta = 2(\rho_1 - \rho_2)r^2 g / 9v_e = 0.82 \text{ Pa} \cdot \text{s}.$$

加速度恰为 $g/2$ 时的速度 v 对应的动力学方程为

$$(\rho_1 - \rho_2) \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 g - 6\pi r \eta v = \rho_1 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \frac{g}{2},$$

即有
$$\left(\frac{\rho_1}{2} - \rho_2 \right) \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 g = 6\pi r \eta v. \quad \textcircled{2}$$

①②式联立,可得

$$v = \left[\left(\frac{\rho_1}{2} - \rho_2 \right) / (\rho_1 - \rho_2) \right] v_e = 4.8 \times 10^{-2} \text{ cm/s}.$$

6-25 半径为 0.10 cm 的小气泡在密度为 $0.72 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、黏度为 $0.11 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ 的液体中上升,求其上升的终极速度.

解 与浮力相比,气泡重力可略.终极速度 v_e 对应的向下斯托克斯力应等于向上的浮力,即有

$$\begin{cases} \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 g = 6\pi r \eta v_e, \\ \rho = 0.72 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \\ r = 1.0 \times 10^{-3} \text{ m}, \\ \eta = 0.11 \text{ Pa} \cdot \text{s}. \end{cases}$$

据此可得

$$v_e = 2\rho r^2 g / 9\eta = 1.4 \times 10^{-2} \text{ m/s} = 1.4 \text{ cm/s}.$$

6-26 半径 $r=0.01 \text{ mm}$ 的水滴, 在速度为 $v_0=2 \text{ cm/s}$ 的上升气流中是否会朝地面回落? 已知空气的黏度 $\eta=1.8 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

解 气流提供的浮力可略, 在气流参考系中水滴向下的终极速度 v_e 对应的力平衡方程为

$$\rho_0 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 g = 6\pi r \eta v_e,$$

式中 $\rho_0=1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. 由此解得

$$v_e = 2\rho_0 r^2 g / 9\eta = 1.2 \text{ cm/s}.$$

地面系中水滴向上速度为

$$v = v_0 - v_e = 0.8 \text{ cm/s} > 0.$$

可见水滴不会朝地面回落.

B 组

6-27 已知流体的二维速度场分布为

$$v_x = \frac{-cy}{x^2 + y^2}, \quad v_y = \frac{cx}{x^2 + y^2}.$$

- (1) 导出流体的二维加速度场分布;
- (2) 画出二维流线;
- (3) 画出流体质元的二维迹线, 据此导出质元在 (x, y) 处的加速度分量 a_x, a_y .

解 (1) 据

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y,$$

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y,$$

即可算得

$$a_x = \frac{-c^2 x}{(x^2 + y^2)^2}, \quad a_y = \frac{-c^2 y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

(2) 二维流线的微分方程为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{x}{y},$$

由不定积分

$$\int (y dy + x dx) = 0,$$

得流线方程为

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

式中 R 为不定常量, 流线是一系列的同心圆, 如图 6-12 所示.

(3) 因是定常流动, 质元迹线与速度场流线重合, 质元的二维迹线仍如图 6-12 所示.

在 (x, y) 处的质元将沿半径 $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的圆周运动, 速度大小

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\frac{c^2}{x^2 + y^2}} = \frac{c}{R},$$

是一个常量, 故是匀速圆周运动. 向心加速度大小为

$$a_{\text{心}} = \frac{v^2}{R} = \frac{c^2}{R^3},$$

加速度的 x, y 方向分量各为

$$a_x = -a_{\text{心}} \frac{x}{R} = -\frac{c^2 x}{R^4} = -\frac{c^2 x}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$a_y = -a_{\text{心}} \frac{y}{R} = -\frac{c^2 y}{R^4} = -\frac{c^2 y}{(x^2 + y^2)^2},$$

与(1)问所得结果一致.

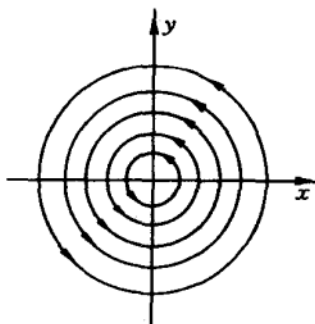


图 6-12

6-28 灭火器唧筒向上喷水, 喷口截面 1.5 cm^2 , 喷水的体积流量为 $1 \text{ dm}^3/\text{s}$. 有同学估算水柱在 2 m 高处的截面积为 4.35 cm^2 , 你认为他是怎样得到这一结果的? 你对他的估算方法有何评论?

解 水喷出时的速度为

$$v = Q_V/S = 6.67 \text{ m/s}.$$

不难发现, 若设水上升过程中机械能守恒, 且流量不变, 那么即可得 h 高处流速 v_h 和水柱截面 S_h 分别为

$$v_h = \sqrt{v^2 - 2gh} = 2.3 \text{ m/s},$$

$$S_h = Q_V/v_h = 4.35 \text{ cm}^2,$$

与该同学估算结果相符.

按此方法估算, 水柱上升到最高处 (2.27 m) 附近, 截面积将迅速扩展到无穷大, 这是不合理的. 其实水柱上升过程中会碎裂成水珠, 除了这些水珠间有相互碰撞外, 还会与掉下的水珠碰撞. 这样, 不仅单个水珠机械能守恒不成立, 而且更重要的是速度降为零的水珠不会在等高面上, 而是分布在一个有厚度的空间区域内, 面积不会趋于无穷.

6-29 一个有旋转对称表面的水壶, 其对称轴沿竖直方向, 在正中间的壶底开一个半径为 r_0 的小孔, 为使液体从底部小孔流出的过程中壶中液面下降的速率保持不变, 试求壶的表面形状. (古代用此漏壶计时.)

解 壶的表面形状可用图 6-13 所示平面曲线绕 z 轴旋转而成, 平面曲线方程便为所求.

液面半径为 r 时的高度设为 z , 液面竖直向下的流速设为常量 u , 小孔流速记为 v , 则有

$$\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g z = \frac{1}{2}\rho v^2, \quad \pi r^2 u = \pi r_0^2 v,$$

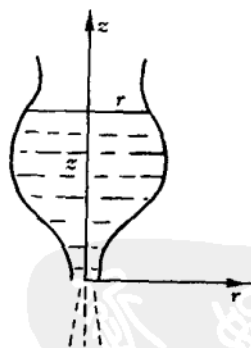


图 6-13

解得

$$z = \frac{u^2(r^4 - r_0^4)}{2gr_0^4}.$$

6-30 宽度同为 L 的两块无穷大平行平板相距 $2H$, 黏度为 η 的流体在板间从左端1向右端2作定常流动, 两端的外加压强分别为 p_1, p_2 . 设流体与板接触处流速为零, 以两板间的中央位置为原点设置图6-14所示的 x 轴, 略去流体重力影响, 试求流速分布 $v=v(x)$.

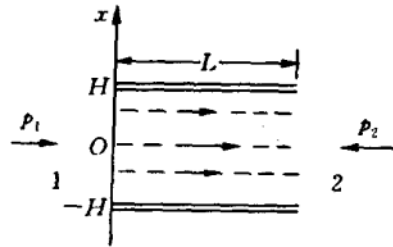


图 6-14

解 取宽 L 、长 d 、高 $2x$ 的柱形流体, 质心加速度为零, 沿流速方向力平衡关系式为

$$(p_1 - p_2)2xd = -\eta \frac{dv}{dx} 2Ld.$$

得积分式

$$\int_0^v dv = -\frac{p_1 - p_2}{\eta L} \int_H^x x dx,$$

即有

$$v = \frac{p_1 - p_2}{2\eta L} (H^2 - x^2).$$

6-31 半径分别为 $R_1, R_2 > R_1$ 的长圆柱形薄筒竖直同轴放置, 两筒间充满密度为 ρ 常量的液体. 今使内筒以恒定的角速度 ω_0 绕轴旋转, 外筒静止, 因液体的黏性, 与内筒接触的液体部位均随内筒一起旋转, 与外筒接触的液体部位均随外筒一起静止. 设液体黏度处处相同, 流体已形成稳定的层流结构, 密度 ρ 不变, 不计重力影响.

(1) 试求流体绕轴旋转角速度 ω 随径矢 r 的分布函数;

(2) 已知流体中 $r=R_1$ 处的压强为 p_0 , 试求液体压强 p 随 r 的分布函数.

解 (1) 如图 6-15 所示, 取 $r \rightarrow r + dr$ 流体层. 设高为 h , 黏度记为 η , 因无角加速度, 切向力的力矩平衡, 引入旋转速度 $v(r)$ 后, 有

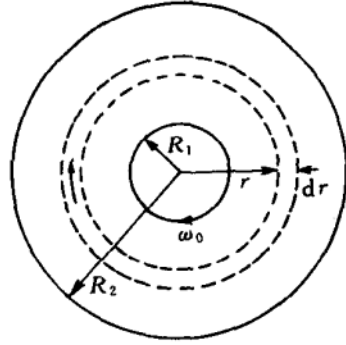


图 6-15

$$\eta \left(\frac{dv}{dr} \right)_{r+dr} \cdot 2\pi(r+dr)h(r+dr) = \eta \left(\frac{dv}{dr} \right)_r 2\pi r h r,$$

$$v(r) = r\omega(r).$$

化简为 $\frac{d\phi}{\phi} + 2 \frac{dr}{r} = 0, \quad \phi(r) = \frac{dv}{dr}.$

积分 $\int_{\phi(R_1)}^{\phi(r)} \frac{d\phi}{\phi} + 2 \int_{R_1}^r \frac{dr}{r} = 0,$

得 $\ln \frac{\phi(r)}{\phi(R_1)} + \ln \frac{r^2}{R_1^2} = 0,$

即有 $r^2\phi(r) = C(\text{常量}), \quad \text{或} \quad r^2 \frac{dv}{dr} = C.$

积分 $\int_{v(R_1)}^{v(r)} dv = C \int_{R_1}^r \frac{dr}{r^2},$

得 $v(r) = v(R_1) + C \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right),$

因 $v(R_2) = 0,$

得 $C = -\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} v(R_1), \quad v(r) = \frac{R_1}{R_2 - R_1} \left(\frac{R_2}{r} - 1 \right) v(R_1).$

与 $\omega(r) = v(r)/r, \quad \omega_0 = v(R_1)/R_1,$

联立, 即得

$$\omega(r) = \frac{R_1^2}{R_2 - R_1} \left(\frac{R_2}{r} - \frac{1}{r} \right) \omega_0.$$

(2) $r \rightarrow r+dr$ 流体层圆运动向心力由压强差提供, 即有

$$(p + dp)2\pi(r+dr)h - p2\pi r h = \rho(2\pi r dr)h\omega^2 r,$$

化简后可得

$$\frac{dp}{dr} + \frac{p}{r} = \rho v^2 / r.$$

为方便,将 v 表述为

$$v = \beta \left(\frac{R_2}{r} - 1 \right), \quad \beta = \frac{R_1^2}{R_2 - R_1} \omega_0,$$

$p(r)$ 的通解便是

$$\begin{aligned} p(r) &= e^{-\int \frac{dr}{r}} \left(\int \frac{\rho v^2}{r} e^{\int \frac{dr}{r}} dr + C \right) = e^{-\ln r} \left(\int \frac{\rho v^2}{r} e^{\ln r} dr + C \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(\int \frac{\rho v^2}{r} r dr + C \right) \\ &= \frac{1}{r} \left[\rho \beta^2 \left(-\frac{R_2^2}{r} - 2R_2 \ln r + r \right) + C \right]. \end{aligned}$$

将 $r=R_1$ 时, $p(r)=p_0$ 代入, 可得

$$C = R_1 p_0 - \rho \beta^2 \left(-\frac{R_2^2}{R_1} - 2R_2 \ln R_1 + R_1 \right),$$

$$p(r) = \frac{1}{r} \left\{ R_1 p_0 + \rho \beta^2 \left[\left(\frac{R_2^2}{R_1} - \frac{R_2^2}{r} \right) + 2R_2 \ln \frac{R_1}{r} + (r - R_1) \right] \right\}.$$



7 振动和波

A 组

7-1 一质点沿 x 轴作简谐振动,其运动方程为

$$x = 0.4 \cos 3\pi \left(t + \frac{1}{6} \right),$$

式中 x 和 t 的单位分别是 m 和 s. 试求:

- (1) 振幅、角频率和周期;
- (2) 初相位、初位置和初速度;
- (3) $t=1.5$ s 时的位置、速度和加速度.

解 质点的运动方程、速度和加速度分别为

$$x = 0.4 \cos \left(3\pi t + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$v_x = -1.2\pi \sin \left(3\pi t + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$a_x = -3.6\pi^2 \cos \left(3\pi t + \frac{\pi}{2} \right).$$

(1) 振幅、角频率、周期分别是

$$A = 0.4 \text{ m}, \quad \omega = 3\pi \text{ s}^{-1}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3} \text{ s}.$$

(2) 初相位、初位置、初速度分别是

$$\phi = \frac{\pi}{2}, \quad x_0 = 0, \quad v_0 = -1.2\pi \text{ m/s}.$$

(3) $t=1.5$ s 时的位置、速度、加速度分别是

$$x = 0.4 \cos \pi = -0.4 \text{ m}, \quad v_x = 0, \quad a_x = 3.6\pi^2 \text{ m/s}^2.$$

7-2 一简谐振动的运动方程为

$$x = 5 \cos \left(8t + \frac{\pi}{4} \right),$$

为使其初相位为零,计时零点应提前或推迟若干?

解 设 t' 的零点比 t 的零点提前 Δt , 则应有

$$t = t' - \Delta t, \quad x = 5 \cos\left(8t' - 8\Delta t + \frac{\pi}{4}\right).$$

要求 $t' = 0$ 时初相位为零, 得

$$-8\Delta t + \frac{\pi}{4} = 0, \quad \Delta t = \frac{\pi}{32} \text{ s}.$$

即计时零点应提前 $\frac{\pi}{32}$ s.

注意, 虽然两个运动方程

$$x_1 = 5 \cos\left(8t + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$x_2 = 5 \cos\left(8t + \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

描述的简谐振动量时时相同, 但 x_1 的初相位是已给的 $\pi/4$, 不可引申为 $\pi/4 + 2k\pi$.

7-3 简谐振动的正弦表达式为 $x = A \sin(\omega t + \phi)$, 仍称 $\omega t + \phi$ 为其 t 时刻的相位.

一质点作正弦简谐运动, 在某一相位时, 它的位置是 $x_0 > 0$, 当相位增大一倍时, 它的位置是 $\sqrt{3}x_0$, 试求振幅 A .

解 将第一个相位记作 ϕ , 则有

$$x_0 = A \sin \phi, \quad \sqrt{3}x_0 = A \sin 2\phi = 2A \sin \phi \sqrt{1 - \sin^2 \phi},$$

据此可解得

$$A = 2x_0.$$

7-4 设同时有以下三个简谐振动:

$$x_1 = A \sin \omega t,$$

$$x_2 = A \sin\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right),$$

$$x_3 = A \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right).$$

(1) 写出 x_2, x_3 对 x_1 的相位差;

(2) 将这三个振动改用余弦函数表述, 且规定初相位的绝对值不可超过 π , 再写出 x_2, x_3 对 x_1 的相位差.

解 (1) x_2 比 x_1 超前 $\frac{2}{3}\pi$, x_3 比 x_1 落后 $\frac{2}{3}\pi$.

(2) x_1, x_2, x_3 可改述成

$$x_1 = A \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$x_2 = A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$x_3 = A \cos\left(\omega t + \frac{5}{6}\pi\right),$$

可见, x_2 比 x_1 超前 $\frac{2}{3}\pi$, x_3 比 x_1 超前 $\frac{4}{3}\pi$.

7-5 一简谐振动为 $x=2\cos(\pi t+\phi)$, 试画出 $\phi=0$ 或 $\phi=\pi/3$ 对应的 $x-t$ 曲线.

解 $\phi=0$ 和 $\phi=\pi/3$ 对应的 $x-t$ 曲线, 如图 7-1 所示.

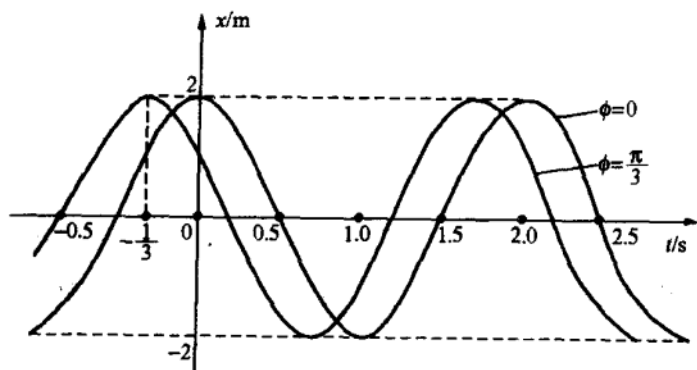


图 7-1

7-6 求以下两组一维振动的合振动:

(1) $x_1 = 8 \cos\left(\omega t + \frac{3}{8}\pi\right)$, $x_2 = 6 \cos\left(\omega t - \frac{1}{8}\pi\right)$;

(2) $x_1 = A \cos \omega t$, $x_2 = A \cos\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right)$, $x_3 = A \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right)$.

解 (1) 将 x_1, x_2 对应的矢量分别记为 A_1, A_2 , 则 $x = x_1 + x_2$ 对应的矢量 $A = A_1 + A_2$ 如图 7-2 所示. A 的模量为

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10,$$

A 与 x 轴的夹角为

$$\phi = \arcsin \frac{A_1}{A} - \frac{1}{8}\pi = 30.6^\circ.$$

据此,得

$$x = A \cos(\omega t + \phi) = 10 \cos(\omega t + 30.6^\circ).$$

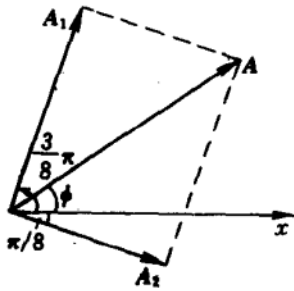


图 7-2

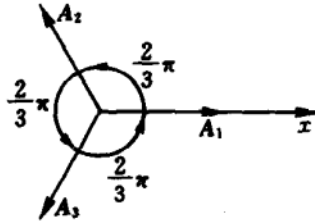


图 7-3

(2) x_1, x_2, x_3 对应的矢量 A_1, A_2, A_3 如图 7-3 所示, 它们的模量相同, 相邻夹角均为 $\frac{2}{3}\pi$, 合矢量

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 0,$$

对应地必有

$$x = x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

7-7 已知两个分振动 $x_1 = 3A \cos \omega_0 t, x_2 = A \cos 3\omega_0 t$, 试画出 x_1-t, x_2-t 曲线和合振动 $x = x_1 + x_2$ 随 t 变化的曲线, 据此判定合振动是周期振动.

解 x_1-t, x_2-t 曲线如图 7-4 所示, $x-t$ 曲线如图 7-5 所示. 由 $x-t$ 曲线可以判定合振动是以 $T = T_0 = 2\pi/\omega_0$ 为周期的振动.

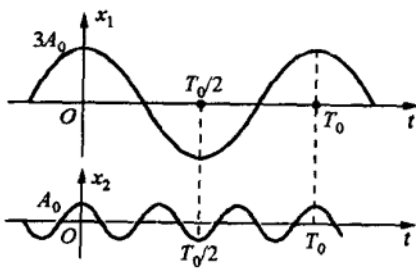


图 7-4

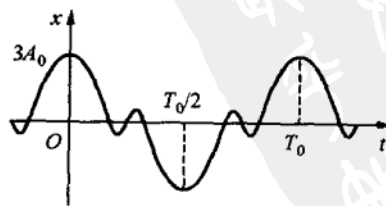


图 7-5

7-8 某振动量 x 随时间 t 的变化关系为

$$x = A_0(1 + \alpha \cos \Omega t) \cos \omega t,$$

式中 $A_0, \alpha, \Omega, \omega$ 都是正的常量, 且 $\alpha < 1, \Omega \ll \omega$.

(1) 简述 $x-t$ 振动中包含的拍现象, 并写出拍频 $\nu_{\text{拍}}$;

(2) 将 $x-t$ 振动分解为若干个简谐振动.

解 (1) 引入随 t 缓慢变化的“振幅”

$$A = A_0(1 + \alpha \cos \Omega t),$$

则 $x-t$ 振动可近似处理成以 A 为“振幅”的简谐运动. “振幅” A 的变化现象即为拍现象, A 绝对值的变化角频率为 2Ω , 故拍频是

$$\nu_{\text{拍}} = 2\Omega/2\pi = \Omega/\pi.$$

(2) $x-t$ 振动可分解成

$$x = A_0 \cos \omega t + \frac{1}{2} \alpha A_0 \cos[(\omega + \Omega)t] + \frac{1}{2} \alpha A_0 \cos[(\omega - \Omega)t],$$

这是三个频率相近的简谐振动.

7-9 质点同时参与的两个垂直方向简谐振动分别为

$$(1) x = A \cos \omega t, y = B \sin \omega t;$$

$$(2) x = A \sin \omega t, y = B \cos \omega t.$$

试画出质点的两种运动轨道, 并标明质点运动方向.

解 (1) 消去 t 可得轨道方程:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

这是一个正椭圆, 如图 7-6(a) 所示. $\omega t = 0$ 时, 质点位于 $x = A, y = 0$ 处, $\omega t = \pi/2$ 时, 质点位于 $x = 0, y = B$ 处, 故质点按逆时针方向沿椭圆轨道运动.

(2) 消去 t 可得轨道方程:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

是一个与(1)相同的正椭圆, 如图 7-6(b) 所示. $\omega t = 0$ 时, 质点位于 $x = 0, y = B$ 处, $\omega t = \pi/2$ 时, 质点位于 $x = A, y = 0$ 处, 故质点按顺时针方向沿椭圆轨道运动.

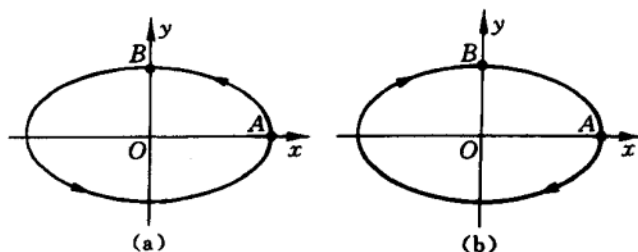


图 7-6

7-10 在倾角为 θ 的光滑斜面上放置一个质量为 m 的小物块,小物块与一轻弹簧相连,弹簧的另一端固定在斜面上,弹簧的劲度系数为 k ,以小物块平衡位置为原点,沿斜面设置向下的 x 轴.将小物块从其平衡位置向

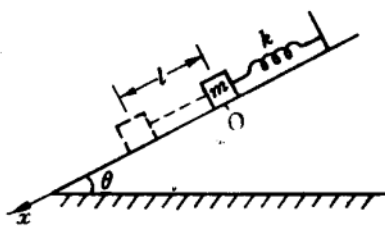


图 7-7

下拉到 l 距离处,如图 7-7 所示,当 $t=0$ 时刻静止地释放小物块.试求小物块的振动周期并写出小物块振动表达式 $x-t$.

解 小物块处于 $x=0$ 点时,弹簧伸长

$$\Delta l = mg \sin \theta / k.$$

小物块处于 x 位置时,沿 x 方向所受合力为

$$F_x = mg \sin \theta - k(x + \Delta l) = -kx,$$

这是一个线性回复力,因此小物块将作简谐振动,振动角频率和周期分别为

$$\omega = \sqrt{k/m}, \quad T = 2\pi \sqrt{m/k}.$$

由 $t=0$ 时刻, $x_0=l, v_0=0$, 可解得振幅与初相位分别为 $A=l, \phi=0$, 因此小物块的振动表达式为

$$x = l \cos \omega t.$$

7-11 系统如图 7-8 所示,质量 m 的小物块与水平地面光滑接触,劲度系数分别为 k_1, k_2 的两个轻弹簧开始时均处于自由长度状态.若使小物块获得朝右(或朝左)的初速

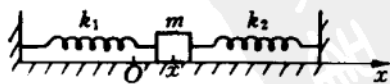


图 7-8

度,便会形成振动,试求振动周期 T .

解 以小物块平衡位置为原点,设置水平朝右的 x 轴. 小物块处于 x 位置时,受合力

$$F_x = -k_1x - k_2x = -(k_1 + k_2)x,$$

这是一个线性回复力,小物块将作简谐振动,振动周期为

$$T = 2\pi\sqrt{m/(k_1 + k_2)}.$$

7-12 系统如图 7-9 所示,动滑轮、细绳及两弹簧的质量均可忽略,细绳与滑轮间无摩擦,有关参量已在图中示出. 让悬挂物在竖直方向上偏离平衡位置,便可形成简谐振动,试求振动周期 T . 如果要求悬挂物的运动是纯粹的简谐振动(即在简谐振动过程中始终不会有其他形式的运动),振幅 A 将有何限制?

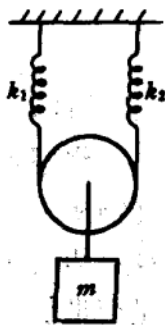


图 7-9

解 从两弹簧均处于自由长度状态的位置,将悬挂物向下移动 Δl_0 距离,如果恰好能处于力平衡状态,那么两个弹簧伸长量 $\Delta l_1, \Delta l_2$ 满足下述关系式:

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = 2\Delta l_0, \quad k_1\Delta l_1 = k_2\Delta l_2 = \frac{1}{2}mg.$$

据此可得

$$\Delta l_0 = \frac{1}{2}(\Delta l_1 + \Delta l_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{2k_1} + \frac{mg}{2k_2}\right),$$

即有

$$\Delta l_0 = \frac{k_1 + k_2}{4k_1k_2}mg.$$

将悬挂物从平衡位置向下移动 x 量,设所受弹簧向上的合力为 F , 那么两个弹簧各自总的伸长量 $\Delta l'_1, \Delta l'_2$ 满足下述关联式:

$$\Delta l'_1 + \Delta l'_2 = 2(\Delta l_0 + x), \quad k_1\Delta l'_1 = k_2\Delta l'_2 = \frac{1}{2}F,$$

同样,可得

$$\Delta l_0 + x = \frac{k_1 + k_2}{4k_1k_2}F.$$

悬挂物所受向下合力便是

$$F_x = mg - F = \frac{4k_1k_2}{k_1 + k_2}\Delta l_0 - \frac{4k_1k_2}{k_1 + k_2}(\Delta l_0 + x),$$

即得

$$F_x = -\frac{4k_1k_2}{k_1 + k_2}x,$$

这是一个线性回复力, 悬挂物将作简谐振动, 振动角频率和周期分别为

$$\omega = \sqrt{4k_1k_2/m(k_1 + k_2)}, \quad T = 2\pi/\omega = \pi\sqrt{m(k_1 + k_2)/k_1k_2}.$$

细绳只能向下拉弹簧, 不能向上压弹簧. 如果振幅 A 超过 Δl_0 , 悬挂物从平衡位置向上到达 Δl_0 高度时, 两弹簧处于自由长度状态, 悬挂物再向上运动时, 细绳变软, 悬挂物随即进入上抛运动状态, 不再是简谐振动. 为避免出现这样的情况, 要求

$$A \leq \Delta l_0, \quad \text{即} \quad A \leq \frac{k_1 + k_2}{4k_1k_2}mg.$$

7-13 如图 7-10 所示, 由劲度系数为 k 的轻弹簧和质量为 M 的振子组成的水平简谐振动系统, 其振幅为 A . 一块质量为 m 的黏土从静止状态粘到振子上, 试问在以下两种情形下, 振动周期和振幅的变化:

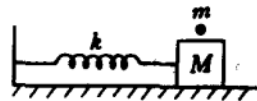


图 7-10

(1) 当振子通过其平衡位置时与黏土相粘;

(2) 当振子在最大位移处与黏土相粘.

解 原系统振动状态可表述为

$$x = A_0 \sin \omega_0 t, \quad v_x = \omega_0 A_0 \cos \omega_0 t, \quad \omega_0 = \sqrt{k/M}.$$

(1) 黏土粘上后, 新系统振动角频率和周期分别为

$$\omega_1 = \sqrt{k/(M + m)}, \quad T_1 = 2\pi \sqrt{(M + m)/k}.$$

将黏土粘上的时刻记为 $t=0$ 时刻, 不难写出新系统振动的初条件为

$$x_0 = 0, \quad v_0 = \frac{\pm M}{M + m} \omega_0 A_0,$$

新系统振动的振幅便是

$$A_1 = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_1^2}} = \sqrt{\frac{M}{M+m}} A_0.$$

(2) 新系统振动周期 T_2 同于 T_1 , 即为

$$T_2 = 2\pi \sqrt{(M+m)/k}.$$

振幅 A_2 同于原系统振幅, 即为

$$A_2 = A_0.$$

7-14 系统如图 7-11 所示, 弹簧及细绳质量均可忽略, 滑轮不能转动, 滑轮与细绳之间无摩擦, 已知量均已在图中示出. 不考虑绳弯折的可能性, 试求滑轮的上下振动周期 T .

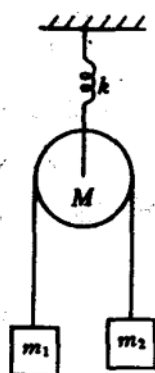


图 7-11

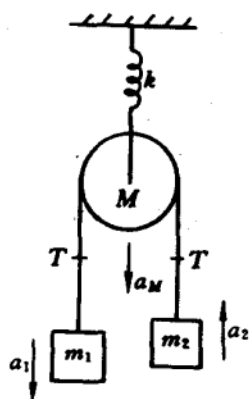


图 7-12

解 将弹簧伸长量记为 x , 参考图 7-12 所示参量, 可为两个小物块和滑轮建立下述方程:

$$m_1 g - T = m_1 a_1, \quad (1)$$

$$T - m_2 g = m_2 a_2, \quad (2)$$

$$Mg + 2T - kx = Ma_M, \quad (3)$$

$$a_1 = a_2 + 2a_M. \quad (4)$$

由①②可得

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 = (m_1 - m_2)g, \quad (5)$$

⑤与④式联立, 可解得

$$a_1 = \frac{(m_1 - m_2)g + 2m_2 a_M}{m_1 + m_2}, \quad a_2 = \frac{(m_1 - m_2)g - 2m_1 a_M}{m_1 + m_2}. \quad (6)$$

由①②还可得

$$2T = (m_1 + m_2)g + m_2 a_2 - m_1 a_1, \quad (7)$$

将⑥式代入⑦式后,再代入④式,可得

$$\left(M + \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) a_M = \left(M + \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) g - kx.$$

这可等效成由劲度系数为 k 的轻弹簧和质量为

$$M^* = M + \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

的滑轮构成的竖直弹簧振子,故其振动周期为

$$T = 2\pi \sqrt{M^*/k} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{k} \left(M + \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)}.$$

7-15 匀质柱形木块浮在水面上,水中部分深度为 h ,如图 7-13 所示.今使木块沿竖直方向振动,过程中顶部不会浸入水中,底部不会浮出水面,不计水的运动,略去木块振动过程中所受阻力,试求振动周期 T .

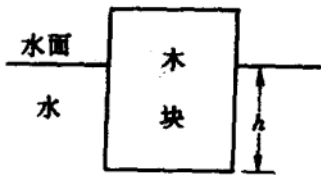


图 7-13

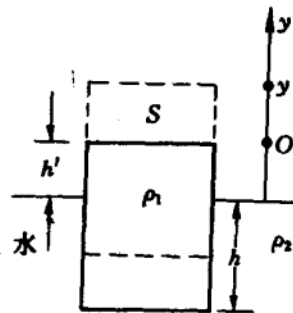


图 7-14

解 引入相应参量,建立 y 轴,如图 7-14 所示.木块平衡位置的
动力学方程为

$$\rho_1 S(h + h')g = \rho_2 S h g.$$

木块处于图 7-14 虚线所示位置时,有

$$\begin{cases} F_y = \rho_2 S(h - y)g - \rho_1 S(h + h')g, \\ F_y = \rho_1 S(h + h')a_y, \end{cases}$$

得
$$a_y + \frac{\rho_2 g}{\rho_1(h+h')}y = 0.$$

用 $\rho_2 h$ 替换 $\rho_1(h+h')$, 即有

$$a_y + \frac{g}{h}y = 0,$$

这是简谐振动方程, 振动周期为

$$T = 2\pi \sqrt{h/g}.$$

7-16 两位外星人 A 和 B 生活在一个没有自转、没有大气、表面光滑的匀质球形小星球上. 有一次他们决定进行一次比赛, 从他们所在的位置出发, 各自采用航天技术看谁能先到达星球的对径位置. A 计划穿过星球直径凿一条通道, 采用自由下落方式到达目标位置; B 计划沿着紧贴星球表面的空间轨道, 像人造卫星一样航行到目标位置. 试问 A 与 B 谁会赢得这场比赛?

解 以星球中心为原点在直径通道上设置 x 轴, A 在 x 处受引力

$$F_x = -G \frac{Mm_A}{R^3}x,$$

其中 M 是星球质量, R 是星球半径, m_A 是 A 的质量, F_x 是一个线性回复力, A 将作简谐振动, 周期为

$$T = 2\pi \sqrt{m_A/k}, \quad k = G \frac{Mm_A}{R^3},$$

因此 A 到达目标位置所需时间为

$$t_A = \frac{T}{2} = \pi R \sqrt{R/GM}.$$

B 在空间圆轨道上的运动速度 v_B 即为该星球上的“第一宇宙速度”, 即有

$$v_B = \sqrt{GM/R},$$

B 经半圆周到达目标位置所需时间为

$$t_B = \pi R/v_B = \pi R \sqrt{R/GM}.$$

$t_A = t_B$, 两人比赛皆没有输赢.

7-17 由一长为 l 、质量为 m 的匀质杆和一质量为 m_0 、半径为 R 的匀质圆盘,通过盘心固连方式组成的复摆如图 7-15 所示,试求小角度摆动周期 T 和等时摆长 L .

解 刚体相对转轴 O 的转动惯量为

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{3}ml^2 + \left(\frac{1}{2}m_0R^2 + m_0l^2 \right) \\ &= \frac{1}{6}[2(m + 3m_0)l^2 + 3m_0R^2], \end{aligned}$$

刚体质心 C 与细杆中心的距离为

$$l' = \frac{m_0}{m + m_0} \cdot \frac{l}{2},$$

质心 C 到转轴 O 的距离便是

$$l_{oc} = \frac{l}{2} + l' = \frac{m + 2m_0}{m + m_0} \cdot \frac{l}{2}.$$

小角度复摆周期和等时摆长分别为

$$T = 2\pi \sqrt{I_0 / (m + m_0)gl_{oc}} = 2\pi \sqrt{\frac{2(m + 3m_0)l^2 + 3m_0R^2}{3(m + 2m_0)gl}},$$

$$L = gT^2 / 4\pi^2 = \frac{2(m + 3m_0)l^2 + 3m_0R^2}{3(m + 2m_0)l}.$$

7-18 竖直平面内有一半径为 R 的光滑固定圆环,长 R 的匀质细杆放在环内,试求杆在其平衡位置两侧小角度摆动周期 T .

解 参考图 7-16,细杆的小角度摆动实为绕着过圆环中心 O 的水平转轴的复摆运动. 细杆质心 C 到 O 的距离为

$$l_{oc} = \frac{\sqrt{3}}{2}R,$$

细杆相对转轴 O 的转动惯量为

$$I_0 = \frac{1}{12}mR^2 + m \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}R \right)^2 = \frac{5}{6}mR^2,$$

小角度摆动周期便是

$$T = 2\pi \sqrt{I_0 / mgl_{oc}} = \sqrt{\frac{5}{3\sqrt{3}}} \frac{R}{g}.$$

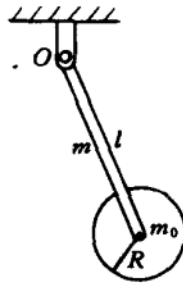


图 7-15

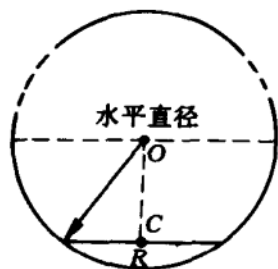


图 7-16

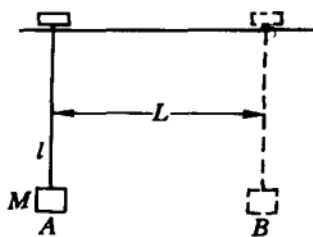


图 7-17

7-19 如图 7-17 所示,吊车拟用长 l 、质量可忽略的绳索将重物 M 从 A 移动到 B ,其间水平距离为 L . 设吊车以匀加速度 a 从静止出发经 $L/2$ 路程后,又以反向加速度 a 减速经过余下的 $L/2$ 路程. 要求重物在 A, B 位置均处于静止状态,且在运动过程中作小角度摆动,略去小重物的线度,试求可取的 a 值.(小角度单摆的幅角约束在 5° 范围之内.)

解 小角度单摆,要求 $a < g \tan 5^\circ$, 即 $a < 0.087g$.

前 $L/2$ 路程加速运动:

吊车参考系中“等效”重力加速度为

$$g' = \sqrt{g^2 + a^2},$$

小角度单摆周期为

$$T = 2\pi \sqrt{l/g'},$$

吊车行进时间 $t_1 = \sqrt{L/a}$, 要求 $t_1 = nT$, $n = 1, 2, \dots$.

后 $L/2$ 路程减速运动:

分析同前, 仍有 $t_2 = \sqrt{L/a}$, 要求 $t_2 = nT$, $n = 1, 2, \dots$.

综上所述, 要求 $t_1 + t_2 = 2nT$, 即

$$2\sqrt{L/a} = 2n \times 2\pi \sqrt{l/g'},$$

因 $a \ll g$, 近似有 $g' = g$, 即可求得

$$0.087g > a = Lg^2/4\pi^2 n^2 l, \quad n = 1, 2, \dots$$

7-20 如图 7-18 所示,质量 $m = 121 \text{ g}$ 的水银盛在截面积 $S = 0.30 \text{ cm}^2$ 的竖直开口 U 形管内,从试管一端朝里轻轻吹一口气,管内水银面便会上下振动. 已知水银密度 $\rho = 13.6 \text{ g/cm}^3$, 略去水银与管壁间的黏力, 试求水银面振动周期 T .

解 以左端水银面的平衡位置为坐标原点, 设置竖直向上的 z 轴. 左端水银面处于 z 位置时的速度记为 v_z , 因试管很细, 各处水银运动速度大小同为 v_z . 将能量守恒式

$$\frac{1}{2}mv^2 + (\rho zS)gz = E_0, \quad v = \dot{z},$$

两边对 t 求导, 可得

$$\ddot{z} + \frac{2\rho gS}{m}z = 0.$$

这是简谐振动微分方程, 故水银面作简谐振动, 振动周期为

$$T = 2\pi \sqrt{m/2\rho gS} = 0.77 \text{ s}.$$

7-21 系统如图 7-19 所示, 平衡时两个水平轻弹簧都处于自由长度状态, 平板左右振动时, 下面两个相同的匀质圆柱体沿水平地面纯滚动, 与平板下表面间也无相对滑动. 已知两个弹簧的劲度系数同为 k , 平板质量为 M , 两个圆柱体的质量同为 m , 试求平板左右振动的周期 T .

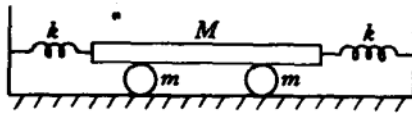


图 7-19

解 将平板在水平方向上相对它的平衡位置的位移量记为 x , 振动速度记为 v , 小圆柱体质心速度记为 v_c , 小圆柱体绕质心转动的角速度记为 ω , 则有机能守恒式:

$$\frac{1}{2}Mv^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \right) + 2 \times \frac{1}{2}kx^2 = E_0 (\text{常量}),$$

$$v = \dot{x}, \quad v_c = \frac{1}{2}v, \quad \omega = \frac{v_c}{R}, \quad I = \frac{1}{2}mR^2,$$

其中 R 为小圆柱体的半径. 整理后, 机械能守恒式可简化成

$$\frac{1}{2} \left(M + \frac{3}{4}m \right) \dot{x}^2 + kx^2 = E_0,$$

两边对 t 求导后, 可得

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = 8k/(4M + 3m).$$

这是简谐振动微分方程, 平板振动周期为

$$T = 2\pi/\omega = \pi\sqrt{(4M + 3m)/2k}.$$

7-22 系统如图 7-20 所示, 轻绳与实心匀质滑轮之间无相对滑动, 试用能量方法求解滑轮右侧悬挂物在其平衡位置附近的简谐振动周期 T . 若要求悬挂物作纯粹的简谐振动(即其间无其他形式的运动参与), 那么对振幅 A 的取值有何要求?

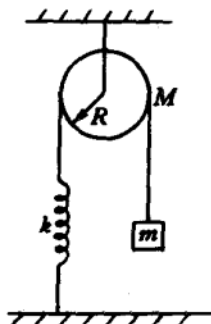


图 7-20

解 系统处于静止平衡状态时, 弹簧伸长量为

$$\Delta l = mg/k.$$

系统处于运动状态时, 取竖直向下为正方向, 悬挂物有位移量 y 时, 速度记为 v_y , 滑轮转动角速度记为 ω , 据机械能守恒, 有

$$\frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}k(y + \Delta l)^2 - mgy = E_0(\text{常量}),$$

$$v_y = \dot{y}, \quad \omega = \frac{v_y}{R}, \quad I = \frac{1}{2}MR^2.$$

两边对 t 求导, 可得

$$\left(m + \frac{1}{2}M\right)\ddot{y} + k(y + \Delta l) - mg = 0,$$

因 $k\Delta l = mg$, 即有

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad \omega^2 = \frac{k}{m + M/2}.$$

可见悬挂物可作简谐振动, 周期为

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{(2m + M)/2k}.$$

振幅 A 若大于 Δl , 悬挂物在自下而上的简谐振动过程中到达原平衡位置上方 Δl 处时, 弹簧恢复到自由长度状态, 轻绳处于松弛状态, 悬挂物随即作竖直上抛运动. 为避免发生这样的现象, 要求

$$A \leq \Delta l = mg/k.$$

7-23 质量 M 、半径 R 匀质圆盘, 在光滑水平面上可绕过中心

O 的固定竖直轴无摩擦地自由转动. 两根自由长度同为 $\pi R/2$ 、劲度系数同为 k 的轻弹簧, 各自一端固连在圆盘直径 AB 的两个端点, 另一端共同连接质量为 m 的小球 P , 弹簧与小球可沿着圆盘外侧壁无摩擦地运动. 开始时系统处于静止状态, P 与 A 点之间的圆弧 \widehat{AP} 相对圆心 O 所张圆心角为 60° , 如图 7-21 所示. 将系统自由释放后, 便会往返运动, 设定 $M=2m$, 试求:

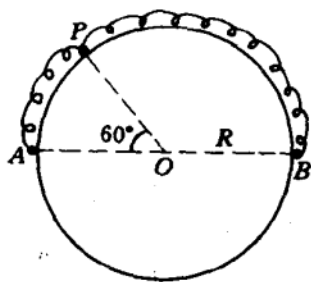


图 7-21

(1) 运动过程中 P 的最大速度 v_{\max} ;

(2) 系统运动周期 T .

解 (1) P 从初始位置相对水平面顺时针方向转角记为 θ_m , 角速度记为 ω_m , 圆盘从初始位置逆时针方向转角记为 θ_M , 角速度记为 ω_M . 因系统相对 O 点角动量守恒, 有

$$RmR\omega_m = I_0\omega_M, \quad I_0 = \frac{1}{2}MR^2, \quad M = 2m,$$

得
$$\omega_M = \omega_m, \quad \theta_M = \theta_m.$$

圆弧 \widehat{AP} 所张圆心角和圆弧长度分别为

$$\angle AOP = \frac{\pi}{3} + (\theta_m + \theta_M) = \frac{\pi}{3} + 2\theta_m,$$

$$\widehat{AP} = \left(\frac{\pi}{3} + 2\theta_m \right) R.$$

当 $\angle AOP = \pi/2, \theta_m = \pi/12 = 15^\circ$ 时, P 在切向上力平衡, 角速度、速度均达最大. 此时据能量守恒, 有

$$\frac{1}{2}m(\omega_m R)^2 + \frac{1}{2}I_0\omega_M^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{\pi}{2}R - \frac{\pi}{3}R\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{2}{3}\pi R - \frac{\pi}{2}R\right)^2,$$

解得
$$\omega_m = \frac{\pi}{6} \sqrt{k/m},$$

P 的最大速度为

$$v_{\max} = \omega_m R = \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{k}{m}} R.$$

(2) 系统机械能守恒方程为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m(\omega_m R)^2 + \frac{1}{2}I_0\omega_M^2 + 2 \times \frac{1}{2}k \left\{ \left[\left(\frac{\pi}{3} + \theta_m + \theta_M \right) - \frac{\pi}{2} \right] R \right\}^2 \\ = E_0 (\text{常量}), \end{aligned}$$

$$\omega_m = \dot{\theta}_m,$$

化简后,两边对 t 求导,可得

$$m\ddot{\theta}_m + 4k\left(\theta_m - \frac{\pi}{12}\right) = 0.$$

引入新的角参量

$$\theta_m^* = \theta_m - \frac{\pi}{12}, \quad \ddot{\theta}_m^* = \ddot{\theta}_m,$$

有
$$\ddot{\theta}_m^* + 4\frac{k}{m}\theta_m^* = 0,$$

这是简谐振动微分方程. θ_m^* 振动周期即为 θ_m 振动周期,也就是系统运动周期,得

$$T = 2\pi\sqrt{m/4k} = \pi\sqrt{m/k}.$$

7-24 质量为 M 的电梯用钢丝绳索吊住,绳索质量不计,绳索中的张力 T 与绳索伸长量 Δl 之间的关系是 $T = \alpha(\Delta l)^2$,其中 α 为正的常量.试求电梯在其平衡位置上下作竖直方向微小振动的周期 T .

解 电梯受力平衡时,绳索伸长量为

$$\Delta l_0 = \sqrt{Mg/\alpha}.$$

以平衡位置为原点,建立竖直向下的 y 坐标轴.电梯位于 $|y| \ll \Delta l_0$ 处时,所受合力为

$$F_y = mg - \alpha(\Delta l_0 + y)^2 = -2\alpha(\Delta l_0)y - \alpha y^2,$$

略去高阶小量 αy^2 ,得

$$F_y = -2\sqrt{\alpha Mg}y.$$

电梯在此线性回复力作用下将作简谐振动,振动周期

$$T = \sqrt{2\pi\sqrt{M/\alpha g}}.$$

7-25 冰的密度记为 ρ_1 ,海水速度记为 ρ_2 ,有 $\rho_1 < \rho_2$.金字塔形(正四棱锥形)的冰山漂浮在海水中,平衡时塔顶离水面高度为 h ,试求冰山在平衡位置附近作竖直方向小振动的周期 T .

解 将冰山正方形底面每边长记为 a ,冰山自身高度记为 H ,所

受重力为

$$G_1 = \frac{1}{3}\rho_1 a^2 H g,$$

冰山排开的海水的体积 V 和重力 G_2 分别为

$$V = \frac{1}{3}a^2 \left(H - \frac{h^3}{H^2} \right), \quad G_2 = \rho_2 V g = \frac{1}{3}\rho_2 a^2 \left(H - \frac{h^3}{H^2} \right) g.$$

平衡时, $G_2 = G_1$, 即可解得

$$H = \sqrt[3]{\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} h}.$$

建立竖直向下的 y 轴, 冰山从平衡位置沿 y 轴偏移 y 小量时, 所受浮力为

$$F = \frac{1}{3}\rho_2 a^2 \left[H - \frac{(h-y)^3}{H^2} \right] g,$$

展开后略去高阶小量, 可得

$$F = \frac{1}{3}\rho_2 a^2 \left(H - \frac{h^3}{H^2} + \frac{3h^2}{H^2} y \right) g.$$

冰山沿 y 轴方向的合力便为

$$F_y = G_1 - F = G_2 - F = -\rho_2 a^2 \frac{h^2}{H^2} g y,$$

这是一个线性回复力, 考虑到冰山质量为

$$m = \frac{1}{3}\rho_1 a^2 H,$$

因此冰山作简谐振动的角频率和周期分别为

$$\omega = \sqrt{\rho_2 a^2 \frac{h^2}{H^2} g / m} = \sqrt{3(\rho_2 - \rho_1) g / \rho_1 h},$$

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi \sqrt{\rho_1 h / 3(\rho_2 - \rho_1) g}.$$

7-26 试由 $t=0$ 时振子的位置 x_0 和速度 v_0 , 确定临界阻尼振动 $x = (A_1 + A_2 t)e^{-\beta t}$ 中的待定常量 A_1 和 A_2 .

解 振子速度为

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (A_2 - \beta A_1 - \beta A_2 t)e^{-\beta t},$$

初条件便是 $A_1 = x_0, \quad A_2 - \beta A_1 = v_0,$

即得 $A_1 = x_0, \quad A_2 = \beta x_0 + v_0.$

7-27 质量 $m_1 = 10 \text{ kg}$ 的物体从 $h = 0.50 \text{ m}$ 高处静止下落到弹簧秤的秤盘里,并粘附在盘上. 已知秤盘质量 $m_2 = 2.0 \text{ kg}$, 弹簧的劲度系数 $k = 980 \text{ kg/s}^2$, 为使秤盘在最短时间内停下, 就须附上一个阻尼系统, 试求所需的阻尼系数 β . 将振子的力平衡点取为坐标原点, 设置竖直朝下的 y 轴, 再将物体落到秤盘瞬间取为 $t = 0$ 时刻, 试写出 $t \geq 0$ 时振子的运动方程 $y-t$.

解 振子的固有角频率为

$$\omega_0 = \sqrt{k/(m_1 + m_2)} = 9.0 \text{ s}^{-1},$$

为使秤盘在最短时间内停下, 振子须作临界阻尼振动, 即需

$$\beta = \omega_0 = 9.0 \text{ s}^{-1}.$$

$t = 0$ 时刻振子的位置和速度分别为

$$y_0 = -m_1 g/k = -0.1 \text{ m},$$

$$v_0 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gh} = 2.61 \text{ m/s}.$$

参考 7-26 题的解答, 可得临界阻尼运动方程

$$y = (A_1 + A_2 t) e^{-\beta t}$$

中的两个常量分别为

$$A_1 = y_0 = -0.1 \text{ m}, \quad A_2 = \beta y_0 + v_0 = 1.71 \text{ m/s},$$

即有 $y = (-0.1 + 1.71t) e^{-9.0t} \text{ m}.$

7-28 阻尼振动中振子的固有角频率 ω_0 恰是阻尼系数 β 的 $\sqrt{2}$ 倍, 已知 $t = 0$ 时振子位于 $x_0 > 0$ 处, 振动速度 $v_0 = -2\beta x_0$, 试求振子的运动方程 $x \sim t$.

解 因 $\omega_0 > \beta$, 故振子作低阻尼振动, 运动方程为

$$x = A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \beta.$$

求导可得

$$v_x = -\beta A e^{-\beta t} [\cos(\beta t + \phi) + \sin(\beta t + \phi)],$$

初条件便可表述为

$$A \cos \phi = x_0 > 0,$$

$$-\beta A (\cos \phi + \sin \phi) = v_0 = -2\beta x_0 = -2\beta A \cos \phi.$$

求解这两个方程,相继得

$$\cos \phi > 0, \quad \cos \phi = \sin \phi, \quad \phi = \pi/4,$$

$$A = x_0 / \cos \phi = \sqrt{2} x_0,$$

所求运动方程便是

$$x = \sqrt{2} x_0 e^{-\beta t} \cos\left(\beta t + \frac{\pi}{4}\right).$$

7-29 摆长 $l=0.750\text{ m}$ 的单摆作阻尼振动,经 $\Delta t=1\text{ min}$ 后,其振幅减为初始振幅的 $1/8$,试求对数减缩 λ .

解 由

$$Ae^{-\beta(t+\Delta t)} / Ae^{-\beta t} = \frac{1}{8},$$

可算得

$$\beta = \ln 8 / \Delta t = 0.03/\text{s}.$$

单摆的固有角频率为

$$\omega_0 = \sqrt{g/l} = 3.62/\text{s} \gg \beta,$$

故近似有

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \approx \omega_0, \quad T = 2\pi/\omega \approx 2\pi/\omega_0,$$

$$\lambda = \beta T = 2\pi\beta/\omega_0 = 0.061.$$

7-30 在某钢琴上弹响中音 C 这个琴键时,其振动能量在 $\Delta t=1\text{ s}$ 内减至初始值的一半.已知中音 C 的频率 $f_0=256\text{ Hz}$,试求系统品质因数 Q .

解 钢琴上各键的固有角频率 ω_0 会因低阻尼而变化为 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$,但显然要确保 $\omega \approx \omega_0$,即应有 $\beta \ll \omega_0$. t 时刻振动能量可近似为

$$E(t) = \frac{1}{2} k A^2 e^{-2\beta t},$$

便有

$$\frac{1}{2} = E(t + \Delta t) / E(t) = e^{-2\beta \Delta t},$$

算得

$$\beta = \ln 2 / 2\Delta t = 0.347/\text{s},$$

而 $\omega_0 = 2\pi f_0 = 1608/\text{s}$,确有 $\beta \ll \omega_0$. 系统品质因数为

$$Q = \omega_0 / 2\beta = 2.32 \times 10^3.$$

7-31 固有角频率为 ω_0 的振子, 在作受迫振动达到稳定态时, 振动速度恰好与驱动力同相位, 试求驱动力角频率 ω .

解 达稳态时, 振子位置和速度分别为

$$x = A \cos(\omega t + \phi),$$

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \phi) = \omega A \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right).$$

因速度与驱动力同相位, 故有

$$\phi + \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{即} \quad \phi = -\frac{\pi}{2},$$

即得

$$\omega = \omega_0.$$

7-32 固有频率为 2.0 Hz 的弹簧振子, 所受空气阻力的大小与振子速度成正比. 对振子施以振幅为 1.0×10^{-3} N 的谐变力, 发生振幅为 5.0 cm 的共振. 设空气阻力系数 γ 是个小量, 试求 γ 和阻力的幅度(即阻力的最大值) f_M .

解 因 γ 是小量, 即有 $\beta \ll \omega_0$, 共振振幅为

$$A_M = f_0 / 2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = f_0 / 2\beta\omega_0 = F_0 / \gamma\omega_0.$$

将 $F_0 = 1.0 \times 10^{-3}$ N, $A_M = 5.0 \times 10^{-2}$ m, $\omega_0 = 2\pi \text{ s}^{-1}$ 代入, 可解得

$$\gamma = F_0 / A_M \omega_0 = 1.6 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s/m}.$$

空气阻力为

$$f = -\gamma v = -\gamma \omega A \sin(\omega t + \phi),$$

位移共振时, 阻力幅度便是

$$f_M = \gamma \omega A_M = 1.6 \times 10^{-3} \times 4\pi \times 5.0 \times 10^{-2} = 1.0 \times 10^{-3} \text{ N}.$$

7-33 设受迫振动中的驱动力为 $F = F_0 \cos^2 \omega t$, 即振子的动力学微分方程可表述为

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos^2 \omega t,$$

试以 β, ω_0, f_0 和 ω 为已知参量, 给出振子的稳态解.

解 稳态解即为非齐次微分方程特解, 为找此解可将非齐次方程改述成

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{2} f_0 (1 + \cos 2\omega t),$$

然后可分解为

$$\ddot{x}_1 + 2\beta\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = f_0/2, \quad (1)$$

$$\ddot{x}_2 + 2\beta\dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = \frac{f_0}{2} \cos 2\omega t. \quad (2)$$

将①②式特解分别记为 x_1^* 和 x_2^* , 那么所求稳态解便是

$$x = x_1^* + x_2^*.$$

①式的特解设成

$$x_1^* = at^2 + bt + c,$$

代入①式, 要求任意 t 时刻都成立, 可解得

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = f_0/2\omega^2,$$

即有

$$x_1^* = f_0/2\omega^2.$$

②式的特解为

$$x_2^* = A \cos(2\omega t + \phi),$$

$$A = \frac{f_0/2}{\sqrt{(\omega_0^2 - 4\omega^2)^2 + 16\beta^2\omega^2}}, \quad \tan \phi = -4\beta\omega/(\omega_0^2 - 4\omega^2). \quad (3)$$

所求振子稳态解便是

$$x = \frac{f_0}{2\omega_0^2} + A \cos(2\omega t + \phi),$$

其中 A, ϕ 如③式所述.

7-34 人耳能听到的声音, 其频率范围在 20~20000 Hz 间. 已知声波在 25 °C 海水中的传播速度为 1531 m/s, 试计算人耳在 25 °C 海水中能听到的声音的波长范围.

解 由 $\lambda = uT = u/\nu$, 得所求波长范围为

$$1531/20000 \sim 1531/20 \quad \text{即} \quad 0.07655 \sim 76.55 \text{ m}.$$

7-35 人眼所能见到的光的波长范围是 400~760 nm, 求可见光的频率范围. 人眼最敏感的光是黄绿色光, 波长为 550 nm, 求黄绿色光的频率.

解 由 $\nu = u/\lambda = c/\lambda$, $c = 3 \times 10^8$ m/s, 得可见光频率范围为

$$7.5 \times 10^{14} \sim 3.9 \times 10^{14} \text{ Hz},$$

黄绿色光频率为

$$5.5 \times 10^{14} \text{ Hz}.$$

7-36 设有一列简谐横波:

$$y = 5.0 \cos 2\pi \left(\frac{t}{0.05} - \frac{x}{10} \right),$$

其中 x, y 的单位是 cm, t 的单位是 s. 试求:

- (1) 振幅 A , 角频率 ω , 波速 u 和波长 λ ;
- (2) 振动初相位是 $\frac{3}{5}\pi$ 的位置 x .

解 已知的横波可改述为

$$y = 5.0 \cos 40\pi \left(t - \frac{x}{200} \right).$$

(1) 可得

$$A = 5.0 \text{ cm}, \quad \omega = 40\pi \text{ s}^{-1}, \quad u = 2.0 \text{ m/s}, \quad \lambda = 2\pi u / \omega = 10 \text{ cm}.$$

(2) 由

$$40\pi \times \left(-\frac{x}{200} \right) = \frac{3}{5}\pi + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

得 $x = (-3.0 + 10k) \text{ cm}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

7-37 一列简谐横波沿某弦线自左向右传播, 传播速度为 80 cm/s . 观察弦上某点的运动, 发现该点在作振幅为 2 cm , 频率为 10 Hz 的简谐振动. 取该点为坐标原点, 设置自左向右的 x 坐标, 已知 $t=0$ 时该点振动量 $y=0$, 且振动速度沿 y 轴正方向. 试求:

- (1) 此波的波长 λ ;
- (2) 弦上该点振动的运动学方程;
- (3) 弦波的运动学方程;
- (4) 弦上 $x=4 \text{ cm}$ 处质点振动的初相位 ϕ_x .

解 (1) $\lambda = u/\nu = 8 \text{ cm}$.

(2) $x=0$ 点振动的运动学方程为

$$y = A \sin \omega t = A \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = 2.0 \cos \left(20\pi t - \frac{\pi}{2} \right) \text{ cm}.$$

(3) 弦波的运动学方程为

$$\begin{aligned} y(x, t) &= A \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{\pi}{2} \right) \text{ cm} \\ &= 2.0 \cos \left(20\pi t - \frac{2\pi}{8} x - \frac{\pi}{2} \right) \text{ cm}. \end{aligned}$$

(4) $x=4\text{ cm}$ 处质点振动初相位为

$$\phi_x = -\frac{2\pi}{8}x - \frac{\pi}{2} = -\frac{3}{2}\pi.$$

7-38 某平面简谐波在 $t=0$ 时刻的波形曲线如图 7-22 所示, 波朝 x 轴负方向传播, 波速 $u=330\text{ m/s}$, 试写出波函数 $\xi(x,t)$ 表达式.

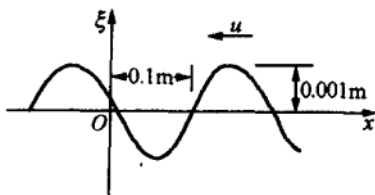


图 7-22

解 由图形可知, $A=0.001\text{ m}$, $\lambda=0.2\text{ m}$, 结合已知量 $u=330\text{ m/s}$, 可得

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi u/\lambda = 3300\pi\text{ s}^{-1}.$$

由图形可知, 右行波在 $x=0$ 点 $t=0$ 时的振动速度必定朝 ξ 轴负方向, 故 $x=0$ 点振动方程为

$$\xi(0,t) = A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

波函数便是

$$\begin{aligned} \xi(x,t) &= A \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0.001 \cos\left(3300\pi t + 10\pi x + \frac{\pi}{2}\right) (\text{m}). \end{aligned}$$

7-39 在介质中传播速度 $u=200\text{ cm/s}$, 波长 $\lambda=100\text{ cm}$ 的一列平面简谐波, 某时刻的一部分波形曲线如图 7-23 所示. 已知图中 A 点坐标 $x_A=20\text{ cm}$, 振动量 $\xi_A=4\text{ cm}$, 振动速度 $v_A=12\pi\text{ cm/s}$, 以此时刻开始计时, 写出 $x_B=95\text{ cm}$ 处 B 点的振动表述式.

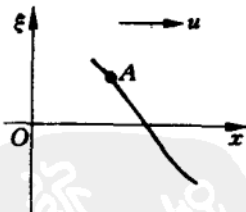


图 7-23

解 波的振动周期、角频率分别为

$$T = \lambda/u = 0.5\text{ s}, \quad \omega = 2\pi/T = 4\pi\text{ s}^{-1}.$$

A 处振动量可表述为

$$\xi_A = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x_A + \phi_0\right), \quad x_A = 20\text{ cm},$$

由初始时 $\xi_A = 4 \text{ cm}$, $v_A = 12\pi \text{ cm/s}$, 可解得(过程略)

$$A = 5 \text{ cm}, \quad -\frac{2\pi}{\lambda}x_A + \phi_0 = -0.21\pi,$$

将 $\lambda = 100 \text{ cm}$, $x_A = 20 \text{ cm}$ 代入, 得

$$\phi_0 = 0.19\pi.$$

在 $x_B = 95 \text{ cm}$ 处 B 点的振动表达式为

$$\begin{aligned} \xi_B &= A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x_B + \phi_0\right) \\ &= 5 \cos(4\pi t - 1.71\pi) (\text{cm}). \end{aligned}$$

7-40 波长为 λ 的平面简谐波在 $x=0$ 处的振动曲线如图 7-24 所示, 其中 ω 为振动角频率. 试在 $\xi-x$ 坐标平面上画出 $t=0$ 与 $t=T/4$ 时刻的波形曲线, 此处 T 为振动周期.

解 由 $x=0$ 处振动曲线可以看出, $t=0$ 时刻振动速度朝着 ξ 轴正方向.

若为左行波, 那么 $t=0$ 时刻波形曲线为图 7-25 中实曲线 1 所示, 对应 $x=0$ 处在 $t=0$ 时刻的振动速度朝着 ξ 轴正方向.

若为右行波, 那么 $t=0$ 时刻波形曲线为图 7-25 中虚曲线 2 所示, 对应 $x=0$ 处在 $t=0$ 时刻的振动速度也朝着 ξ 轴正方向.

$t=T/4$ 时的波形曲线即为 $t=0$ 时波形曲线行进四分之一周期时的波形曲线, 这相当于将原波形曲线左移(对应左行波)或右移(对应右行波)四分之一波长所得曲线. 显然, 两者将重合成图 7-26 所示的曲线.

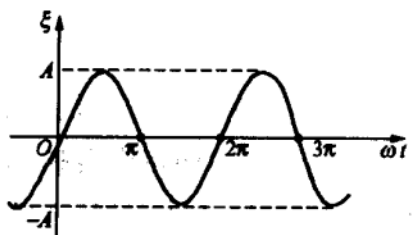


图 7-24

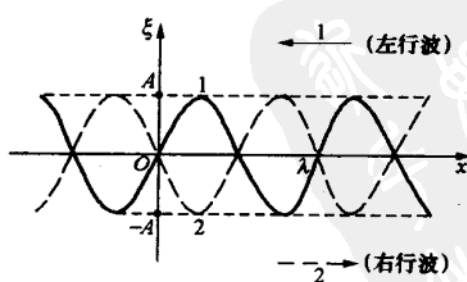


图 7-25

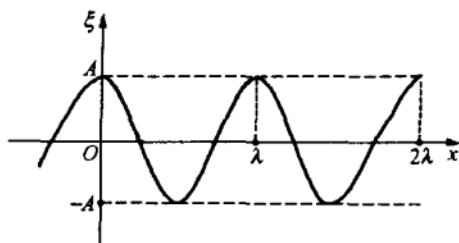


图 7-26

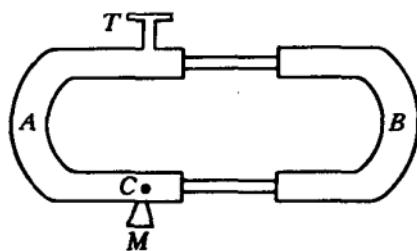


图 7-27

7-41 为测定声音振动频率,采用干涉法,如图 7-27 所示.图中 T 是声源, A, B 是两根弯头,均为空的金属管,弯管 B 可以移动, C 处 M 是助听器. 观察者移动弯头 B 的位置,用助听器来监听调节声音的增强或减弱. 为使声音强度从一个极小值过渡到下一个极小值,将弯管 B 移动距离 $l=5.5\text{ cm}$. 在室温下声波速度 $u=340\text{ m/s}$,试求声音振动频率 ν .

解 从声源 T 发出的声波,沿两条路径 TAC 和 TBC ,传播到 C ,发生干涉.

弯管 B 移动路程 l ,使声波的路程差改变 $2l$. 移动前波程差为 $\Delta L_1 = \left(k_1 + \frac{1}{2}\right)\lambda$, 移动后波程差为 $\Delta L_2 = \left[(k_1 \pm 1) + \frac{1}{2}\right]\lambda$, 因此

$$2l = |\Delta L_2 - \Delta L_1| = \lambda,$$

声音的频率便是

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{u}{2l} = 3100\text{ Hz}.$$

7-42 如图 7-28 所示,拉直的绳子左端固定于墙上,简谐绳波自 x 轴正方向的远处沿 x 轴负方向入射而来,入射波在坐标原点 O 的振动为 $\xi_0 = A \cos \omega t$, O 点与墙的距离为 $\frac{5}{4}\lambda$,其中 λ 为入射波长.

入射波遇绳固定于墙的端点将发生反射,反射波的振幅仍为 A ,角频率仍为 ω ,波长仍为 λ ,但相位有 π 突变,使绳的固定端合振动为零. 反射波与入射波在绳中将叠加成驻波,试导出驻波方程,并画出驻波的波形曲线.

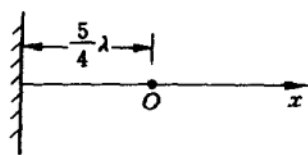


图 7-28

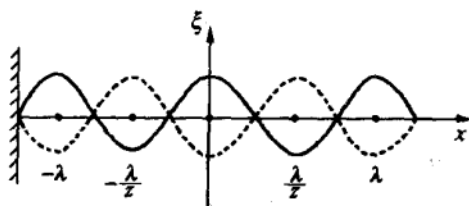


图 7-29

解 由已知的入射波在原点 O 的振动, 可得左行的入射波为

$$\xi_{\lambda} = A \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right),$$

传播到反射点的相位为

$$\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{5}{4}\lambda = \omega t - \frac{5}{2}\pi.$$

反射后相位有 π 突变, 故反射波在反射点的相位为 $\omega t - \frac{7}{2}\pi$, 在 O 点

的相位又比反射点的相位落后 $\frac{5}{2}\pi$, 故反射波在 O 点的相位为

$$\omega t - \frac{7}{2}\pi - \frac{5}{2}\pi = \omega t - 6\pi.$$

据此, 反射波的数学表达式为

$$\xi_{\text{反}} = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x - 6\pi\right),$$

或者等效地改述成

$$\xi_{\text{反}} = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right).$$

绳中的合成波为

$$\xi = \xi_{\lambda} + \xi_{\text{反}} = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \cos\omega t,$$

此即为驻波方程. 当

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

时振幅为零, 对应波节, 波节的位置可表述为

$$x = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

类似地可求得振幅最大的各点, 即波腹的位置为

$$x = k \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

驻波图形如图 7-29 所示.

7-43 如图 7-30 所示,在竖直峭壁左侧地面上有一辆警车 S 以 $v_s = 10 \text{ m/s}$ 的速度朝着峭壁开去,同时发出频率 $\nu_0 = 1000 \text{ Hz}$ 的警笛声.在警车左侧有一骑自行车者 B,他以 $v_B = 2 \text{ m/s}$ 的速度背向峭壁离去.设声波在空气中的传播速度 $u = 330 \text{ m/s}$,试求 B 接收到的两种声波频率.

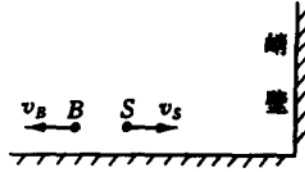


图 7-30

解 从 S 直接传播到 B 的声波,使 B 获得的接收频率为

$$\nu_1 = \frac{u - v_B}{u + v_s} \nu_0 = 965 \text{ Hz}.$$

S 发出的声波被峭壁接收,峭壁将这一声波朝左反射,反射频率同于接收频率,即有

$$\nu_{\text{反}} = \frac{u}{u - v_s} \nu_0,$$

B 对该种声波的接收频率便为

$$\nu_2 = \frac{u - v_B}{u} \nu_{\text{反}} = \frac{u - v_B}{u - v_s} \nu_0 = 1025 \text{ Hz}.$$

7-44 一人手执一音叉向一高墙以 5 m/s 的速度跑去,音叉的频率为 500 Hz ,声波传播速度为 330 m/s ,试计算此人听到的声音的拍频.

解 音叉发出的声波直接传到入耳的频率即为 $\nu_0 = 500 \text{ Hz}$.被高墙接收后再反射回的声波,其频率为

$$\nu_{\text{反}} = \frac{u}{u - v_s} \nu_0,$$

人耳接收的频率便是

$$\nu = \frac{u + v_B}{u} \nu_{\text{反}} = \frac{u + v_B}{u - v_s} \nu_0 = \frac{330 + 5}{330 - 5} \times 500 \text{ Hz} = 515 \text{ Hz}.$$

人耳中两种振动形成的拍频即为

$$\nu_{\text{拍}} = \nu - \nu_0 = 15 \text{ Hz}.$$

7-45 放置在海底的超声波探测器发出一束频率为 30000 Hz 的超声波,被迎面驶来的潜水艇反射回探测器来,测得反射波频率与原发射频率差为 241 Hz. 已知超声波在海水中的传播速度为 1500 m/s,试求潜水艇航行速度 v .

解 潜水艇反射波的频率 $\nu_{\bar{r}}$ 同于潜水艇的接收频率,即有

$$\nu_{\bar{r}} = \frac{u+v}{u} \nu_0,$$

探测器再接收到的频率便是

$$\nu = \frac{u}{u-v} \nu_{\bar{r}} = \frac{u+v}{u-v} \nu_0.$$

ν 与 ν_0 之差为

$$\Delta\nu = \nu - \nu_0 = \frac{2v}{u-v} \nu_0,$$

因 $\Delta\nu \ll \nu_0$,故必有 $v \ll u$,近似可得

$$v = \frac{\Delta\nu}{2\nu_0} u = 6.03 \text{ m/s}.$$

7-46 如图 7-31 所示,一根线密度 $\lambda_m = 0.15 \text{ g/cm}$ 的弦线,其一端与频率 $\nu = 50 \text{ Hz}$ 的音叉相连,另一端跨过定滑轮后悬一重物给弦线提供张力,音叉到滑轮间的距离 $l = 1 \text{ m}$. 当音叉振动时,设重物不振动,为使弦上形成有一个、二个、三个波腹的驻波,则重物的质量 m 应各为多大?

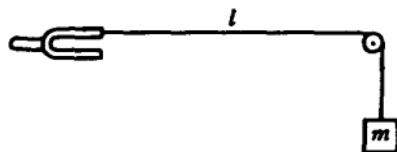


图 7-31

解 弦线两端均为波节, l 长度上有一个、二个、三个波腹时,波长分别为

$$\lambda_1 = 2l, \quad \lambda_2 = l, \quad \lambda_3 = \frac{2}{3}l.$$

由 $\lambda = u/\nu$, $u = \sqrt{T/\lambda_m} = \sqrt{mg/\lambda_m}$, 可得

$$m = \lambda^2 \nu^2 \lambda_m / g,$$

故重物质量应各为

$$m_1 = 4l^2 \nu^2 \lambda_m / g = 4 \times 1^2 \times (50)^2 \times 15 \times 10^{-3} / 9.8 = 15.3 \text{ kg},$$

$$m_2 = l^2 \nu^2 \lambda_m / g = \frac{1}{4} m_1 = 3.8 \text{ kg},$$

$$m_3 = \frac{1}{9} m_1 = 1.7 \text{ kg}.$$

7-47 已知弦线质量线密度为 λ , 弦中张力为 T , 弦中简谐横波的运动方程为 $\xi = A \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \phi \right]$, 试求弦波的能量线密度(单位长度上波的能量) ϵ .

解 弦元 $x \rightarrow x + dx$ 段的动能为

$$dE_k = \frac{1}{2} (\lambda dx) \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = \left\{ \frac{1}{2} \lambda \omega^2 A^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \phi \right] \right\} dx.$$

弦元 $x \rightarrow x + dx$ 段的原长为 dx , 在张力 T 作用下伸长

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{(dx)^2 + (d\xi)^2} - dx \\ &= \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2} - 1 \right] dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

该弦元两端张力 T 对端点做功之和便为 Tdl , 此功转化成弦元 dx 内含的势能

$$dE_p = Tdl = \left\{ \frac{1}{2} T \frac{\omega^2}{u^2} A^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \phi \right] \right\} dx,$$

将 $u^2 = T/\lambda$ 代入, 即得

$$dE_p = \left\{ \frac{1}{2} \lambda \omega^2 A^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \phi \right] \right\} dx.$$

弦元中波的总能量

$$dE = dE_k + dE_p = \left\{ \lambda \omega^2 A^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \phi \right] \right\} dx,$$

波的能量线密度便是

$$\epsilon = dE/dx = \lambda \omega^2 A^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \phi \right].$$

B 组

7-48 两个同方向、不同频率的简谐振动, 如果初相位相同, 振幅不同, 则可分别记为

$$x_1 = A_1 \cos \omega_1 t, \quad x_2 = A_2 \cos \omega_2 t.$$

利用三角函数和差化积公式,这两个简谐振动的合振动可表述成

$$\begin{aligned} x = x_1 + x_2 &= \frac{1}{2}(A_1 + A_2)(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) \\ &\quad + \frac{1}{2}(A_1 - A_2)(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \\ &= (A_1 + A_2)\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \\ &\quad + (A_2 - A_1)\sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right), \end{aligned}$$

即可分解成两个拍的叠加. 为方便称第一项为“大拍”,称第二项为“小拍”.

由太阳引起的太阳潮和由月球引起的月亮潮,均可近似处理为简谐振动. 太阳潮的振幅为 0.5 m,周期为 12 h(小时);月亮潮的振幅为 0.8 m,周期为 12.5 h. 太阳潮与月亮潮合成的海水潮汐(海面振动)也可分解成两个拍的叠加,“大拍”达最大幅度 $A_{\text{大}}$ 时对应的潮汐称为大潮,“小拍”达最大幅度 $A_{\text{小}}$ 时对应的潮汐称为小潮. 设海水足够深,试求 $A_{\text{大}}, A_{\text{小}}$ 和相邻大潮与小潮之间的时间间隔 Δt .

解 太阳潮、月亮潮的周期有最小公倍数,因此总可适当选取时间零点,使它们的振动量分别表述成

$$x_1 = A_1 \cos \omega_1 t, \quad x_2 = A_2 \cos \omega_2 t.$$

合振动便为

$$\begin{aligned} x = x_1 + x_2 &= (A_1 + A_2)\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \\ &\quad + (A_2 - A_1)\sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right), \end{aligned}$$

即得

$$A_{\text{大}} = A_1 + A_2 = 1.3 \text{ m}, \quad A_{\text{小}} = |A_2 - A_1| = 0.3 \text{ m}.$$

大潮出现的时刻 t 满足

$$\left| \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \right| = 1 \quad \left(\text{此时 } \sin\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t = 0 \right),$$

考虑到 $\omega = 2\pi/T$, 即得

$$t = k \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} = k \cdot 300 \text{ h}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

小潮出现的时刻 t' 满足

$$\left| \sin \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t' \right) \right| = 1 \quad \left(\text{此时 } \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t' = 0 \right),$$

即得

$$t' = \frac{1}{2} (2k + 1) \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} = (2k + 1) \cdot 150 \text{ h},$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

相邻大潮、小潮之间的时间间隔便是

$$\Delta t = 150 \text{ h}.$$

7-49 在一劲度系数为 k 的竖直轻长弹簧下端连接着质量为 m 的小球, 开始时小球静止地处于力平衡态. 设 $t=0$ 时刻开始, 弹簧上端以匀速度 u 竖直向上运动, 到 $t=t_0$ 时刻又突然降速到零. 建立附着于弹簧上端且竖直向下的 x 坐标轴, 其原点选在 $t=0$ 时刻小球所处位置, 试在 $t \geq 0$ 的范围确定小球位置 x 随时间 t 变化的函数关系.

解 分两个时间段讨论.

(1) $t_0 \geq t \geq 0$ 时段:

弹簧上端以匀速度 u 上升, x 轴所在参考系为惯性系, 小球在竖直弹簧力和重力作用下作简谐振动, 有

$$x = A_1 \cos(\omega t + \phi_1), \quad \omega = \sqrt{k/m}.$$

由初条件 $x_0=0$, $v_0=u$, 可得

$$A_1 = \sqrt{\frac{m}{k}} u, \quad \phi_1 = -\frac{\pi}{2},$$

即有

$$x = \sqrt{\frac{m}{k}} u \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t - \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{\frac{m}{k}} u \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t,$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = u \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t.$$

(2) $t \geq t_0$ 时段:

弹簧上端停止运动, x 轴所在参考系即为地面系, 小球仍在 $x=0$ 上下振动, x 随 t 变化的关系为

$$x = A_2 \cos \left[\sqrt{\frac{k}{m}} t' + \phi_2 \right], \quad t' = t - t_0,$$

$t=t_0$ 是 $t'=0$ 对应的初始时刻. 由初条件 $t'=0$ 时,

$$x_0 = \sqrt{\frac{m}{k}} u \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t_0, \quad v_0 = u \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t_0 - u,$$

可得

$$A_2 = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = 2 \sqrt{\frac{m}{k}} u \sin \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} t_0 \right],$$

$$\tan \phi_2 = -\frac{v_0}{\omega x_0} = \tan \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} t_0 \right], \quad \text{即} \quad \phi_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} t_0.$$

x 随 t 变化的关系便是

$$\begin{aligned} x &= 2 \sqrt{\frac{m}{k}} u \sin \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} t_0 \right] \cos \left[\sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_0) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} t_0 \right] \\ &= 2 \sqrt{\frac{m}{k}} u \sin \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} t_0 \right] \cos \left[\sqrt{\frac{k}{m}} \left(t - \frac{1}{2} t_0 \right) \right]. \end{aligned}$$

7-50 图 7-32 所示的水平弹簧振子中, 劲度系数为 k 的轻弹簧自由长度足够长. 将质量为 m 的振子水平向右移动, 直到弹簧伸长 L , 而后将振子自由释放. 已知振子与水平地面间的摩擦因数为常量 μ , 试问若振子运动过程中至少停止过两次, 那么第二次停留的位置相对振子的初始位置在何处?

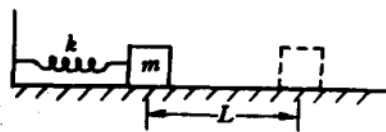


图 7-32

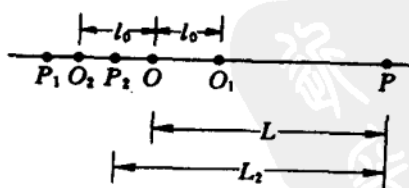


图 7-33

解 将振子初始位置记为 P 点, 弹簧处于自由长度状态时振子的位置记为 O 点, 振子朝左运动时力平衡位置记为 O_1 点, 振子朝右

运动时力平衡位置记为 O_2 点, 则 O_1, O_2 分别相对 O 的位置如图 7-33 所示, 其中

$$l_0 = \mu mg/k.$$

为了能够一开始出现朝左运动, 要求

$$L > l_0.$$

朝左运动是简谐振动, 振幅为 $L - l_0$. 第一次停留位置在 O_1 左侧 P_1 处, 其间相距

$$\overline{O_1 P_1} = L - l_0.$$

接着为能朝右运动, 要求 P_1 在 O_2 左侧, 两者相距

$$\overline{P_1 O_2} = \overline{O_1 P_1} - 2l_0 = L - 3l_0,$$

且有

$$\overline{P_1 O_2} > 0, \quad \text{即} \quad L > 3l_0,$$

朝右运动的振幅即为 $\overline{P_1 O_2} = L - 3l_0$. 第二次停留在 O_2 右侧 P_2 处,

且有

$$\overline{O_2 P_2} = \overline{P_1 O_2} = L - 3l_0,$$

故第二次停留位置 P_2 在 P 左侧

$$L_2 = (L + l_0) - (L - 3l_0) = 4l_0 = 4\mu mg/k.$$

7-51 如图 7-34 所示, 在水平地面上方高 1 m 处有一固定的水平横杆, 横杆下用细线悬挂着小球 A , A 通过一根轻弹簧与另一个相同的小球 B 相连. A, B 静止不动时, 弹簧伸长 3.0 cm. 今将细线烧断, A, B 便与弹簧一起下落, 假设 B 触及地面上的橡皮泥时, 弹簧的伸长量正好也是 3.0 cm, 而后 B 与橡皮泥发生完全非弹性碰撞. 考虑到 A 将会继续朝下运动, 试求而后弹簧相对其自由长度的最大压缩量.

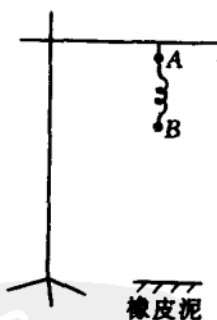


图 7-34

解 A, B 各自质量记为 m , 弹簧劲度系数记为 k , 细线烧断前, 弹簧伸长量为

$$\Delta l_0 = mg/k.$$

细线烧断后, 系统质心 C 作自由落体运动, A, B 相对 C 作简谐振动, 振动角频率和周期分别为

$$\omega = \sqrt{k'/m}, \quad k' = 2k, \quad T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/2k},$$

将 $m/k = \Delta l_0/g$ 代入, 得

$$T = 2\pi\sqrt{\Delta l_0/g} = 0.25 \text{ s}.$$

B 球触地时弹簧伸长量又是 3.0 cm , 这表明质心下落时间和下落高度分别为

$$t_n = nT, \quad h_n = \frac{1}{2}gt_n^2 = n^2\left(\frac{1}{2}gT^2\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

$n=1$ 对应的下落高度为

$$h_1 = \frac{1}{2}gT^2 = 0.30 \text{ m},$$

$n \geq 2$ 时, h_n 都超过 1 m , 不可取. B 球触地时, A 球动能值等于 mgh_1 , 弹簧内的弹性势能为 $\frac{1}{2}k\Delta l_0^2$. B 球与橡皮泥作完全非弹性碰撞后, 设弹簧相对其自由长度可达到的最大压缩量为 Δl , 则有

$$mgh_1 + \frac{1}{2}k\Delta l_0^2 + mg(\Delta l_0 + \Delta l) = \frac{1}{2}k\Delta l^2,$$

将 $mg = k\Delta l_0$ 代入后, 可得

$$(2h_1 + 3\Delta l_0)\Delta l_0 + 2\Delta l_0\Delta l = \Delta l^2,$$

数值计算可得

$$\Delta l = 18 \text{ cm}.$$

7-52 在光滑的水平桌面上开有一小孔, 一根穿过小孔的细绳两端各系一质量分别为 m_1 和 m_2 的小球, 位于桌面上的小球 m_1 以 v_0 的速度绕小孔作匀速圆周运动, 桌面下小球 m_2 则悬在空中, 保持静止.

- (1) 求位于桌面部分的细绳的长度 l_0 ;
- (2) 若给 m_1 一个径向的小冲量, 则 m_2 将作上下振动, 求振动角频率 ω .

解 (1) 将绳中张力记为 T , 则有

$$m_1v_0^2/l_0 = T = m_2g,$$

可得

$$l_0 = m_1v_0^2/m_2g. \quad \textcircled{1}$$

- (2) 以小孔为原点, 在桌面上设置极坐标系, 小球 m_1 获得径向

冲量后, 径向动力学方程为

$$T = -m_1(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2). \quad (2)$$

以小孔为参考点, 小球 m_1 的角动量守恒式为

$$m_1 r^2 \dot{\theta} = m_1 l_0 v_0,$$

即有

$$\dot{\theta} = l_0 v_0 / r^2. \quad (3)$$

将③式代入②式, 可得

$$T = -m_1 \ddot{r} + m_1 \frac{l_0^2 v_0^2}{r^3}. \quad (4)$$

小球 m_2 在竖直方向上的动力学方程为

$$T - m_2 g = m_2 \ddot{r}, \quad (5)$$

联立④⑤式, 可得

$$m_2 g = -(m_1 + m_2) \ddot{r} + m_1 \frac{l_0^2 v_0^2}{r^3}. \quad (6)$$

小球 m_1 所得径向冲量很小, r 与 l_0 之间的差异量是个小量, 记为 δ , 有

$$r = l_0 + \delta, \quad \ddot{r} = \ddot{\delta}. \quad (7)$$

将⑦式代入⑥式, 可得

$$\begin{aligned} m_2 g &= -(m_1 + m_2) \ddot{\delta} + m_1 \frac{l_0^2 v_0^2}{l_0^3} \left(1 + \frac{\delta}{l_0}\right)^{-3} \\ &= -(m_1 + m_2) \ddot{\delta} + m_1 \frac{v_0^2}{l_0} - 3m_1 \frac{v_0^2}{l_0^2} \delta, \end{aligned} \quad (8)$$

将①式代入⑧式后, 简化为

$$\ddot{\delta} + \omega^2 \delta = 0,$$

其中,

$$\omega^2 = 3m_2^2 g^2 / m_1 (m_1 + m_2) v_0^2.$$

这是简谐振动微分方程, 因此小球 m_1 的径向运动是以 $r=l_0$ 为平衡位置的简谐振动, 小球 m_2 在竖直方向上的运动也是一样的简谐振动, 振动角频率为

$$\omega = \frac{m_2 g}{m_1 v_0} \sqrt{\frac{3m_1}{m_1 + m_2}}.$$

7-53 在天花板下用两根长度同为 l 的轻绳悬挂一质量为 M 的光滑匀质平板, 板的中央有一质量为 m 的光滑小球. 开始时系统处于静止的水平状态, 而后如图 7-35 所示, 使板有一水平方向的小初速度 v_0 , 此板便会作小角度摆动. 假设摆动过程中细绳始终处于伸直状态, 试求板的摆动周期.

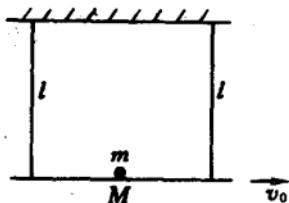


图 7-35

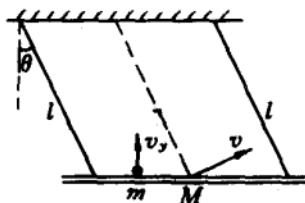


图 7-36

解 板在摆动时, 各部位与质心运动一致, 只需考虑质心运动即可. 摆角为 θ 时平板质心速度 v 和小球竖直向上的速度 v_y , 如图 7-36 所示, 由能量方程和速度关系式:

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + (M+m)gl(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}Mv_0^2,$$

$$v_y = v \sin \theta,$$

可解得

$$v^2 = \frac{Mv_0^2 - 2(M+m)gl(1 - \cos \theta)}{M + m \sin^2 \theta},$$

平板质心的向心加速度便是

$$a_c = \frac{v^2}{l} = \frac{Mv_0^2 - 2(M+m)gl(1 - \cos \theta)}{l(M + m \sin^2 \theta)}. \quad (1)$$

设平板与小球之间的竖直方向作用力大小为 N , 图 7-37 画出了平板质心“受力”情况, 它的切向动力学方程

$$(Mg + N)\sin \theta = -Ma_{\text{切}},$$

与小球的动力学方程

$$N - mg = ma_y,$$

联立, 消去 N , 可得

$$(M+m)g \sin \theta = -Ma_{\text{切}} - ma_y \sin \theta. \quad (2)$$

小球向上的加速度 a_y , 即为平板圆运动加速度的相应分量, 有



图 7-37

$$a_y = a_{\text{心}} \cos \theta + a_{\text{切}} \sin \theta, \quad (3)$$

将①式代入③,可得

$$a_y = \frac{Mv_0^2 - 2(M+m)gl(1-\cos\theta)}{l(M+m\sin^2\theta)} \cos \theta + a_{\text{切}} \sin \theta, \quad (4)$$

④代入②式,便有

$$(M+m)g \sin \theta + m \frac{Mv_0^2 - 2(M+m)gl(1-\cos\theta)}{l(M+m\sin^2\theta)} \cos \theta \sin \theta \\ = -(M+m\sin^2\theta)a_{\text{切}}.$$

引入关于 θ 的角加速度 $\beta = a_{\text{切}}/l$, 可得

$$\beta = - \frac{\sin \theta}{l(M+m\sin^2\theta)} \left[(M+m)g + m \frac{Mv_0^2 - 2(M+m)gl(1-\cos\theta)}{l(M+m\sin^2\theta)} \cos \theta \right]. \quad (5)$$

本题所给 v_0 很小, θ 也就很小, 近似有

$$v_0^2 = 0, \quad \cos \theta = 1, \quad \sin \theta = \theta, \quad M + m \sin^2 \theta = M,$$

⑤式简化为

$$\beta + \omega^2 \theta = 0, \quad \omega^2 = \frac{M+m}{M} \frac{g}{l},$$

可见平板的运动类似于单摆运动, 摆动周期为

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi \sqrt{\frac{M}{M+m} \cdot \frac{l}{g}}.$$

7-54 某竖直平面内有一半径为 R 的光滑固定圆环, 斜边长 $2R$ 、短边长 R 的匀质直角三角板放在环内, 试求三角板在其平衡位置两侧小角度摆动周期 T .

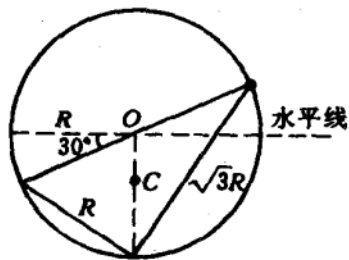


图 7-38

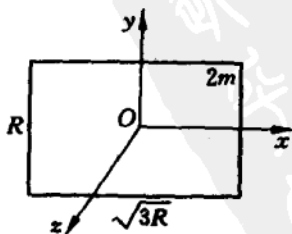


图 7-39

解 平衡位置如图 7-38 所示,三角板质心 C 在三条中线交点上,与斜边中点 O (即为摆动转轴上的一点)相距 $l=R/3$. 将三角板质量记为 m ,相对过 O 点的水平转轴,转动惯量记为 I_0 ,则小角度摆动周期为

$$T = 2\pi \sqrt{I_0/mgl}.$$

取长为 $\sqrt{3}R$ 、宽为 R 、质量为 $2m$ 的匀质长方板,以中心 O 为原点设置图 7-39 所示的 $Oxyz$ 坐标框架,据垂直轴定理,有

$$I_x = I_x + I_y = \frac{1}{12}(2m)R^2 + \frac{1}{12}(2m)(\sqrt{3}R)^2 = \frac{2}{3}mR^2.$$

联系到本题所给的直角三角板,有

$$I_0 = \frac{1}{2}I_x = \frac{1}{3}mR^2,$$

即得

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{3}mR^2/mg \cdot \frac{R}{3}} = 2\pi \sqrt{R/g}.$$

7-55 半径 R 的匀质圆环截去任何一段圆弧,以余下的圆弧段的中点为悬挂点,可形成小角度复摆运动,试证摆动周期为常量.

证 圆环圆心记为 P ,图 7-40 中虚线代表截去的圆弧段,实线代表余下的圆弧段,后者中点 O 为悬挂点. 设剩余质量为 m ,质心 C 与 P 的间距记为 l_{CP} . 将剩余圆弧段相对于水平 C 轴的转动惯量记为 I_C ,相对于水平 P 轴的转动惯量记为 I_P ,则有

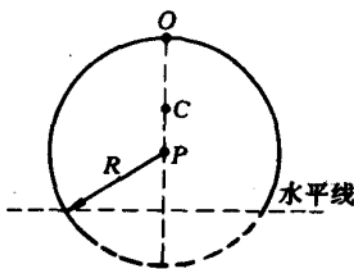


图 7-40

$$I_C = I_P - ml_{CP}^2 = mR^2 - ml_{CP}^2,$$

剩余圆弧段相对水平 O 轴的转动惯量便是

$$I_O = I_C + m(R - l_{CP})^2 = 2mR(R - l_{CP}),$$

即得小角度复摆周期为

$$T = 2\pi \sqrt{I_O/mg(R - l_{CP})} = 2\pi \sqrt{2R/g}.$$

可见是一个常量.

7-56 在水平光滑细长直角槽中嵌入两个质量相同的小物块 A 和 B , 它们的上表面用长为 l 、质量可忽略的刚性细杆铰接, 铰接处在 A, B 运动时可无摩擦地自由旋转. 开始时, A, B 与细杆都静止, 细杆不平行于任何一条槽, 即图 7-41 中的 θ_0 为锐角. 然后沿 x_0 方向给 A 施以冲量, 于是 A, B 均会在各自槽中无摩擦地运动.

(1) 试证细杆中点 C 将作圆周运动;

(2) 试证 A, B 各自作简谐振动, 并且用 l, θ_0, v_{AO} (A 的初速大小) 诸量表述周期 T .

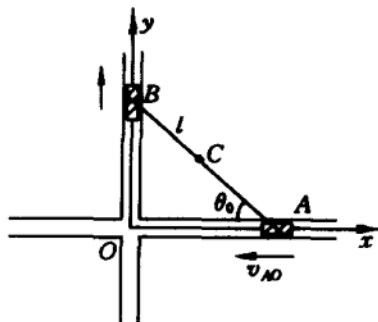


图 7-41

解 (1) C 点坐标 x_C, y_C 与 A, B 坐标 x_A, y_B 的关系为

$$x_C = x_A/2, \quad y_C = y_B/2,$$

C 的运动轨道便为

$$x_C^2 + y_C^2 = \frac{1}{4}(x_A^2 + y_B^2) = \left(\frac{l}{2}\right)^2,$$

可见 C 作圆周运动, 圆半径为 $l/2$.

(2) C 点速度 v_C 与 A, B 速度 v_A, v_B 间的关系为

$$v_{Cx} = v_A/2, \quad v_{Cy} = v_B/2, \quad v_C^2 = v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2 = \frac{1}{4}(v_A^2 + v_B^2).$$

A, B 初速度的关联式为

$$v_{BO} = v_{AO} \cot \theta_0.$$

因动能守恒, 有

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_{AO}^2 + \frac{1}{2}mv_{BO}^2,$$

即得

$$v_C^2 = \frac{1}{4}(v_A^2 + v_B^2) = \frac{1}{4}(v_{AO}^2 + v_{BO}^2) = v_{AO}^2/4 \sin^2 \theta_0 (\text{常量}).$$

可见 C 作匀速圆周运动, 它的 x, y 方向分运动都是简谐振动. 由 $x_A = 2x_C, y_B = 2y_C$, 可知 A, B 也各自作简谐振动. 振动周期即为 C 的圆周运动周期, 故有

$$T = \frac{2\pi(l/2)}{v_c} = \frac{2\pi l \sin \theta_0}{v_{AO}}$$

7-57 如图 7-42 所示,在水平光滑桌面的中心有一光滑小孔 O ,一根劲度系数为 k 的弹性轻绳穿过小孔 O ,绳的一端固定于小孔正下方的 A 点,另一端系一质量为 m 的小球,弹性绳自由长度等于 OA . 现将小球沿桌面拉至 B 处,设 $\overline{OB}=l$,并让小球沿垂直于 OB 的方向以初速度 v_0 在桌面上运动. 试求:

- (1) 小球绕 O 点转过 90° 至 C 点所需时间;
- (2) 小球到达 C 点时的速度 v_c 及 C 点至 O 点的距离.

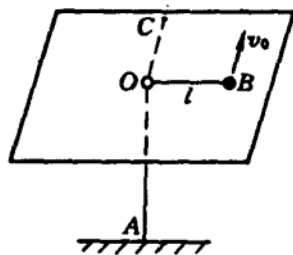


图 7-42

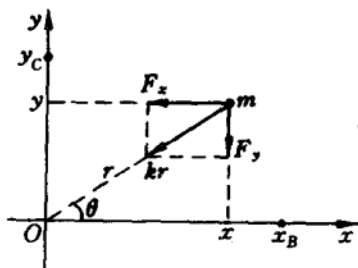


图 7-43

解 在桌面上设置图 7-43 所示的 Oxy 坐标系. 小球运动至 r, θ 位置时, 受指向 O 点的弹性力 kr , 此力在 x, y 方向的分力为

$$F_x = -kr \cos \theta = -kx, \quad F_y = -kr \sin \theta = -ky,$$

都是线性回复力, 所以小球的 x, y 方向分运动均为简谐振动, 振动角频率、周期同为

$$\omega = \sqrt{k/m}, \quad T = 2\pi \sqrt{m/k}.$$

(1) 小球绕 O 点转过 90° 至 C 点, 相当于在 x, y 方向上均经过四分之一周期的简谐振动, 所需时间为

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{m/k}.$$

(2) 小球到达 C 点时, x 方向的振动位移为零, y 方向的振动速度为零. 由 x 和 y 方向简谐振动机械能各自守恒, 可将 C 点的速度 v_{Cx} 、坐标 y_c 分别与 B 点的坐标 $x_B=l$, 速度 $v_{By}=v_0$ 联系起来, 有

$$\frac{1}{2} m v_{Cx}^2 = \frac{1}{2} k x_B^2 = \frac{1}{2} k l^2,$$

$$\frac{1}{2}ky_C^2 = \frac{1}{2}mv_{By}^2 = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

解得

$$v_{Cx} = \sqrt{\frac{k}{m}l}, \quad y_C = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0,$$

其中 v_{Cx} 即为所求量 v_C , y_C 即为所求的 C 点至 O 点的距离.

7-58 如图 7-44 所示, 质量为 M 、宽为 d 的木块置于光滑水平面上, 与一端固定于竖直墙上的轻弹簧相连, 弹簧的劲度系数为 k , 处于原长. 一质量为 m 的子弹以 v_0 初速度水平射向木块, 在穿入或穿透木块的过程中, 受到木块的摩擦阻力恒为常量 F . 试求木块第一次向右运动过程中速度可能达到的最大值, 以及此时对应的子弹入射速度 v_0 .

已知在子弹穿入或穿透木块过程中, 木块的质量不因子弹的射入而变化, 且有 $kd \geq 2F$, $m/M \geq 5/4$.

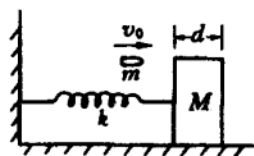


图 7-44

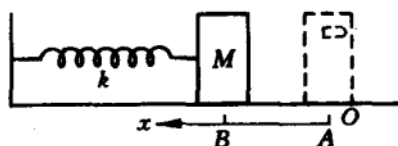


图 7-45

解 木块第一次向右运动过程中受到弹簧的向左拉力和子弹提供的向右摩擦力. 设弹簧处于原长时木块位于图 7-45 中的 B 位置, 弹簧力等于摩擦力时木块位于 A 位置. 若以 A 为原点, 沿 A 到 B 的方向建立 x 坐标, 则有

$$x_B = F/k.$$

木块坐标为 x 时所受的合力为

$$F_x = k(x_B - x) - F = -kx,$$

即只要木块与子弹间的摩擦力存在, 木块从 B 到 A 的运动就是一个以 A 为原点, x_B 为振幅的简谐振动的一部分. 由此可见, 在 A 处时木块的速度最大, 记为 v_{\max} .

据机械能定理可得

$$Fx_B = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 + \frac{1}{2}kx_B^2,$$

将 $F=kx_B$ 代入后可得

$$v_{\max} = F/\sqrt{kM}.$$

B 到 A 所需时间 t 等于四分之一周期, 即有

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M}{k}}.$$

为达到上述最大速度 v_{\max} , 要求在 B 到 A 的运动过程中子弹对木块始终有力的作用. 若 v_0 过小, 木块还未到达 A 处, 子弹的速度已减小到与木块的速度相同, 两者间的摩擦力 F 不再存在, 木块的速度不能加大到上述 v_{\max} 值. 据此要求

$$v_0 - a_m t \geq v_{\max},$$

式中 $a_m = F/m$ 为子弹因受阻力 F 而产生的向左加速度. 由上式很易求得关于 v_0 取值的一个条件:

$$v_0 \geq \frac{F}{\sqrt{kM}} + \frac{\pi F}{2} \sqrt{\frac{M}{m^2 k}}.$$

若 v_0 过大, 木块未到达 A 处, 子弹便已穿过木块而去, 两者之间也不再有力的作用, 木块速度也不能达到上述 v_{\max} 值, 所以又要求

$$v_0 t - \frac{1}{2} a_m t^2 \leq x_B + d.$$

整理后可得关于 v_0 值的另一个条件:

$$v_0 \leq \frac{8mF + 8mkd + MF\pi^2}{4\pi m \sqrt{kM}}.$$

因此仅在

$$\frac{F}{\sqrt{kM}} + \frac{\pi F}{2} \sqrt{\frac{M}{m^2 k}} \leq \frac{8mF + 8mkd + MF\pi^2}{4\pi m \sqrt{kM}}$$

时, v_0 才有解. 上述不等式可变形为

$$(8mF - MF\pi^2) + (8mkd - 4\pi mF) \geq 0, \quad (1)$$

因 $m/M \geq 5/4$, 所以有 $8mF \geq 10MF > \pi^2 MF$, 即得

$$8mF - \pi^2 MF > 0. \quad (2)$$

又因 $kd \geq 2F$, 所以有 $8mkd \geq 16mF > 4\pi mF$, 即得

$$8mkd > 4\pi mF. \quad (3)$$

由②③式,可知①式可满足.因此在子弹初速度 v_0 取值于

$$\frac{F}{\sqrt{kM}} + \frac{\pi F}{2} \sqrt{\frac{M}{m^2 k}} \leq v_0 \leq \frac{8mF + 8mkd + \pi^2 mF}{4\pi m \sqrt{kM}}$$

范围时,木块可于 A 处达到最大可能速度:

$$v_{\max} = F / \sqrt{kM}.$$

7-59 湖震(第15届国际物理奥林匹克试题2,1984年,瑞典斯土纳,稍有改动.)

在某些湖泊中能经常观察到称之为“湖震”(湖水振动)的奇异现象.这通常发生在长且较窄的浅水湖中,全部湖水就像杯中的咖啡在端动时那样地晃动,可能误以为是水面波的波动.

为构建湖震模型,取一个长 L 的容器,其内盛水高度记为 h .水面初始状态如图7-46所示,其中 $\xi \ll h$,水面随即绕容器一半长度处的水平轴振动,且水面始终保持为平面.

(1) 为容器中的水建立较为简单的振动模型,导出振动周期 T 的算式;

(2) 两组实验数据如下:

$L=479 \text{ mm}:$	h/mm	30	50	69	88	107	124	142
	T/s	1.78	1.40	1.18	1.08	1.00	0.91	0.82
$L=143 \text{ mm}:$	h/mm	31	38	58	67	124		
	T/s	0.52	0.48	0.43	0.35	0.28		

据(1)问解答算出相应的周期 T ,估计理论误差.

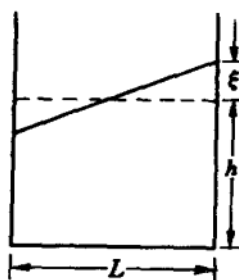


图 7-46

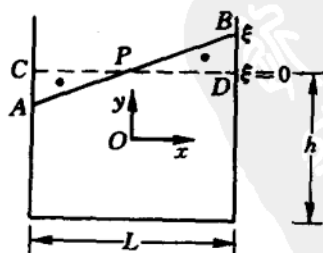


图 7-47

解 力学问题的求解方法,往往不是唯一的.例如单摆运动的动

力学方程,可以依据牛顿第二定律的切向分量式来建立,也可以依据机械能守恒定律或质点角动量定理来建立.可以理解,为实际问题建立可求解的动力学模型更不会是唯一的.下面给出的湖震模型,供读者参考.

(1) 容器中水振动时,各部位运动状态互异,水的动能可分解为质心动能与各部位相对质心运动动能之和.考虑到 $\xi \ll h$,运动范围较小,拟略去各部位相对质心运动动能之和.质心在竖直方向的位移远小于水平方向位移,再略去质心在竖直方向上的动能.水在振动过程中机械能逐渐损耗,但是实验中仍可测出振动周期,表明在一段可观察的时间范围内机械能损耗可以略去.于是,为水的振动建立一个仅由质心水平方向动能和水的重力势能参与的机械能守恒简单模型.

设水面水平时,质心位于 $x=0, y=0$ 位置.水面倾斜时有图 7-47 所示的 ξ 量,相当于 $\triangle PCA$ 部分的水移动到 $\triangle PBD$ 部分,其质量 m 与水的总质量 M 之比为

$$\frac{m}{M} = \frac{S_{\triangle PCA}}{Lh} = \frac{\xi L/4}{Lh} = \frac{\xi}{4h}.$$

m 的质心朝 x 正方向位移 $\frac{2}{3}L$,朝 y 正方向位移 $\frac{2}{3}\xi$,对应 M 的质心朝 x, y 方向分别位移

$$x = \frac{m}{M} \cdot \frac{2}{3}L = \frac{\xi L}{6h},$$

$$y = \frac{m}{M} \cdot \frac{2}{3}\xi = \frac{\xi^2}{6h}.$$

M 质心的 x, y 方向速度分别为

$$\dot{x} = \frac{L}{6h} \dot{\xi}, \quad \text{①}$$

$$\dot{y} = \frac{\xi}{3h} \dot{\xi}, \quad \text{②}$$

因 $\xi \ll L$,故 $\dot{y} \ll \dot{x}$,故质心沿 y 方向动能可解.建立仅由质心沿 x 方向动能和水的重力势能参与的机械能守恒方程:

$$Mgy + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 = E \text{ (常量)},$$

两边对 t 求导, 可得

$$g\dot{y} + \dot{x}\ddot{x} = 0.$$

将①②式代入后, 即有

$$\ddot{x} + \frac{12gh}{L^2}x = 0,$$

这是简谐振动的动力学方程. 可见 M 的质心沿 x 轴作简谐振动, 振动周期即为全部水的振动周期 T , 得

$$T = \pi L / \sqrt{3gh}. \quad (3)$$

(2) 对题文给出的两组 L, h 值, 据③式可得 T 的下述理论值:

$L=479 \text{ mm};$	h/mm	30	50	69	88	107	124	142
	T/s	1.60	1.24	1.05	0.94	0.85	0.79	0.74
$L=143 \text{ mm};$	h/mm	31	38	58	67	124		
	T/s	0.47	0.42	0.34	0.31	0.24		

与实验数据相比, 约有 15% 的系统误差.

7-60 如图 7-48 所示, 水平桌面上有一质量 M 、半径 R 的细管状匀质圆环, 环内有三根轻质细管状辐条, 辐条连通环心, 环心 O 套在一根固定的竖直细轴上, 环可绕此轴在水平桌面上转动. O 处连接一根自由长度为 R 、劲度系数为 k 的弹性轻绳, 轻绳通过一根辐条内壁到达圆环细管, 拉长到图示的 $\theta_0 < \frac{2}{3}\pi$ 处, 连接一个质量为 m 的小球. 开始时圆环和小球均处于静止状态, 而后小球在圆环细管内运动, 圆环绕 O 轴转动. 假设系统处处无摩擦, 试求:

(1) 系统运动周期 T ;

(2) 小球刚开始运动时转轴提供的支持力大小 N_1 和小球到达辐条端位处时转轴提供的支持力大小 N_2 .

解 (1) 将小球相对桌面转角记为 θ_m , 圆环相对桌面的反向转角记为 θ_M , 则小球相对圆环转角便为

$$\theta = \theta_m + \theta_M.$$

相对桌面, 以 O 为参考点, 系统角动量守恒式为

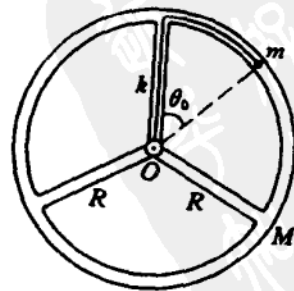


图 7-48

$$mR^2\dot{\theta}_m = MR^2\dot{\theta}_M,$$

由此可得

$$\dot{\theta}_M = \frac{m}{M}\dot{\theta}_m, \quad \dot{\theta} = \frac{M+m}{M}\dot{\theta}_m.$$

系统机械能守恒式为

$$\frac{1}{2}m(R\dot{\theta}_m)^2 + \frac{1}{2}M(R\dot{\theta}_M)^2 = \frac{1}{2}k[(R\theta_0)^2 - (R\theta)^2].$$

两式联立,可得

$$\frac{Mm}{M+m}\dot{\theta}^2 = k(\theta_0^2 - \theta^2),$$

两边对 t 求导,得

$$\ddot{\theta} + \frac{M+m}{Mm}k\theta = 0.$$

故小球相对圆环作简谐振动方式的往返转动,转动周期即为系统运动周期,有

$$T = 2\pi\sqrt{Mm/(M+m)k}.$$

(2) 系统质心 C 位于 O 与小球连线上,与 O 相距

$$l_C = \frac{m}{M+m}R.$$

C 相对桌面的转角即为小球相对桌面的转角 $\theta_m = M\theta/(M+m)$,其最大值为 θ_0 . θ_m 随 t 作简谐式变化,角速度、角加速度分别为

$$\dot{\theta}_m = -\omega\theta_0 \sin \omega t, \quad \ddot{\theta}_m = -\omega^2\theta_0 \cos \omega t,$$

其中

$$\omega = \sqrt{(M+m)k/Mm}.$$

小球刚开始运动时,质心无向心加速度,只有切向加速度,大小为

$$a_{\text{切}} = |l_C \ddot{\theta}_m|_{t=0} = l_C \omega^2 \theta_0 = \frac{Rk}{M}\theta_0,$$

转轴提供的支持力大小为

$$N_1 = (M+m)a_{\text{切}} = \frac{M+m}{M}Rk\theta_0.$$

小球到达辐条端点时,对应 $\omega t = \pi/2$, $\ddot{\theta}_m = 0$,质心无切向加速度,有向心加速度,大小为

$$a_{\text{心}} = l_C \omega^2 \theta_0^2 = \frac{1}{M} R k \theta_0^2,$$

转轴提供的支持力大小为

$$N_2 = (M + m) a_{\text{心}} = \frac{M + m}{M} R k \theta_0^2.$$

7-61 直线 MN 上的 O 点两侧有两个电量同为 $Q > 0$ 的固定点电荷,各自与 O 点的距离同为 a . 一根固定的光滑绝缘细管过 O 点,且与直线 MN 的夹角为 ϕ ($\frac{\pi}{2} \geq \phi \geq 0$). 如图 7-49 所示,质量 m 、电量 $q > 0$ 的带电质点可在管内 O 点静止地处于平衡状态.

(1) 判断带电质点所处平衡位置的稳定性;

(2) 如果是稳定平衡位置,而且当带电质点稍稍偏离该平衡位置时沿细管方向所受力为线性回复力,则求其小振动周期 T .

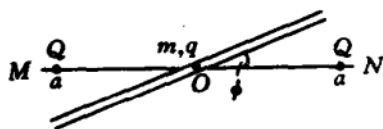


图 7-49

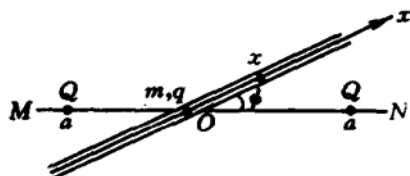


图 7-50

解 (1) 带电质点位于图 7-50 中的 x 位置时,其电势能为

$$E_p(x) = kQq \left\{ (a^2 + x^2 + 2ax \cos \phi)^{-1/2} + (a^2 + x^2 - 2ax \cos \phi)^{-1/2} \right\}.$$

$E_p(x)$ 的一阶、二阶导数分别为

$$E_p'(x) = -kQq \left\{ \frac{x + a \cos \phi}{(a^2 + x^2 + 2ax \cos \phi)^{3/2}} + \frac{x - a \cos \phi}{(a^2 + x^2 - 2ax \cos \phi)^{3/2}} \right\}, \quad (1)$$

$$E_p''(x) = -kQq \left\{ \frac{a^2(1 - 3 \cos^2 \phi) - 4ax \cos \phi - 3x^2}{(a^2 + x^2 + 2ax \cos \phi)^{5/2}} + \frac{a^2(1 - 3 \cos^2 \phi) + 4ax \cos \phi - 3x^2}{(a^2 + x^2 - 2ax \cos \phi)^{5/2}} \right\}. \quad (2)$$

据①式,有

$$x = 0 \text{ 时, } E_p'(x) = 0, \text{ 为平衡位置.}$$

将 $x=0$ 代入②式,有

$$E_p''(x)|_{x=0} = -kQq \frac{2(1-3\cos^2\phi)}{a^3}.$$

可得如下结论:

$$\cos^2\phi > \frac{1}{3}, \text{ 即 } \phi < \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ 时,}$$

$$E_p''(x)|_{x=0} > 0, \quad x=0 \text{ 为稳定平衡位置;}$$

$$\cos^2\phi < \frac{1}{3}, \text{ 即 } \phi > \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ 时,}$$

$$E_p''(x) < 0, \quad x=0 \text{ 为不稳定平衡位置;}$$

$$\cos^2\phi = \frac{1}{3}, \text{ 即 } \phi = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ 时,}$$

$$E_p''(x)|_{x=0} = 0, \quad x=0 \text{ 稳定性待分析.}$$

对于 $\cos^2\phi = \frac{1}{3}$ 的情况下, $x=0$ 平衡位置的稳定性, 可从点电荷沿细管方向受力 $F_x = -E_p'(x)$ 的分析进行讨论. 结合①式, 有

$$F_x = kQq \left\{ \frac{x + a \cos \phi}{(a^2 + x^2 + 2ax \cos \phi)^{3/2}} + \frac{x - a \cos \phi}{(a^2 + x^2 - 2ax \cos \phi)^{3/2}} \right\}.$$

取 $|x| \ll a$, 近似有

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{kQq}{a^3} \left\{ (x + a \cos \phi) \left[1 + \frac{x}{a^2}(x + 2a \cos \phi) \right]^{-3/2} \right. \\ &\quad \left. + (x - a \cos \phi) \left[1 + \frac{x}{a^2}(x - 2a \cos \phi) \right]^{-3/2} \right\} \\ &= \frac{kQq}{a^3} \left\{ (x + a \cos \phi) \left[1 - \frac{3x}{2a^2}(x + 2a \cos \phi) \right] \right. \\ &\quad \left. + (x - a \cos \phi) \left[1 - \frac{3x}{2a^2}(x - 2a \cos \phi) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\text{即有} \quad F_x = \frac{kQq}{a^3} \left[2(1-3\cos^2\phi)x - 3\frac{x^3}{a^2} \right]. \quad \textcircled{3}$$

$$\text{得} \quad F_x \Big|_{\cos^2\phi = \frac{1}{3}} = -3\frac{kQq}{a^5}x^3,$$

这是一个小位移三次方的回复力, 因此,

$$\cos^2\phi = \frac{1}{3}, \text{ 即 } \phi = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ 时, } x=0 \text{ 仍是稳定平衡位置.}$$

顺便一提, $x=0$ 点平衡位置稳定性的全部讨论, 也可直接从③式给出的 F_x 表达式导出.

(2) $\cos^2 \phi = \frac{1}{3}$ 时, 回复性力不是线性的, 振动周期不予讨论.

$\cos^2 \phi > \frac{1}{3}$ 时, 据③式, F_x 可近似为

$$F_x = -2 \frac{kQq}{a^3} (3 \cos^2 \phi - 1)x,$$

这是一个线性回复力. 带电质点在 $x=0$ 附近小振动的角频率和周期分别为

$$\omega = \sqrt{2kQq(3 \cos^2 \phi - 1)/ma^3},$$

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi \sqrt{ma^3/2kQq(3 \cos^2 \phi - 1)}.$$

7-62 导出摆长 l 、幅角 θ_0 单摆的摆动周期 T 的严格解, 并给出一级和二级近似解.

解 摆角为 θ 时, 摆球的线速度为

$$v(\theta) = \sqrt{2gl(\cos \theta - \cos \theta_0)},$$

结合半角公式: $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$, 可得摆球的角速度为

$$\omega(\theta) = 2 \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}},$$

单摆摆动周期便是

$$T = 2 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\omega} = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}}.$$

引入新的角参量 ϕ , 与摆角 θ 的关系为

$$\sin \phi = \sin \frac{\theta}{2} / \sin \frac{\theta_0}{2},$$

则有

$$\theta = 0 \text{ 时, } \phi = 0, \quad \theta = \theta_0 \text{ 时, } \phi = \pi/2,$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \phi, \quad \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \phi},$$

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \phi d\phi = \sin \frac{\theta_0}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \phi} d\phi$$

$$\begin{aligned}
 &= \sin \frac{\theta_0}{2} \sqrt{1 - \left(\sin \frac{\theta}{2} / \sin \frac{\theta_0}{2} \right)^2} d\phi \\
 &= \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\phi,
 \end{aligned}$$

继而有

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{2d\phi}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{2d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \phi}}.$$

于是 T 可表述成

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_0/2) \sin^2 \phi}},$$

由第一类椭圆积分公式

$$F(\phi, k) = \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}},$$

得

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} F\left(\frac{\pi}{2}, \sin \frac{\theta_0}{2}\right).$$

特例: $\theta_0 = 90^\circ$ 时, $\sin \frac{\theta_0}{2} = 1/\sqrt{2}$, 查表可得

$$F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1.8541,$$

单摆周期为

$$T = 7.4164 \sqrt{l/g},$$

是小摆角一级近似解 $T = 2\pi \sqrt{l/g}$ 的 1.18 倍.

引入 $F(\phi, k)$ 的级数表述:

$$F(\phi, k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2} k^{2n} \int_0^{\phi} \sin^{2n} \phi d\phi,$$

k 为小量的一级、二级近似解分别为

$$F_1(\phi, k) = \phi,$$

$$F_2(\phi, k) = \phi + \frac{k^2}{4} \left(\phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi \right),$$

得小角度单摆周期的一级、二级近似解分别为

$$T_1 = 2\pi \sqrt{l/g},$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{l/g} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right).$$

7-63 如图 7-51 所示, 半径 R 的圆环绕铅垂的直径轴以角速度 ω 匀速旋转. 匀质细杆长 $L = \sqrt{2}R$, 两端约束在环上可作无摩擦的滑动, 细杆的位置用 OC 与铅垂轴的夹角 θ 表示, O 是环心, C 是杆的中心. 试求细杆在环内的平衡位置, 并讨论平衡的稳定性.

解 将细杆质量记为 m , 细杆方位角 $\theta = 0$ 的位置设定为重力势能零点, 杆的重力势能便可表述为

$$E_g = mg \frac{R}{\sqrt{2}} (1 - \cos \theta).$$

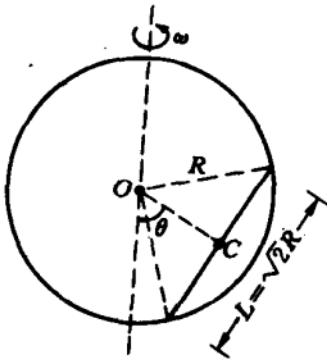


图 7-51

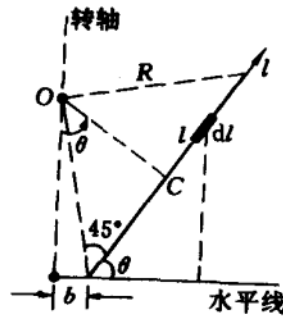


图 7-52

参考图 7-52 及图示的参量, 杆中 dl 段的惯性离心势能为

$$dE_c = -\frac{1}{2} \left(\frac{m}{\sqrt{2}R} dl \right) \omega^2 x_0^2 = -\frac{m\omega^2}{2\sqrt{2}R} (b + l \cos \theta)^2 dl,$$

$$b = R \sin(\theta - 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} R (\sin \theta - \cos \theta),$$

细杆的惯性离心势能便是

$$E_c = \int_0^{\sqrt{2}R} dE_c = -\frac{1}{4} m\omega^2 R^2 \left(1 - \frac{2}{3} \cos^2 \theta \right).$$

细杆在 θ 角位置时的合势能为

$$E_p = E_g + E_c = \frac{1}{\sqrt{2}} mgR (1 - \cos \theta) - \frac{1}{4} m\omega^2 R^2 \left(1 - \frac{2}{3} \cos^2 \theta \right).$$

E_p 对 θ 的一阶、二阶导数可分别算得为

$$\frac{dE_p}{d\theta} = mR \sin \theta \left(\frac{g}{\sqrt{2}} - \frac{\omega^2 R}{3} \cos \theta \right), \quad (1)$$

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} mgR \cos \theta - \frac{1}{3} m\omega^2 R^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \quad (2)$$

据①式,可知 $\theta=0, \theta=\pi, \theta=\arccos(3g/\sqrt{2}\omega^2 R)$ 时, $dE_p/d\theta=0$, 均为杆的平衡位置.

(1) 对于平衡位置 $\theta=0$, 据②式, 有

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = mR \left(-\frac{g}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\omega^2 R \right),$$

可知,

当 $\omega^2 < 3g/\sqrt{2}R$ 时, $d^2E_p/d\theta^2 > 0$, 对应稳定平衡;

当 $\omega^2 > 3g/\sqrt{2}R$ 时, $d^2E_p/d\theta^2 < 0$, 对应不稳定平衡;

当 $\omega^2 = 3g/\sqrt{2}R$ 时, $d^2E_p/d\theta^2 = 0$, 稳定性待进一步分析.

为讨论 $\omega^2 = 3g/\sqrt{2}R$ 时, $\theta=0$ 位置平衡的稳定性, 做 E_p 对 θ 的三阶、四阶导数的下述运算:

$$\left. \frac{d^3E_p}{d\theta^3} \right|_{\theta=0} = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} mgR \sin \theta + \frac{2}{3} m\omega^2 R^2 \sin 2\theta \right] \Big|_{\theta=0} = 0,$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^4E_p}{d\theta^4} \right|_{\theta=0} &= \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} mgR \cos \theta + \frac{4}{3} m\omega^2 R^2 \cos 2\theta \right] \Big|_{\theta=0} \\ &= mR \left(\frac{4}{3} \omega^2 R - \frac{1}{\sqrt{2}} g \right) = mR \left(\frac{4}{\sqrt{2}} g - \frac{1}{\sqrt{2}} g \right) > 0. \end{aligned}$$

据此可判定:

当 $\omega^2 = 3g/\sqrt{2}R$ 时, 因 $d^4E_p/d\theta^4 > 0$, 对应稳定平衡.

(2) 对于平衡位置 $\theta=\pi$, 据②式, 有

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = -mR \left(\frac{g}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\omega^2 R \right) < 0, \text{ 对应不稳定平衡.}$$

(3) 对于平衡位置 $\theta = \arccos(3g/\sqrt{2}\omega^2 R)$, 因要求 $3g < \sqrt{2}\omega^2 R$, 再据②式, 有

$$d^2E_p/d\theta^2 = \frac{m}{\omega^2} \left(\frac{\omega^4 R^2}{3} - \frac{3}{2} g^2 \right) > 0, \text{ 对应稳定平衡.}$$

7-64 一种耦合振子的具体结构和相关参量如图 7-53 所示,其中 x_1, x_2 分别是左、右振子沿 x 轴偏离各自平衡点的位移量. 已知 $x_1=0, x_2=0$ 时三根轻弹簧均无形变, 水平地面光滑, 试求 x_1-t, x_2-t 的通解.

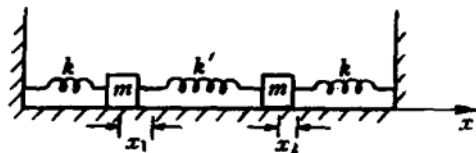


图 7-53

解 两振子的动力学方程为

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 + k'(x_2 - x_1), \\ m\ddot{x}_2 &= -kx_2 - k'(x_2 - x_1), \end{aligned}$$

即

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, & a_{11} = -\frac{k+k'}{m}, \quad a_{12} = \frac{k'}{m}, \\ \ddot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, & a_{21} = \frac{k'}{m}, \quad a_{22} = -\frac{k+k'}{m}. \end{cases} \quad (1)$$

引入新的独立参量(即简正模)

$$\begin{cases} \xi_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2, \\ \xi_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2, \end{cases} \quad (2)$$

且设

$$\ddot{\xi}_1 = -\omega^2(1)\xi_1, \quad \ddot{\xi}_2 = -\omega^2(2)\xi_2. \quad (3)$$

对简正模 ξ_1 , 据①②式, 有

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 &= b_{11}\ddot{x}_1 + b_{12}\ddot{x}_2 = b_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) \\ &= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})x_1 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})x_2, \end{aligned}$$

据②③式, 又有

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 &= -\omega^2(1)\xi_1 = -\omega^2(1)(b_{11}x_1 + b_{12}x_2) \\ &= -\omega^2(1)b_{11}x_1 - \omega^2(1)b_{12}x_2. \end{aligned}$$

$\ddot{\xi}_1$ 的这两个表述式是等价的, 故有

$$\begin{cases} [a_{11} + \omega^2(1)]b_{11} + a_{21}b_{12} = 0, \\ a_{12}b_{11} + [a_{22} + \omega^2(1)]b_{12} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

为使 b_{11}, b_{12} 不全为零, 要求

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \omega^2(1) & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} + \omega^2(1) \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

对简正模 ξ_2 , 类似的推导可得

$$\begin{cases} [a_{11} + \omega^2(2)]b_{21} + a_{21}b_{22} = 0, \\ a_{12}b_{21} + [a_{22} + \omega^2(2)]b_{22} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

为使 b_{21}, b_{22} 不全为零, 要求

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \omega^2(2) & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} + \omega^2(2) \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

⑤⑦式可合并成统一形式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \omega^2 & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} + \omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

将①式代入后, 可解得 ω^2 的两个根分别为

$$\omega^2(1) = k/m, \quad \omega^2(2) = (k + 2k')/m.$$

将 $\omega^2(1) = k/m$ 代入④式, 可得

$$\begin{cases} -\frac{k'}{m}b_{11} + \frac{k'}{m}b_{12} = 0, \\ \frac{k'}{m}b_{11} - \frac{k'}{m}b_{12} = 0, \end{cases} \quad (8)$$

其不定解为

$$b_{11}, b_{12} = b_{11}.$$

将 $\omega^2(2) = (k + 2k')/m$ 代入④式, 可得不定解为

$$b_{21}, b_{22} = -b_{21}. \quad (9)$$

将⑧⑨式代入②式, 得

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{11}x_2 = \xi_1, \\ b_{21}x_1 - b_{21}x_2 = \xi_2, \end{cases}$$

解为

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1^* + \xi_2^*, & x_2 = \xi_1^* - \xi_2^*, \\ \xi_1^* = \xi_1/2b_{11}, & \xi_2^* = \xi_2/2b_{21}. \end{cases} \quad (10)$$

ξ_1^*, ξ_2^* 满足的微分方程同③式, 即为

$$\ddot{\xi}_1^* = -\omega^2(1)\xi_1^*, \quad \ddot{\xi}_2^* = -\omega^2(2)\xi_2^*,$$

也分别是 $\omega(1), \omega(2)$ 对应的简正模, 通解为

$$\xi_1^* = A_1 \cos[\omega(1)t + \phi_1], \quad \xi_2^* = A_2 \cos[\omega(2)t + \phi_2]. \quad (11)$$

将⑪式代入⑩式, 最终得 x_{1-t}, x_{2-t} 的通解为

$$x_1 = A_1 \cos(\sqrt{k/m}t + \phi_1) + A_2 \cos(\sqrt{(k+2k')/m}t + \phi_2),$$

$$x_2 = A_1 \cos(\sqrt{k/m}t + \phi_1) - A_2 \cos(\sqrt{(k+2k')/m}t + \phi_2).$$

由此可见, 简正模 ξ_1^* 在 x_1, x_2 中对应的振动量方向相同, 大小相同, 中间弹簧 (k') 不形变, 故 $\omega(1)$ 仅由两侧弹簧 (k) 确定. 简正模 ξ_2^* 在 x_1, x_2 中对应的振动量方向相反, 大小相同, 中间弹簧 (k') 从两侧对称地被挤压或拉伸, $\omega(2)$ 由三根弹簧共同确定.

7-65 质量为 m 的小物块悬挂于劲度系数为 k 的弹簧下端, 平衡于 O 点. 如图 7-54 所示, 从 $t=0$ 开始, 弹簧上端 O' 以 $x' = a \sin \omega t$ 的方式做上、下振动(以向下为正). 已知空气阻力系数为 γ , 设置以 O 为原点、竖直向下的 x 轴, 试求系统达到稳定运动状态后, 小物块的位置 x 随时间 t 的变化关系.

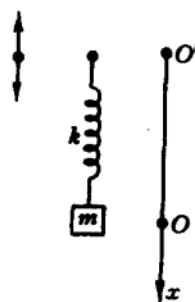


图 7-54

解 为了直接利用已学过的受迫振动稳态解表述式, 特作下述变换:

$$x' = a \sin \omega t = a \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

t 时刻小物块位置记为 x , 所受空气阻力、重力和弹簧力在 x 方向的合力为

$$F_x = -\gamma \dot{x} - k(x - x'),$$

据牛顿第二定律 $F_x = m\ddot{x}$, 便有

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{k}{m} a \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

作时间平移, 即引入

$$t^* = t - \frac{\pi}{2\omega},$$

方程可改述成

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t^*,$$

$$\beta = \gamma/2m, \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad f_0 = ka/m.$$

稳态解便是

$$x = A \cos(\omega t^* + \phi) = A \cos\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right) = A \sin(\omega t + \phi),$$

$$A = f_0 / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}, \quad \tan \phi = -2\beta\omega / (\omega_0^2 - \omega^2).$$

7-66 一振子在驱动力 $F = F_0 \cos \omega t$ 作用下形成受迫振动. 已知振子质量 $m = 0.2 \text{ kg}$, 弹簧劲度系数 $k = 80 \text{ N/m}$, 阻力系数 $\gamma = 4 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, $F_0 = 2 \text{ N}$, $\omega = 30/\text{s}$, 达稳态后试求:

- (1) 振子系统在一个周期内反抗阻力而耗散的能量;
- (2) 驱动力输入系统的平均功率.

解 将受迫振动方程写成标准形式:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t,$$

式中诸量分别为

$$\beta = \gamma/2m = 10 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_0 = \sqrt{k/m} = 20 \text{ s}^{-1},$$

$$f_0 = F_0/m = 10 \text{ m/s}^2, \quad \omega = 30 \text{ s}^{-1}.$$

稳态下有

$$x = A \cos(\omega t + \phi), \quad v = \dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \phi),$$

$$A = f_0 / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2} = 1.28 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

(1) 一个周期内系统反抗阻力而耗散的能量为

$$\begin{aligned} E_{\text{耗}} &= - \int_0^{2\pi/\omega} f v dt = - \int_0^{2\pi/\omega} -\gamma v^2 dt = \gamma \omega^2 A^2 \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(\omega t + \phi) dt \\ &= \pi \gamma \omega A^2 = 6.18 \times 10^{-2} \text{ J}. \end{aligned}$$

(2) 稳态时, 一个周期内驱动力输入的能量恰好等于 $E_{\text{耗}}$, 故驱动力提供的平均功率为

$$\bar{P} = E_{\text{耗}} / T = E_{\text{耗}} \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2} \gamma \omega^2 A^2 = 3.0 \times 10^{-2} \text{ W}.$$

7-67 运动学方程为 $\xi_i = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$ 的入射波在弦线上沿 x 方向传播, 弦线的质量线密度为 λ_m , 弦中张力为 T , 在 $x=0$ 处有一

质量为 m 的质点固定于弦上,如图 7-55 所示.将 $x=0$ 处的反射波和透射波分别记为

$$\xi_r = B \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \phi_r\right), \quad \xi_t = C \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \phi_t\right),$$

试求 ϕ_r, ϕ_t 和 B, C . (答案用 A, ω, λ, T, m 表述.)

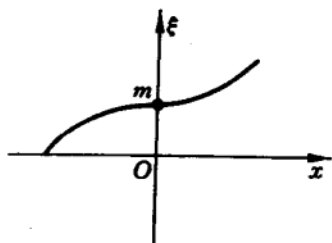


图 7-55

解 在 $x < 0$ 处的波由入射波和反射波叠加而成,在 $x > 0$ 处的波仅由透射波构成. $x=0$ 处两侧振动量应相同,有

$$\begin{aligned} & \left\{ A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) + B \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \phi_r\right) \right\} \Big|_{x=0} \\ &= C \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \phi_t\right) \Big|_{x=0}, \\ & \Rightarrow A \cos \omega t + B \cos(\omega t + \phi_r) = C \cos(\omega t + \phi_t). \quad (1) \end{aligned}$$

$x=0$ 两侧弦线张力的横向分量应为质点 m 提供横向振动加速度, 即有

$$\begin{aligned} & T \frac{\partial}{\partial x} \left\{ C \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \phi_t\right) \right\} \Big|_{x=0} \\ & - T \frac{\partial}{\partial x} \left\{ A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) + B \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \phi_r\right) \right\} \Big|_{x=0} \\ &= m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ C \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \phi_t\right) \right\} \Big|_{x=0}, \end{aligned}$$

因振动量在 $x=0$ 处连续,为方便式中取 $x > 0$ 处振动量计算质点加速度,上式可简化为

$$\begin{aligned} & \omega \sqrt{\lambda_m T} [-A \sin \omega t + B \sin(\omega t + \phi_r) + C \sin(\omega t + \phi_t)] \\ &= -m \omega^2 C \cos(\omega t + \phi_t), \quad (2) \end{aligned}$$

推导中已利用到 $2\pi T/\lambda = T\omega/u$, $u = \sqrt{T/\lambda_m}$.

将①和②式中的三角函数展开后,要求 $\sin \omega t, \cos \omega t$ 系数分别相等,得

$$A + B \cos \phi_r = \cos \phi_t, \quad (3)$$

$$B \sin \phi_r = C \sin \phi_t, \quad (4)$$

$$\omega \sqrt{\lambda_m T} (-A + B \cos \phi_r + C \cos \phi_t) = m\omega^2 C \sin \phi_t, \quad (5)$$

$$\omega \sqrt{\lambda_m T} (B \sin \phi_r + C \sin \phi_t) = -m\omega^2 C \cos \phi_t. \quad (6)$$

联立③④⑤⑥式可得

$$B \sin \phi_r = \frac{-2m\omega \sqrt{\lambda_m T}}{m^2\omega^2 + 4\lambda_m T} A = C \sin \phi_t,$$

$$B \cos \phi_r = -\frac{m\omega^2}{m^2\omega^2 + 4\lambda_m T} A,$$

$$C \cos \phi_t = \frac{4\lambda_m T}{m^2\omega^2 + 4\lambda_m T} A.$$

首先解得

$$\tan \phi_r = \frac{2m\omega \sqrt{\lambda_m T}}{m^2\omega^2} = 2\sqrt{\lambda_m T}/m\omega, \quad \phi_r \text{ 在 I 或 III 象限,}$$

$$\tan \phi_t = -m\omega/2\sqrt{\lambda_m T}, \quad \phi_t \text{ 在 II 或 IV 象限,}$$

因 $\sin \phi_r < 0, \sin \phi_t < 0$, 故 ϕ_r, ϕ_t 应分别在 III、IV 象限, 即有

$$\phi_r = \arctan(2\sqrt{\lambda_m T}/m\omega) + \pi,$$

$$\sin \phi_r = -2\sqrt{\lambda_m T}/\sqrt{m^2\omega^2 + 4\lambda_m T},$$

$$\phi_t = \arctan(-m\omega/2\sqrt{\lambda_m T}),$$

$$\sin \phi_t = -m\omega/\sqrt{m^2\omega^2 + 4\lambda_m T}.$$

继而可得

$$B = (m\omega/\sqrt{m^2\omega^2 + 4\lambda_m T})A,$$

$$C = (2\sqrt{\lambda_m T}/\sqrt{m^2\omega^2 + 4\lambda_m T})A.$$



8 狭义相对论

A 组

8-1 在惯性系 S 中观察到两事件同时发生,空间间距为 1 m . 惯性系 S' 沿两事件联线的方向相对于 S 系运动,在 S' 系中观察到两事件之间的距离为 3 m . 试求 S' 系相对 S 系的速度大小和在 S' 系中测得的两事件之间的时间间隔.

解

$$S \text{ 系: } t_1 = t_2; \quad x_1 - x_2 = 1\text{ m},$$

$$S' \text{ 系: } t'_1, t'_2; \quad x'_1 - x'_2 = 3\text{ m}.$$

由洛伦兹变换得

$$x'_1 - x'_2 = \frac{(x_1 - x_2) \pm v(t_1 - t_2)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

解得 $\sqrt{1 - \beta^2} = \frac{1}{3}$, 即 $v = \frac{2\sqrt{2}}{3}c$,

S' 系中两事件之间的时间间隔为

$$t'_1 - t'_2 = \frac{(t_1 - t_2) \pm \frac{v}{c^2}(x_1 - x_2)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \pm \frac{v}{c^2} \frac{(x_1 - x_2)}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

即得 $t'_1 - t'_2 = \pm \frac{2\sqrt{2}}{c}\text{ m}.$

8-2 如图 8-1 所示,在相对地面沿水平方向以匀速度 v 高速运动的车厢内,有一个由劲度系数为 k 的轻弹簧和质量为 m 的小物块构成的水平弹簧振子. 小物块从平衡位置开始,以 $u \parallel v$ 的初速度在车厢内形成无摩擦的往返运动. 设 $u \ll c$, 车厢中仍可用牛顿力学将振子的运动处理成简谐振动. 试用洛伦兹时空变换,在地面系中计算振子在车厢中第一个四分之一

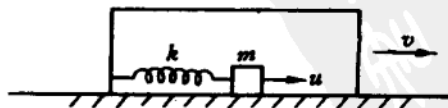


图 8-1

一振动周期内的运动过程经历的时间 Δt_1 和第一个二分之一周期内的运动过程中经历的时间 Δt_2 .

解 车厢系中小物块在平衡位置的坐标设为 $x'_0=0$, 开始运动的时刻记为 $t'_0=0$; 经过四分之一振动周期小物块到达的位置 $x'_1=\sqrt{\frac{m}{k}}u$, 时刻为 $t'_1=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$; 经过二分之一振动周期小物块到达的位置 $x'_2=x'_0=0$, 时刻为 $t'_2=\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. 这三个点事件在地面系的时刻分别记为 $t_0=0, t_1=\Delta t_1, t_2=\Delta t_2$. 据洛伦兹时空变换式, 可得

$$\begin{aligned}\Delta t_1 = t_1 - t_0 &= \frac{(t'_1 - t'_0) + \frac{v}{c^2}(x'_1 - x'_0)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \frac{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{v}{c^2}\sqrt{\frac{m}{k}}u}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \\ \Delta t_2 = t_2 - t_0 &= \frac{(t'_2 - t'_0) + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_0)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \pi\sqrt{\frac{m}{k}} / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = \frac{v}{c}.\end{aligned}$$

8-3 在以恒定速度 v 沿平直轨道高速行驶的车厢中央有一旅客, 已知他到车厢两端 A 和 B 的距离都是 L_0 . 今旅客点燃一根火柴, 光脉冲向各个方向传播, 并到达车厢两端 A 和 B . 设沿着车厢行驶方向, A 端在前, B 端在后, 试在地面系用洛伦兹变换式计算光脉冲到达 A, B 的时差 $\Delta t_{BA} = t_A - t_B$ 以及光脉冲到达 A 端时车厢 B 端和 A 端之间的距离 l_{BA} .

解 车厢系中旅客所在位置取为 $x'_0=0$, 点燃火柴时刻记为 $t'_0=0$, 此时旅客在地面系中的位置记为 $x_0=0$, 时刻也记为 $t_0=0$. 车厢系中, $x'_A=L_0, x'_B=-L_0$, 光脉冲到达 A, B 端时刻 $t'_A=t'_B=L_0/c$.

地面系中光脉冲到达 A, B 端时刻分别为

$$t_A = \frac{t'_A + \frac{v}{c^2}x'_A}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{L_0}{c}, \quad \beta = \frac{v}{c},$$

$$t_B = \frac{t'_B + \frac{v}{c^2}x'_B}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{L_0}{c},$$

其间时差

$$\Delta t_{BA} = t_A - t_B = \frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{L_0}{c}.$$

地面系在上述 t_A 时刻光脉冲到达 A 端, 此时 A 端、 B 端在地面系的坐标分别记为 x_A, x_B . 据洛伦兹变换式, 有

$$x'_A = \frac{x_A - vt_A}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x'_B = \frac{x_B - vt_A}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

得

$$x'_A - x'_B = \frac{x_A - x_B}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

即有

$$l_{BA} = x_A - x_B = \sqrt{1-\beta^2}(x'_A - x'_B) = \sqrt{1-\beta^2} \cdot 2L_0.$$

8-4 地面中的水平隧道 AB 长 L_0 , 一列火车 $A'B'$ 静长 $L > L_0$. 今使火车如图 8-2 所示, 以匀速度 v 高速驶入隧道, 地面系中观察到 A' 与 A 相遇时恰好 B' 与 B 相遇. 试据洛伦兹变换式计算 v 值, 并在列车系中计算从 A, A' 相遇到 B, B' 相遇之间经过的时间 $\Delta t'$.

解 地面系中 A 与 A' 相遇

的空时坐标记为 x_A, t_A , B 与 B'

相遇的空时坐标记为 $x_B, t_B = t_A$,

且有 $x_A - x_B = L_0$. 火车系中这两

个事件的空时坐标记为 x'_A, t'_A 和 x'_B, t'_B , 且有 $x'_A - x'_B = L$. 据洛伦兹变换式, 有

$$x'_A - x'_B = \frac{(x_A - x_B) - v(t_A - t_B)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_A - x_B}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c},$$

得

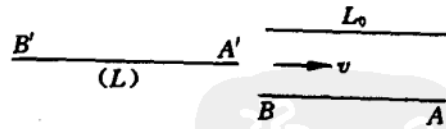


图 8-2

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{L_0}{L}, \quad \text{即} \quad v = \sqrt{1 - \left(\frac{L_0}{L}\right)^2} c.$$

$$\text{又据 } t'_A = \frac{t_A - \frac{v}{c^2}x_A}{\sqrt{1-\beta^2}}, t'_B = \frac{t_B - \frac{v}{c^2}x_B}{\sqrt{1-\beta^2}}, \text{ 得}$$

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = \frac{(t_B - t_A) + \frac{v}{c^2}(x_A - x_B)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{v}{c^2} L_0 / \frac{L_0}{L},$$

即有

$$\Delta t' = \sqrt{1 - \left(\frac{L_0}{L}\right)^2} \frac{L}{c}.$$

8-5 静长同为 L_0 的两把直尺 $AB, A'B'$ 沿长度方向相向而行, 速度为 v , 如图 8-3 所示. 试据洛伦兹变换式在直尺 AB 系中计算两尺相擦而过(从 A' 与 B 相遇到 B' 与 A 相遇)所经时间 Δt .

解 A' 与 B 相遇事件在 AB 系和 $A'B'$

系中的空时坐标分别记为 x_B, t_1 和 x'_A, t'_1 , B'

与 A 相遇事件在 AB 系和 $A'B'$ 系中的空时

坐标分别记为 x_A, t_2 和 x'_B, t'_2 , 且有

$$x_A - x_B = L_0, \quad x'_A - x'_B = L_0.$$

据洛伦兹变换式, 有

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= \frac{(t'_2 - t'_1) + \frac{v}{c^2}(x'_B - x'_A)}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ &= \frac{(t'_2 - t'_1) - \frac{v}{c^2}L_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \\ t'_2 - t'_1 &= \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_A - x_B)}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ &= \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}L_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{aligned}$$

可解得

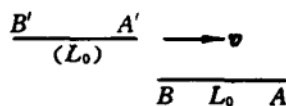


图 8-3

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1 = \frac{v}{c^2} L_0 / (1 - \sqrt{1 - \beta^2}),$$

即有

$$\Delta t = t_2 - t_1 = (1 + \sqrt{1 - \beta^2}) \frac{L_0}{v}.$$

8-6 一粒子在 S' 系的 $x'y'$ 平面内以 $\frac{c}{2}$ 的恒定速度作直线运动, 运动方向与 x' 轴的夹角 $\theta' = 60^\circ$. 已知 S' 系相对 S 系以速度 $v = 0.6c$ 沿 x 轴运动, 试据洛伦兹变换式求出粒子在 S 系 xy 平面上的运动轨迹, 若为直线, 再求出此直线的斜率.

解 粒子在 S' 系中的运动方程为

$$x' = \frac{ct'}{2} \cos \theta', \quad y' = \frac{ct'}{2} \sin \theta',$$

据洛伦兹变换式, 有

$$\begin{aligned} x' &= (x - vt) / \sqrt{1 - \beta^2}, & y' &= y, \\ t' &= \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) / \sqrt{1 - \beta^2}, & \beta &= \frac{v}{c}. \end{aligned}$$

联立上述诸式, 可得

$$\begin{aligned} x &= \frac{c}{2} \cos \theta' \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) + vt, \\ y &= \frac{c}{2} \sin \theta' \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) / \sqrt{1 - \beta^2}, \end{aligned}$$

计算后, 即得粒子在 xy 平面上的运动方程:

$$x = 0.74ct, \quad y = 0.30ct,$$

运动轨迹方程为

$$y = \frac{15}{37}x,$$

是一条直线, 其斜率为

$$\tan \theta = \frac{15}{37} = 0.405 \quad (\theta = 22^\circ).$$

8-7 S 系中有一静止时各边长为 a 的正方形面板, 如图 8-4 所示. 今使面板沿其对角线方向匀速运动, 速度大小为 v . 某学生将 v 沿面板静止时的两条直角边方向分解, 每一个方向上的分速度大小

均为 $v' = v/\sqrt{2}$. 考虑到每一直角边的长度收缩, 他认为 S 系中运动面板的形状将如图 8-5 所示, 是一个各边长为 $a' = \sqrt{1-\beta'^2}a$ ($\beta' = v'/c$) 的正方形.

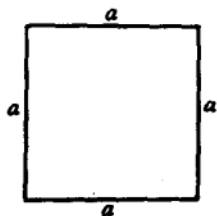


图 8-4

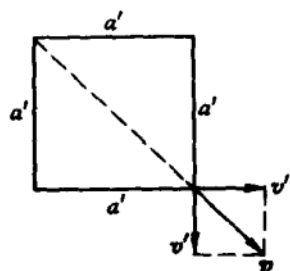


图 8-5

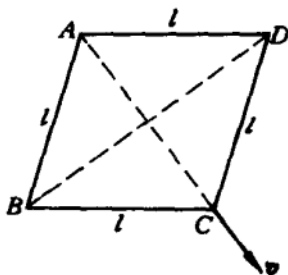


图 8-6

试分析地判定该学生的结论是否正确, 并给出运动面板的正确形状及各边长度和面积.

解 该学生的结论不正确, 因为运动物体沿运动方向上线度的收缩不可分解为沿分运动方向的线度收缩.

运动面板的正确形状如图 8-6 所示, 与运动方向垂直的对角线 BD 长度仍为 $\sqrt{2}a$, 沿运动方向的对角线 AC 长度将收缩为 $\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{2}a$, 其中 $\beta = v/c$. 运动面板成菱形, 各边长为

$$l = \left[\left(\frac{1}{2} \sqrt{2}a \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \sqrt{1-\beta^2} \sqrt{2}a \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \sqrt{1-\beta^2}} a.$$

菱形面积为

$$S = \frac{1}{2} \overline{BD} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \sqrt{2}a \cdot \sqrt{1-\beta^2} \cdot \sqrt{2}a$$

$$= \sqrt{1-\beta^2} a^2,$$

可见运动面板的面积确实收缩为静止面积的 $\sqrt{1-\beta^2}$ 倍.

8-8 π 介子静止时的平均寿命为 $2.5 \times 10^{-8} \text{ s}$, 在实验室中测得 π 介子的平均运动距离为 375 m, 试求 π 介子相对实验室的速度.

解 π 介子运动时的平均寿命 τ 与静止时的平均寿命 τ_0 以及运动速度 v 的关系为

$$\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = v/c,$$

它的平均运动距离为

$$l = v\tau = v\tau_0 / \sqrt{1 - \beta^2},$$

由此可解得

$$v = \frac{l}{\tau_0} / \sqrt{1 + \left(\frac{l}{\tau_0 c}\right)^2} = 2.9994 \times 10^8 \text{ m/s} = 0.9998c.$$

8-9 静长为 l 的飞船以恒定速度 v 相对惯性系 S 运动, 某时刻从飞船头部发出无线电信号, 试问飞船观察者认为信号经过多长时间到达飞船尾部? 再问 S 系中的观察者认为信号经过多长时间到达飞船尾部?

解 飞船观察者认为信号经

$$\Delta t' = l/c$$

时间, 到达飞船尾部. S 系中的观察者认为飞船动长为 $\sqrt{1 - \beta^2}l$, 无线电信号相对飞船尾部的传播速度为 $c + v$, 信号经

$$\Delta t = \sqrt{1 - \beta^2}l / (c - v) = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} \frac{l}{c}$$

时间, 到达飞船尾部.

需要注意的是

$$\Delta t' \neq \sqrt{1 - \beta^2} \Delta t,$$

因为 $\Delta t'$ 是飞船系中两个观察者合作测得的时间间隔. 同样需要注意,

$$\Delta t \neq \sqrt{1 - \beta^2} \Delta t',$$

因为 Δt 是 S 系中两个观察者合作测得的时间间隔.

8-10 一艘宇宙飞船以 $0.8c$ 的速度于中午飞经地球, 此时飞船上和地球上的观察者都把自己的时钟拨到 12 点.

(1) 按飞船上的时钟于午后 12 点 30 分飞船飞经一星际宇航站, 该站相对地球固定, 其时钟指示的是地球时间, 试问按宇航站的时钟飞船何时到达该站?

(2) 试问按地球上的坐标测量, 宇航站离地球多远?

(3) 于飞船时间午后 12 点 30 分从飞船向地球发送无线电信

号,试问地球上的观察者何时(按地球时间)接收到信号?

(4) 若地球上的观察者在接收到信号后立即发出应答信号,试问飞船何时(按飞船时间)接收到应答信号?

解 (1) 飞船测得的 $\tau_0 = 30 \text{ min}$ 为本征时间,据运动时钟计时率变慢公式,可得地球系测得的时间间隔为

$$\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - \beta^2} = 50 \text{ min},$$

即宇航站时钟读数为 12 点 50 分时,飞船到达该站.

(2) 地球系测得宇航站与地球相距

$$l = v\tau = 7.2 \times 10^{11} \text{ m}.$$

(3) 对地球观察者来说,无线电信号发自宇航站所在地,故传至地球需时

$$l/c = 40 \text{ min}.$$

飞船飞行时间加信号传播时间,共计 $(50 + 40) \text{ min}$,因此地球观察者于 1 点 30 分接收到信号.

(4) 有两种解法.

方法一:从地球参考系来考察.设飞船向地球发出信号至接收到地球应答信号共需时间(地球时间) t ,在这段时间内飞船信号传播了 l 距离,应答信号传播了 $l + 0.8ct$ 距离,故有

$$t = \frac{0.8ct + 2l}{c} = \frac{2l}{0.2c} = 400 \text{ min}.$$

将上述时间变换到飞船系,对应的飞船时间(本征时间)为

$$t' = \sqrt{1 - \beta^2}t = 240 \text{ min},$$

考虑到飞船发信号时刻为 12 点 30 分,故飞船于

午后 4 点 30 分

接收到应答信号.

方法二:从飞船参考系来考察.飞船系认为发出的信号需经时

$$\Delta t' = \sqrt{1 - \beta^2}l/(c - 0.8c) = 120 \text{ min}$$

方被地球接收,地球应答信号也需经时 $\Delta t'$ 被飞船接收,共计经时

$$t' = 2\Delta t' = 240 \text{ min}.$$

与第一种解法结果相同.

8-11 在某惯性系的一个平面上有两条相距 H 的平行直线,另

有一静长为 $L_0 = \alpha H > H$ 的细杆. 今使细杆在该平面上作匀速运动, 速度 v 的方向与两直线平行, 细杆与平行直线夹角为 ϕ , 而细杆恰好能在这两条平行直线之间运动, 即细杆两个端点分别靠近两条平行直线, 如图 8-7 所示.

- (1) 若 α 为定值, 试求 ϕ 与 v 之间的函数关系;
- (2) 确定 ϕ 的极小值 ϕ_{\min} 和极大值 ϕ_{\max} .

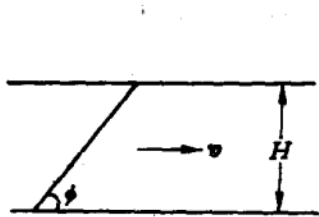


图 8-7

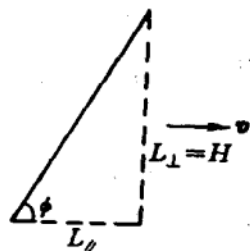


图 8-8

解 (1) 对运动细杆, 参照图 8-8, 有

$$L_{\perp} = H, \quad L_{\parallel} = H \cot \phi.$$

考虑到运动方向的长度收缩, L_{\parallel} 的静长应为

$$L_{\parallel,0} = L_{\parallel} / \sqrt{1 - \beta^2} = H \cot \phi / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = v/c.$$

细杆静长为

$$L_0 = (L_{\perp}^2 + L_{\parallel,0}^2)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{\cot^2 \phi}{1 - \beta^2} \right)^{\frac{1}{2}} H,$$

因 $L_0 = \alpha H$, 可解得

$$\tan \phi = 1 / \sqrt{(1 - \beta^2)(\alpha^2 - 1)},$$

即有 $\phi = \arctan(1 / \sqrt{(1 - \beta^2)(\alpha^2 - 1)})$, $\beta = v/c$.

(2) ϕ 的极小值在 $\beta = 0$ 时取得, 即有

$$v = 0 \text{ 时, } \phi = \phi_{\min} = \arctan(1 / \sqrt{\alpha^2 - 1}).$$

ϕ 的极大值在 $\beta \rightarrow 1$ 时逼近, 即有

$$v \rightarrow c \text{ 时, } \phi = \phi_{\max} \rightarrow \pi/2.$$

8-12 氢原子静止时发出的一条光谱线 H_{δ} 的波长为 $\lambda_0 = 410.1 \text{ nm}$. 在极隧直射线管中, 氢原子速率可达 $v = 5 \times 10^5 \text{ m/s}$, 试求此时在射线管前方的实验室观察者测得的谱线 H_{δ} 的波长 λ .

解 由多普勒效应公式

$$\nu = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \nu_0,$$

$$\text{可得 } \lambda = \frac{c}{\nu} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \frac{c}{\nu_0} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \lambda_0 \approx (1-\beta)\lambda_0,$$

将数据代入后,可得

$$\lambda = 409.4 \text{ nm.}$$

8-13 静止的钾原子光谱中有一对容易辨认的吸收线(K线和H线),其谱线的波长在395.0nm附近.来自牧夫星座一个星云的光中,在波长为447.0nm处发现了这两条谱线,试求该星云远离地球的“退行速度”.

解 由多普勒效应公式

$$\nu = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \nu_0,$$

$$\text{可得 } \lambda = \frac{c}{\nu} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \frac{c}{\nu_0} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \lambda_0,$$

将数据代入后,可得

$$\beta = 0.123, \quad \text{即 } v = 0.123c.$$

8-14 如图8-9所示,实验室中粒子A以 $\frac{4}{5}c$ 速度朝右运动,粒子B以 $\frac{4}{5}c$ 速度朝左运动.试求随粒子A运动的参考系测得的粒子B运动速度大小.

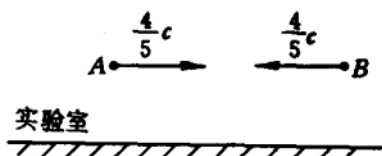


图 8-9

解 随粒子A运动的参考系相对实验室参考系的速度记为 $v = \frac{4}{5}c$,

粒子B相对实验室参考系的速度记为 $u_x = -\frac{4}{5}c$,粒子B相对随A运动的参考系的运动速度大小便是

$$|u'_x| = \left| (u_x - v) / \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x \right) \right| = 0.976c.$$

8-15 惯性系 S' , S 间的关系如常所设,某光子在 S' 系中沿 y'

轴运动,试由相对论速度变换式计算此光子在 S 系中的速度分量 u_x, u_y 以及速度大小 u , 以此验证相对论速度变换式符合光速不变原理.

解 如常所设, S' 系相对 S 系沿 x 轴运动, 速度为 v , 则由

$$u'_x = 0, \quad u'_y = c,$$

可得

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} = v,$$

$$u_y = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}u'_y}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} = \sqrt{1 - \beta^2}c,$$

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = c.$$

8-16 如图 8-10 所示, S 系中静止时的等腰直角三角板 ABC 沿其直角边 BC 方向匀速运动, 成为 $\angle C = 60^\circ$ 的直角三角板.

(1) 计算此三角板运动速度 v .

(2) 设某质点相对三角板以恒定的速率 u 沿 AC 边运动:

(2.A) 若 AB 边长为 l , 试求 S 系测得的此质点从 A 运动到 B 的时间间隔 Δt ;

(2.B) 再求 S 系测得的此质点运动方向与 BC 边延长线的夹角 ϕ , 证明 $\phi < 45^\circ$; 再以 $u \rightarrow 0$ 、 $u = v$ 、 $u \rightarrow c$, 分别计算 ϕ 值.

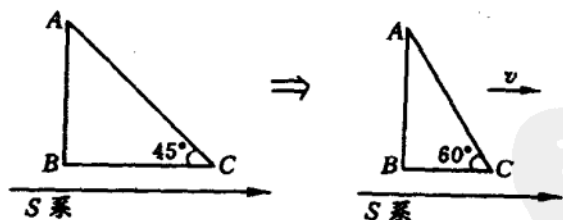


图 8-10

解 (1) 对 BC 边, 有

$$\sqrt{1 - \beta^2} = \frac{l_{动}}{l_{走}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

即得 $\sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad v = \sqrt{\frac{2}{3}}c.$

(2) 质点运动速度在三角板参考系中的分解,参考图 8-11,有

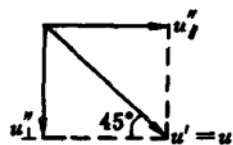
$$u' = u, \quad u'_{//} = \frac{\sqrt{2}}{2}u, \quad u'_{\perp} = \frac{\sqrt{2}}{2}u;$$

在 S 系中的分解,参考图 8-12,有

$$u_{//} = \frac{u'_{//} + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_{//}}, \quad u_{\perp} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}u'_{\perp}}{1 + \frac{v}{c^2}u'_{//}}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

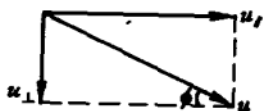
(2.A) 质点从 A 到 C 的时间,可通过 u_{\perp} 分运动计算,可得

$$\Delta t = l/u_{\perp} = \sqrt{2} \left(\sqrt{3} + \frac{u}{c} \right) \frac{l}{u}.$$



三角板系

图 8-11



S 系

图 8-12

(2.B) 参考图 8-12,有

$$\tan \phi = u_{\perp} / u_{//} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}u'_{\perp}}{u'_{//} + v} = \frac{u}{\sqrt{3}u + 2c},$$

得 $\phi = \arctan \frac{u}{\sqrt{3}u + 2c} < 45^\circ,$

进而得

$$\begin{aligned} u \rightarrow 0 \text{ 时, } \phi &\rightarrow 0; \\ u = v \text{ 时, } \phi &= 13.46^\circ; \\ u \rightarrow c \text{ 时, } \phi &\rightarrow 15^\circ. \end{aligned}$$

8-17 光在流动的水中传播,在相对水静止的参考系中,光的传播速度为 c/n ,已知水在实验室中的流速为 $v \ll c$,试求实验室中沿着水流方向和逆着水流方向分别测得的光速 c_+ 和 c_- .

解 在相对水静止的参考系中光速 $u' = c/n$,在实验室参考系

中,顺着水流方向的光速为

$$u_+ = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'} = \frac{c + nv}{n + \beta} \approx \left(\frac{c}{n} + v\right) \left(1 - \frac{\beta}{n}\right) \approx \frac{c}{n} + v - \frac{\beta c}{n^2},$$

即有
$$c_+ = u_+ = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

在实验室参考系中,逆着水流方向的光速为

$$c_- = u_- = \frac{u' - v}{1 - \frac{v}{c^2}u'} \approx \frac{c}{n} - v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

8-18 如图 8-13 所示,一块玻璃板以速度 v 向右运动. 在 A 点有一闪光灯,它发出的光通过玻璃板后到达 B 点. 已知 A, B 之间的距离为 L ,玻璃板在其静止的坐标系中的厚度为 D ,玻璃的折射率为 n ,试求光从 A 点传播到 B 点所需时间 Δt . (只讨论光比玻璃板先到达 B 点的情况.)

解 光在玻璃板内传播时相对本题背景参考系的速度为

$$c^* = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{c}{n}} = \frac{c + nv}{n + \beta}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

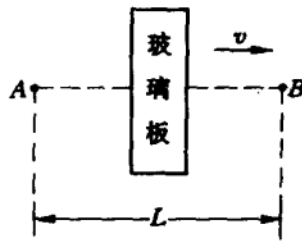


图 8-13

光通过玻璃板的时间记为 Δt_1 , 则有

$$\Delta t_1 = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} D}{c^* - v} = \sqrt{1 - \beta^2} D \frac{n + \beta}{c(1 - \beta^2)} = \frac{(n + \beta)D}{c \sqrt{1 - \beta^2}}.$$

光通过真空的时间记为 Δt_2 , 则有

$$\begin{aligned} \Delta t_2 &= \frac{L - c^* \Delta t_1}{c} = \frac{L}{c} - \frac{1}{c} \frac{c + nv}{n + \beta} \frac{(n + \beta)D}{c \sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \frac{L}{c} - \frac{(1 + n\beta)D}{c \sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned}$$

光从 A 点到 B 点共需时间

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{L}{c} + \frac{D}{c \sqrt{1 - \beta^2}} [(n + \beta) - (1 + n\beta)]$$

$$= \frac{L}{c} + \frac{D}{c\sqrt{1-\beta^2}}(n-1)(1-\beta).$$

8-19 惯性系 S' 中在 $t'_1=t'_2$ 时刻, 质点 1 和 2 分别位于 x'_1, y'_1 和 $x'_2=x'_1, y'_2 \neq y'_1$ 位置, 速度分别为 $\mathbf{u}'_1=0$ 和 $\mathbf{u}'_2=u'_2\mathbf{j}$, 受力分别为 $\mathbf{F}'_1=F'_{1y}\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{F}'_2=F'_{2y}\mathbf{j}$, 且有 $F'_{2y}=-F'_{1y}$, 即有 $\mathbf{F}'_1+\mathbf{F}'_2=0$. 试证在惯性系 S 中质点 1 和 2 也在同一时刻 $t_1=t_2$ 受力 \mathbf{F}_1 和 \mathbf{F}_2 , 但 $\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2 \neq 0$.

证 由

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2}x'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2}x'_2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t'_1 = t'_2, \quad x'_1 = x'_2,$$

得 $t_1 = t_2$,

即在 S 系中质点 1 和 2 也同时受力.

又据力变换式, 得

\mathbf{F}_1 :

$$F_{1x} = \left[F'_{1x} + \frac{v}{c^2}(\mathbf{F}'_1 \cdot \mathbf{u}'_1) \right] / \left(1 + \frac{v}{c^2}u'_{1x} \right) = 0,$$

$$F_{1y} = \sqrt{1-\beta^2}F'_{1y} / \left(1 + \frac{v}{c^2}u'_{1x} \right) = \sqrt{1-\beta^2}F'_{1y},$$

\mathbf{F}_2 :

$$F_{2x} = \left[F'_{2x} + \frac{v}{c^2}(\mathbf{F}'_2 \cdot \mathbf{u}'_2) \right] / \left(1 + \frac{v}{c^2}u'_{2x} \right) = \frac{v}{c^2}F'_{2y}u'_2$$

$$= -\frac{v}{c^2}u'_2F'_{1y},$$

$$F_{2y} = \sqrt{1-\beta^2}F'_{2y} / \left(1 + \frac{v}{c^2}u'_{2x} \right) = \sqrt{1-\beta^2}F'_{2y}$$

$$\therefore = -\sqrt{1-\beta^2}F'_{1y},$$

即有 $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -\frac{v}{c^2}u'_2F'_{1y}\mathbf{i} \neq 0$.

8-20 一核弹含 20 kg 的钚, 爆炸后生成物的静质量比原来小万分之一 ($1/10^4$).

(1) 爆炸中释放了多少能量?

(2) 如果爆炸持续了 $1\mu\text{s}$, 平均功率多大?

解 (1) 爆炸释放能量为

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 20 \times 10^{-4} \times (3 \times 10^8)^2 \text{ J} = 1.8 \times 10^{14} \text{ J}.$$

(2) 平均功率为

$$\bar{P} = \Delta E / \Delta t = (1.8 \times 10^{14} / 10^{-6}) \text{ W} = 1.8 \times 10^{20} \text{ W}.$$

8-21 聚变过程中 4 个氢核转变成 1 个氦核,同时以各种辐射形式放出能量.氢核质量 1.0081 u(原子单位, $1 \text{ u} = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$),氦核质量 4.0039 u,试计算 4 个氢核聚合为 1 个氦核时所释放的能量.

解 释放的能量为

$$\begin{aligned} \Delta E &= \Delta m \cdot c^2 \\ &= (4 \times 1.0081 - 4.0039) \times 1.66 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2 \text{ J} \\ &= 4.26 \times 10^{-12} \text{ J}. \end{aligned}$$

8-22 某粒子在惯性系 S 中具有总能量为 500 MeV,动量为 400 MeV/c,而在惯性系 S' 中具有总能量为 583 MeV.

(1) 计算该粒子的静能;

(2) 计算该粒子在 S' 系中的动量;

(3) 设 S' 系相对 S 系沿粒子运动方向运动,试求 S' 系相对 S 系的运动速度.

解 S 系: $E = 500 \text{ MeV}$, $p = 400 \text{ MeV}/c$;

S' 系: $E' = 583 \text{ MeV}$.

(1) S 系中,据

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4,$$

得静能 $E_0 = m_0 c^2 = \sqrt{E^2 - p^2 c^2} = 300 \text{ MeV}$.

(2) S' 系中,粒子动量为

$$p' = \sqrt{E'^2 - E_0^2} / c = 500 \text{ MeV}/c.$$

(3) 设 S' 系相对 S 系沿 x 轴方向(即粒子运动方向)的速度为 v ,则据变换式

$$E = (E' + v p') / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = v/c,$$

可得 $\sqrt{1 - \beta^2} E = E' + \beta c p'$.

将数据代入后,解得

$$\beta = -0.18, \quad v = -0.18c.$$

8-23 静质量为 m_0 的粒子在恒力作用下,从静止开始加速,经过 Δt 时间,粒子的动能为其静能的 n 倍.试求:

- (1) 粒子达到的速度 v ;
- (2) 粒子获得的动量 p ;
- (3) 粒子所受冲量 I ;
- (4) 恒力大小 F .

解 (1) 由

$$nE_0 = E_k = mc^2 - m_0c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) E_0,$$

得 $\beta = \sqrt{n(n+2)}/(n+1), \quad v = \beta c = \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}c.$

(2) 此时粒子质量为

$$m = m_0 / \sqrt{1-\beta^2} = (n+1)m_0,$$

动量为 $p = mv = \sqrt{n(n+2)}m_0c.$

(3) 由质点动量定理,得

$$I = p = \sqrt{n(n+2)}m_0c.$$

(4) 最后可得

$$F = I/\Delta t = \sqrt{n(n+2)}m_0c/\Delta t.$$

8-24 两个静质量相同的粒子,一个处于静止状态,另一个的总能量为其静能的 4 倍.当此两粒子发生碰撞后粘合在一起,成为一个复合粒子,试求复合粒子的静质量与碰撞前单个粒子静质量的比值.

解 给出两个解法如下.

方法一: 将单个粒子静质量记为 m_0 , 运动粒子速度记为 v , 则有

$$4E_0 = E = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}E_0, \quad \beta = \frac{v}{c},$$

解得 $\beta = \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad v = \beta c = \frac{\sqrt{15}}{4}c.$

碰后复合粒子动质量记为 M , 静质量记为 M_0 , 运动速度记为 u , 则有

$$M = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} + m_0 = 4m_0 + m_0 = 5m_0,$$

$$u = \frac{m_0 v}{M \sqrt{1 - \beta^2}} = \sqrt{\frac{3}{5}} c,$$

$$M_0 = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} M = \sqrt{10} m_0,$$

所求比值为

$$M_0/m_0 = \sqrt{10}.$$

方法二：对于运动粒子，由

$$E_1^2 = p_1^2 c^2 + E_0^2, \quad E_1 = 4E_0,$$

解得

$$p_1^2 c^2 = 15E_0^2.$$

对复合粒子，由

$$E^2 = p^2 c^2 + M_0^2 c^4, \quad E = E_1 + E_0 = 5E_0, \quad p = p_1,$$

解得

$$M_0^2 c^4 = 10E_0^2 = 10m_0^2 c^4,$$

即有

$$M_0 = \sqrt{10} m_0, \quad M_0/m_0 = \sqrt{10}.$$

8-25 如图 8-14 所示，一个以 $0.8c$ 的速度沿 x 方向运动的粒子衰变成两个静质量同为 m_0 的粒子，其中一个粒子以 $0.6c$ 的速度沿 $-y$ 方向运动。若将衰变前粒子的静质量记为 M_0 ，试求：

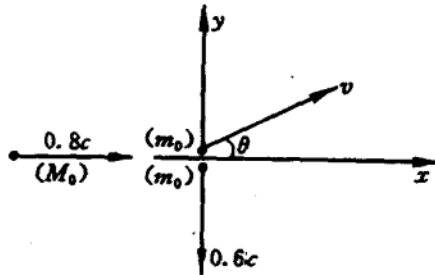


图 8-14

(1) 另一个粒子运动速度的大小 v 和方向角 θ ；

(2) 比值 m_0/M_0 。

解 原粒子动质量

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} = \frac{5}{3} M_0,$$

衰变后沿 $-y$ 方向运动粒子的动质量为

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (0.6)^2}} = \frac{5}{4} m_0,$$

衰变后另一个粒子的动质量为

$$m_2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

由质量守恒,得

$$M = m_1 + m_2 = \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) m_0. \quad (1)$$

(1) x, y 方向动量分量守恒, 分别有

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \beta c \cos \theta = 0.8Mc = \left(1 + \frac{4}{5} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) m_0 c, \quad (2)$$

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \beta c \sin \theta = 0.6m_1c = \frac{3}{4}m_0c. \quad (3)$$

两式平方和,得

$$\left(\frac{1}{1-\beta^2} - 1 \right) = \left(1 + \frac{4}{5} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)^2 + \left(\frac{3}{4} \right)^2,$$

可简化为

$$(\gamma^2 - 1) = \left(1 + \frac{4}{5}\gamma \right)^2 + \frac{9}{16}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

解得 $\gamma = 5.6944$, $v = 0.984c$.

用③式除以②式,得

$$\tan \theta = \frac{3}{4} / \left(1 + \frac{4}{5}\gamma \right) = 0.315, \quad \theta = 7.69^\circ.$$

(2) 将 $M = \frac{5}{3}M_0$ 与①式联立,得

$$M_0 = \frac{3}{5}M = \frac{3}{5} \left(\frac{5}{4} + \gamma \right) m.$$

则 $\frac{m_0}{M_0} = \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{5}\gamma \right)^{-1} = 0.24$.

8-26 氢原子基态能量为 $E_0 = -13.6 \text{ eV}$, 氢原子 $n=2, 3, \dots$ 激发态的能量为 $E_n = E_0/n^2$. 实验室中两个处于基态的氢原子 1, 2 各以速度 v_1, v_2 ($v_1, v_2 \ll c$) 朝着对方运动, 碰撞后, 沿原 v_1 和 v_2 方向分别发射出频率为 ν_1 和 ν_2 的光子, 其中 ν_1 对应从 $n=4$ 激发态跃迁到基态发射的光子频率, ν_2 对应从 $n=2$ 激发态跃迁到基态发射的光子频率. 发射后, 两个氢原子静止地处于基态, 试求 ν_1 和 ν_2 .

解 将氢原子质量记为 m , 则有

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = h\nu_1 + h\nu_2, & m = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}, \\ mv_1 - mv_2 = h \frac{\nu_1}{c} - h \frac{\nu_2}{c}, \\ h\nu_1 = \left(\frac{1}{4^2} - 1\right)E_0 = -\frac{15}{16}E_0, \\ h\nu_2 = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right)E_0 = -\frac{3}{4}E_0. \end{cases}$$

由上述方程组可求得

$$v_1^2 + v_2^2 = -27E_0/8m, \quad v_1 - v_2 = -3E_0/16mc,$$

数值计算后,可得

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 6.64 \times 10^4 \text{ m/s}, \quad v_1 - v_2 = 0.82 \text{ m/s},$$

则 $v_1 = v_2 = 4.70 \times 10^4 \text{ m/s}.$

8-27 设有一处于激发态的原子以速度 v 运动,当其发射一个能量为 E' 的光子后衰变至其基态,并使原子处于静止状态,此时原子的静质量为 m_0 . 已知激发态比基态能量高 E_0 ,试证:

$$E' = \left(1 + \frac{E_0}{2m_0c^2}\right)E_0.$$

(原子激发态、基态能量均在原子静止时定义.)

证 原子处于激发态时的静质量记为 m'_0 ,则有

$$m'_0c^2 = m_0c^2 + E_0,$$

又由动量守恒,得

$$E'/c = \frac{m'_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}v,$$

因 v 是小量,略去高阶小量后,相继可得

$$E'/c = m'_0v,$$

$$v = E'c/m'_0c^2 = E'c/(m_0c^2 + E_0).$$

由能量守恒,可得

$$E' = \frac{m'_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2 = \frac{m_0c^2 + E_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2,$$

将 $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{E'}{m_0c^2 + E_0} \right)^2$ 代入后, 可得

$$\begin{aligned} E' &= (m_0c^2 + E_0) \left[1 + \frac{1}{2} \frac{E'^2}{(m_0c^2 + E_0)^2} \right] - m_0c^2 \\ &= E_0 + \frac{E'^2}{2(m_0c^2 + E_0)}, \end{aligned}$$

或整理成

$$E'^2 - 2(m_0c^2 + E_0)E' + 2(m_0c^2 + E_0)E_0 = 0,$$

解得

$$\begin{aligned} E' &= (m_0c^2 + E_0) \pm m_0c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{m_0c^2} \right)^2} \\ &\approx (m_0c^2 + E_0) \pm m_0c^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{m_0^2c^4} \right), \end{aligned}$$

即

$$E' = \begin{cases} 2m_0c^2 + E_0 - \frac{E_0^2}{2m_0c^2}, \\ E_0 + \frac{E_0^2}{2m_0c^2}. \end{cases}$$

因 $E_0, E' \ll m_0c^2$, 故第一个解应舍去, 即得

$$E' = \left(1 + \frac{E_0}{2m_0c^2} \right) E_0.$$

8-28 静质量为 m_0 的质点, 开始时静止在 $x=A$ 处, 而后在线性回复力 $F_x = -kx$ (k 为正的常量) 作用下在 x 轴上往返运动. 考虑相对论效应, 试求质点速率 v 与所到位置 x 的关系.

解 与牛顿力学中讨论过的内容相同, 线性回复力是保守力, 取 $x=0$ 点为势能零点, x 位置势能为

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2.$$

由能量守恒, 可得

$$\frac{1}{2} kx^2 + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{2} kA^2 + m_0c^2,$$

继而有

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 1 + \frac{k(A^2 - x^2)}{2m_0c^2},$$

$$\text{得 } v = \frac{\sqrt{k(A^2 - x^2)}}{2m_0c^2 + k(A^2 - x^2)} \sqrt{4m_0c^2 + k(A^2 - x^2)}c.$$

8-29 据爱因斯坦的广义相对论,当星体中的物质因引力而塌缩到极小的球半径范围内时,其周围的引力场可以强到使光子不能离开星体而去,外部世界将“看”不到此星体,称之为黑洞,已知太阳、地球、电子质量分别为 $1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$, $5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$, $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$,假想通过挤压,它们分别成为黑洞,试估算各自的黑洞半径.

解 采用光子绕黑洞作圆周运动的半经典模型来估算黑洞半径,则有

$$mc^2/R = GMm/R^2,$$

其中 m 为光子质量, M 为黑洞质量, R 为黑洞半径. 可导得

$$R = GM/c^2,$$

代入数据,分别算得

$$\text{太阳: } R \approx 1.5 \times 10^3 \text{ m},$$

$$\text{地球: } R \approx 4.4 \times 10^{-3} \text{ m},$$

$$\text{电子: } R \approx 6.8 \times 10^{-58} \text{ m}.$$

B 组

8-30 三个惯性系 S, S', S'' 如图 8-15 所示,其中 S' 系沿 S 系的 x 轴以匀速度 v 相对 S 系运动, x' 轴与 x 轴重合, y' 轴与 y 轴平行. S'' 系沿 S' 系的 y' 轴以匀速度 v 相对 S' 系运动, y'' 轴与 y' 轴重合,

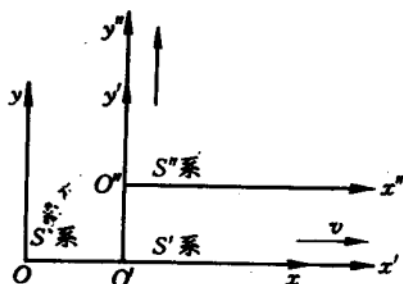


图 8-15

x'' 轴与 x' 轴平行. 三个坐标系的原点 O, O', O'' 重合时, 设定 $t=t'=t''=0$. 试问 S 系中任意 t 时刻 x'' 轴在 xy 平面上的投影是否为直线? 若为直线, 进而确定它的斜率.

解 由 $S'' \sim S'$ 和 $S' \sim S$ 间的下述洛伦兹变换式:

$$y'' = \frac{y' - vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c},$$

可得
$$y'' = \frac{y}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{vt - \beta^2 x}{1 - \beta^2}.$$

S'' 系中 x'' 轴的直线方程为 $y''=0$, 代入上式, 即得 x'' 轴在 S 系中的投影线方程为

$$y = -\frac{\beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}x + \frac{vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

故此投影线仍是直线, 斜率为

$$k = -\beta^2 / \sqrt{1 - \beta^2}.$$

8-31 惯性系 S, S'' 间的相对关系如图 8-16 所示, O, O' 重合时 $t=t'=0$.

(1) 设在 S' 系的 $O'x'y'$ 平面上有一个以 O' 为中心、 R 为半径的固定圆环, 试在 S 系中写出 t 时刻此圆环在 Oxy 平面投影曲线的方程;

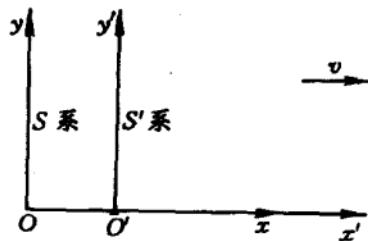


图 8-16

(2) 在 S' 系中从 $t'=0$ 时刻开始有两个质点 P_1 和 P_2 , 分别从 $x'=-R, y'=0$ 和 $x'=R, y'=0$ 位置以恒定的速率 u 逆时针方向沿圆环运动, 试问:

(2.A) S 系中 P_1, P_2 各自在什么时刻(分别记为 t_1, t_2)开始运动?

(2.B) S 系认为 P_1, P_2 在什么时刻(记为 t_3)第一次相距最远?

(3) 导出 S 系中质点 P_2 沿 x 轴的分运动 x_2 与时间 t 的函数关系, 并在 $t \gg R/v$ 范围分析这一分运动的主要特征。(解答本小问时, 建议引入参量 $\omega' = u/R$.)

解 (1) 将洛伦兹变换式

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad \beta = \frac{v}{c},$$

代入 S' 系中圆方程

$$x'^2 + y'^2 = R^2,$$

即得所求方程为

$$\frac{(x - vt)^2}{(1 - \beta^2)R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1.$$

这是一个以 $x = vt, y = 0$ 为中心, $\sqrt{1 - \beta^2}R$ 为短半轴, R 为长半轴的椭圆.

(2) S' 系中 P_1 和 P_2 开始运动的时空坐标分别为

$$t'_1 = 0, x'_1 = -R \quad \text{和} \quad t'_2 = 0, x'_2 = R.$$

(2. A) 据洛伦兹变换式

$$t = t' + \frac{v}{c^2}x' / \sqrt{1 - \beta^2},$$

得
$$t_1 = -\frac{v}{c^2}R / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad t_2 = \frac{v}{c^2}R / \sqrt{1 - \beta^2}.$$

(2. B) S' 系中 P_1 和 P_2 同时于

$$t'_3 = \frac{\pi R}{2u}$$

时刻, 第一次分别到达 $x'_3 = 0, y'_3 = -R$ 和 $x'_3 = 0, y'_3 = R$ 位置. 该时刻 P_1, P_2 的 x' 坐标同为 $x'_3 = 0$, 因此 S 系中这两个点事件的时刻同为

$$t_3 = \frac{t'_3 + \frac{v}{c^2}x'_3}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\pi R}{2u \sqrt{1 - \beta^2}},$$

S 系中此时 P_1, P_2 的间距恰为椭圆长轴 $2R$, 故相距最远.

(3) S' 系中 P_2 沿 x' 轴的分运动为

$$x'_2 = R \cos \omega' t, \quad \omega' = u/R,$$

结合变换式

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

即得 x_2-t 的下述函数关系:

$$x_2 = vt + \sqrt{1-\beta^2}R \cos \left[\omega' \frac{t - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right].$$

$t \gg R/v$, 即 $vt \gg R$ 时, 近似有

$$x_2 = vt,$$

代入上式括号内, 可得

$$x_2 = vt + \sqrt{1-\beta^2}R \cos(\sqrt{1-\beta^2}\omega't).$$

P_2 的这一分运动的主要特征是

i) 可分解为匀速运动和简谐振动的叠加;

ii) 简谐振动的振幅为 $A = \sqrt{1-\beta^2}R$, 与圆轨道沿 x' 轴直径的运动长度收缩对应;

iii) 引入 S' 系中简谐振动周期 $T' = 2\pi/\omega'$, 则 S 系中简谐振动周期为 $T = 2\pi/\sqrt{1-\beta^2}\omega' = T'/\sqrt{1-\beta^2}$, 与运动时钟计时率变慢对应.

8-32 惯性系 S, S' 间的相对运动关系如图 8-17 所示, 两根细长的直尺 AB 和 $A'B'$ 的静止长度相同,

它们分别按图示方式静置于 S 和 S' 系中. 静止在 A 和 B 上的两个钟的计时率已按相对论的要求调好, 静止在 A' 和 B' 上的两个钟的计时率也已按相对

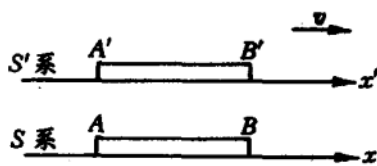


图 8-17

论的要求调好, 但这四个钟的零点都是按下述方式确定的: 当 A 钟与 A' 钟相遇时, 两钟均调到零点; 当 B 钟与 B' 钟相遇时, 两钟均调到零点.

设 A 与 A' 相遇时, A' 发出光信号, 已知 B' 接收到光信号时, B' 钟的读数为 1 个时间单位.

(1) 试问 B 接收到光信号时, B 钟的读数为多少时间单位?

(2) 若 B' 接收到信号后, 立即发出应答光信号, 试问:

(2.A) A' 接收到该应答信号时, A' 钟的读数为多少时间单位?

(2.B) A 接收到该应答信号时, A 钟的读数为多少时间单位?

解 设 AB 和 $A'B'$ 的静长为 l_0 .

(1) S' 系认为 AB 长为 $\sqrt{1-\beta^2}l_0$, B' 与 B 相遇时刻早于 A' 与 A 相遇时刻的时间为

$$\Delta t' = \frac{l_0 - \sqrt{1-\beta^2}l_0}{v}$$

A' 发出的光信号经 l_0 到达 B' , 所需时间为 l_0/c , 故 B' 接收到信号时 B' 钟的读数应为

$$t'_B = \frac{l_0}{c} + \Delta t' = \frac{l_0}{c} + \frac{l_0 - \sqrt{1-\beta^2}l_0}{v}$$

已知 $t'_B = 1$, 可解得

$$\frac{l_0}{c} = \frac{\beta}{[\beta + (1 - \sqrt{1-\beta^2})]}$$

S 系认为 $A'B'$ 长为 $\sqrt{1-\beta^2}l_0$, B' 与 B 相遇时刻晚于 A' 与 A 相遇时刻的时间为

$$\Delta t = \frac{l_0 - \sqrt{1-\beta^2}l_0}{v}$$

A' 发出光信号经 l_0 到达 B 所需时间为 l_0/c , 故 B 接收到信号时 B 钟的读数应为

$$\begin{aligned} t_B &= \frac{l_0}{c} - \Delta t = \frac{l_0}{c} \left(1 - \frac{1 - \sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \right) \\ &= \frac{\beta}{\beta + (1 - \sqrt{1-\beta^2})} \frac{\beta - (1 - \sqrt{1-\beta^2})}{\beta} \\ &= \frac{\beta - (1 - \sqrt{1-\beta^2})}{\beta + (1 - \sqrt{1-\beta^2})} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad (\text{时间单位}). \end{aligned}$$

(2. A) S' 系认为 A' 发出光信号经 l_0 路程到达 B' , B' 发出应答光信号经 l_0 路程到达 A' , 共需时间 $2l_0/c$, 故 A' 接收到应答信号时, A' 钟的读数应为

$$\begin{aligned} t'_A &= \frac{2l_0}{c} = 2\beta / [\beta + (1 - \sqrt{1-\beta^2})] \\ &= 1 + \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad (\text{时间单位}). \end{aligned}$$

(2. B) S 系中的 A 钟认为 A' 接收到应答信号时, A 钟的读数

应为

$$t_A(1) = t'_A / \sqrt{1 - \beta^2} = 2l_0/c \sqrt{1 - \beta^2},$$

此时 A' 与 A 相距

$$\Delta l_{AA'} = vt_A(1) = 2vl_0/c \sqrt{1 - \beta^2}.$$

光信号又经 $\Delta l_{AA'}/c$ 时间到达 A , 故 A 接收到光信号时 A 钟的读数应为

$$\begin{aligned} t_A &= t_A(1) + \frac{\Delta l_{AA'}}{c} = \frac{2(1 + \beta)l_0}{c \sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \frac{2\beta(1 + \beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}[\beta + (1 - \sqrt{1 - \beta^2})]} \\ &= 1 + \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (\text{时间单位}). \end{aligned}$$

8-33 飞船以 $v = \frac{3}{5}c$ 匀速度背离地球远行. 某时刻飞船朝着地球发出无线电信号, 经地球反射后又被飞船所接收, 飞船中观察者测得前后所经时间为 60 s.

(1) 飞船发信号时, 飞船系认为地球与飞船相距多远(记为 l'_1), 地球系认为飞船与地球相距多远(l_1)?

(2) 地球反射此信号时, 飞船系认为地球与飞船相距多远(记为 l'_2), 地球系认为飞船与地球相距多远(l_2)?

(3) 飞船接收到反射信号时, 飞船系认为地球与飞船相距多远(记为 l'_3), 地球系认为飞船与地球相距多远(l_3)?

解 先求各小题中的 l'_1, l'_2, l'_3 .

飞船系中地球背离飞船的运动速度大小也是 $v = \frac{3}{5}c$, 无线电信号发出后到达地球, 经反射, 再返回飞船被接收, 历时 60 s, 往返各经时间

$$\Delta t' = 30 \text{ s}.$$

飞船系认为无线电信号以 $c - v$ 的速度“追击”地球, 经 30 s 追上地球, 故有

$$l'_1 = (c - v)\Delta t = 12c(\text{m}).$$

在 30 s 时间内,该信号走过路程即为 l'_2 ,得

$$l'_2 = c\Delta t' = 30c(\text{m}).$$

再经 30 s,地球反射信号被飞船接收,得

$$l'_3 = l'_2 + v\Delta t' = 48c(\text{m}),$$

或 $l'_3 = l'_1 + v \times (2\Delta t') = 48c(\text{m}).$

再求各小题中的 l_1, l_2, l_3 .

l_1 的计算:

如图 8-18 所示设置 x', x 轴. 飞船发信号时, 设与 x 轴上 P_1 点相遇, P_1 点属地球系. 地球与 P_1 之间的距离即为所求 l_1 ,

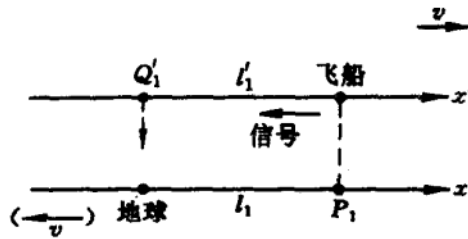


图 8-18

这一距离相当于静止在地球系中的一把尺子的长度, 飞船系中飞船发信号时刻记为 t'_1 , 设在 t'_1 时刻 x' 轴上的 Q'_1 点与地球相遇(地球系中并不认为 P_1 与飞船相遇时刻和地球与 Q'_1 相遇时刻相同), 飞船系中 Q'_1 与飞船的间距即为(1)问中的 l'_1 . 显然 l'_1 可解释为飞船系中测量随地球系一起运动的一把位于地球和 P_1 之间的运动尺子的长度, 即有

$$l'_1 = \sqrt{1 - \beta^2} l_1, \quad \beta = \frac{v}{c},$$

得 $l_1 = l'_1 / \sqrt{1 - \beta^2} = 15c(\text{m}).$

l_2 的计算:

如图 8-19 所示, 设地球接收到信号, 随即反射信号时, 地球与 x' 轴上的 Q'_2 点相遇, 飞船系认为 Q'_2 与飞船间距即为 l'_2 .

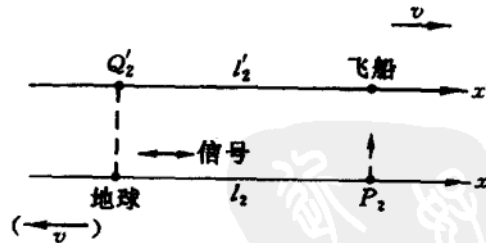


图 8-19

Q'_2 相对飞船静止, l'_2 相当于 Q'_2 与飞船间一把静止尺子长度. 地球系中地球反射信号时刻记为 t_2 , 设在 t_2 时刻 x 轴上的 P_2 点与飞船相遇(飞船系中并不认为 Q'_2 与地球相遇时刻和飞船与 P_2 相遇时刻相同), 地球系中 P_2 与地球的间距即为(2)问中的 l_2 . 显然 l_2 可解释为地球系中测量随飞船系一起运动的

一把位于飞船和 Q_2' 之间的运动尺子的长度, 即有

$$l_2 = \sqrt{1 - \beta^2} l_2' = 24c(\text{m}).$$

l_3 的计算:

方法一: 仿照 l_1 的计算, 可得

$$l_3 = l_3' / \sqrt{1 - \beta^2} = 60c(\text{m}).$$

方法二: 飞船用一个时钟测得信号往返时间为

$$\Delta T' = 2\Delta t' = 60\text{ s},$$

地球系认为这是一个运动时钟测得的结果. 地球系测得的该过程时间便为

$$\Delta T = \Delta T' / \sqrt{1 - \beta^2} = 75\text{ s},$$

故有

$$l_3 = l_1 + v\Delta T = 60c(\text{m}).$$

8-34 宇航员乘宇宙飞船以 $0.8c$ 的速度飞向 8 光年远, 相对地球静止的星球, 然后立即以同样速率返回地球. 飞船上的钟在从地球出发时与地球上的钟同指零点, 飞船运动换向时间忽略不计, 设换向前后两瞬间飞船时钟读数相同. 假定飞船于 2000 年元旦起飞, 此后每年元旦宇航员和地球上的家人互发贺年电讯, 家人自 2001 年元旦起共发 20 封贺电, 试求两人各自收到对方贺电时自己钟表指示的时间.

解 地球系认定飞船到达该星球已历时 10 年, 返回地球又历时 10 年, 其间家人共发出 20 封贺电, 最后一封于 2020 年元旦飞船回到地球“瞬间”发出.

飞船认定自己遇星球已历时

$$\frac{\sqrt{1 - \beta^2} \times 8 \text{ l.y.}}{0.8c} = 6\text{ a}, \quad \sqrt{1 - \beta^2} = 0.6,$$

再遇地球又历时 6 年, 宇航员共发贺电 12 封.

(1) 家人发贺电 20 封, 宇航员接收如下:

第 1 封:

地面系认定发贺电时, 飞船与地球相距

$$l_1 = 0.8 \text{ l.y.},$$

经时

$$\Delta t_1 = l_1 / (c - 0.8c) = 4\text{ a},$$

于

$$t_1 = 1 \text{ a} + \Delta t_1 = 5 \text{ a}$$

被宇航员接收. 考虑到宇航员运动时钟计时率变慢因素, 故宇航员接收时间为

$$t'_1 = \sqrt{1 - \beta^2} t_1 = 3 \text{ a}.$$

第 2 封:

相应的量为

$$l_2 = 2l_1 = 1.6 \text{ l. y.}, \quad \Delta t_2 = l_2 / (c - 0.8c) = 8 \text{ a},$$

$$t_2 = 2 \text{ a} + \Delta t_2 = 10 \text{ a},$$

宇航员接收时间为

$$t'_2 = \sqrt{1 - \beta^2} t_2 = 6 \text{ a}.$$

此时飞船已到达星球, 而后即反向运动返回地球.

第 3 封:

地球系认定飞船于 2010 年从星球返航时, 第 3 封贺电的信号已在空中传播过 7 光年的路程, 此时信号与飞船的距离为

$$l_3 = 8 \text{ l. y.} - 7 \text{ l. y.} = 1 \text{ l. y.},$$

经时

$$\Delta t_3 = \frac{l_3}{c + 0.8c} = \frac{10}{18} \text{ a}$$

被宇航员接收到. 飞船中宇航员接收时间为

$$t'_3 = t'_2 + \sqrt{1 - \beta^2} \Delta t_3 = 6 \frac{1}{3} \text{ a}.$$

第 $i=4, 5, \dots, 20$ 封:

第 i 封贺电发送时间比第 3 封晚 $(i-3)\text{a}$, 这可等效为在地球背向飞船一侧与地球相距 $(i-3)\text{l. y.}$ 远处与第 3 封贺电同时于 2003 年元旦发出. 飞船于地球时 2010 年元旦从星球返航时, 第 i 封贺电的信号已在空间传播过 7 光年的路程, 此时信号与飞船的距离 l_2 要比 l_3 多出 $(i-3)\text{l. y.}$, 即为

$$l_i = l_3 + (i-3)\text{l. y.}.$$

经时

$$\Delta t_i = \frac{l_i}{c + 0.8c} = \frac{i-2}{1.8} \text{ a}, \quad i = 4, 5, \dots, 20$$

被宇航员接收到. 飞船中宇航员接收时间为

$$t'_i = t'_2 + \sqrt{1 - \beta^2} \Delta t_i = \left(5 \frac{1}{3} + \frac{i}{3} \right) \text{ a}.$$

小结:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_i/a	3	6	$6\frac{1}{3}$	$6\frac{2}{3}$	7	$7\frac{1}{3}$	$7\frac{2}{3}$	8	$8\frac{1}{3}$	$8\frac{2}{3}$
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
t_i/a	9	$9\frac{1}{3}$	$9\frac{2}{3}$	10	$10\frac{1}{3}$	$10\frac{2}{3}$	11	$11\frac{1}{3}$	$11\frac{2}{3}$	12

(2) 宇航员发贺电 12 封, 家人接收的时间

地面系认为宇航员发第 1 封贺电时与地球相距

$$l_1 = \frac{8}{6} \text{ l.y.},$$

宇航员发第 $i=2, 3, \dots, 6$ 封贺电时与地球相距

$$l_i = il_1 = i \times \frac{8}{6} \text{ l.y.}$$

对应的地面系时间分别为

$$t_1^* = \frac{10}{6} \text{ a}, \quad t_i^* = it_1^* = i \times \frac{10}{6} \text{ a.}$$

地面系认为家人收到第 1 封贺电的时间为

$$t_1 = t_1^* + \frac{l_1}{c} = 3 \text{ a.}$$

地面系认为家人收到第 $i=2, 3, 4, 5, 6$ 封贺电的时间为

$$t_i = t_i^* + \frac{l_i}{c} = 3i \text{ a.}$$

地面系认为宇航员发第 7 封贺电时与地球相距

$$l_7 = l_5 = \frac{40}{6} \text{ l.y.},$$

此时地球时间为

$$t_7^* = 10 \text{ 年} + \frac{10}{6} \text{ a},$$

家人接收贺电时间为

$$t_7 = t_7^* + \frac{l_7}{c} = 18\frac{1}{3} \text{ a.}$$

地面系认为宇航员发第 8 封贺电时与地球相距



$$l_8 = l_4 = \frac{32}{6} \text{ l. y. },$$

此时地球时间为

$$t_8^* = 10 \text{ 年} + 2 \times \frac{10}{6} \text{ a},$$

家人接收贺电时间为

$$t_8 = t_8^* + \frac{l_8}{c} = 18 \frac{2}{3} \text{ a}.$$

第 9 封贺电相应量为

$$l_9 = l_3 = \frac{24}{6} \text{ l. y. },$$

$$t_9^* = 10 \text{ a} + 3 \times \frac{10}{6} \text{ a}, \quad t_9 = t_9^* + \frac{l_9}{c} = 19 \text{ a}.$$

第 10, 11, 12 封贺电相应量为

$$l_{10} = l_2 = \frac{16}{6} \text{ l. y. },$$

$$t_{10}^* = 10 \text{ a} + 4 \times \frac{10}{6} \text{ a}, \quad t_{10} = t_{10}^* + \frac{l_{10}}{c} = 19 \frac{1}{3} \text{ a};$$

$$l_{11} = l_1 = \frac{8}{6} \text{ l. y. },$$

$$t_{11}^* = 10 \text{ a} + 5 \times \frac{10}{6} \text{ a}, \quad t_{11} = t_{11}^* + \frac{l_{11}}{c} = 19 \frac{2}{3} \text{ a};$$

$$t_{12} = 20 \text{ a}.$$

小结:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
t_i/a	3	6	9	12	15	18	$18 \frac{1}{3}$	$18 \frac{2}{3}$	19	$19 \frac{1}{3}$	$19 \frac{2}{3}$	20

8-35 如图 8-20 所示,光源 S 向全反射体 S' 发射一束平行光,发光功率为 P_0 . 设 S' 以匀速度 v 沿其法线方向朝 S 运动,试求 S 接收到的反射光功率 P .

解 设置随光源的 S 系和随反射体的 S' 系. 光源在 S 系中单位时间内发出的第 i 种



图 8-20

光子的频率和光子数分别记为 ν_{0i} 和 n_{0i} , 则有

$$P_0 = \sum_i n_{0i} h \nu_{0i}.$$

反射体因多普勒效应, 接收到的和反射出去的光子频率同为

$$\nu'_i = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \nu_{0i}, \quad \beta = v/c.$$

同样由于多普勒效应, 光源 S 接收到的光子频率为

$$\nu_i = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \nu'_i = \frac{1+\beta}{1-\beta} \nu_{0i}.$$

考虑到光源 S 的 1 个本征单位时间折合成 S 系的 $1/\sqrt{1-\beta^2}$ 个单位时间, S' 系认为光源 S 在 S' 系的 1 个单位时间内发出的光子数应为

$$n'_{0i} = \sqrt{1-\beta^2} n_{0i}.$$

S' 系中的观察者还认为 S 边运动边发射光子, S' 系中单位时间内由 S 发出的 n'_{0i} 个光子都应处于图 8-21 中画斜线的区域内, 它们可在而后的

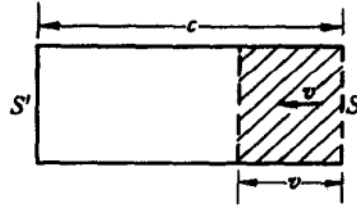


图 8-21

$$\Delta t' = \frac{c-v}{c} \times \text{单位时间}$$

内, 全部到达 S' . 故在 S' 系中单位时间内到达反射体, 接着又被反射回去的光子数应为

$$n''_{0i} = \frac{n'_{0i} \times \text{单位时间}}{\Delta t'} = \frac{c}{c-v} \sqrt{1-\beta^2} n_{0i} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} n_{0i}.$$

对 S 系中的观察者, 反射体以速率 v 朝 S 运动, 同理, S 在单位时间接收到的光子数为

$$n_i = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} n''_{0i} = \frac{1+\beta}{1-\beta} n_{0i}.$$

综合上述两个方面因素, S 接收到的光功率为

$$P = \sum_i n_i h \nu_i = \left(\sum_i n_{0i} h \nu_{0i} \right) \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^2,$$

即

$$P = \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^2 P_0.$$

S 接收到的反射光功率大于发射出去的光功率,一方面是因为反射体受到光压作用,为维持反射体的匀速运动,外力必须做功,此功转化为反射光的能量;另一方面是因为 S 的接收时间间隔短于 S 的发射时间间隔.

8-36 如图 8-22 所示,在某太空惯性系 S 中,飞船 A 和飞船 B 以相同速率 βc 作匀速直线航行,飞船 A 的航行方向与 x 轴方向一致,飞船 B 的航行方向与 x 轴负方向一致,两飞船航线之间的距离为 d . 当 A 和 B 靠得最近时,从 A 向 B 发出一束无线电联络信号.

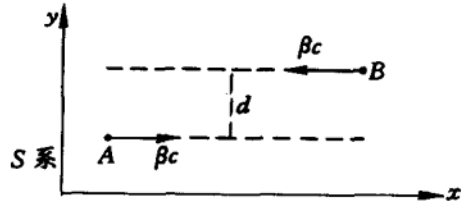


图 8-22

(1) 为使 B 能接收到信号, A 中的宇航员认为发射信号的方向应与自己相对 S 系的运动方向之间成什么样的夹角?

(2) 飞船 B 中的宇航员接收到信号时,认为自己与飞船 A 相距多远?

解 (1) 在 S 系中, B 的速度 $u_x = -\beta c$, 因此在 A 参考系中, B 的速度为

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \Big|_{v=\beta c} = -\frac{2\beta c}{1 + \beta^2}.$$

参考图 8-23, A 参考系中 A 发射的无线电信号要到达 B , 要求

$$c \cdot \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -u'_x,$$

由此解得所求夹角为

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{2\beta}{1 + \beta^2},$$

或等效表述为

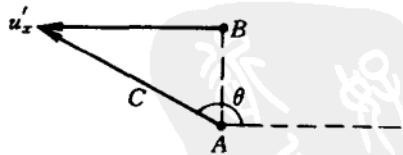


图 8-23

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{2\beta}{1 - \beta^2}.$$

(2) 因对称性, B 参考系中 A 的速度为

$$u_x'' = \frac{2\beta c}{1 + \beta^2}.$$

参考图 8-24, 有

$$\begin{aligned} l'' &= \sqrt{d^2 + (u_x'' \Delta t'')^2} = \sqrt{d^2 + \left(u_x'' \frac{d}{c}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{2\beta}{1 + \beta^2}\right)^2} d, \end{aligned}$$

最后可得所求距离为

$$l'' = \frac{\sqrt{(1 + \beta^2)^2 + 4\beta^2}}{1 + \beta^2} d.$$

8-37 S 系中有一个静止时各边长为 l 的正方形 $ABCD$ 面板, 今使其沿 AB 边方向匀速运动, 速度为 v , 如图 8-25 所示. 设质点 P 从 A 点出发, 在面板参考系中以恒定的速率 u 沿 $ABCD$ 绕行一周.

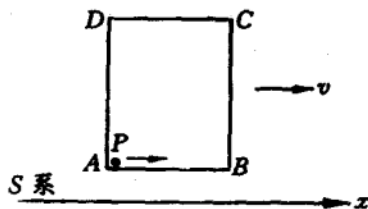


图 8-25

(1) 分别在面板参考系和 S 系中计算质点 P 从 A 点到 B 点所经时间 t'_{AB} 和 t_{AB} ;

(2) 分别在面板参考系和 S 系中计算质点 P 从 B 点到 C 点所经时间 t'_{BC} 和 t_{BC} ;

(3) 分别在面板参考系和 S 系中计算质点 P 从 A 点出发绕行一周所经时间 t'_{ABCD} 和 t_{ABCD} .

解 (1) 很易算得

$$t'_{AB} = l/u.$$

在 S 系中质点 P 从 A 到 B 的速度为

$$u_x = (u + v) / \left(1 + \frac{uv}{c^2}\right) = c^2(u + v) / (c^2 + uv),$$

S 系认为质点 P 相对 B 点的速度大小为

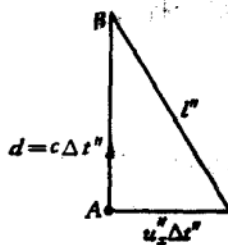


图 8-24

$$u_{AB} = u_x - v = u(c^2 - v^2)/(c^2 + uv),$$

质点 P 从 A 到 B 所经时间便是

$$t_{AB} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} l}{u_{AB}} = \frac{1 + uv/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{l}{u}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

顺便一提, t_{AB} 与 t'_{AB} 间的关系为

$$t_{AB} = \frac{1 + uv/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} t'_{AB} \neq \frac{t'_{AB}}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

两者间的关系与运动时钟计时率变慢公式不一致的原因, 是 S 系认为 t'_{AB} 不是一个运动时钟测量的时间间隔.

(2) 很易算得

$$t'_{AB} = l/u.$$

S 系认为虽然 t'_{BC} 是两个分别相对面板参考系静止在 B 点和 C 点的运动时钟测得的时间间隔, 但 S 系认为这两个运动时钟之间的时钟零点校准没有差异, 因此 t'_{BC} 可相当于一个运动时钟测量的结果, 必有

$$t_{BC} = t'_{BC} / \sqrt{1 - \beta^2} = l/u \sqrt{1 - \beta^2}.$$

(3) 很易算得

$$t'_{ABCD} = 4l/u.$$

S' 系中 t'_{ABCD} 可以由分别静止在 A, B, C, D 的四个时钟测得的 $t'_{AB}, t'_{BC}, t'_{CD}, t'_{DA}$ 相加而成, 也可以由静止在 A 处的一个时钟单独测得, 两个结果是一致的. 取 t'_{ABCD} 后一种测量方式, 即得

$$t_{ABCD} = t'_{ABCD} / \sqrt{1 - \beta^2} = 4l/u \sqrt{1 - \beta^2}.$$

8-38 惯性系 S, S' 间的相对关系如图 8-26 所示, 其中相对速度大小为 $v=c/2$, 坐标原点 O, O' 重合时, $t=t'=0$.

(1) 设飞船 1 开始时静止于 O' 点, 从 $t'=0$ 时刻起, 在 S' 系以恒定的加速度 a_1 沿 x' 轴运动, 试求飞船 1 在 S 系中的运动方程 x_1-t .



图 8-26

(2) 设飞船 2 开始时静止于 O 点, 从 $t=0$ 时刻起, 沿 x 轴正方

向离开 O 点,并在飞船 2 的瞬时静止惯性系(每一时刻相对飞船静止的惯性系)中,始终具有相同的加速度值 a_2 ,试求飞船 2 在 S 系中的运动方程 x_2-t .

(3) 设 $a_2=100a_1$,试问在 S 系中飞船 2 何时追上飞船 1?

解 (1) 飞船 1 在 S' 系中的运动方程为

$$x'_1 = \frac{1}{2}a_1 t'^2,$$

将它与洛伦兹变换式

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{2}$$

联立,可得

$$x_1^2 - \left(4ct + \frac{4\sqrt{3}c^2}{a_1}\right)x_1 + 4c^2t^2 + \frac{2\sqrt{3}c^3}{a_1}t = 0.$$

引入参量

$$t_0 = \sqrt{3}c/a_1,$$

可将上述方程简化成

$$x_1^2 - 4c(t + t_0)x_1 + 2c^2(2t + t_0)t = 0.$$

方程的解为

$$x_1 = 2c(t + t_0) \pm \sqrt{2}c\sqrt{(3t + 2t_0)t_0},$$

因 $t=0$ 时, $x_1=0$,故应取运动方程为

$$x_1 = 2c(t + t_0) - \sqrt{2}c\sqrt{(3t + 2t_0)t_0}.$$

(2) 设在 S 系 t 时刻,飞船 2 的速度为 u_2 ,飞船 2 的瞬时惯性系 S'' 相对 S 系的速度也是 u_2 . S 系中经时间 dt ,飞船 2 的速度增量为 du_2 ,在 S'' 系中飞船 2 的速度从 0 增为 du_2'' ,应有

$$u_2 + du_2 = (du_2'' + u_2) / \left(1 + \frac{u_2}{c^2}du_2''\right),$$

可展开成 $(u_2 + du_2) \left(1 + \frac{u_2}{c^2}du_2''\right) = u_2 + du_2''$,

略去高阶小量,得

$$du_2'' = du_2 / (1 - \beta_2^2), \quad \beta_2 = u_2/c.$$

考虑到无穷小加速时间间隔 dt 与 dt'' 间应有下述关系:

$$dt'' = \sqrt{1 - \beta_2^2} dt,$$

可得

$$a_2 = a_2'' = \frac{du_2''}{dt''} = \frac{1}{(1 - \beta_2^2)^{3/2}} \frac{du_2}{dt}.$$

因 a_2 是常量, 积分

$$\int_0^{u_2} \frac{du_2}{(1 - u_2^2/c^2)^{3/2}} = \int_0^t a_2 dt,$$

可得

$$\frac{u_2}{\sqrt{1 - u_2^2/c^2}} = a_2 t,$$

继而有

$$u_2 = \frac{a_2 t}{\sqrt{1 + a_2^2 t^2/c^2}}.$$

考虑到 $u_2 = dx_2/dt$, 对上式再作积分, 并利用 $t=0$ 时 $x_2=0$ 的初条件, 可得

$$x_2 = \frac{c^2}{a_2} \left(\sqrt{1 + \frac{a_2^2}{c^2} t^2} - 1 \right),$$

这就是飞船 2 在 S 系中的运动方程.

(3) 飞船 2 追上飞船 1 时, 应有 $x_2 = x_1 \neq 0$, 即有

$$\begin{aligned} & \frac{c^2}{a_2} \left(\sqrt{1 + \frac{a_2^2}{c^2} t^2} - 1 \right) \\ & = 2c(t + t_0) - \sqrt{2c} \sqrt{(3t + 2t_0)t_0}, \quad t \neq 0, \end{aligned}$$

因 $a_2 = 100a_1$, $a_1 = \sqrt{3}c/t_0$, 得 $a_2 = 100\sqrt{3}c/t_0$, 代入上式, 化简后

可得

$$\frac{t_0}{100\sqrt{3}} \left(\sqrt{1 + 3 \times 10^4 \frac{t^2}{t_0^2}} - 1 \right) = 2(t + t_0) - \sqrt{2(3t + 2t_0)t_0}.$$

引入量纲一的参数:

$$\alpha = t/t_0, \quad \alpha \neq 0,$$

可将上式简化成数值方程:

$$\frac{1}{100\sqrt{3}}(\sqrt{1+3\times 10^4\alpha^2}-1) = 2(\alpha+1) - \sqrt{2(3\alpha+2)}.$$

引入参数:

$$y_2 = \frac{1}{100\sqrt{3}}(\sqrt{1+3\times 10^4\alpha^2}-1),$$

$$y_1 = 2(\alpha+1) - \sqrt{2(3\alpha+2)},$$

用计算器取搜索逼近方法作数值计算如下:

α	0.1	0.01	0.001	0.005	0.0075
y_2	0.094	5.77×10^{-3}	8.60×10^{-5}	1.86×10^{-3}	3.691×10^{-3}
y_1	0.055	5.06×10^{-3}	5.01×10^{-4}	2.51×10^{-3}	3.781×10^{-3}
α	0.0076	0.0077	0.0078	0.0079	
y_2	3.771×10^{-3}	3.851×10^{-3}	3.931×10^{-3}	4.011×10^{-3}	
y_1	3.832×10^{-3}	3.883×10^{-3}	3.934×10^{-3}	3.985×10^{-3}	

故可取的数值解为

$$\alpha = 0.0078, \quad \text{即} \quad t = 0.0078\sqrt{3}c/a_1,$$

这就是 S 系中飞船 2 追上飞船 1 的时刻.

事实上, S 系中开始时飞船 1 因具有 $v=c/2$ 初速度而超前飞船 2. 而后因 $a_2=100a_1$, 飞船 2 比飞船 1 加速快, 当 $t=0.0078\sqrt{3}\frac{c}{a_1}$ 时, 飞船 2 追上飞船 1. 接着飞船 2 相对飞船 1 在 S 系的加速度 $\left(1-\frac{u_2^2}{c^2}\right)^{3/2} a_2$ 越来越小(证明从略), 故飞船 2 又会被飞船 1 追上, 并将一直落后于飞船 1.

最后需要补充的是本题讨论内容, 仅适宜于飞船 1 在 S' 系中的速度未达到真空光速 c 范围之内.

8-39 宇宙飞船从地球出发沿直线飞向某恒星, 恒星距地球 $r=3\times 10^4$ l. y. . 飞船的前一半航程中, 飞船在其瞬时静止惯性系中, 始终具有相同的加速度 $a'=10$ m/s²; 飞船的后一半航程中, 飞船在其瞬时静止惯性系中以数值相同的加速度 a' 作减速运动. 试问在飞船上测量, 整个航程经历了多长时间? 计算时只取一级近似.

解 参考习题 8-38(2)的解答,可知飞船在前一半航程中相对地球系的运动方程为

$$x = \frac{c^2}{a'} \left(\sqrt{1 + \frac{a'^2}{c^2} t^2} - 1 \right),$$

据此可解得

$$t = \frac{x}{c} \sqrt{1 + \frac{2c^2}{a'x}}.$$

当飞船完成前半航程时, $x=r/2$, 所需地球时间为

$$T = \frac{r}{2c} \sqrt{1 + \frac{4c^2}{a'r}}.$$

在每段微小运动单元中, S 系中的时间间隔 dt 与飞船瞬时静止惯性系中对应的的时间间隔 dt' 之间的关系为

$$dt' = \sqrt{1 - u^2/c^2} dt,$$

式中 u 为 t 时刻飞船航行速度, 参考习题 8-38(2)的解答, 可知 u 与 a', t 间有下述关系:

$$\frac{u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = a't, \quad u = \frac{a't}{\sqrt{1 + a'^2 t^2/c^2}},$$

代入上式可得

$$dt' = \frac{u}{a't} dt = \frac{dt}{\sqrt{1 + a'^2 t^2/c^2}}.$$

积分, 有

$$\int_0^{T'} at' = \frac{\int_0^T dt}{\sqrt{1 + a'^2 t^2/c^2}},$$

式中 T 和 T' 分别是飞船完成前半航程所经历的地球时间和飞船时间, 得

$$T' = \frac{c}{a'} \ln \left[\frac{a'}{c} T + \sqrt{1 + \frac{a'^2}{c^2} T^2} \right].$$

因加速过程与减速过程所需时间相同, 故走完全程所需飞船时间为

$$2T' = \frac{2c}{a'} \ln \left[\frac{a'}{c} T + \sqrt{1 + \frac{a'^2}{c^2} T^2} \right].$$

由 $r=3 \times 10^4 \text{ l.y.}$, $a'=10 \text{ m/s}^2$, 得

$$4c^2/a'r = 1.27 \times 10^{-4},$$

因此有

$$T \approx r/2c = 1.5 \times 10^4 \text{ a},$$

继而得

$$\frac{a'}{c}T = 1.58 \times 10^4,$$

$$2T' \approx \frac{2c}{a'} \ln \left[\frac{2a'}{c}T \right] = 19.7 \text{ a}.$$

8-40 惯性系 S, S' 之间的相对关系如图 8-27 所示, S 系与某星体连结在一起, S, S' 系坐标原点 O, O' 的间距远小于各自到其他星体的距离, 在 S, S' 系按常规方式分别引入以 O, O' 为原点的球坐标角参量 $\{\theta, \phi\}, \{\theta', \phi'\}$ (图中未画出). 已知在 S 系 O 处的观察者看到的远处星体数呈各向同性分布, 即单位立体角内观察到的星体数 N 是一个与 $\{\theta, \phi\}$ 无关的常量, 试求在 S' 系 O' 处的观察者在单位立体角内可观察到的星体数 N' 的角分布, 即函数关系 $N'-\theta', \phi'$.

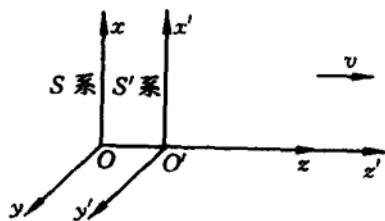


图 8-27

解 因 O, O' 间距远小于各自与远处星体的距离, 远处星体射向 S 系 O 处与 S' 系 O' 处的两条光线间的偏向差异可略, 即可处理成同一束平行光中的两条光线. 此平行光束在 S, S' 系对应的角 ϕ, ϕ' 相同, 即有

$$\phi = \phi'.$$

此平行光束与 z 轴和 z' 轴夹角可分别记为 $\pi - \theta$ 和 $\pi - \theta'$, 则有

$$u_x = -c \cos \theta, \quad u'_x = -c \cos \theta', \quad u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x},$$

即得

$$\cos \theta = \cos \theta' - \beta / (1 - \beta \cos \theta'). \quad (1)$$

设 S 系中在立体角 $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ 内可看到的星体即为 S' 系中在立体角 $d\Omega' = \sin \theta' d\theta' d\phi'$ 内可看到的星体, 则有

$$N \sin \theta d\theta d\phi = N' \sin \theta' d\theta' d\phi',$$

因 $\phi = \phi'$, 有 $d\phi = d\phi'$, 可得

$$N' = \frac{\sin \theta d\theta}{\sin \theta' d\theta'} N = \frac{d(\cos \theta)}{d(\cos \theta')} N. \quad (2)$$

据①式,可得

$$d(\cos \theta) = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \theta')^2} d(\cos \theta'),$$

代入②式,得所求分布为

$$N' = N'(\theta') = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \theta')^2} N.$$

特例: $v \rightarrow c$ 时, $\beta \rightarrow 1$, 则有

$$N'(0) = N \lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta)^2} = N \lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{1 + \beta}{1 - \beta} = \infty,$$

$$N'(\pi) = N \lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta)^2} = 0.$$

总之,在 S 系中各向同性分布的远处星体,将向 S' 系的运动方向聚集,在 $v \rightarrow c$ 的极限情形下,星体将集中到运动方向上.

8-41 如图 8-28 所示,由介质 1 和介质 2 构成一界面,两介质的折射率分别为 n_1 和 n_2 ,界面的法线与 S 系的 x 轴平行. 现设界面随介质一起相对 S 系以速度 v 沿法线作匀速平动,在 S 系中入射光以入射角 θ_i 从介质 1 向界面入射,反射角和折射角分别用 θ_r 和 θ_t 表示,试导出用入射光速 u_i 和入射角 θ_i 表述的反射角 θ_r 和折射角 θ_t 的计算式.

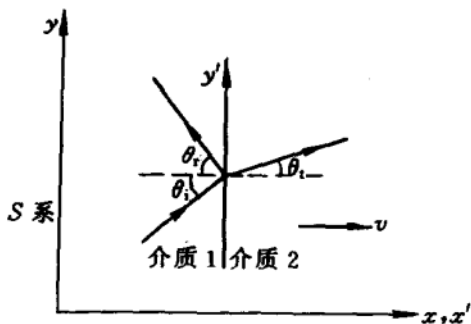


图 8-28

解 设在 S 系中观测时,三种光线在各自传播方向上的光线速度分别为 u_i, u_r, u_t . 在 S' 系(随介质一起运动的惯性系)中观察时,相应量分别为 u'_i, u'_r, u'_t , 入射、反射和折射角则分别记为 θ'_i, θ'_r 和 θ'_t . 光线传播遵从相对论速度变换公式,即

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, \quad u_y = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u'_y}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x},$$

可导得

$$u \cos \theta = \frac{u' \cos \theta' + v}{1 + \frac{v}{c^2} u' \cos \theta'}, \quad u \sin \theta = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u' \sin \theta'}{1 + \frac{v}{c^2} u' \cos \theta'}, \quad (1)$$

式中 u 和 u' 分别是在 S 系和 S' 系中测得的光线速度, θ 和 θ' 是 S 系和 S' 系中测得的光线方向与 x 轴和 x' 轴的夹角.

对入射光应用①式,有

$$u_i \cos \theta_i = \frac{u'_i \cos \theta'_i + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_i \cos \theta'_i}, \quad u_i \sin \theta_i = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u'_i \sin \theta'_i}{1 + \frac{v}{c^2} u'_i \cos \theta'_i}; \quad (2)$$

对反射光和折射光,分别有

$$u_r \cos \theta_r = \frac{u'_r \cos \theta'_r - v}{1 - \frac{v}{c^2} u'_r \cos \theta'_r}, \quad u_r \sin \theta_r = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u'_r \sin \theta'_r}{1 - \frac{v}{c^2} u'_r \cos \theta'_r}, \quad (3)$$

$$u_t \cos \theta_t = \frac{u'_t \cos \theta'_t + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_t \cos \theta'_t}, \quad u_t \sin \theta_t = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u'_t \sin \theta'_t}{1 + \frac{v}{c^2} u'_t \cos \theta'_t}. \quad (4)$$

由③④式可得

$$\tan \theta_r = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u'_r \sin \theta'_r}{u'_r \cos \theta'_r - v}, \quad \tan \theta_t = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u'_t \sin \theta'_t}{u'_t \cos \theta'_t + v}. \quad (5)$$

S' 系中介质静止,故有

$$u'_r = c/n_1, \quad u'_t = c/n_2,$$

且据反射定律和折射定律,有

$$\theta'_r = \theta'_i, \quad \sin \theta'_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta'_i,$$

代入⑤式,得

$$\tan \theta_r = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \theta'_i}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta'_i} - n_1 \beta},$$

$$\tan \theta_t = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \theta'_i}{\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta'_i} + \frac{n_2}{n_1} \beta}, \quad (6)$$



式中的 θ'_i 可借助②式的逆变换表示, 即有

$$u'_i \sin \theta'_i = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u_i \sin \theta_i}{1 - \frac{v}{c^2} u_i \cos \theta_i}, \quad u'_i = \frac{c}{n_1}, \quad (7)$$

于是⑥⑦式就给出了反射角 θ_r 和折射角 θ_t 随入射光速 u_i 和入射角 θ_i 变化的关系。

算例: 若介质 1 为真空, 则 $u'_i = u_i = c, n_1 = 1, n_2 = n$, ⑦式简化成

$$\sin \theta'_i = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \theta_i}{(1 - \beta \cos \theta_i)},$$

代入⑥式, 化简后得

$$\tan \theta_r = \frac{(1 - \beta^2) \sin \theta_i}{(1 + \beta^2) \cos \theta_i - 2\beta}, \quad (8)$$

$$\tan \theta_t = \frac{(1 - \beta^2) \sin \theta_i}{\sqrt{n^2(1 - \beta \cos \theta_i)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta_i}} + \beta n^2(1 - \beta \cos \theta_i).$$

这就是光从真空射向运动介质界面时遵从的反射规律和折射规律, 当介质静止时, ⑧式变为

$$\theta_r = \theta_i, \quad n \sin \theta_t = \sin \theta_i,$$

此即通常的反射定律和折射定律。

由⑧式可知, 一般情况下 θ_r 和 θ_t 与 θ_i 的关系与界面的运动速度 v 有关. 图 8-29 中画出了 $n=1.5, \beta=0, 0.5, 0.8$ 的情形下 θ_r 和 θ_t 随 θ_i 变化的关系曲线, 虚线表示 $\beta=0$ 时(通常的反射定律和折射定

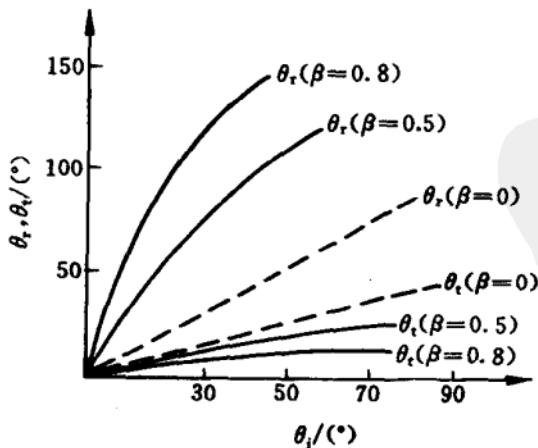


图 8-29

律)的结果.从图中可以看出, β 越大,即 v 越接近光速,关系曲线偏离静止情形越远,相对论效应越显著.

8-42 实验室中, α 粒子以 $v_1 = \frac{4}{5}c$ 的速度射入厚度 $d = 0.35\text{ m}$ 的水泥防护墙,从墙射出时速度降为 $v_2 = \frac{5}{13}c$.已知 α 粒子静质量 $m_0 = \frac{2}{3} \times 10^{-26}\text{ kg}$,墙对 α 粒子的作用力 F_0 是常量,试求:

(1) F_0 ;

(2) 在以速度 v_1 沿 α 粒子运动方向相对实验室运动的 S' 系中测得的墙作用力 F'_0 ;

(3) 实验室和 S' 系各自测得的 α 粒子通过墙的时间 Δt 和 $\Delta t'$.

解 由所给数据,得

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = \frac{5}{3}, \quad \frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} = \frac{13}{12}, \quad m_0 c^2 = 6 \times 10^{-10}\text{ J}.$$

(1) 由功能关系式

$$F_0 d = \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} - \frac{1}{1 - \sqrt{v_2^2/c^2}} \right] m_0 c^2,$$

可算得

$$F_0 = 1.0 \times 10^{-9}\text{ N}.$$

(2) 由力变换式,可得

$$F'_0 = F'_x = \frac{F_x - \frac{v}{c^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} = \frac{F_0 - \frac{v_1}{c^2} u_x F_0}{1 - \frac{v_1}{c^2} u_x} = F_0$$

$$= 1.0 \times 10^{-9}\text{ N},$$

式中 u_x 为 α 粒子在实验室运动过程中的瞬时速度.

(3) 实验室中由动量定理,可得

$$F_0 \Delta t = \frac{m_0 v_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} - \frac{m_0 v_2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} = \frac{11}{12} m_0 c,$$

代入数据后,算得

$$\Delta t = 1.83 \times 10^{-9}\text{ s}.$$

S' 系中据动量变换式

$$P'_x = \left(P_x - \frac{v_1}{c^2} E \right) / \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} = \frac{5}{3} \left(P_x - \frac{v_1}{c^2} E \right),$$

可得

$$\begin{aligned} F'_0 \Delta t' &= \Delta P'_x = \frac{5}{3} \left(\Delta P_x - \frac{v_1}{c^2} \Delta E \right) \\ &= \frac{5}{3} \left(\Delta P_x - \frac{4}{5} \frac{\Delta E}{c} \right) = \frac{5}{3} \left(F_0 \Delta t - \frac{4}{5} \frac{F_0 d}{c} \right) \\ &= \left(\frac{5}{3} \Delta t - \frac{4}{3} \frac{d}{c} \right) F_0. \end{aligned}$$

因 $F'_0 = F_0$, 即得

$$\Delta t' = \frac{5}{3} \Delta t - \frac{4}{3} \frac{d}{c} = 1.50 \times 10^{-9} \text{ s}.$$

8-43 据德布罗意波粒二象性假设, 动量为 p 的自由运动实物粒子, 它所对应的实物粒子波的波长为 $\lambda = h/p$, 其中 h 为普朗克常量.

设有一个波长为 λ_i 的光子与一个运动的自由电子相碰, 碰后电子静止, 原光子消失, 并产生一个波长为 λ_0 的光子, 运动方向与原光子运动方向成 $\theta = 60^\circ$ 的夹角. 接着此光子又与另一个静止的自由电子相碰, 碰后此光子消失, 产生一个波长为 $\lambda_f = 1.25 \times 10^{-10} \text{ m}$ 的光子, 运动方向与碰前光子运动方向成 $\theta = 60^\circ$ 角. 试求第一个电子在碰前的德布罗意波长 λ_e .

解 参考图 8-30, 第一次碰撞过程的能量与动量守恒式为

$$h\nu_i + E_e = h\nu_0 + m_e c^2, \quad (1)$$

$$\text{由 } \frac{h}{\lambda_i} \cos \theta + p_e \cos \phi = \frac{h}{\lambda_0},$$

$$\text{有 } h\nu_i \cos \theta + (p_e c) \cos \phi = h\nu_0, \quad (2)$$

$$\text{由 } \frac{h}{\lambda_i} \sin \theta - p_e \sin \phi = 0,$$

$$\text{有 } h\nu_i \sin \theta - (p_e c) \sin \phi = 0. \quad (3)$$

式中 E_e 为碰前电子的总能量, m_e 为电子的静质量, p_e 为碰前电子的



图 8-30

动量,其间关系为

$$p_e^2 c^2 = E_e^2 - m_e^2 c^4. \quad (4)$$

上述①~④个方程中含有五个未知量: $\nu_i, \nu_0, E_e, p_e, \phi$, 因此可以导得 ν_i 与 ν_0 间满足的一个关系式,具体过程如下:

由②和③式消去 ϕ , 可得

$$(p_e c)^2 = (h\nu_0)^2 - 2(h\nu_0)(h\nu_i)\cos\theta + (h\nu_i)^2, \quad (5)$$

将④式代入,得

$$E_e^2 - m_e^2 c^4 = h^2 \nu_0^2 - 2h^2 \nu_0 \nu_i \cos\theta + h^2 \nu_i^2,$$

再与①式联立,消去 E_e , 得

$$\begin{aligned} [(h\nu_0)^2 + (h\nu_i)^2 + (m_e c^2)^2 - 2h^2 \nu_0 \nu_i + 2hm_e c^2(\nu_0 - \nu_i)] - m_e^2 c^4 \\ = h^2 \nu_0^2 - 2h^2 \nu_0 \nu_i \cos\theta + h^2 \nu_i^2. \end{aligned}$$

即有
$$m_e c^2(\nu_0 - \nu_i) = h\nu_0 \nu_i(1 - \cos\theta),$$

或
$$\frac{1}{\nu_i} - \frac{1}{\nu_0} = h(1 - \cos\theta)/m_e c^2, \quad (6)$$

这就是 ν_i 与 ν_0 间满足的一个关系式,结合 $\lambda=c/\nu$,⑥式可改述成

$$\lambda_i - \lambda_0 = h(1 - \cos\theta)/m_e c. \quad (7)$$

第二次碰撞的过程图相当于图 8-30 的逆向图,即使不涉及碰撞后的 $E_e, p_e, \phi, \lambda_f$ 与第一次碰前的 $E_e, p_e, \phi, \lambda_i$ 是否对应相同,但 ν_i, ν_0, E_e, p_e 和 ϕ 满足的关系式仍与①、②、③、④式完全相同,因此导得的 ν_i 与 ν_0 的关系式以及 λ_f 与 λ_0 的关系式仍与⑥、⑦式相同,故有

$$\lambda_f - \lambda_0 = h(1 - \cos\theta)/m_e c. \quad (8)$$

既然⑦和⑧式中 λ_0, θ 相同, 便得

$$\lambda_i = \lambda_f = 1.25 \times 10^{-10} \text{ m}, \quad (9)$$

代入⑦式,可算得

$$\lambda_0 = 1.238 \times 10^{-10} \text{ m}. \quad (10)$$

现在由⑤式可算得

$$p_e^2 = h^2 \left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{2}{\lambda_0 \lambda_i} \cos\theta + \frac{1}{\lambda_i^2} \right),$$

再将 $p_e = h/\lambda_e$ 代入, 便得

$$\frac{1}{\lambda_e^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{2 \cos\theta}{\lambda_0 \lambda_i} + \frac{1}{\lambda_i^2}.$$

将⑨⑩式代入后,可算得

$$\lambda_e = 1.24 \times 10^{-10} \text{ m.}$$

8-44 太空火箭(包括燃料)的初始质量为 M_0 ,从静止起飞,向后喷出的气体相对火箭的速度 u 为常量,任意时刻火箭相对地球速度为 v 时火箭的瞬时静止质量记为 m_0 . 忽略地球引力影响,试求比值 m_0/M_0 与速度 v 之间的关系.

解 在地球系中, t 时刻火箭速度为 v ,火箭动质量记为 m ,则有

$$m = m_0 / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = v/c.$$

火箭在 t 到 $t+dt$ 时间间隔内喷气质量为

$$-dm = -d(m_0 / \sqrt{1 - \beta^2}),$$

由动量守恒可得

$$mv = (m + dm)(v + dv) + (-dm)v_i = 0,$$

即得
$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} dv + (v - v_i) d\left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right) = 0, \quad \text{①}$$

其中 v_i 为喷出的气体相对地球系的速度. 据速度变换式,有

$$v_i = [(-u) + v] / \left[1 + \frac{v}{c^2}(-u)\right],$$

代入①式,得

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} dv + \frac{u(1 - \beta^2)}{1 - \frac{u}{v}\beta^2} \left[\frac{dm_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{m_0 \frac{v}{c^2} dv}{(1 - \beta^2)^{3/2}} \right] = 0,$$

可化简成

$$m_0 dv = u(\beta^2 - 1) dm_0,$$

或转述成

$$m_0 c d\beta = u(\beta^2 - 1) dm_0. \quad \text{②}$$

积分

$$\int_{M_0}^{m_0} \frac{dm_0}{m_0} = \int_0^\beta \frac{c}{u} \frac{d\beta}{\beta^2 - 1}, \quad \text{③}$$

即得

$$\frac{m_0}{M_0} = \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{c/2u}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad \text{④}$$

8-45 光子火箭是一种设想的航天器,它利用“燃料”物质向后或向前辐射光束,使火箭从静止加速或在运动中向前加速或减速.

设光子火箭从地球起飞时静止质量(包括燃料)为 M_0 ,朝着与地球相距 $R=1.8 \times 10^6$ l. y. 的仙女座星云飞行. 要求火箭在 25 年(火箭时间)后“软着陆”到达目的地. 不计所有引力影响,略去火箭加速和减速所经时间,试求:

(1) 火箭相对地球匀速段的飞行速度 v ;

(2) 火箭出发时的静止质量 M_0 和到达目的地时的静止质量 M'_0 之间的比值.

解 (1) 因略去加速、减速度时间,故火箭近似以恒定速度 v 飞越全程,所需地球时间为

$$\tau = R/v.$$

将 τ 与 $\tau_0=25$ a 的关联式

$$\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = v/c$$

代入后,即可得

$$\begin{aligned} v &= c / \sqrt{1 + \frac{c^2 \tau_0^2}{R^2}} \approx \left(1 - \frac{c^2 \tau_0^2}{2R^2}\right) c \\ &= (1 - 0.96 \times 10^{-10}) c, \end{aligned}$$

可见,火箭几乎应以光速飞行.

(2) 加速段,火箭静止质量从 M_0 减至 M ,据习题 8-44④式,有

$$\frac{M}{M_0} = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{c/2u} \Big|_{u=c} = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{1/2}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad \textcircled{1}$$

匀速段,火箭静止质量 M 不变. 减速段,火箭质量从 M 减至 M'_0 ,参考习题 8-44②式,但考虑到火箭初速为 v ,静质量为 M ,末速度为 0,静质量为 M'_0 ,且向前发射光束,故习题 8-44③式应改为

$$\int_M^{M'_0} \frac{dm_0}{m_0} = \int_\beta^0 \frac{c}{\beta^2 - 1} \frac{d\beta}{\beta - u}.$$

积分后,得

$$\frac{M'_0}{M} = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{c/2u} \Big|_{u=c} = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad \textcircled{2}$$

联立①②式,可得

$$\frac{M_0}{M'_0} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}, \quad \beta = \frac{v}{c} = 1 - \frac{c^2 \tau_0^2}{2R^2},$$

即有
$$\frac{M_0}{M'_0} = \frac{4R^2 - c^2 \tau_0^2}{c^2 \tau_0^2} \approx \frac{4R^2}{c^2 \tau_0^2} = 2.1 \times 10^{10}.$$

8-46 如图 8-31 所示,在一次粒子碰撞实验中,观察到一个低速 K^- 介子与一个静止质子 p 发生相互作用,生成一个 π^+ 介子和一个未知的 X 粒子,在匀强磁场 B 中 π^+ 介子和 X 粒子的轨迹已在图中画出. 已知 $B=1.70 \text{ T}$, 测得 π^+ 介子轨迹的曲率半径为 $R_1 = 34.0 \text{ cm}$.

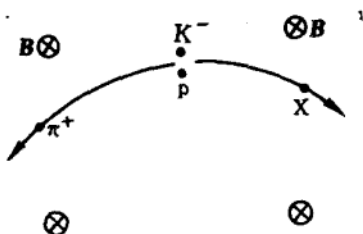


图 8-31

- (1) 试确定 X 粒子轨迹的曲率半径 R_2 ;
- (2) 试参考下表确认 X 为何种粒子.

粒子符号	静能/MeV	电荷/e
e^+, e^-	0.511	1, -1
μ^+, μ^-	105.7	1, -1
π^+, π^-	139.6	1, -1
K^+, K^-	493.8	1, -1
p	938.3	1
n	939.6	0
Λ^0	1115.4	0
Σ^+	1189.4	1
Σ^0	1192.3	0
Σ^-	1197.2	-1
Ξ^0	1314.3	0
Ξ^-	1320.8	-1
Ω^-	1675	-1

解 (1) 由电荷守恒,可知 X 粒子带电 $-e$. 碰撞前系统动量近似为零,碰后生成的 π^+ 介子动质量和速率记为 m_1 和 v_1 , X 粒子的动质量和速率记为 m_2 和 v_2 , 则有

$$m_1 v_1 = m_2 v_2.$$

这两个粒子都受到磁场力作用,但磁场力不作功,故 m_1, v_1 和 m_2, v_2

都是不变量. 据修正后的牛顿第二定律 $F = d(mv)/dt$, 若 m 不变, 则简化为

$$F = m \frac{dv}{dt} = ma.$$

π^+ 介子和 X 粒子在磁场力作用下沿圆轨道匀速运动, 向心加速度由磁场力提供, 可得圆半径为

$$R = mv/eB.$$

因 $m_1 v_1 = m_2 v_2$, 故 X 粒子圆轨道半径 R_2 与 π^+ 介子圆轨道半径 R_1 相同, 即有

$$R_2 = R_1 = 34.0 \text{ cm}.$$

(2) 对于 π^+ 介子, 由

$$eB = m_1 v_1 / R_1 = \frac{m_{10}}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} \frac{v_1}{R_1}, \quad m_{10} = 139.6 \text{ MeV}/c^2,$$

可求得

$$v_1 = \frac{eBR_1 c}{\sqrt{m_{10}^2 c^2 + e^2 B^2 R_1^2}} = 2.34 \times 10^8 \text{ m/s},$$

π^+ 介子的能量便为

$$m_1 c^2 = \frac{m_{10} c^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = 223 \text{ MeV}.$$

因系统能量守恒, 故 X 粒子能量为

$$m_2 c^2 = (m_{K_0} c^2 + m_{p_0} c^2) - m_1 c^2 = 1209.1 \text{ MeV},$$

X 粒子速度大小为

$$v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2} = \frac{m_1 c^2}{m_2 c^2} v_1 = 4.32 \times 10^7 \text{ m/s},$$

X 粒子的静能量便是

$$m_{20} c^2 = \sqrt{1 - v_2^2/c^2} m_2 c^2 = 1196 \text{ MeV}.$$

查表可知, X 为 Σ^- 粒子.

8-47 μ^- 子的电量 $q = -e$ ($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$), 静质量 $m_0 = 100 \text{ MeV}/c^2$, 静止时的寿命 $\tau_0 = 10^{-6} \text{ s}$. 设在地球赤道上空距地面高度 $h = 10^4 \text{ m}$ 处有一个 μ^- 子以接近于真空光速的速度垂直向下

运动.

(1) 试问此 μ^- 子至少应有多大的总能量才可到达地面?

(2) 若把赤道上空 10^4 m 高度范围内的地球磁场处理成水平匀强磁场, $B=10^{-4}$ T, 试求上述已获得能量的 μ^- 子在到达地面时的偏离方向和总的偏转角.

解 (1) 近似地将 μ^- 看成是作匀速直线运动, 速度 $v \approx c$, 到达地面所需时间为

$$t = h/v \approx h/c.$$

为了能到达地面, 要求 $t \leq \tau$, 其中 τ 为 μ^- 在地面系中的寿命, 应有

$$t \leq \tau = \tau_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

μ^- 子的总能量为

$$E = m_0 c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

结合上述诸式, 可得

$$E = m_0 c^2 \tau / \tau_0 \geq m_0 c^2 t / \tau_0 = m_0 c h / \tau_0 = 3.3 \times 10^3 \text{ MeV}.$$

(2) 取 μ^- 子初始位置正下方地面上的点为坐标原点, 设置 $Oxyz$ 坐标系, 如图 8-32 所示. $t=0$ 时, μ^- 子的位置和速度分别为

$$x(0) = 0, \quad y(0) = h, \quad z(0) = 0,$$

$$\dot{x}(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = -v, \quad \dot{z}(0) = 0.$$

略去 μ^- 子所受重力, 有动力学方程

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = E\boldsymbol{v}/c^2, \quad d\boldsymbol{p}/dt = -e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B},$$

$$E = \text{常量},$$

分量式为

$$\ddot{x} = -\frac{c^2 e B}{E} \dot{y}, \quad \ddot{y} = \frac{c^2 e B}{E} \dot{x}.$$

第一式对 t 求导后再将第二式代入, 得

$$\ddot{\dot{x}} + \omega^2 \dot{x} = 0, \quad \omega = c^2 e B / E,$$

结合初始条件, 相继可解得

$$\dot{x} = v \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad x = \frac{v}{\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{v}{\omega}.$$

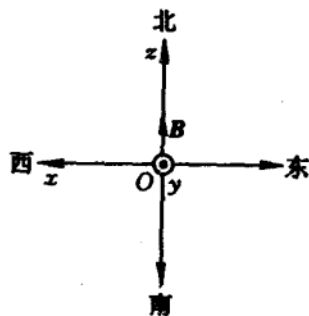


图 8-32

又由

$$\dot{y} = -\frac{E}{c^2 e B} \ddot{x} = -\frac{1}{\omega} \left[-\omega v \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right] = v \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right),$$

结合初条件,可解得

$$y = -\frac{v}{\omega} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) + h.$$

可将 μ^- 子的运动方程整理成

$$x = \frac{v}{\omega} (1 - \cos \omega t), \quad y = h - \frac{v}{\omega} \sin \omega t,$$

到达地面时, $y=0$, 有

$$\sin \omega t = \omega h / v = c^2 e B h / E v,$$

因 $v \approx c$, 得

$$\sin \omega t \approx c e B h / E = 0.091,$$

继而可得

$$\cos \omega t = 0.996, \quad \frac{v}{\omega} = h / \sin \omega t = 1.099 \times 10^5 \text{ m}.$$

落地点的坐标为

$$x_{\text{地}} = \frac{v}{\omega} (1 - \cos \omega t) = 439.6 \text{ m},$$

朝 x 方向(向西)的偏转角为

$$\alpha \approx x_{\text{地}} / h = 0.044 \text{ rad}.$$

8-48 某粒子的静止质量为 m_0 , 以初速 v_0 从 $t=0$ 开始沿 x 轴方向运动, 运动期间始终受到一个指向 y 轴方向的恒力 F 的作用.

试证, 任意 $t > 0$ 时刻粒子的两个速度分量为

$$v_x = \frac{v_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \sqrt{c^2/(c^2 + k)}, \quad v_y = \frac{Ft}{m_0} \sqrt{\frac{c^2}{c^2 + k}},$$

$$k = \frac{v_0^2}{1 - v_0^2/c^2} + \left(\frac{Ft}{m_0} \right)^2,$$

进而证明, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 速率 $v \rightarrow c$, $v_x \rightarrow 0$.

证 粒子的动力学方程分量式为

$$d(m_0 v_x / \sqrt{1 - v^2/c^2}) = F_x dt = 0,$$

$$d(m_0 v_y / \sqrt{1 - v^2/c^2}) = F dt,$$

积分, 并利用初条件 $t=0$ 时, $v_x=v_0, v_y=0$, 得

$$m_0 v_x / \sqrt{1 - v^2/c^2} = m_0 v_0 / \sqrt{1 - v_0^2/c^2}, \quad (1)$$

$$m_0 v_y / \sqrt{1 - v^2/c^2} = Ft. \quad (2)$$

①、②两式平方和, 得

$$\frac{v^2}{1 - v^2/c^2} = \frac{v_0^2}{1 - v_0^2/c^2} + \left(\frac{Ft}{m_0}\right)^2,$$

解得
$$v^2 = k / (1 + k/c^2), \quad (3)$$

其中
$$k = \frac{v_0^2}{1 - v_0^2/c^2} + \left(\frac{Ft}{m_0}\right)^2. \quad (4)$$

由③式, 得

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{k}{c^2 + k} = \frac{c^2}{c^2 + k}.$$

将上式代入①式和②式, 即得题文待证的 v_x, v_y 表述式.

由④式, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $k \rightarrow \infty$, 故由③式得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} [k / (1 + k/c^2)] = c^2, \quad \text{即 } v \rightarrow c.$$

由题文所给 v_x 表述式, 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_x = 0,$$

原因是随着 t 的增大, 粒子速度越来越大, 粒子质量也相应变大, 但粒子在 x 方向动量守恒, 质量增大导致 v_x 减小, 直至趋向零.

8-49 在惯性系某个 S 平面上的 O 点有一个带电量为 $Q > 0$ 的固定点电荷, 另一个带负电荷 $-q$ 的质点 P 受点电荷 Q 的库仑力作用, 绕 O 点在 S 平面上作有界曲线运动. 设 P 点的初始相对论能量为 E_0 , P 点相对 O 点的初始角动量为 L_0 , 且有

$$qQ/4\pi\epsilon_0 L_0 c \ll 1,$$

其中 c 为真空光速.

(1) 试证在零级近似下, 即在 $qQ/4\pi\epsilon_0 L_0 c \approx 0$ 的条件下, P 点的运动轨道是一个椭圆;

(2) 试证 P 点的真实运动是带有进动的椭圆运动, 并求出 P 点相对 O 点的径矢长每变化一周对应的进动角 $\Delta\theta$.

解 库仑力仍为保守力, 质点 P 在运动过程中具有电势能 $-qQ/4\pi\epsilon_0 r$, 质点 P 的相对论能量

$$E = mc^2 - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}$$

为守恒量, 即恒有 $E = E_0$. 又因库仑力是有心力, 质点 P 相对 O 点的角动量 L 也是守恒量, 即有 $L = L_0$.

以 O 为原点在 S 平面上设置极坐标系, 质点 P 的动力学方程为

$$\frac{dm}{dt} \mathbf{v} + m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r},$$

按径向和角向可分解为

$$\frac{dm}{dt} \dot{r} + m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -qQ/4\pi\epsilon_0 r^2,$$

$$\frac{dm}{dt} r\dot{\theta} + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0.$$

角向方程乘以 r 后, 为

$$d(mr^2\dot{\theta})/dt = 0,$$

这是质点的角动量 $L = mr^2\dot{\theta}$ 为守恒量的表现. 于是有

$$\dot{\theta} = L_0/mr^2,$$

径向动力学方程可改述成

$$\frac{d(m\dot{r})}{dt} - mr\dot{\theta}^2 = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

或

$$\frac{d(m\dot{r})}{dt} - \frac{L_0^2}{mr^3} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

因

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \frac{L_0}{mr^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{d(m\dot{r})}{dt} &= \frac{d(m\dot{r})}{d\theta} \dot{\theta} = \left[\frac{d}{d\theta} \left(m \frac{dr}{d\theta} \frac{L_0}{mr^2} \right) \right] \frac{L_0}{mr^2} \\ &= \frac{L_0^2}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = -\frac{L_0^2}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \left[\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta} \right], \end{aligned}$$

可得

$$-\frac{L_0^2}{mr^2} \frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} - \frac{L_0^2}{mr^3} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

或
$$\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{mqQ}{4\pi\epsilon_0 L_0^2} \quad (1)$$

由质点 P 的能量守恒, 可得

$$m = \frac{E_0}{c^2} + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 c^2 r},$$

代入前面的微分方程①, 可得

$$\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{qQE_0}{4\pi\epsilon_0 L_0^2 c^2} + \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L_0 c} \right) \frac{1}{r},$$

即
$$\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} \left[1 - \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L_0 c} \right)^2 \right] = \frac{qQE_0}{4\pi\epsilon_0 L_0^2 c^2} \quad (2)$$

这是关于 $\frac{1}{r}-\theta$ 的二阶常系数线性非齐次微分方程, 解得的 $\frac{1}{r}-\theta$ 便是质点 P 的运动轨道方程.

(1) 在零级近似下, 取 $qQ/4\pi\epsilon_0 L_0 c \approx 0$, 上述微分方程②简化成

$$\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{qQE_0}{4\pi\epsilon_0 L_0^2 c^2},$$

其通解为

$$\frac{1}{r} = A \cos(\theta + \theta_0) + \frac{qQE_0}{4\pi\epsilon_0 L_0^2 c^2},$$

式中 A 和 θ_0 是由初条件确定的常量. 适当选取极轴方向, 总可使 $\theta_0=0$, 从而上式可改写为

$$\frac{1}{r} = \frac{qQE_0}{4\pi\epsilon_0 L_0^2 c^2} (1 + e \cos \theta),$$

其中 e 是一个新的待定常量. 上述解可进一步简化成

$$r = \frac{ep}{1 + e \cos \theta}, \quad p = \frac{4\pi\epsilon_0 L_0^2 c^2}{qQE_0 e},$$

可见, 质点 P 的运动轨道是圆锥曲线. 因已知质点 P 的轨道是有界曲线, 故质点 P 的轨道应为椭圆.

(2) 原微分方程①的完整解为

$$\frac{1}{r} = A \cos \left[\sqrt{1 - \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L_0 c} \right)^2} \theta + \theta_0 \right] + \frac{4\pi\epsilon_0 qQE_0}{(4\pi\epsilon_0 L_0 c)^2 - (qQ)^2},$$

适当选取极轴,使 $\theta_0=0$, 上式改写为

$$\frac{1}{r} = \frac{4\pi\epsilon_0 qQE_0}{(4\pi\epsilon_0 L_0 c)^2 - (qQ)^2} \left\{ 1 + e' \cos \left[\sqrt{1 - \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L_0 c} \right)^2} \theta \right] \right\},$$

式中 e' 为新的待定常量. 上述解可简化成

$$r = \frac{e' p'}{1 + e' \cos \left[\sqrt{1 - \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L_0 c} \right)^2} \theta \right]},$$

$$p' = \frac{(4\pi\epsilon_0 L_0 c)^2 - (qQ)^2}{4\pi\epsilon_0 qQE_0 e'},$$

这表明质点 P 的运动是带有进动的圆锥曲线运动. 因已知质点 P 的轨道是有界曲线, 故质点 P 的运动是带有进动的椭圆运动.

r 变化一周, 转过的角度 θ_0 应满足

$$\sqrt{1 - \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L_0 c} \right)^2} \theta_0 = 2\pi,$$

因此, 转角 θ_0 为

$$\theta_0 = 2\pi / \sqrt{1 - \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L_0 c} \right)^2} > 2\pi.$$

θ 角旋转一周为 2π , 现在 $\theta_0 > 2\pi$, θ_0 的超前量即为进动角 $\Delta\theta$, 有

$$\Delta\theta = \theta_0 - 2\pi = \left[\frac{1}{\sqrt{1 - (qQ/4\pi\epsilon_0 L_0 c)^2}} - 1 \right] 2\pi,$$

因 $qQ/4\pi\epsilon_0 L_0 c \ll 1$, 近似有

$$\Delta\theta = \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L_0 c} \right)^2 - 1 \right] 2\pi,$$

即得进动角 $\Delta\theta = \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L_0 c} \right)^2 \pi$.

8-50 引力红移和恒星质量的测定

(1) 频率为 ν 的一个光子具有惯性质量, 此质量由光子的能量确定. 在此假定下, 光子也有引力质量, 量值等于惯性质量. 与此相应, 从一颗星球表面向外发射出的光子, 逃离星球引力场时, 便会损失能量.

试证明,初始频率为 ν 的光子从星球表面到达无穷远处,若将它的频移(频率增加量)记为 $\Delta\nu$,则当 $|\Delta\nu| \ll \nu$ 时,有

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx -\frac{GM}{Rc^2},$$

式中 M 为星球质量, R 为星球半径. 这样,在距星球足够远处对某条已知谱线频率红移的测量,可用来测出比值 M/R ,如果知道了 R ,星球的质量 M 便可确定.

(2) 在一项太空实验中发射出一艘无人驾驶的宇宙飞船,欲测量银河系中某颗恒星的质量 M 和半径 R . 飞船径向地接近目标时,可以监测到从星球表面 H_e^+ 离子发射出的光子对飞船实验舱内的 H_e^+ 离子束进行共振激发. 光子被共振吸收的条件是飞船 H_e^+ 离子朝着星球的速度必须与光子的引力红移严格地相适应. 共振吸收时的飞船 H_e^+ 离子相对星球的速度 v (记为 $v = \beta c$), 可随着飞船到星球表面最近距离 d 的变化而进行测量,实验数据在下面表格中给出. 请充分利用这些数据,试用作图法求出星球的半径 R 和质量 M . 解答中不必进行误差计算.

数据表

速度参量 $\beta/10^{-5}$	3.352	3.279	3.195	3.077	2.955
到星球表面距离 $d/10^8$ m	38.90	19.98	13.32	8.99	6.67

(3) 为在本实验中确定 R 和 M ,通常需要考虑因发射光子时离子的反冲造成的频率修正(热运动对发射谱线仅起加宽作用,不会使峰的分布移位):

(3.A) 令 ΔE 为原子(或者说离子)在静止时的两个能级差,假定静止原子在能级跃迁后产生一个光子并形成反冲原子. 考虑相对论效应,试用能级差 ΔE 和初始原子静止质量 m_0 来表述发射光子的能量 $h\nu$.

(3.B) 现在,试对 H_e^+ 离子这种相对论频移比值 $(\Delta\nu/\nu)_{\text{反冲}}$ 作出数值计算. 计算结果应当得出这样的结论,即反冲频移远小于(2)问中得到出的引力红移.

计算用常量:

H_e^+ 的静能量: $m_0c^2 = 4 \times 938 \text{ MeV}$;

H_e^+ 的能级: $E_n = -(4 \times 13.6/n^2) \text{ eV}$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

(第 26 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克)试题)

解 (1) 光子质量

$$m = h\nu/c^2.$$

用下标 i 表示初态, 下标 f 表示远离星球的终态, 则有能量关系式

$$h\nu_i - G \frac{Mm_i}{r} = h\nu_f - G \frac{Mm_f}{\infty} = h\nu_f,$$

$|\Delta\nu| \ll \nu$, 意味着光子能量的相对变化很小, 故有

$$h\nu \approx h\nu_i,$$

$$\frac{h\nu_f - h\nu_i}{h\nu} \approx \left(-G \frac{Mm_i}{r} \right) / m_i c^2 = -GM/rc^2.$$

对于从半径为 R 的星球表面发射的光子, 便有

$$\Delta\nu/\nu = -GM/Rc^2,$$

$\Delta\nu$ 取负, 表示频率减小, 波长 λ 则增大, 即有频率红移.

(2) 光子从初位置 r_i 到终位置 r_f 的能量减少为

$$h\nu_i - h\nu_f = -G \frac{Mm_f}{r_f} + G \frac{Mm_i}{r_i},$$

光子能量变化很小, $m_f \approx m_i = h\nu_i/c^2$, 即得

$$h\nu_i - h\nu_f \approx G \frac{M(h\nu_i)}{c^2} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} \right),$$

由此解得 $\nu_f/\nu_i = 1 - \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} \right)$.

本项实验中, r_i 即为星球半径 R , r_f 则为 R 与 d 之和, 故有

$$\nu_f/\nu_i = 1 - \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right). \quad \textcircled{1}$$

为了能对飞船中的 H_e^+ 离子进行共振激发, 射来的光子必须通过多普勒效应使其频率又从 ν_i 升为 ν . 设 ν' 为飞船离子接收到的光谱频率, 由

$$\nu' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \nu_i,$$

再据题文提供的数据表可知 $\beta \ll 1$, 故近似有

$$v_1/v' = (1 - \beta)^{1/2}(1 + \beta)^{-1/2} = (1 - \beta/2)(1 - \beta/2) \approx 1 - \beta.$$

令 $v' = v_1$, 得

$$v_1/v_1 = 1 - \beta, \quad (2)$$

联立①②式, 导得

$$\beta = \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right),$$

或

$$\frac{1}{\beta} = \frac{Rc^2}{GM} \left(\frac{R}{d} + 1 \right).$$

利用题文给出的数据表, 可得 β^{-1} 对应 d^{-1} 数据表如下:

$\beta^{-1}/10^5$	0.298	0.305	0.313	0.325	0.338
$d^{-1}/10^{-8} \text{ m}^{-1}$	0.026	0.050	0.075	0.111	0.150

据此可画出 $\beta^{-1}-d^{-1}$ 的线性关系曲线如图 8-33 所示. 对于该直线, 有

$$\text{斜率} = \alpha R, \quad \alpha = Rc^2/GM;$$

$$\beta^{-1} \text{ 轴截距} = \alpha.$$

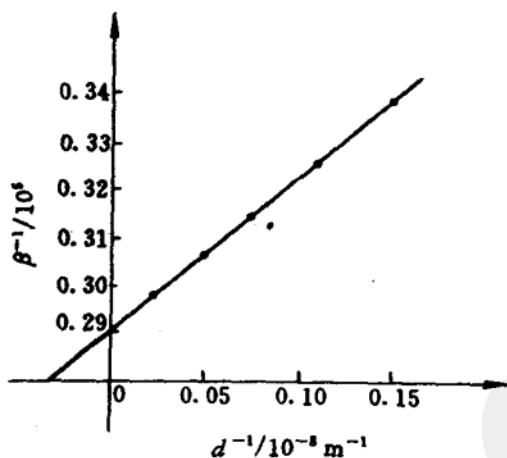


图 8-33

从图线上可测得

$$\alpha R = 3.2 \times 10^{12} \text{ m}, \quad \alpha = 0.29 \times 10^5,$$

最后可算得

$$R = \frac{aR}{a} = 1.104 \times 10^8 \text{ m}, \quad M = \frac{Rc^2}{Ga} = 5.11 \times 10^{30} \text{ kg}.$$

(事实上在设计题文所给数据表时, 已先取定 $R = 1.11 \times 10^8 \text{ m}$, $M = 5.2 \times 10^{30} \text{ kg}$.)

(3. A) 原子发射光子后的静质量记为 m'_0 , 动量记为 p ; 发射出的光子频率记为 ν . 由能量守恒和动量守恒, 得

$$\begin{aligned} \sqrt{p^2c^2 + m_0'^2c^4} + h\nu &= m_0c^2, \\ p &= h\nu/c. \end{aligned}$$

联立两式, 相继可得

$$(m_0c^2 - h\nu)^2 = p^2c^2 + m_0'^2c^4 = (h\nu)^2 + m_0'^2c^4,$$

$$(m_0c^2)^2 - 2h\nu m_0c^2 = m_0'^2c^4,$$

$$h\nu(2m_0c^2) = (m_0^2 - m_0'^2)c^4 = (m_0 - m_0')c^2(m_0 + m_0')c^2.$$

将能级差 ΔE 与 m_0, m_0' 的关系 $\Delta E = m_0c^2 - m_0'c^2$ 代入上式, 得

$$h\nu(2m_0c^2) = \Delta E(2m_0c^2 - \Delta E),$$

解出

$$h\nu = \left(1 - \frac{\Delta E}{2m_0c^2}\right) \Delta E.$$

(3. B) 不考虑原子反冲, 所发射的光子频率为

$$\nu_0 = \Delta E/h,$$

反冲频移 $\Delta\nu = \nu_0 - \nu$ 对应的频移比可导得为

$$(\Delta\nu/\nu)_{\text{反冲}} = \Delta\nu/\nu_0 = \Delta E/2m_0c^2.$$

以 H_e^+ 离子从 $n=2$ 到 $n=1$ 的光子发射为例, 作计算如下.

$$\Delta E = 40.8 \text{ eV}, \quad m_0c^2 = 3752 \times 10^6 \text{ eV},$$

离子反冲频移比为

$$\Delta\nu/\nu_0 = 5.44 \times 10^{-9},$$

由前面讨论得到的引力红移公式, 可估算得

$$\frac{|\Delta\nu|}{\nu} = \left| -\frac{GM}{Rc^2} \right| \approx 10^{-5}.$$

可见离子反冲频移远小于引力红移, 在太空引力红移实验中完全可以略去.

附录 数学补充知识

A 组

附-1 试用递归方法,导出 n 阶行列式展开项数 L_n .

解 由 n 阶行列式与 $n-1$ 阶行列式的递归关联,可得 L_n 和 L_{n-1} 间的递归关系式:

$$L_n = nL_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$n=1$ 时,有 $L_1=1$,即得

$$L_n = n!.$$

附-2 应用行列式求解方程组:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2, \\ x + 2y - z = 7, \\ -x - y + 2z = -9. \end{cases}$$

解 分母行列式,可算得为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (4 - 1) - 1 \times (2 + 1) - 1 \times (-1 - 2) = 6. \end{aligned}$$

分子行列式,可依次算得为

$$\begin{aligned} D_x &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \\ -9 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 7 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-9) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (4 - 1) - 7 \times (2 + 1) - 9 \times (-1 - 2) = 12, \end{aligned}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \\ -1 & -9 & 2 \end{vmatrix} = 6,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \\ -1 & -1 & -9 \end{vmatrix} = -18.$$

方程组解为

$$x = D_x/D = 2, \quad y = D_y/D = 1, \quad z = D_z/D = -3.$$

附-3 (1) 已知 $A:(4, -4, -3), B:(-1, 2, -6)$, 求: $A, B, A+B, A-B$, 并证明 $(A+B) \perp (A-B)$.

(2) 对给定的两个矢量 A, B , 若 $A \neq \pm B$, 但 $A=B$, 试证: $(A+B) \perp (A-B)$.

解 (1) 可算得

$$A = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{41},$$

$$B = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-6)^2} = \sqrt{41},$$

$$A+B: (4-1, -4+2, -3-6) = (3, -2, -9),$$

$$A-B: (4+1, -4-2, -3+6) = (5, -6, +3),$$

继而有

$$(A+B) \cdot (A-B) = 3 \times 5 + (-2) \times (-6) + (-9) \times 3 = 0,$$

因此 $(A+B) \perp (A-B)$.

(2) 因 $A \neq \pm B$, 故

$$A+B \neq 0, \quad A-B \neq 0,$$

又因 $A=B$, 有

$$(A+B) \cdot (A-B) = A \cdot A + B \cdot A - A \cdot B - B \cdot B = A^2 - B^2 = 0,$$

故必有 $(A+B) \perp (A-B)$.

附-4 试证

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & A_x & B_x \\ j & A_y & B_y \\ k & A_z & B_z \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{证 } A \times B &= (A_x i + A_y j + A_z k) \times (B_x i + B_y j + B_z k) \\
 &= A_x B_x i \times i + A_x B_y i \times j + A_x B_z i \times k + A_y B_x j \times i \\
 &\quad + A_y B_y j \times j + A_y B_z j \times k + A_z B_x k \times i \\
 &\quad + A_z B_y k \times j + A_z B_z k \times k \\
 &= A_x B_y k - A_x B_z j - A_y B_x k + A_y B_z i + A_z B_x j - A_z B_y i \\
 &= i(A_y B_z - A_z B_y) - j(A_x B_z - A_z B_x) \\
 &\quad + k(A_x B_y - A_y B_x) \\
 &= \begin{vmatrix} i & A_x & B_x \\ j & A_y & B_y \\ k & A_z & B_z \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

附-5 试证:

$$A \cdot (B \times C) = \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ A_z & B_z & C_z \end{vmatrix}.$$

证 据题附-4, 有

$$\begin{aligned}
 B \times C &= (B_y C_z - B_z C_y)i - (B_x C_z - B_z C_x)j \\
 &\quad + (B_x C_y - B_y C_x)k,
 \end{aligned}$$

利用两矢量标积等于两矢量对应分量乘积之和的性质, 即得

$$\begin{aligned}
 A \cdot (B \times C) &= A_x(B_y C_z - B_z C_y) - A_y(B_x C_z - B_z C_x) \\
 &\quad + A_z(B_x C_y - B_y C_x) \\
 &= \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ A_z & B_z & C_z \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

附-6 已知 $A: (3, 1, -1)$, $B: (1, -1, -1)$, $C: (-1, 3, 2)$, 试证 A, B, C 共面.

证 由

$$\begin{aligned}
 A \cdot (B \times C) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= (-6 + 1 - 3) - (-9 + 2 - 1) = 0,
 \end{aligned}$$

可知 A, B, C 共面.

附-7 试证 $A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{证 } & A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) \\ &= (A \cdot C)B - (A \cdot B)C + (B \cdot A)C - (B \cdot C)A \\ &\quad + (C \cdot B)A - (C \cdot A)B = 0. \end{aligned}$$

附-8 求下列函数的导数:

$$\begin{aligned} y &= \frac{a-x}{a+x}, & y &= \sqrt{x^2 - a^2}, \\ y &= \cos^2(ax+b), & y &= x^2 e^{-ax}. \end{aligned}$$

解 $y = \frac{a-x}{a+x}$, 则

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(a-x)'(a+x) - (a-x)(a+x)'}{(a+x)^2} \\ &= \frac{-(a+x) - (a-x)}{(a+x)^2} \\ &= \frac{-2a}{(a+x)^2}. \end{aligned}$$

$y = \sqrt{x^2 - a^2}$, 令 $y = u^{\frac{1}{2}}$, $u = x^2 - a^2$, 则

$$y' = y'_x = y'_u u'_x = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

$y = \cos^2(ax+b)$: $y = u^2$, $u = \cos(ax+b)$, 则

$$\begin{aligned} y' &= y'_x = y'_u u'_x = 2u[-a \sin(ax+b)] \\ &= -2a \cos(ax+b) \sin(ax+b) = -a \sin[2(ax+b)]. \end{aligned}$$

$y = x^2 e^{-ax}$: 将 e^{-ax} 视为 e^u 与 $u = -ax$ 的复合关系, 得

$$(e^{-ax})' = e^{-ax}(-a),$$

则

$$\begin{aligned} y' &= (x^2)'e^{-ax} + x^2(e^{-ax})' = 2xe^{-ax} - ax^2e^{-ax} \\ &= (2-ax)xe^{-ax}. \end{aligned}$$

附-9 求 xe^x 的极值点, 判定是极大值点还是极小值点, 再画出函数曲线检查解答的正确性.

解 由

$$(xe^x)' = (1+x)e^x = 0,$$

得 $x_0 = -1$ 可能为极值点. 由

$$(xe^x)''|_{x=x_0=-1} = (2+x)e^x|_{x=-1} = e^{-1} > 0,$$

可知 $x_0 = -1$

是极小值点.

函数曲线如图附-1 所示, 可见 $x_0 = -1$ 点确为极小值点.

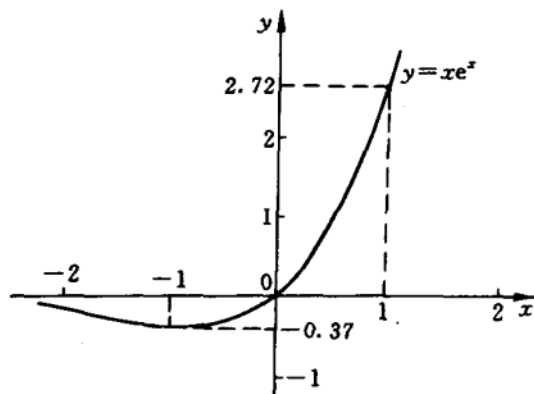


图 附-1

附-10 在 $|x| \leq 1$ 的区域内将 $(1+x)^{-1}$ 展开成马克劳林级数, 在 $-1 < x \leq 1$ 的区域内将 $\ln(1+x)$ 展开成马克劳林级数.

解 马克劳林级数展开式为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n,$$

$$A_0 = f(0), \quad A_n = \frac{1}{n!} [f(x)]^{[n]}|_{x=0}.$$

由导数公式 $[(1+x)^a]' = a(1+x)^{a-1}$, $[\ln(1+x)]' = (1+x)^{-1}$, 得

$$[(1+x)^a]^{[n]} = a(a-1)\cdots[a-(n-1)](1+x)^{a-n},$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

$$[(1+x)^{-1}]^{[n]} = (-1)^n n! (1+x)^{-(n+1)},$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

$$[\ln(1+x)]^{[n]} = \begin{cases} (1+x)^{-1}, \\ (-1)^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n}, \\ n = 2, 3, \dots. \end{cases}$$

$(1+x)^{-1}$ 的展开:

$$A_0 = (1+0)^{-1} = 1, \dots$$

$$A_n = \frac{1}{n!}(-1)^n n!(1+0)^{-(n+1)} = (-1)^n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$(1+x)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots,$$

$\ln(1+x)$ 的展开:

$$A_0 = \ln(1+0) = 0,$$

$$A_1 = (1+0)^{-1} = 1,$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{n!}(-1)^{n-1}(n-1)!(1+0)^{-n} \\ &= \frac{1}{n}(-1)^{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}(-1)^{n-1}x^n \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots. \end{aligned}$$

附-11 质点沿 $y=x^2/A$ 曲线运动, 位矢 $r=xi+yj$ 中 x 随时间 t 的变化规律为 $x=v_0t$, 其中 v_0 是常量, 试求质点运动速度 v 和加速度 a .

解 由

$$x = v_0t, \quad y = x^2/A = v_0^2t^2/A,$$

得
$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 2v_0^2t/A,$$

$$v = v_0i + (2v_0^2t/A)j.$$

$$a_x = dv_x/dt = 0, \quad a_y = dv_y/dt = 2v_0^2/A,$$

$$a = (2v_0^2/A)j.$$

附-12 设 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 均为 t 的函数, 它们对 t 的导数分别为

$$a'_{11}, a'_{12}, a'_{21}, a'_{22}. \text{ 试证: } \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}.$$

证
$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{d}{dt} (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$

$$\begin{aligned}
 &= a'_{11}a_{22} + a_{11}a'_{22} - a'_{21}a_{12} - a_{21}a'_{12} \\
 &= (a'_{11}a_{22} - a'_{21}a_{12}) + (a_{11}a'_{22} - a_{21}a'_{12}) \\
 &= \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

附-13 (1) 设 $\int f(x)dx = F(x)$, 试证 $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax)$.

(2) 求不定积分 $\int \sin ax dx$ 和 $\int \cos ax dx$.

解 (1) 由题设, 得

$$F'(x) = f(x),$$

利用复合函数求导公式, 又可得

$$F'(ax) = f(ax)(ax)' = af(ax),$$

便有
$$\int af(ax)dx = F(ax),$$

即得
$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax).$$

(2) 据(1), 有

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C,$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C.$$

附-14 试求不定积分: $\int \sin^2 x dx$, $\int \sin^3 x dx$, $\int \sin^4 x dx$.

解 由 $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$, 结合题附-13(2)的解, 得

$$\begin{aligned}
 \int \sin^2 x dx &= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) + C \\
 &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.
 \end{aligned}$$

由 $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$, 结合题附-13(2)的解, 得

$$\begin{aligned}
 \int \sin^3 x dx &= \frac{3}{4} \int \sin x dx - \frac{1}{4} \int \sin 3x dx \\
 &= -\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{12} \cos 3x + C.
 \end{aligned}$$

由 $\sin^4 x = \sin^2 x(1 - \cos^2 x) = \sin^2 x - \frac{1}{4}\sin^2 2x$, 结合 $\int \sin^2 x dx$ 解和题附-13(2)的解, 得

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x dx &= \int \sin^2 x dx - \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx \\ &= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right) - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(2x) - \frac{1}{4}\sin 4x \right] + C \\ &= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C. \end{aligned}$$

附-15 计算抛物线 $y=x^2$ 从 $x=0$ 到 $x=1$ 的一段曲线与 x 轴所夹面积 S .

解
$$S = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_{x=1} - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{x=0} = \frac{1}{3}.$$

附-16 查阅数学手册中有关的不定积分公式, 计算抛物线 $y=x^2/2$ 从 $x=0$ 到 $x=1$ 的一段曲线长度 l .

解 由曲线长度公式

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = \int \sqrt{1 + x^2} dx.$$

在数学手册中可查出不定积分公式:

$$\int \sqrt{1 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + C,$$

代入后, 即得

$$l = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

附-17 设 $y = x_1 x_2 \sin x_1 x_2$, 求 y 的全微分. 再将 y 处理成复合函数, 即 $y = u \sin u$, $u = x_1 x_2$, 重新求 y 的全微分, 检查所得结果是否与前相同.

解 $y = x_1 x_2 \sin x_1 x_2$ 的全微分为

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 \\ &= x_2 (\sin x_1 x_2 + x_2 x_1 \cos x_1 x_2) dx_1 \\ &\quad + x_1 (\sin x_1 x_2 + x_1 x_2 \cos x_1 x_2) dx_2 \\ &= (\sin x_1 x_2 + x_1 x_2 \cos x_1 x_2) (x_2 dx_1 + x_1 dx_2). \end{aligned}$$

对复合函数 $y = u \sin u, u = x_1 x_2$ 求全微分:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 = x_2 dx_1 + x_1 dx_2,$$

$$\begin{aligned} dy &= y'_u du = (\sin u + u \cos u) du \\ &= (\sin x_1 x_2 + x_1 x_2 \cos x_1 x_2)(x_2 dx_1 + x_1 dx_2). \end{aligned}$$

以上可见,结果相同.

附-18 半径 R 、质量 m 的匀质圆盘,绕着过中心且与圆平面垂直的轴旋转,角速度为 ω ,试求圆盘动能 E_k .

解 将圆盘从中心向外分割成一系列内半径为 r 、外半径为 $r + dr$ 的无限窄圆环,圆环质量、运动速率、动能分别是

$$\left(\frac{m}{\pi R^2}\right) 2\pi r dr, \quad \omega r, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr\right) (\omega r)^2.$$

圆盘动能为

$$E_k = \int_0^R \frac{1}{2} \left(\frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr\right) (\omega r)^2 = \frac{1}{4} m R^2 \omega^2.$$

B 组

附-19 取火柴游戏.

放置一堆火柴,根数 $n \geq 1$. 两人交替从中拿取,每次至少取一根,至多取 a 根 ($a \geq 1$),取走最后一根者为输家,对方为赢家. 试问 n 是什么数时,开局先取者必能找到一种策略使自己成为赢家? n 是什么数时,开局后取者必能找到一种策略,使先取者为输家?

解 初态(开局的火柴根数) $n=1$,对应的是开局先取者必败(输)态,记作

$$n_1(\text{败}) = 1.$$

将开局先取者必败态依次记作 $n_1(\text{败}), n_2(\text{败}), \dots, n_k(\text{败})$,那么面对初态

$$n = n_k(\text{败}) + i, \quad i = 1, 2, \dots, a,$$

开局先取者可拿取 $i = 1, 2, \dots, a$ 根火柴,使后取者面对必败态 $n_k(\text{败})$,因此开局先取者必胜(赢)态的 n 为

$$n_k(\text{胜}) = n_k(\text{败}) + i, \quad i = 1, 2, \dots, a,$$

其中最大者为

$$n_k(\text{胜})_{\max} = n_k(\text{败}) + a.$$

开局先取者若面对初态

$$n = n_k(\text{胜})_{\max} + 1.$$

那么,无论他拿取 1 根、2 根…或 a 根火柴,余下的必为 $n_k(\text{胜})$,也就是使得后取者面对 $n_k(\text{胜})$. 只要后取者掌握这种递归关系,他必可使自己成为赢家,因此上述 n 为开局先取者必败态;即有

$$n_{k+1}(\text{败}) = n_k(\text{胜})_{\max} + 1.$$

将上述分析归纳如下:

$$n_{k+1}(\text{败}) = n_k(\text{胜})_{\max} + 1,$$

$$n_k(\text{胜}) = n_k(\text{败}) + i, \quad i = 1, 2, \dots, a,$$

$$n_1(\text{败}) = 1,$$

据此可得通解为

$$n_k(\text{败}) = 1 + (k-1)(a+1), \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$n_k(\text{胜}) = [1 + (k-1)(a+1)] + i, \quad i = 1, 2, \dots, a.$$

附-20 机器猫和玩具鼠.

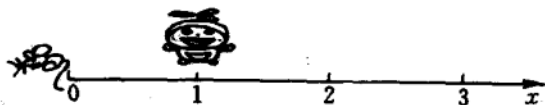


图 附-2

如图附-2所示,在 x 坐标轴的原点 O 处有一个不动的玩具鼠,在 $x=1$ 处有一个机器猫.机器猫在 x 轴上分别以 $\frac{1}{2}$ 的概率或朝着 O 点、或背离 O 点一步一步行走,步长恒为 $|\Delta x|=1$.规定猫到达 O 点“捉到”鼠,游戏结束,否则将继续进行下去.试求机器猫捉到玩具鼠的概率.

解 将所求概率记为 P .

猫第一步以 $\frac{1}{2}$ 概率左行捉到鼠,对 P 的贡献为 $\frac{1}{2}$.

猫第一步以 $\frac{1}{2}$ 概率右行,到达 $x=2$ 位置.为捉住鼠,猫首先必须左行到 $x=1$ 位置,这与开局时要求猫从 $x=1$ 位置左行到 $x=0$

位置捉到鼠的情况相同, 概率同构也为 P . 到达 $x=1$ 位置后, 游戏又回到初态, 猫左行到 $x=0$ 位置捉到鼠的概率仍为 P . 据此, 猫第一步到达 $x=2$ 位置, 接着也能捉到鼠, 对 P 的贡献为 $\frac{1}{2}PP$.

综上所述, 可得

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}PP,$$

即可解出

$$P = 1.$$

附-21 矢积逆运算.

对已给出的两个彼此垂直的矢量 B 和 C , 试求 A , 使得 $A \times B = C$.

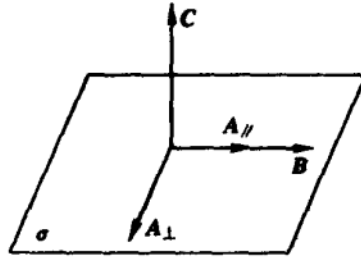


图 附-3

解 过 B 作垂直于 C 的平面 σ , 因 $A \perp C$, 故 A 必在 σ 平面上. 将 A 分解为

$$A = A_{\perp} + A_{//}, \quad A_{\perp} \perp B, \quad A_{//} \perp A_{\perp},$$

则有 $C = A \times B = A_{\perp} \times B + A_{//} \times B = A_{\perp} \times B,$

$$C = A_{\perp} B.$$

因此

$$A_{\perp}: \begin{cases} \text{方向: 如图附-3所示,} \\ \text{大小: } A_{\perp} = \frac{C}{B}. \end{cases}$$

$$A_{//}: \begin{cases} \text{方向: 或与 } B \text{ 同向、或与 } B \text{ 反向,} \\ \text{大小: 任意.} \end{cases}$$

即有 $A_{\perp} = \frac{B \times C}{B^2}, \quad A_{//} = \alpha B, \quad \alpha$ 为任意标量,

得 $A = \frac{B \times C}{B^2} + \alpha B, \quad \alpha$ 为任意标量.

需要指出, 虽然图附-3 是按右手系画出的, 但上述解对右手系

或左手系都成立.

附-22 安培力.

(1) 匀强磁场中一个任意形状的单连通闭合电流线圈,若其中电流处处相同,试证它所受的安培力为零.

(2) 匀强磁场中,试证相同的电流从空间任意一点 a 经过不同的曲线(包括直线)段到达空间另一点 b ,所受的安培力相同.

(3) 匀强磁场中,日字形电阻网络如图附-4 所示,电流 I 从 a 端流入, d 端流出,网络内形成电流分布.试证此网络电流所受安培力,等于电流 I 从 a 端经过直线段到达 d 端时所受安培力.

证 匀强磁场磁感应强度记作 B , (1)和(2)问中电流同记为 I ,安培力同记为 F .

(1) 将电流线圈的线元矢量记作 Δl ,则有

$$F = \sum I \Delta l \times B,$$

常量 I 和常矢量 B 可移到求和号外,得

$$F = I \left(\sum \Delta l \right) \times B,$$

对单连通闭合线圈必有

$$\sum \Delta l = 0,$$

即得

$$F = 0.$$

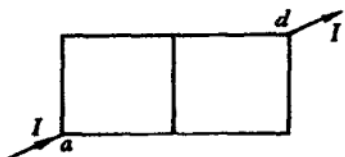


图 附-4

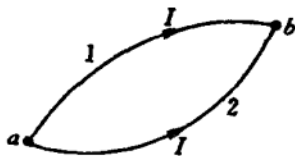


图 附-5

(2) 如图附-5 所示,自 a 到 b 任选两条电流曲线 1 和 2,则有

$$F_1 = \sum_1 I \Delta l \times B, \quad F_2 = \sum_2 I \Delta l \times B.$$

将 2 中电流从 b 到 a 回流,所受安培力便是

$$F'_2 = -F_2.$$

据(1)的结论,有 $F_1 + F'_2 = 0$,即得

$$F_1 = F_2,$$

由于曲线 1 和 2 是任选, 具有普遍性, 本题获证.

(3) 网络电流分布如图附-6 所示, 它等效为图附-7 中两个网络电流的叠加. 因此图附-6 网络电流所受的安培力 F , 就等于图附-7 两个网络电流所受安培力之和. 图附-7 中小网络电流, 即闭合回路 $cdef$ 电流所受安培力为零, 图附-7 中大网络电流所受安培力, 则等于该网络中电流 $I=I_1+I_2$ 的虚直线 ad 所受的安培力. 据此, F 就等于电流 I 从 a 端经过直线段到达 d 端时所受安培力.

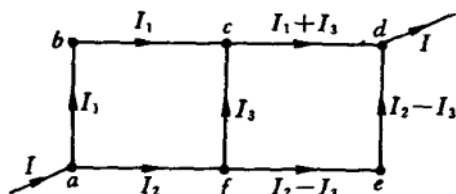


图 附-6

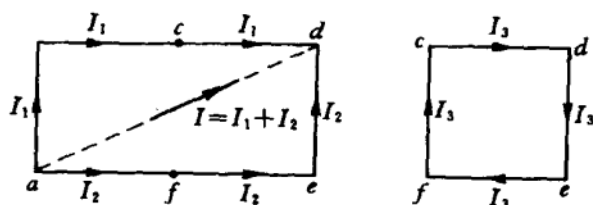


图 附-7

附-23 k 维正方体.

3 维正方体有 8 个顶点, 12 条棱, 6 个面. 若棱长为 a , 它的体积 $V_3=a^3$, 面积 $S_3=6a^2$.

为了一致, 可将 2 维空间的正方形规范地称作 2 维空间的正方“体”, 原正方形的边成为这个正方“体”的“面”, “面”与棱重合. 2 维空间正方“体”有 4 个顶点, 4 条棱, 4 个“面”. 若棱长为 a , 它的“体积” $V_2=a^2$, “面积” $S_2=4a$.

同样, 1 维空间的一条线段可称作 1 维空间的正方“体”, 则“体”与棱重合, 原线段的顶点成为这个正方“体”的“面”, 即“面”与顶点重合. 1 维空间正方“体”有 2 个顶点, 1 条棱, 2 个“面”. 若棱长为 a , 它的“体积” $V_1=a$, “面积” $S_1=2$.

(1) 从度量的角度分析, 为什么数学上给出 $S_1=2$?

(2) 对 k 维空间正方体, 用递归方法求出它的顶点数、棱数和面数; 若棱长为 a , 求它的体积 V_k 和面积 S_k .

解 (1) 1 维空间有两个“面”, 每个“面”都是 1 个点.

为了度量任意直线段, 首先选定某直线段, 规定其度量值为 1, 继而可采用分割的方法给出任意直线段的度量值, 称之为长度. 点的度量也应如此进行, 考虑到点的不可分割性, 或者说点结构间的全同性, 若某个点的度量值规定为 1, 那么所有其他点的度量值均为 1. 据此, 应有 $S_1=2$.

(2) $k \geq 2$ 维空间正方体, 由 $k-1$ 维正方体沿着新增的第 k 对垂直方向延展而成. 将顶点数、棱数、面数分别记为 N_k, L_k, F_k , 则有递归(递推)关系:

$$\begin{aligned} N_k &= 2N_{k-1}, & N_1 &= 2, \\ L_k &= 2L_{k-1} + N_{k-1}, & L_1 &= 1, \\ F_k &= F_{k-1} + 2, & F_1 &= 2, \end{aligned}$$

即得

$$\begin{aligned} N_k &= 2^k, & k &= 1, 2, \dots, \\ L_k &= 2(2L_{k-2} + 2^{k-2}) + 2^{k-1} \\ &= 2^{k-1}L_1 + (k-1)2^{k-1} = k2^{k-1}, & k &= 1, 2, \dots, \\ F_k &= 2k, & k &= 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

k 维空间正方体的体积和面积相应地为

$$\begin{aligned} V_k &= a^k, & k &= 1, 2, \dots, \\ S_k &= F_k a^{k-1} = 2ka^{k-1}, & k &= 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

附-24 加速度的分解计算.

质点 p 沿半径为 R 的圆周逆时针方向运动, 转过的圆心角对时间的变化率称为角速度, 记作 ω , 角速度对时间的变化率称为角加速度, 记作 β . 任一时刻质点的加速度 a 可分解为沿圆运动切线方向的分量 $a_{\text{切}}$ 和指向圆心的分量 $a_{\text{心}}$, 试求 $a_{\text{切}}$ 与 $a_{\text{心}}$.

解 以圆心为原点, 在圆平面上建立 Oxy 坐标系. 任一时刻质点 P 的矢径 r 与 x 轴夹角记作 θ , 则有

$$\omega = d\theta/dt, \quad \beta = d\omega/dt.$$

r 可分解为

$$r = xi + yj,$$

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta,$$

P 的速度 v 可分解为

$$v = v_x i + v_y j.$$

v_x 的正方向沿 x 轴方向, 考虑到 P 的真实运动方向, 在第 I 象限中, v_x 实与 x 轴反向, 为在图附-8 中能 与真实感觉一致, 故沿 x 轴负方向画出, 于是在数学上应标成 $-v_x$. 继而有

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (-R \sin \theta) \frac{d\theta}{dt} = -\omega R \sin \theta,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = (R \cos \theta) \frac{d\theta}{dt} = \omega R \cos \theta,$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega R,$$

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{-v_x} = \cot \theta \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta,$$

$$v: \begin{cases} \text{方向: 圆切线方向,} \\ \text{大小: } v = \omega R. \end{cases}$$

关于 P 的加速度 a , 参照图附-9, 有

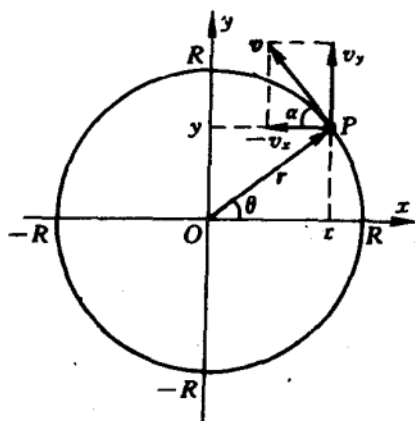


图 附-8

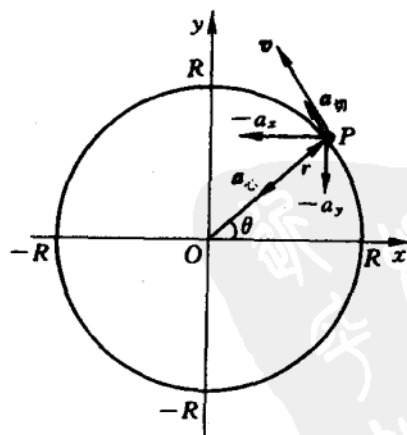


图 附-9

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j}, \\ a_x &= \frac{dv_x}{dt} = -\frac{d\omega}{dt} R \sin \theta - \omega(\omega R \cos \theta) \\ &= -\beta R \sin \theta - \omega^2 R \cos \theta, \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R \cos \theta + \omega(-\omega R \sin \theta) \\ &= \beta R \cos \theta - \omega^2 R \sin \theta; \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}_{\text{切}} + \boldsymbol{a}_{\text{心}}, \\ \boldsymbol{a}_{\text{切}} &= -a_x \sin \theta - (-a_y \cos \theta) = \beta R (\text{带正负号}), \\ \boldsymbol{a}_{\text{心}} &= -a_x \cos \theta + (-a_y \sin \theta) = \omega^2 R. \end{aligned}$$

即得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{\text{切}}: &\begin{cases} \text{方向: } \beta > 0 \text{ 时与 } \boldsymbol{v} \text{ 同向, } \beta < 0 \text{ 时与 } \boldsymbol{v} \text{ 反向,} \\ \text{带正负号的大小: } a_{\text{切}} = \beta R, \end{cases} \\ \boldsymbol{a}_{\text{心}}: &\begin{cases} \text{方向: 指向圆心,} \\ \text{大小: } a_{\text{心}} = \omega^2 R. \end{cases} \end{aligned}$$

附-25 加速度的整体计算.

水平面上有一固定圆环,细绳绕在环的外侧,一端连接小球 P . 让 P 在此水平面上运动,使环上的绳不断打开. 设打开的绳始终处于拉直状态, P 的速度 \boldsymbol{v} 大小恒定,且总与绳长方向垂直. 如图附-10 所示. 当打开的绳段长为 l 时,试求 P 的加速度 \boldsymbol{a} .

解 参照图附-11,在 t 到 $t+dt$ 时间内,打开的小段绳长 $d\boldsymbol{l}$ 对应圆环的圆心角记为 $d\phi$, P 的速度由 $\boldsymbol{v}(t)$ 变为 $\boldsymbol{v}(t+dt)$,速度增量

$$d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t+dt) - \boldsymbol{v}(t).$$

考虑到速度矢量三角形是顶角 $d\phi$ 为无穷小的等腰三角形,底角趋于直角,故有

$$d\boldsymbol{v}: \begin{cases} \text{方向: 与 } \boldsymbol{v}(t) \text{ 垂直,即沿绳指向打开点 } Q, \\ \text{大小: } d\boldsymbol{v} = v d\phi. \end{cases}$$

dt 时间内已打开的绳段转过的角度也是 $d\phi$,转动角速度

$$\omega = d\phi/dt.$$

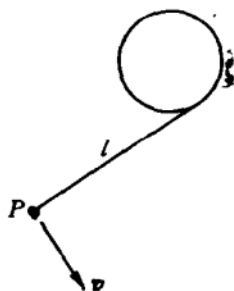


图 附-10

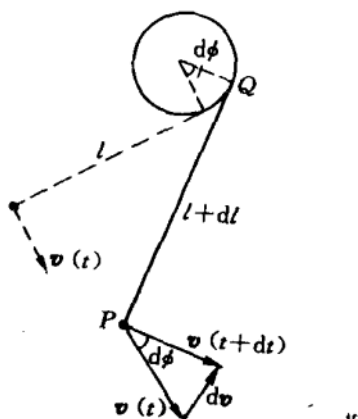


图 附-11

$t+dt$ 时刻, P 的速度即为 P 绕 Q 旋转速度, 即有

$$v = \omega(l + dl) = \omega l,$$

得
$$d\phi = \frac{v}{l} dt, \quad dv = \frac{v^2}{l} dt.$$

P 的加速度便是

$$a = \frac{dv}{dt} : \begin{cases} \text{方向: 沿绳指向打开点 } Q, \\ \text{大小: } a = v^2/l. \end{cases}$$

附-26 k 维球.

3 维空间球的表面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, R 为半径, 面积 $S_3 = 4\pi R^2$, 体积 $V_3 = \frac{4}{3}\pi R^3$. 圆是 2 维空间“球”, 圆周是它的“球面”, 方程为 $x^2 + y^2 = R^2$, R 为半径, “面积”(即圆周长) $S_2 = 2\pi R$, “体积”(即圆面积) $V_2 = \pi R^2$. 直线段是 1 维空间“球”, 两个端点是它的“面”, 方程为 $x^2 = R^2$, R 为半径, “面积” $S_1 = 2$ (参见题附-23), “体积”(即线段长度) $V_1 = 2R$.

k 维空间球的球面方程可表述为 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 = R^2$, R 为半径, 面积记为 $S_k(R)$, 体积记为 $V_k(R)$. 试通过建立 $V_k(R)$ 与 $S_k(R)$ 的关系、 $S_k(R)$ 与 $S_{k-1}(R)$ 间的递归关系、 $V_k(R)$ 与 $V_{k-1}(R)$ 间的递归关系, 求出 $S_k(R)$ 和 $V_k(R)$ 表达式.

解 先找出 $V_k(R)$ 与 $S_k(R)$ 关系:

从圆心出发, R 圆可分解成一系列底边为无穷短圆弧的小三角

形,其中一个已在图附-12中示出,它的面积是 $\frac{1}{2}Rdl$, dl 为底边长.圆面积(按题文为 V_2)等于各小三角形面积之和,圆周长(按题文为 S_2)等于各小三角形底边长之和,即有

$$V_2(R) = \frac{1}{2}RS_2(R).$$

三角形是2维空间锥体.

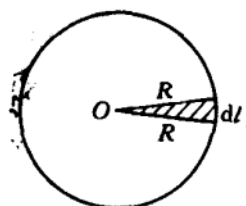


图 附-12

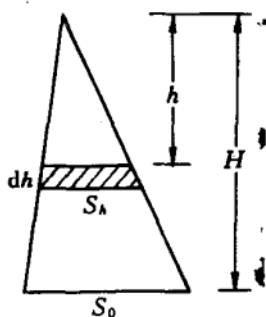


图 附-13

若将图附-12中的圆设想成3维空间球,原小三角形便成3维空间小锥体.小锥体体积等于 $\frac{1}{3}RdS$, dS 是底面积.求和可得3维球体积,等于 $\frac{1}{3}R$ 乘以球面积,即有

$$V_3(R) = \frac{1}{3}RS_3(R).$$

以此类推,从球心出发,将半径 R 的 k 维空间球分解成一系列 k 维空间小锥体.若小锥体体积 $dV_k(\text{锥})$ 与底面积 $dS_k(\text{锥})$ 间的关系为

$$dV_k(\text{锥}) = \frac{1}{k}RdS_k(\text{锥}),$$

则 k 维球体积 $V_k(R)$ 与面积 $S_k(R)$ 间的关系为

$$V_k(R) = \frac{1}{k}RS_k(R). \quad \textcircled{1}$$

为证明关于小锥体的前式成立,在 k 维空间中取高为 H ,底为 $(k-1)$ 维体,底面积记为 S_0 的一般 k 维锥体.如图附-13所示,将锥体平行地分解成一系列厚为 dh ,底面积记作 S_k 的 k 维体,原锥体体积便是

$$V_k(\text{锥}) = \int_0^H S_h dh.$$

S_h, S_0 各与自身线度的 $(k-1)$ 次方成正比, 又因 S_h 与 S_0 相似, 故 S_h 的线度与 S_0 的线度之比为 $h:H$, 便有

$$S_h : S_0 = \left(\frac{h}{H}\right)^{k-1},$$

即得
$$V_k(\text{锥}) = \int_0^H \left(\frac{h}{H}\right)^{k-1} S_0 dh = \frac{1}{k} HS_0.$$

前述小锥体为 $H=R, S_0=dS_k$ 特例, 故相应关系式成立.

再找 $S_k(R)$ 与 $S_{k-1}(R)$ 间, 及 $V_k(R)$ 与 $V_{k-1}(R)$ 间的递归关系.

先取 $k=3$ 作具体分析. 3 维球如

图附-14 所示, 将它分解成一系列厚为 $|dz|$, 圆半径记为 $r=R \sin \phi$ 的薄圆板. 因 $z=R \cos \phi$, 即有

$$|dz| = R \sin \phi d\phi,$$

薄圆板的圆周长和圆面积是半径 r 的 2 维球的面积 $S_2(r)$ 和体积 $V_2(r)$, 薄圆板侧面积 $dS_{\text{板}}$ 和体积 $dV_{\text{板}}$ 各为

$$dS_{\text{板}} = S_2(r)Rd\phi = S_2(R \sin \phi)Rd\phi,$$

$$dV_{\text{板}} = V_2(r)|dz| = V_2(R \sin \phi)R \sin \phi d\phi.$$

积分得 3 维球面积和体积:

$$S_3(R) = \int_0^\pi dS_{\text{板}} = \int_0^\pi S_2(R \sin \phi)Rd\phi,$$

$$V_3(R) = \int_0^\pi dV_{\text{板}} = \int_0^\pi V_2(R \sin \phi)R \sin \phi d\phi.$$

k 维空间球仍可用图附-14 中的圆代表, 同样将它分解为一系列厚为 $|dz|$ 的 k 维薄“板”, 图中用两条平行直线间的区域表示. 每一直线段对应半径 $r=R \sin \phi$ 的 $k-1$ 维球体, 它的面积和体积分别是 $S_{k-1}(r)$ 和 $V_{k-1}(r)$. 薄“板”侧面积和体积分别为

$$dS_{\text{板}} = S_{k-1}(r)Rd\phi = S_{k-1}(R \sin \phi)Rd\phi,$$

$$dV_{\text{板}} = V_{k-1}(r)|dz| = V_{k-1}(R \sin \phi)R \sin \phi d\phi.$$

积分得 k 维球面积和体积:

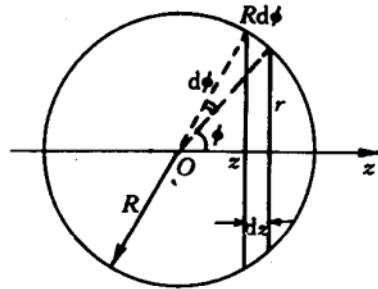


图 附-14

$$S_k(R) = \int_0^\pi dS_{\text{板}} = \int_0^\pi S_{k-1}(R \sin \phi) R d\phi,$$

$$V_k(R) = \int_0^\pi dV_{\text{板}} = \int_0^\pi V_{k-1}(R \sin \phi) R \sin \phi d\phi.$$

k 维球面积和体积必定分别与 R^{k-1} 和 R^k 成正比, 可表达成

$$S_k(R) = A_k R^{k-1}, \quad V_k(R) = B_k R^k,$$

得

$$S_k(R \sin \phi) = A_k R^{k-1} \sin^{k-1} \phi = S_k(R) \sin^{k-1} \phi,$$

$$V_k(R \sin \phi) = B_k R^k \sin^k \phi = V_k(R) \sin^k \phi.$$

结合前述公式, 便有

$$S_k(R) = S_{k-1}(R) R \int_0^\pi \sin^{k-2} \phi d\phi, \quad (2)$$

$$V_k(R) = V_{k-1}(R) R \int_0^\pi \sin^k \phi d\phi, \quad (3)$$

这就是 k 维球与 $k-1$ 维球之间的递归关系.

关于 $S_k(R)$ 和 $V_k(R)$ 表达式:

由③式可得

$$V_{k-2}(R) = V_{k-3}(R) R \int_0^\pi \sin^{k-2} \phi d\phi,$$

与②式联立, 便有

$$S_k(R) = S_{k-1}(R) \frac{V_{k-2}(R)}{V_{k-3}(R)},$$

结合①式, 得

$$S_k(R) = \frac{S_{k-1}(R) S_{k-2}(R) (k-3)}{S_{k-3}(R) (k-2)}. \quad (4)$$

取 $k=2N+1$, 由④式得

$$\begin{aligned} \frac{S_{2N+1}(R)}{S_{2N-1}(R)} &= \frac{2N-2}{2N-1} \cdot \frac{S_{2N}(R)}{S_{2N-2}(R)} \\ &= \frac{2N-2}{2N-1} \cdot \frac{2N-3}{2N-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{S_3(R)}{S_1(R)}, \end{aligned}$$

即

$$S_{2N+1}(R) = \frac{1}{2N-1} \cdot \frac{S_3(R)}{S_1(R)} S_{2N-1}(R),$$

$$\text{当 } N = 1, \quad S_3(R) = \frac{1}{1} \cdot \frac{S_3(R)}{S_1(R)} \cdot S_1(R),$$

可得

$$S_{2N+1}(R) = \frac{1}{(2N-1)(2N-3) \cdots \cdot 1} \left[\frac{S_3(R)}{S_1(R)} \right]^N S_1(R),$$

$$\text{即为} \quad S_{2N+1}(R) = \frac{2^N(N!)}{(2N)!} \left[\frac{S_3(R)}{S_1(R)} \right]^N S_1(R). \quad (5)$$

再将④式中 k 取为 $2N+2$, 写出

$$\frac{S_{2N+2}(R)}{S_{2N}(R)} = \frac{2N-1}{2N} \cdot \frac{S_{2N+1}(R)}{S_{2N-1}(R)}$$

后, 可推得

$$S_{2N+2}(R) = \frac{1}{2^N \cdot (N!)} \cdot \left[\frac{S_3(R)}{S_1(R)} \right]^N S_2(R), \quad (6)$$

将⑤⑥①结合, 可得

$$V_{2N+1}(R) = \frac{2^N(N!)}{(2N+1)!} R \left[\frac{S_3(R)}{S_1(R)} \right]^N S_1(R), \quad (7)$$

$$V_{2N+2}(R) = \frac{1}{2^{N+1}[(N+1)!]} R \left[\frac{S_3(R)}{S_1(R)} \right]^N S_2(R). \quad (8)$$

最后, 将

$$S_1(R) = 2, \quad S_2(R) = 2\pi R, \quad S_3(R) = 4\pi R^2$$

代入⑤⑥⑦⑧式, 即得

$$S_{2N+2}(R) = \frac{2}{N!} \pi^{N+1} R^{2N+1}, \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

$$V_{2N+2}(R) = \frac{1}{(N+1)!} \pi^{N+1} R^{2N+2}, \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

$$S_{2N+1}(R) = \frac{2^{2N+1}(N!)}{(2N)!} \pi^N R^{2N}, \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

$$V_{2N+1}(R) = \frac{2^{2N+1}(N!)}{(2N+1)!} \pi^N R^{2N+1}, \quad N = 0, 1, 2, \dots.$$

顺便一提, 由导得的 $S_k(R)$ 和 $V_k(R)$ 表达式, 也可获得定积分

$$\int_0^\pi \sin^k \phi d\phi, \quad k = 1, 2, \dots$$

表达式, 对 $k=2, 3, 4$, 可借用附-14 解答进行验证, 此处从略.